Les théorèmes d'incomplétude

Renaud Hoyoux

6 Septembre 2011
Université de Liège
Faculté des Sciences

Département des sciences mathématiques

Un petit peu d'histoire.

Un petit peu d'histoire.

- La Grèce Antique : berceau du paradigme mathématique.

Un petit peu d'histoire.

- La Grèce Antique : berceau du paradigme mathématique.
- Paradoxe de Russel.

Un petit peu d'histoire.

- La Grèce Antique : berceau du paradigme mathématique.
- Paradoxe de Russel.
- Les mathématiques sont-elles consistantes ?

Un petit peu d'histoire.

- La Grèce Antique : berceau du paradigme mathématique.
- Paradoxe de Russel.
- Les mathématiques sont-elles consistantes ?
- « **Wir müssen wissen, wir werden wissen** ».

1. **Premier théorème d'incomplétude de Gödel**
2. Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel
3. L'Hydre de Lerne
4. Combien
   - Topologie
   - Nombres Ω de Chaitin

Qu'est ce que l'arithmétique ?

Qu'est ce que l'arithmétique ?

Définition : Arithmétique de Peano $\mathcal{P}$

- Un langage $\mathcal{L}_0 = \{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}, \simeq\}$.

Qu'est ce que l'arithmétique ?

Définition : Arithmétique de Peano $\mathcal{P}$

- Un langage $\mathcal{L}_0 = \{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}, \underline{\simeq}\}$.
- Sept axiomes.

Qu'est ce que l'arithmétique ?

Définition : Arithmétique de Peano $\mathcal{P}$

- Un langage $\mathcal{L}_0 = \{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}, \simeq\}$.
- Sept axiomes.
- Le schéma d'induction.

Qu'est ce que l'arithmétique ?

Définition : Arithmétique de Peano $\mathcal{P}$

- Un langage $\mathcal{L}_0 = \{\underline{0}, \underline{S}, \underline{+}, \underline{\times}, \simeq\}$.
- Sept axiomes.
- Le schéma d'induction.

Définition : Robinson

L'arithmétique de Robinson $\mathcal{P}_0$ est Peano sans le schéma d'induction.

Arithmétisation de la syntaxe

Arithmétisation de la syntaxe

Définition

Nous définissons par induction sur le terme t un entier noté $\#t$ appellé **le numéro de Gödel du terme t**, par les conditions suivantes :

Arithmétisation de la syntaxe

Définition

Nous définissons par induction sur le terme t un entier noté $\#t$ appellé **le numéro de Gödel du terme t**, par les conditions suivantes :

- Si $t = c_m$, alors $\#t = \alpha_3(m, 0, 0)$;

Arithmétisation de la syntaxe

Définition

Nous définissons par induction sur le terme t un entier noté $\#t$ appellé **le numéro de Gödel du terme t**, par les conditions suivantes :

- Si $t = c_m$, alors $\#t = \alpha_3(m, 0, 0)$;
- Si $t = v_n$, alors $\#t = \alpha_3(n, 0, 1)$;

Arithmétisation de la syntaxe

Définition

Nous définissons par induction sur le terme t un entier noté $\#t$ appellé **le numéro de Gödel du terme t**, par les conditions suivantes :

- Si $t = c_m$, alors $\#t = \alpha_3(m, 0, 0)$;
- Si $t = v_n$, alors $\#t = \alpha_3(n, 0, 1)$;
- Si $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, alors
  $\#t = \alpha_3(\Omega(\#t_1, \#t_2, \ldots, \#t_n), \#f, 2)$.

Proposition

Soit T une théorie récursive ; alors l'ensemble $\mathrm{Dem(T)} = \{(\#F, \#\#d)$, où d est une démonstration de F dans $T\}$ est primitif récursif.

Proposition

Soit T une théorie récursive ; alors l'ensemble Dem(T) $= \{(\#F, \#\#d)$, où d est une démonstration de F dans $T\}$ est primitif récursif.

Définition

T est **décidable** si l'ensemble des numéros de Gödel des théorèmes de T est récursif. Sinon, on dit que T est **indécidable**.

Théorème

Si T est une théorie consistante contenant $\mathcal{P}_0$; alors T est indécidable

Théorème

Si T est une théorie consistante contenant $\mathcal{P}_0$; alors T est indécidable

Démonstration par l'absurde.

On exhibe une formule G telle que

Théorème

Si T est une théorie consistante contenant $\mathcal{P}_0$; alors T est indécidable

Démonstration par l'absurde.

On exhibe une formule G telle que
Si $T \vdash G[\#(G[v_0])]$ alors $T \nvdash G[\#(G[v_0])]$.
Si $T \vdash \neg G[\#(G[v_0])]$ alors $T \vdash G[\#(G[v_0])]$. $\square$

Théorème

Si T est une théorie consistante contenant $\mathcal{P}_0$; alors T est indécidable

Démonstration par l'absurde.

On exhibe une formule G telle que
Si $T \vdash G[\#(G[v_0])]$ alors $T \nvdash G[\#(G[v_0])]$.
Si $T \vdash \neg G[\#(G[v_0])]$ alors $T \vdash G[\#(G[v_0])]$. $\square$

Corollaire

Si T est une théorie complète et récursive alors elle est décidable

Premier théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie récursive et consistante contenant $\mathcal{P}_0$, alors T n'est pas complète.

1. Premier théorème d'incomplétude de Gödel
2. **Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel**
3. L'Hydre de Lerne
4. Combien
    - Topologie
    - Nombres Ω de Chaitin

Soit $\mathcal{W}_T[\#F]$ la formule $\exists v_1 \mathfrak{Dem}_T[\#F, v_1]$.

Soit $\mathcal{W}_T[\#F]$ la formule $\exists v_1 \mathfrak{Dem}_T[\#F, v_1]$.
Internalisation de la logique.

Soit $\mathcal{W}_T[\#F]$ la formule $\exists v_1 \mathfrak{Dem}_T[\#F, v_1]$.
Internalisation de la logique.

Exemples

$\mathcal{P} \vdash \neg Cons(T; \#F) \Leftrightarrow \mathcal{W}_T[\#\neg F]$

Theorem

Soit T une théorie récursive consistante dans un langage fini $\mathcal{L}(T)$.
Alors il existe un système de formules

$$\mathcal{H} =< H_U, \{H_r\}_{r\in Rel}, \{H_f\}_{f\in Fonc}, \{H_c\}_{c\in C} >$$

telles que pour tout modèle $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{P}$ satisfaisant $Cons(T)$, $\mathcal{H}$ représente un modèle $\mathbb{U}$ de T

Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel

Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie consistante, récursive et contenant $\mathcal{P}$. Alors T ne démontre pas $Cons(T)$.

Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie consistante, récursive et contenant $\mathcal{P}$. Alors T ne démontre pas $Cons(T)$.

Démonstration.

Internalisation du premier théorème.

Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie consistante, récursive et contenant $\mathcal{P}$. Alors T ne démontre pas $Cons(T)$.

Démonstration.

Internalisation du premier théorème.
On a $T \nvdash \neg\varepsilon[\underline{a}]$.

Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel

Soit T une théorie consistante, récursive et contenant $\mathcal{P}$. Alors T ne démontre pas $Cons(T)$.

Démonstration.

Internalisation du premier théorème.
On a $T \nvdash \neg\varepsilon[\underline{a}]$.
De plus, $T \vdash Cons(T) \Rightarrow \neg\varepsilon[\underline{a}]$.

$\square$

Corollaire

Corollaire

Si $0 = 1$ est indémontrable dans T alors "$0 = 1$ est indémontrable dans T" est indémontrable dans T.

1. Premier théorème d'incomplétude de Gödel
2. Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel
3. **L'Hydre de Lerne**
4. Combien
    - Topologie
    - Nombres Ω de Chaitin

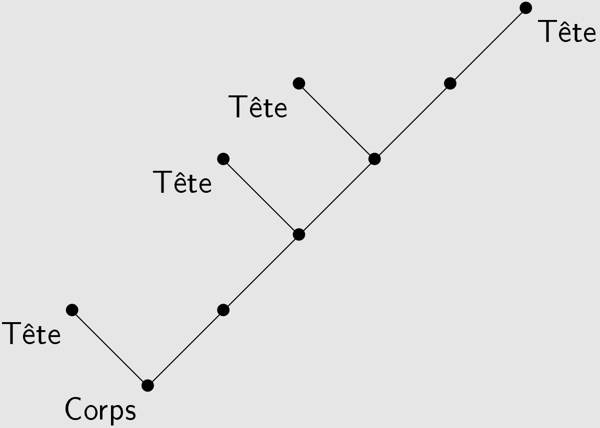
Héraclès contre l'Hydre.

Definition

Une **hydre** est un arbre fini.

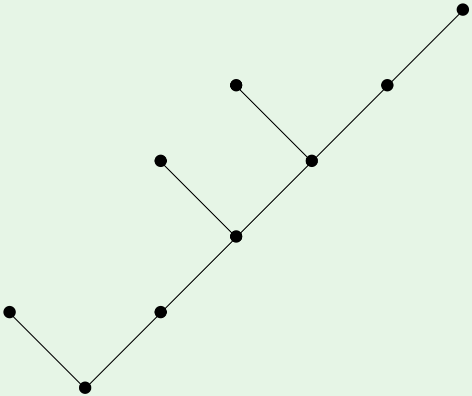
Definition

Une **hydre** est un arbre fini.

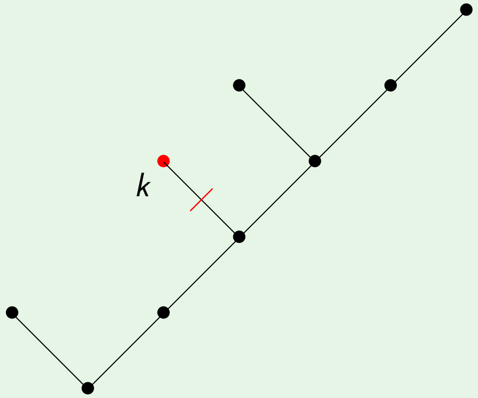


Exemple de reproduction

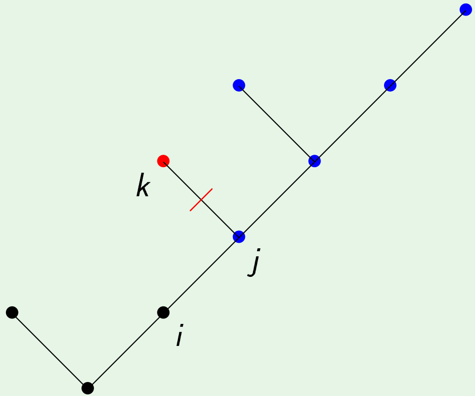
Exemple de reproduction



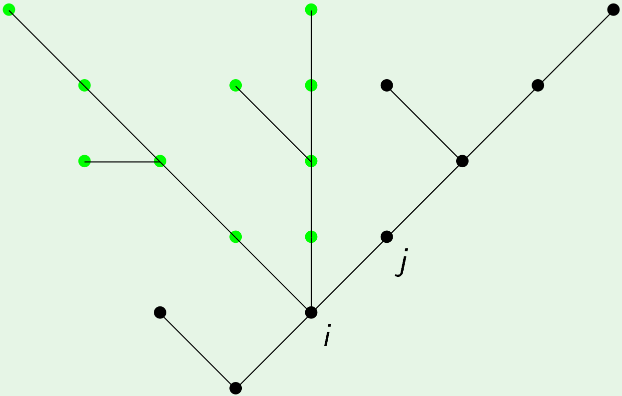
Exemple de reproduction



Exemple de reproduction



Exemple de reproduction - suite



Héraclès a-t-il une chance de vaincre l'Hydre ?

Héraclès a-t-il une chance de vaincre l'Hydre ?

Theorem

Toute stratégie est une stratégie gagnante

Héraclès a-t-il une chance de vaincre l'Hydre ?

Theorem

Toute stratégie est une stratégie gagnante (pour Héraclès).

Toute Hydre peut être associée à un ordinal.

Toute Hydre peut être associée à un ordinal.

Théorème

On a que pour toute stratégie $\mathcal{S}$, toute hydre et tout $n \in \mathbb{N}$,

L'ordinal de l'hydre décroit strictement.

Theorem

L'assertion "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé indémontrable dans $\mathcal{P}$.

Theorem

L'assertion "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé indémontrable dans $\mathcal{P}$.

Par l'absurde, "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé démontrable.

Theorem

L'assertion "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé indémontrable dans $\mathcal{P}$.

Par l'absurde, "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé démontrable.
Il existe une stratégie récursive τ telle que "La stratégie τ est gagnante" est indémontrable dans $\mathcal{P}$.

Theorem

L'assertion "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé indémontrable dans $\mathcal{P}$.

Par l'absurde, "Toute stratégie récursive est une stratégie gagnante" est un énoncé démontrable.
Il existe une stratégie récursive τ telle que "La stratégie τ est gagnante" est indémontrable dans $\mathcal{P}$.
Stratégie du plus court chemin.

1. Premier théorème d'incomplétude de Gödel
2. Deuxième théorème d'incomplétude de Gödel
3. L'Hydre de Lerne
4. **Combien**
    - Topologie
    - Nombres Ω de Chaitin

Définition

Pour tout ensemble $A \subset X^*$ non récursivement énumérable et définissable dans T, on pose

$$I(A) = \{u | u \in A,\ \ T \nvdash "u \in A"\}.$$

Définition

- Une topologie τ satisfait la **condition de Calude** pour une relation d'équivalence $\equiv$ sur X^* si pour tout ouvert non vide $\mathcal{O}$, l'ensemble $\{y | y \in X^*, \mathcal{O} \cap [y]_\equiv = \emptyset\}$ est fini.

Définition

- Une topologie τ satisfait la **condition de Calude** pour une relation d'équivalence $\equiv$ sur X^* si pour tout ouvert non vide $\mathcal{O}$, l'ensemble $\{y | y \in X^*, \mathcal{O} \cap [y]_\equiv = \emptyset\}$ est fini.

Théorème

Soit $\equiv$ une relation d'équivalence récursive sur X^* et soit $A \subset X^*$ un ensemble qui est définissable dans T, union de classes d'équivalence de $\equiv$ et non récursivement énumérable. Alors l'ensemble $I(A)$ est dense pour toute topologie τ sur X^* qui satisfait la condition de Calude pour $\equiv$.

Les nombres Ω.

Théorème d'incomplétude de Chaitin

Soit une théorie T telle que $Th(T)$ est récursivement énumérable. Si chaque assertion de la forme

$$\text{"le n}^{\text{e}}\text{ bit de } \Omega_U \text{ est 0"},$$

$$\text{"le n}^{\text{e}}\text{ bit de } \Omega_U \text{ est 1"},$$

peut être représentée dans T alors T nous permet de déterminer les valeurs d'au plus un nombre fini de bits de Ω_U

Encore mieux ?

Soit $P(n)$ l'énoncé « Le n^e bit de Ω est égal à 0. »

Encore mieux ?

Soit $P(n)$ l'énoncé « Le n^e bit de Ω est égal à 0. »

Théorème

La suite $(P(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'énoncés indémontrables.

Merci pour votre attention.