

Rapport VF-28

ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES POUVANT ETRE
INCOMPRESSIBLES A L'AIDE D'UN ELEMENT DE TORE
TRIANGULAIRE

J.F. DEBONGNIE

Juin 1975

()

)

INTRODUCTION

Le présent rapport fait suite à un rapport antérieur traitant des structures incompressibles en statique [1] . Son objet essentiel est de présenter la construction de la matrice des masses de l'élément de tore triangulaire basé sur la formulation de HERRMANN. Les hypothèses et les équations sont décrites dans le rapport cité et nous n'y revenons pas.

La condensation des degrés de liberté de pression est le problème pratique le plus délicat pour l'utilisateur. Dans la plupart des applications statiques, on peut ne retenir que les pressions pour la résolution, ce qui résout le problème : en dynamique, par contre, il est nécessaire de retenir un certain nombre de déplacements pour représenter correctement l'énergie cinétique. Dès lors, le nombre de degrés de liberté de pression devient rapidement une entrave intolérable. C'est pourquoi le premier chapitre est consacré à l'étude détaillée de la condensation des pressions.

Le second chapitre présente rapidement la construction de la matrice des masses, qui ne diffère d'ailleurs pas de celle d'un élément cinématiquement admissible.

Ensuite , on présente un certain nombre d'exemples destinés à vérifier le fonctionnement correct du programme. Dans un de ceux-ci, on montre en détail comment condenser les pressions dans le cas incompressible.

Une autre manière d'aborder les structure incompressibles consiste à utiliser des éléments cinématiquement admissibles, avec des valeurs du coefficient de POISSON peu différentes de 0,5, dans l'espoir que les résultats seront eux aussi très proches des résultats exacts. Pour certains problèmes, cette technique a été mise en échec. Dans le chapitre 4, on démontre que le modèle doit respecter certaines conditions pour pouvoir converger vers la solution incompressible. L'analyse détaillée d'un exemple semble confirmer que ces conditions sont les vraies responsables des difficultés rencontrées précédemment.

Chapitre 1. Condensation des pressions

1. Condensation des pressions dans le cas incompressible

Dans le cas incompressible, la pression n'a pas de flexibilité propre. Elle est couplée aux déplacements par le terme

$$\int_V p D_i u_i dV$$

Montrons d'abord que si le flux des déplacements est nul, le terme constant de pression ne travaille pas. On a en effet

$$\int_V p D_i u_i dV = \int_S p n_i u_i dS - \int_V u_i D_i p dV.$$

L'intégrale de volume du second membre est nulle, puisque $D_i p = 0$ par hypothèse. Dans ces conditions, l'intégrale de surface s'annule si le flux

$$\phi = \int_S n_i u_i dS = 0$$

Cette propriété entraîne qu'il est impossible de condenser le terme constant de pression en même temps qu'un mode sans flux. En particulier, on ne peut condenser le terme constant de pression d'un élément en même temps qu'un mode nul sur toute la frontière.

Ce problème ne se pose pas pour les modes linéaires de pression, car pour $p = x$,

$$\int_V p D_i u_i dV = \int_S p n_i u_i dS - \int_V u_x dV$$

On peut donc condenser les modes linéaires de pression avec des modes de déplacements nuls sur la frontière à condition que ces déplacements aient une moyenne non nulle.

Lorsqu'on assemble plusieurs éléments, le problème change de physionomie :

a) lors de l'assemblage de deux éléments du troisième degré, on peut condenser les pressions avec les deux déplacements normaux à l'interface commune (figure 1). En effet, sur chaque triangle, il existe un mode de déplacement de flux nul sur la surface, sauf sur l'interface. Pour un tel mode, on a

$$\int_{V_1} p_1 D_i u_i dV + \int_{V_2} p_2 D_i u_i dV = \int_I (p_1 - p_2) n_{i,1} u_i dS \neq 0,$$

si $p_1 \neq p_2$. On peut donc condenser ces deux multiplicateurs avec les deux déplacements généralisés normaux. Ce procédé permet d'obtenir des quadrilatères quelconques (figure 2).

b) on peut obtenir des polygones convexes en assemblant autant de triangles du second degré qu'il y a de côtés. Le raisonnement est le même (figure 3).

2. Erreur due à la condensation simultanée des pressions et d'un nombre identique de déplacements, dans le cas incompressible

Appelons q_R les déplacements restants, q_C les déplacements condensés, p les pressions. Le système s'écrit

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{Rc} & H_R \\ K_{cR} & K_{cc} & H_c \\ H_R^T & H_c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_c \\ p \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{Rc} & 0 \\ M_{cR} & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R \\ q_c \\ p \end{bmatrix}$$

La dernière équation s'écrit

$$H_R^T q_R + H_c^T q_c = 0$$

Le choix convenable des déplacements entraîne que la matrice carrée H_c est invertible. Il vient donc

$$q_c = -H_c^{-T} H_R^T q_R$$

Réintroduisons cette valeur dans la seconde équation : il vient

$$(K_{cR} - K_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R + H_c p = \omega^2 (M_{cR} - M_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R$$

ce qui permet d'écrire

$$p = -H_c^{-1} (K_{cR} - K_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R + \omega^2 H_c^{-1} (M_{cR} - M_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R$$

Par conséquent, la première équation devient

$$\begin{aligned} & (K_{RR} - K_{Rc} H_c^{-T} H_R^T - H_R H_c^{-1} K_{cR} + H_R H_c^{-1} K_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R \\ & = \omega^2 (M_{RR} - M_{Rc} H_c^{-T} H_R^T - K_{Rc} H_c^{-1} M_{cR} + K_{Rc} H_c^{-1} M_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R \end{aligned}$$

Cette équation donne la solution exacte du problème.

Examinons à présent l'équation obtenue à partir de la condensation de GUYAN : l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & H_c \\ H_c^T & 0 \end{bmatrix}$$

a la forme

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

où les sous-matrices A, B et C s'obtiennent par identification:
il vient

$$K_{cc} A + M_c B^T = I$$

$$K_{cc} B + M_c C = 0$$

$$H_c^T A = 0$$

$$H_c^T B = I$$

et, par conséquent,

$$B = H_c^{-T}$$

$$A = 0$$

$$C = -H_c^{-1} K_{cc} H_c^{-T}$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} q_c \\ p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & H_c^{-T} \\ H_c^{-1} & -H_c^{-1} K_{cc} H_c^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{cR} \\ H_R^T \end{bmatrix} q_R,$$

soit

$$q_c = - H_c^{-T} H_R^T q_R$$

$$p = - H_c^{-1} (K_{cR} q_R - K_{cc} H_c^{-T} H_R^T q_R)$$

On constate que les pressions sont mal calculées, tandis que les q_c le sont correctement.

Le principe de HAMILTON s'écrit

$$-\frac{1}{2} \left\{ q_R^T K_{RR} q_R + 2 q_c^T K_{cR} q_R + q_c^T K_{cc} q_c - 2 p^T (H_R^T q_R + H_c^T q_c) \right\} \\ + \frac{1}{2} (q_R^T M_{RR} q_R + 2 q_R^T M_{Rc} q_c + q_c^T M_{cc} q_c) \text{ stat}$$

Restituons les valeurs obtenues pour q_c et p : on remarquera que $H_R^T q_R + H_c^T q_c = 0$, ce qui permet d'écrire

$$2 U = q_R^T \left[K_{RR} - 2 H_R H_c^{-1} K_{cR} + H_R H_c^{-1} K_{cc} H_c^{-T} H_R^T \right] q_R$$

$$2 T = q_R^T \left[M_{RR} - 2 M_{Rc} M_c^{-T} H_R^T + H_R H_c^{-1} M_{cc} H_c^{-T} H_R^T \right] q_R$$

Ces expressions sont identiques aux expressions exactes. Par conséquent, on peut affirmer que la condensation des pressions avec un nombre identique de déplacements conduit à un calcul exact des q_R et des q_c , mais introduit une erreur dans la restitution des multiplicateurs.

Il s'agit d'une propriété générale des contraintes linéaires.

On peut l'illustrer par un exemple simple : soit un système à deux masses et deux ressorts, les masses étant astreintes à avoir un mouvement identique.

On a le système

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{f} \end{bmatrix}$$

et les équations s'écrivent donc

$$\begin{cases} k_1 u_1 + f = -m_1 \ddot{u}_1 \\ k_2 u_2 - f = -m_2 \ddot{u}_2 \\ u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

La variable f est la force de liaison. On a alors

$$f = k_2 u_1 + m_2 \ddot{u}_1$$

et

$$(k_1 + k_2)u_1 = - (m_1 + m_2) \ddot{u}_1$$

Ces équations constituent la solution exacte. La condensation revient à écrire

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

soit

$$u_2 = u_1$$

$$f = k_2 u_1$$

On a donc remplacé le système initial par un système où la masse m_2 est placée sur le degré de liberté 1 (figure 4).

Au point de vue des déplacements, le système est équivalent, mais le multiplicateur, c'est-à-dire la force dans la barre, a une autre valeur.

Examinons à présent le premier itéré : il s'agit de la solution du système

$$\begin{bmatrix} K_{RR} & K_{Rc} & H_R \\ K_{cR} & K_{cc} & H_c \\ H_R^T & H_c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R^1 \\ q_c^1 \\ p^1 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{RR} & M_{Rc} & 0 \\ M_{cR} & M_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_R^0 \\ q_c^0 \\ p^0 \end{bmatrix}$$

De la troisième équation, on tire

$$q_c^1 = -H_c^{-T} H_R^T q_R^1 ;$$

de la deuxième,

$$\begin{aligned} p^1 &= -H_c^{-1} [K_{cR} q_R^1 + K_{cc} q_c^1 = \omega^2 (M_{cR} q_R^0 + M_{cc} q_c^0)] \\ &= -H_c^{-1} [(K_{cR} - K_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R^1 - \omega^2 (M_{cR} - M_{cc} H_c^{-T} H_R^T) q_R^0] \end{aligned}$$

La première devient donc

$$\begin{aligned} & [K_{RR} - K_{Rc} H_c^{-T} H_R^T - H_R H_c^{-1} K_{cR} + H_R H_c^{-1} K_{cc} H_c^{-T} H_R^T] q_R^1 \\ &= \omega^2 [M_{RR} - M_{Rc} H_c^{-T} H_R^T - H_R H_c^{-1} M_{cR} + H_R H_c^{-1} M_{cc} H_c^{-T} H_R^T] q_R^0 \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$q_R^1 = q_R^0$$

$$q_c^1 = q_c^0$$

$$p^1 = \text{valeur exacte de } p.$$

Dans le premier itéré, on retrouve donc la valeur exacte du multiplicateur. Ce résultat est facile à vérifier sur notre petit exemple : lors de la recherche du premier itéré, on redistribue exactement les masses, et on impose les déplacements u_1^0 et u_2^0 . Comme ceux-ci sont les déplacements exacts, il est naturel de retrouver la valeur exacte de la force.

3. Condensation des pressions dans les systèmes franchement compressibles

Un système franchement compressible mène à un problème aux valeurs propres du type

$$\begin{bmatrix} K & H \\ H^T & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

où la matrice A est définie positive. On peut donc écrire

$$p = A^{-1} H^T q,$$

ce qui entraîne

$$(K + HA^{-1} H^T) q = \omega^2 M q$$

La matrice condensée

$$\bar{K} = K + MA^{-1} H^T$$

est définie positive et on est donc ramené à un problème aux valeurs propres classiques. Le spectre n'est pas altéré puisque la pression n'a pas de masse.

Résumé

CONDENSATIONS POSSIBLES		
MATERIAU	CONDENSATION DE LA PRESSION SEULE	CONDENSATION P + DEPL. NORM.
COMPRESSIBLE INCOMPRESSIBLE	EXACTE IMPOSSIBLE	APPROCHEE NEO-EXACTE POUR Q

ASSEMBLAGES SIMPLES	
DEGRE	ASSEMBLAGE
1	
2 et 3	N -GONES CONVEXES : N ELEMENTS
3	QUADRILATERE QUELCONQUE : 2 ELTS

Chapitre 2 Formulation de l'élément pouvant être incompressible

1. Description géométrique et discrétisation des champs

Il s'agit d'un élément de tore triangulaire. Sa géométrie est définie par trois noeuds dans le plan méridien (figure 5).

Les champs de déplacements ont la forme

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{\ell=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_{j\ell} r^j z^{\ell-j} \\
 u &= 0 \\
 u_z &= \sum_{\ell=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \beta_{j\ell} r^j z^{\ell-j}
 \end{aligned} \tag{1}$$

où k , degré du champ, est égal à 1, 2 ou 3, au gré de l'utilisateur. Chacun de ces champs est donc un polynôme complet de degré k en r et z , et comporte $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ coefficients. Les déplacements sont connectés aux trois noeuds et en $(k-1)$ points sur chaque interface, de manière à garantir une valeur unique sur chaque côté. Au troisième degré, il subsiste cependant deux paramètres de champ correspondant à des modes nuls sur toute la frontière ("bulles"). On élimine ces derniers indépendamment dans chaque élément.

Le champ de pression moyenne n'est soumis à aucune condition de compatibilité sur les interfaces et peut donc être défini indépendamment dans chaque élément.

La pression est prise constante pour $k = 1$ ou 2, linéaire pour $k = 3$. Dans ce dernier cas, les deux paramètres supplémentaires sont condensés avec les modes "bulles". On sait que dans le cas incompressible, cette condensation est rigoureuse.

2. Mise à échelle de la pression

Pour des raisons de bon conditionnement de la matrice du système il est préférable d'utiliser comme variable un multiple de la pression dépendant de la raideur moyenne et de la dimension de l'élément. En pratique, on utilise la variable

$$p^* = p \cdot \frac{\ell}{h}$$

$$\text{où } h = \frac{1}{2} \left[\bar{H}_{11} + \bar{H}_{22} + \bar{H}_{33} + \bar{H}_{44} \right] \frac{1}{2}$$

$$\ell = \left[2 \times \text{aire du triangle} \right] \frac{1}{2}$$

De cette façon, on peut garantir que le conditionnement de la matrice ne dépend pas des unités choisies.

C'est cette variable qui apparaît dans les résultats.

3. Calcul de la matrice de raideur mixte

Ce calcul est strictement identique à celui qui est exposé dans [1] pour le cas de la statique.

4. Calcul de la matrice des masses

Les déplacements ayant la forme

$$u = Ma,$$

on a donc

$$2T = \int_V \rho a^T M^T M a \, dV = a^T \left[\int_V \rho M^T M \, dV \right] a.$$

Etant donné les relations de connexion

$$q = C a,$$

on obtient

$$2T = q^T C^{-T} \left(\int_V \rho M^T M dV \right) C^{-1} q ,$$

ce qui définit la matrice des masses

$$M = C^{-T} \left(\int_V \rho M^T M dV \right) C^{-1}$$

5. Condensation

Au troisième degré, on condense les deux modes nuls sur la frontière en même temps que les paramètres liés aux deux modes linéaires de pression. Le schéma est classique :

$$K_{RR}^* = K_{RR} - K_{Rc} K_{cc}^{-1} K_{cR}$$

$$M_{RR}^* = M_{RR} - K_{Rc} K_{cc}^{-1} M_{cR} - M_{Rc} K_{cc}^{-1} K_{cR} + K_{Rc} K_{cc}^{-1} M_{cc} K_{cc}^{-1} K_{cR}$$

On a vu que cette condensation n'entraîne pas d'erreur sur la fréquence. On notera cependant qu'une certaine masse peut être associée à la pression restante qui sera dès lors restituée.

Chapitre 3 Applications numériques

Les applications décrites ci-dessous ont été faites dans le but de vérifier le comportement de l'élément dans diverses configurations. Dans la plupart des cas, les résultats sont comparés à ceux que donne l'élément à symétrie axiale basé sur la discrétisation des déplacements (Type 13 dans la bibliothèque SAMCEF).

Dans un de ces exemples, on montre en détail comment condenser les multiplicateurs lorsque la structure est incompressible.

1. Raidisseur à section carrée

Il s'agit d'un anneau de diamètre égal à 1 m. Sa section est un carré de 0,1m de côté. L'anneau est représenté en figure A/1. Les propriétés du matériau sont

Module de YOUNG	$E = 2.10^{11}$ bar
Coefficient de POISSON	$\nu = 0$
Densité de masse	$\rho = 8.10^3$ kg/m ³

La valeur $\nu = 0$ est destinée à restituer l'état uniaxial de tension. On a comparé trois idéalizations la première utilise un élément de raidisseur (figure 2), la deuxième deux éléments de tore compressible, la troisième deux éléments de tore basés sur la formulation de HERRMANN. On remarquera que pour $\nu = 0$, les matrices de Hooke ont pour expressions respectives

$$H = \epsilon I$$

dans le cas compressible,

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \epsilon I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dans la formulation de HERRMANN. Par conséquent, les résultats doivent être identiques. Sur la figure A/3, les noeuds fictifs 5 et 6 sont réservés aux pressions.

Ils ne sont évidemment définis que pour l'élément T.I.(*)

On trouvera dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus lors d'un passage au degré 1. Seuls les deux premiers modes sont indiqués, car le raidisseur ne peut représenter les modes supérieurs qui correspondent à une déformation de la section

Élément Pulsation	R(*)	T.C.(*)	T.I.(*)
1	$3,536.10^3$	$3,537.10^3$	$3,537.10^3$
2	$5,000.10^3$	$5,002.10^3$	$5,002.10^3$

L'identité des résultats des éléments T.C. et T.I. est effectivement obtenue, ce qui prouve le bon fonctionnement de ce dernier. Ces résultats ne diffèrent pratiquement pas de ceux qu'a donné l'élément R.

2. Essai d'anisotropie

Pour vérifier la construction de la matrice de HOOKE anisotrope, on a effectué l'essai suivant : pour une géométrie strictement identique, on a construit d'une part un élément T.C., d'autre part un élément T.I. où l'on définit la matrice spéciale

(*) Dans ce qui suit, nous utiliserons constamment les abréviations suivantes pour désigner les éléments :

R. = raidisseur à géométrie de révolution

T.C. = tore compressible basé sur la discrétisation des déplacements

T.I. = tore pouvant être incompressible (déplacements et pression)

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où H est la matrice de HOOKE de l'élément T.C. Il va de soi que dans ces conditions, les matrices de raideur et de masse doivent être identiques pour la partie relative aux déplacements, peuplées de zéros au droit des multiplicateurs.

Ce résultat a été effectivement obtenu.

3. Coque cylindrique [2]

Il s'agit d'un cylindre creux de diamètre moyen égal à 20, d'épaisseur égale à 2 (figure A/4). Le matériau est caractérisé par les données suivantes :

Module de YOUNG	$E = 400$
Coefficient de POISSON	$\nu = 0,25$
Densité de masse	$\rho = 10$

L'idéalisation est représentée à la figure A/5. Le même problème a été résolu de 6 manières différentes :

- 1) Par des éléments T.I. de degré 1
- 2) Par des éléments T.C. de degré 1
- 3) Par des éléments T.I. de degré 2
- 4) Par des éléments T.I. de degré 2, avec la matrice de HOOKE spéciale reproduisant les éléments T.C.
- 5) Par des éléments T.I. de degré 3, en ne conservant que les ddl relatifs aux noeuds et les pressions
- 6) Par des éléments T.C. de degré 3, en ne conservant que les déplacements des noeuds.

Tableau I

Solutions obtenues

	Degré 1		Degré 2		Degré 3 condensé	
	T.C.	T.I.	T.I. spécial	T.I.	T.C.	T.I.
Masse en translation	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$
1	$6,328874 \cdot 10^{-1}$	$6,208125 \cdot 10^{-1}$	$6,249622 \cdot 10^{-1}$	$6,217263 \cdot 10^{-1}$	$6,275763 \cdot 10^{-1}$	$6,230049 \cdot 10^{-1}$
2	$6,260578 \cdot 10^{-1}$	$6,321968 \cdot 10^{-1}$	$6,299973 \cdot 10^{-1}$	$6,318246 \cdot 10^{-1}$	$6,381831 \cdot 10^{-1}$	$6,337700 \cdot 10^{-1}$
3	1,450762	1,441637	$9,561800 \cdot 10^{-1}$	$9,373472 \cdot 10^{-1}$	$9,654130 \cdot 10^{-1}$	$9,664016 \cdot 10^{-1}$

Le mode de translation selon la verticale est laissé libre, et aucune fixation n'est faite. Les résultats sont consignés dans le tableau 1.

Ces résultats appellent quelques commentaires. Les deux premiers modes sont pratiquement confondus et, par conséquent, mal séparés. Dès lors, on peut seulement constater la bonne correspondance de l'ensemble des deux fréquences propres associées.

Par contre, le troisième mode (premier mode de flexion) est bien séparé et, sur ce dernier, on peut faire une comparaison plus fine. Aux degrés 1 et 2, on constate que l'élément T.I. est légèrement plus souple, ce qui est naturel en vertu des hypothèses mixtes dont il procède. Par contre au degré 3 condensé, les pulsations sont légèrement supérieures. Il est intéressant de comparer les bornes inférieures :

Bornes inférieures		
	T.C.	T.I.
ω_1	$5,913762 \cdot 10^{-1}$	$5,902375 \cdot 10^{-1}$
ω_2	$6,269577 \cdot 10^{-1}$	$6,263440 \cdot 10^{-1}$
ω_3	$8,892417 \cdot 10^{-1}$	$8,875810 \cdot 10^{-1}$

On constate qu'elles sont légèrement supérieures avec l'élément T.C. Ces faits peuvent s'expliquer de la façon suivante : la matrice de raideur de l'élément T.I. a des termes plus petits que les termes correspondants de l'élément T.C. Par conséquent, la condensation de GUYAN est un peu moins bonne avec l'élément T.I.

4. Cylindre composite

Il s'agit d'un cylindre creux bordé de part et d'autre d'une coque (figure A/6). La coque intérieure est représentée par des éléments de membrane de révolution, la coque extérieure par des éléments de coque de révolution (figure A/7). Les données sont :

Module de YOUNG	$E = 400.$
Coefficient de POISSON	$\nu = 0.5$
Densité de masse	$\rho = 10.$

L'idéalisation est représentée à la figure A/7. On notera que l'incompressibilité ne pose pas de problèmes pour les membranes et les coques. En effet, en état plan de tension, la dilatation dans la direction perpendiculaire au feuillet moyen s'accorde librement à tout effet de POISSON sans produire de tension. Soit par exemple un corps allongé dans une direction. En état triaxial de tension, on pourra obtenir la déformation représentée à la figure A/9.1. Par contre, en état plan de tension, la dilatation perpendiculaire est libre, et la déformation sera celle de la figure A/9.2. Cette particularité se traduit dans la matrice de HOOKE par la présence du dénominateur $(1-2\nu)$ pour le cas triaxial et $(1-\nu)$ pour l'état plan de tension, ce qui signifie que l'incompressibilité ne pose des problèmes que pour les solides à trois dimensions.

La présente application permet de vérifier le comportement de l'élément T.I. en présence des éléments de membrane et de coque de révolution.

De plus, on en a profité pour illustrer la manière de condenser les pressions dans le cas incompressible. La structure a été étudiée au degré 2. Par conséquent, chaque interface comporte un déplacement normal. On vérifie aisément que le découpage en sous-structures représenté à la figure A/8 permet de condenser chaque ddl de pression avec un déplacement normal.

On a effectué deux passages, le premier en conservant tous les ddl, le second en utilisant le découpage en sous-structures de la figure A/8 et en condensant les pressions et les interfaces intérieures des sous-structures. La condensation n'est pas exacte, car les déplacements tangentiels sont eux aussi condensés.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Résultats	avec condensation	sans condensation
masse	$1,256637 \cdot 10^4$	$1,256637 \cdot 10^4$
ω_1	$6,256304 \cdot 10^{-1}$	$6,224606 \cdot 10^{-1}$
ω_2	$6,198337 \cdot 10^{-1}$	$6,237719 \cdot 10^{-1}$
ω_3	$9,821679 \cdot 10^{-1}$	$9,817926 \cdot 10^{-1}$

Dans ce cas-ci encore, les deux premiers modes sont très proches en fréquence et se mélangent ; par contre, le troisième est bien séparé. On constate que l'accord des fréquences est très bon.

5. Essai de condensation directe des pressions

On a montré dans le chapitre 1 que, selon que la structure est compressible ou incompressible, on peut ou on ne peut pas condenser les pressions de façon isolée. Dans le cadre des applications, deux questions se posent :

- 1) à partir de quelle valeur du coefficient de POISSON la structure doit-elle être considérée comme numériquement incompressible ?
- 2) quelle est l'influence de cette condensation sur la précision numérique de l'inversion de la matrice ?

Pour répondre à ces questions on a étudié la structure représentée à la figure A/10 pour les valeurs suivantes du coefficient de POISSON :

- a) $\nu = 0,49$
- b) $\nu = 0,499$
- c) $\nu = 0,4999$
- d) $\nu = 0,49999$
- e) $\nu = 0,499999$
- f) $\nu = 0,5$

Deux analyses ont été faites pour chaque valeur de ν : dans la première, on condense les pressions avec des déplacements, dans la seconde, les pressions seules. (Pour arriver à ce dernier résultat, il suffit de retenir tous les déplacements). Rappelons que, du fait de la mise à échelle des pressions, les résultats ne dépendent ni du module de YOUNG, ni de la dimension de l'élément. Enfin, comme il s'agit d'un problème de condensation de la raideur, on a préféré étudier un problème statique. On a choisi le cylindre composite étudié dans [1] et dont les données sont :

rayon intérieur : 100 mm
 rayon extérieur : 400 mm
 épaisseur de la coque : 10 mm
 module de YOUNG du cylindre : $E = 23,0769 \text{ kg}'/\text{mm}^2$
 module de YOUNG de la coque : $E_c = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg}'/\text{mm}^2$
 pression interne : $1 \text{ kg}'/\text{mm}^2$

Les résultats sont les suivants :

ν	cond. p. et ν		cond. p. seule		
	10^{-5} En. Pot.	$N_{\theta\theta}$	10^{-5} En. Pot.	$N_{\theta\theta}$	Pivot min.
0,49	3,433266	236,8	3,433266	236,8	$1,36 \cdot 10^{+1}$
0,499	2,604381	279,8	2,604381	279,8	$1,37 \cdot 10^0$
0,4999	2,500965	285,1	2,500965	285,1	$1,37 \cdot 10^{-1}$
0,49999	2,490377	285,6	2,490377	285,6	$1,37 \cdot 10^{-2}$
0,499999	2,489316	285,7	2,489316	285,7	$1,37 \cdot 10^{-3}$
0,5	2,489198	285,7	-	-	-

Dans ce tableau, $N_{\theta\theta}$ représente l'effort inconférentiel dans la coque. Dans le cas où la pression est condensée de façon isolée, on a noté le pivot minimum correspondant. On constate que le pivot varie sensiblement comme $(0,5 - \nu)$ ce qui découle d'ailleurs logiquement de la structure de la matrice \bar{H} . (figure A/11).

La valeur $\nu = 0,499999$ est la valeur la plus proche de 0,5 qui, en simple précision IBM, soit encore distinguée de 0,5.

Les résultats montrent que, même pour cette valeur, la condensation peut encore se faire.

On notera d'autre part que le mode de condensation n'affecte nullement les résultats.

Enfin, pour les valeurs de v proches de 0,5, les résultats ne diffèrent quasiment pas des résultats obtenus pour $v = 0,5$. La figure A/12 illustre le fait que pour $v > 0,499$, l'erreur sur l'énergie est inférieure à 5%.

Chapitre 4. Utilisation d'éléments cinématiquement admissibles faiblement compressibles

Une autre façon d'aborder les structures incompressibles consiste à utiliser des éléments cinématiquement admissibles, pour des valeurs du coefficient de POISSON proches de 0,5. Les résultats obtenus de cette façon ont, dans bien des cas, été décevants [3,4].

Ces difficultés ont généralement été attribuées à un mauvais conditionnement de la matrice de raideur. Nous allons montrer qu'en dehors de toute question de conditionnement, il existe un problème d'idéalisation.

1. L'énergie de déformation a la forme locale

$$W(\epsilon) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = G(\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{ll} \epsilon_{ii}), \quad (1)$$

$$\text{où } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i)$$

En l'absence de modes rigides, on peut utiliser sur l'espace H des fonctions admissibles la norme définie par

$$\|u\|^2 = \int_V 2G \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2)$$

L'ensemble des champs vérifiant la condition $\epsilon_{ll} = 0$ forme le sous-espace linéaire I que nous appellerons "sous-espace incompressible". Il est clair que pour tout champ $u \in I$, la forme quadratique

$$b(u) = \int_V 2G \epsilon_{ii} \epsilon_{ll} dV \quad (3)$$

s'annule. Par contre, dans $H-I$, elle est définie positive. A tout sous-espace $S \subset H$, nous associerons la grandeur

$$e(S) = \inf_{u \in S} \frac{\int_V 2G \epsilon_{ii} \epsilon_{ll} dV}{\|u\|^2} = \inf_{\substack{u \in S \\ \|u\|=1}} b(u), \quad (4)$$

dont la propriété essentielle est :

$$\begin{aligned} e(S) &> 0 && \text{si } S \cap I = \{0\} \\ &= 0 && \text{si } S \cap I \neq \{0\}. \end{aligned}$$

Il est clair que pour tout $u \in S$, l'énergie de déformation

$$U(u) = \int_V W(\epsilon) dV \quad (5)$$

admet la minoration suivante :

$$U(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 \left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu} e(S) \right] \quad (6)$$

L'étude statique de la structure consiste à résoudre le problème variationnel

$$U(u) - P(u) \quad \min_{u \in H} \quad (7)$$

où $P(u)$ est l'énergie potentielle des charges. Il s'agit d'une fonctionnelle linéaire et, pour les charges admissibles, elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une norme

$$\|P\| = \sup_{u \in H} \frac{|P(u)|}{\|u\|} < \infty \quad (8)$$

Il est clair que pour tout $u \in H$,

$$|P(u)| \leq \|P\| \|u\| \quad (9)$$

Le problème statique discrétisé s'écrit :

$$U(u) - P(u) \min_{u \in S} \quad (10)$$

où S est un sous-espace linéaire de H . Lorsque le minimum est atteint, on a (théorème de CLAPEYRON)

$$2 U(u) = P(u) \quad (11)$$

Les inégalités (6) et (9) entraînent alors

$$\|u\|^2 \left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu} e(S) \right] \leq \|P\| \|u\|$$

et, par conséquent,

$$\|u\| \leq \frac{\|P\|}{\left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu} e(S) \right]} \quad (12)$$

Pour $\nu \rightarrow 0,5$, le coefficient $\frac{\nu}{1-2\nu} \rightarrow \infty$. Dès lors, si $e(S) \neq 0$, c'est-à-dire si $S \cap I = \{ 0 \}$, on a $\|u\| \rightarrow 0$. On peut donc dire que

"Si le sous-espace S des champs représentés dans la discrétisation et le sous-espace incompressible I sont disjoints, les déplacements convergent vers 0 pour $\nu \rightarrow 0,5$ ".

Examinons le second membre de (12) : le dénominateur croît d'autant plus vite que $e(S)$ est grand. Dès lors, on peut dire que la décroissance sera d'autant plus rapide que l'idéalisation sera plus grossière (peu d'éléments de degré peu élevé).

2. Etat plan de déformation à symétrie de révolution

La plupart des discussions concernant l'approche de l'incompressibilité ont été faites au départ d'états plan de déformation, à symétrie de révolution. Ce genre de problèmes est caractérisé par des déplacements en coordonnées cylindriques de la forme :

$$u_r = u(r)$$

$$u_\theta = 0$$

$$u_z = 0$$

La condition d'incompressibilité s'écrit alors

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} D_r (ru) = 0$$

Le sous-espace incompressible est de dimension 1 :

$$I = \left\{ u \mid u = \frac{B}{r}, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les éléments généralement utilisés sont polynomiaux. On a donc $S \cap I = \{0\}$ et, par conséquent, la solution numérique converge nécessairement vers 0 pour $\nu \rightarrow 0,5$.

En guise d'illustration, considérons la structure représentée à la figure A. Cette structure a été étudiée à l'aide d'éléments "déplacements-pression" et à l'aide d'éléments cinématiquement admissibles, pour les valeurs suivantes du coefficient de POISSON :

$$\nu = 0,49 ; 0,499 ; 0,4999 ; 0,49999 ; 0,499999$$

Ces résultats ont été comparés avec les résultats de l'élément "déplacements-pression" où $\nu = 0,5$. Dans les tableaux qui suivent, on trouvera les grandeurs suivantes, pour chaque cas : énergie potentielle, effort circonferentiel dans la coque.

En outre, pour mesurer la dégénérescence numérique de la solution, on a indiqué le plus grand résidu

$$K q - g$$

et, en regard, une réaction moyenne. Lorsque le résidu est 10^8 fois plus petit que la réaction moyenne, on note 0.

Les résultats sont repris aux figures B/1 et B/2. Dans ces tableaux et figures, C signifie : élément cinématiquement admissible et H : élément "déplacements-pressure".

Ces résultats montrent clairement que la solution converge vers 0 et ce, d'autant plus vite que le degré est plus faible. Or, c'est au premier degré que le système à résoudre a la plus petite dimension : le mauvais conditionnement s'y fait donc peu sentir.

D'ailleurs, les résidus relatifs ne dépassent 10^{-8} que pour le troisième degré, et pour ν très proche de 0,5. Mais c'est précisément au troisième degré que la solution dégénère le moins vite. On en conclut donc que ce n'est pas le conditionnement du système qui est responsable de la dégénérescence. Par contre, c'est au premier degré que $e(S)$ est le plus grand. Il s'agit donc essentiellement d'un problème d'idéalisation : la solution dégénère parce que $I \cap S = \{ 0 \}$.

Ceci montre que l'utilisation d'éléments cinématiquement admissibles avec ν proche de 0,5 doit être faite avec circonspection. Si l'on a une idée de la forme des champs incompressibles et s'ils sont représentés, on peut espérer obtenir une approximation convenable. Mais c'est loin d'être le cas général et l'utilisation d'éléments spéciaux reste la seule solution sûre.

1er degré

v	0,49	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	0,4999999
10 ⁻⁵ E.P. { H C	3,358223	2,560309	2,460611	2,450394	2,449370	
	2,377885	0,647680	0,08514103	0,008805638	0,0008836060	
Réaction 2;2 { H C	12,67667.10 ⁴	15,65344.10 ⁴	16,02155.10 ⁴	16,05923.10 ⁴	16,06301.10 ⁴	
	8,769810.10 ⁴	2,939396.10 ⁴	0,8838027.10 ⁴	1,440321.10 ⁴	1,498482.10 ⁴	
Résidu max { H C	0.	0.	0.	0.	0.	
	0.	0.	0.	0.	0.	
N ⁰⁰ { H C	231,6	275,1	280,5	281,1	281,1	
	167,1	70,90	9,885	1,029	0,1033	

Degré 2

v	0,49	0,499	0,4999	0,49999	0,499999
10 ⁻⁵ E.P. { H C	3,433747	2,601914	2,498709	2,488142	2,487082
	3,352144	2,330433	1,714860	0,6782947	0,09810595
Réaction 2;2 { H C	4,368802.10 ⁴	5,340802.10 ⁴	5,460180.10 ⁴	5,472391.10 ⁴	5,473615.10 ⁴
	4,300326.10 ⁴	4,876160.10 ⁴	3,742638.10 ⁴	7,907962.10 ³	9,250869.10 ³
Résidu max. { H C	0.	0.	0.	0.	0.
	0.	0.	0.	0.	0.
N ⁰⁰ { H C	236,5	279,6	284,8	285,4	285,4
	231,2	250,6	195,5	77,81	11,26

Degré 3

v	0,49	0,499	0,4999	0,49999	0,499999	0,4999999	0,5 (p non cond.)
10 ⁻⁵ E.P. { H C	3,438266 3,432883	2,604381 2,582317	2,500965 2,430949	2,490377 2,286522	2,489316 1,534954	2,489198 -	2,489198 -
Réaction 2;2 { H C	3,257032.10 ⁴ 3,247516.10 ⁴	3,991980.10 ⁴ 3,934649.10 ⁴	4,082204.10 ⁴ 3,921064.10 ⁴	4,091432.10 ⁴ 3,815477.10 ⁴	4,092357.10 ⁴ 3,250527.10 ⁴	4,092460.10 ⁴ -	4,092460.10 ⁴ -
Résidu max. { H C	0. 0.	0. 0.	0. 0.	0. 7,722318.10 ⁻⁴	0. 3,658313.10 ⁻²	0. -	0. -
N ⁰⁰ { H C	236,8 236,5	279,8 277,5	285,1 277,1	285,6 262,3	285,7 176,2	285,7 -	285,7 -

REFERENCES

- [1] J.F. DEBONGNIE
"Etude des structures élastiques anisotropes pouvant être incompressibles et application à un élément fini de tore triangulaire"
Rapport LTAS SF-32, 1975
- [2] A. MOL
"Eléments à symétrie axiale pour l'analyse dynamique des structures"
Rapport LTAS VF-23, 1974
- [3] L.R. HERRMANN
"Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem"
AIAA Journal, vol. 3, n° 10, pp. 1896-1900, 1965
- [4] PIN TONG
"An assumed stress hybrid finite element method for an incompressible and near-incompressible material"
Int. J. Solids and Structures, vol. 5, pp. 445-461, Pergamon Press, 1969

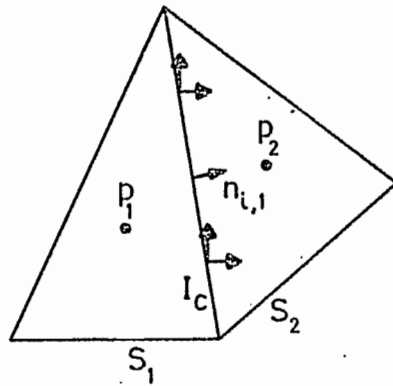


FIG. 1

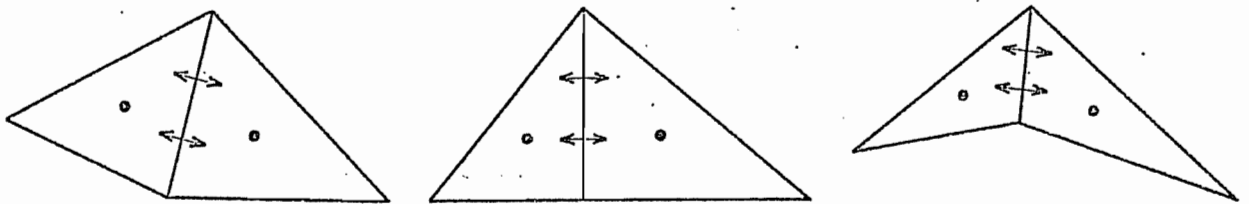


FIG. 2

ASSEMBLAGE DE DEUX ELEMENTS DU 3^{eme} DEGRE

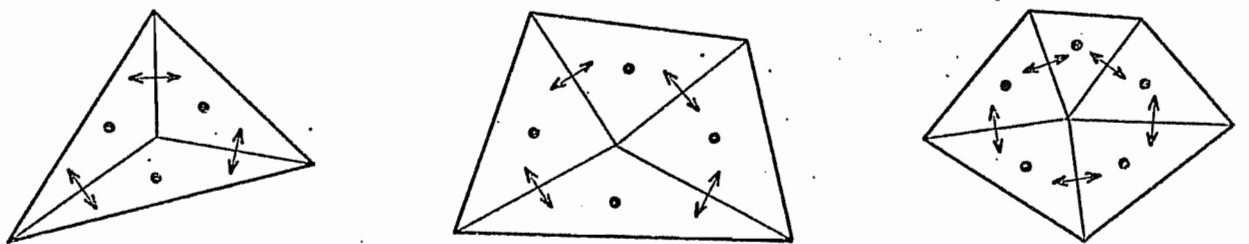
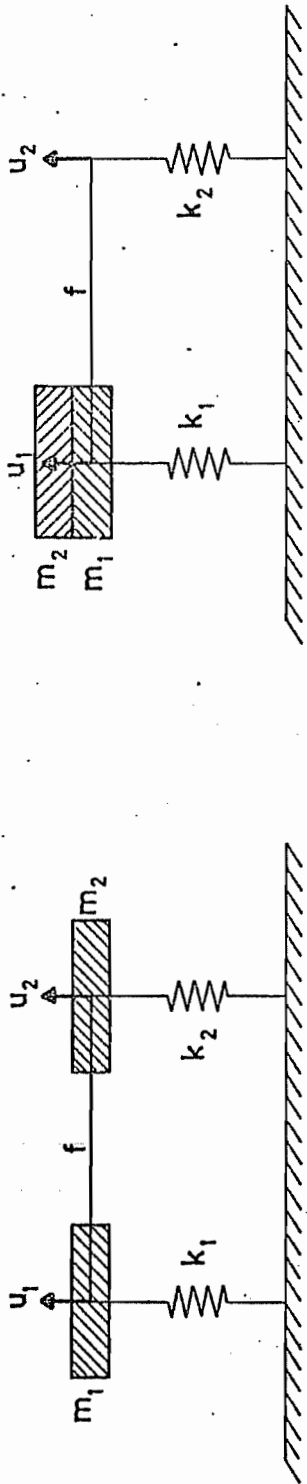


FIG. 3

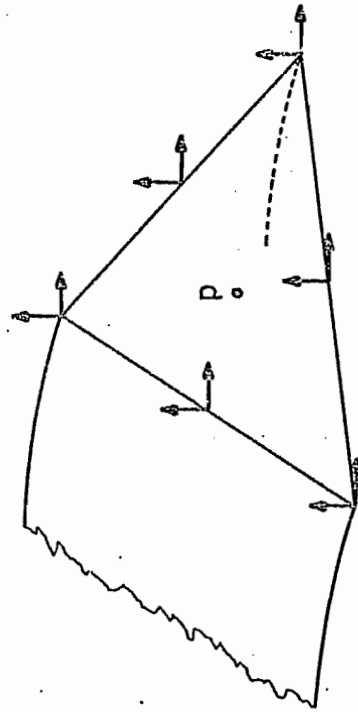
N - GONES CONVEXES OBTENUS A PARTIR DE N ELEMENTS DU 2^{eme} DEGRE



PROBLEME EXACT

FIG. 4

PROBLEME RESOLU



ELEMENT DE TORE TRIANGULAIRE (DEGRE 2)

FIG. 5

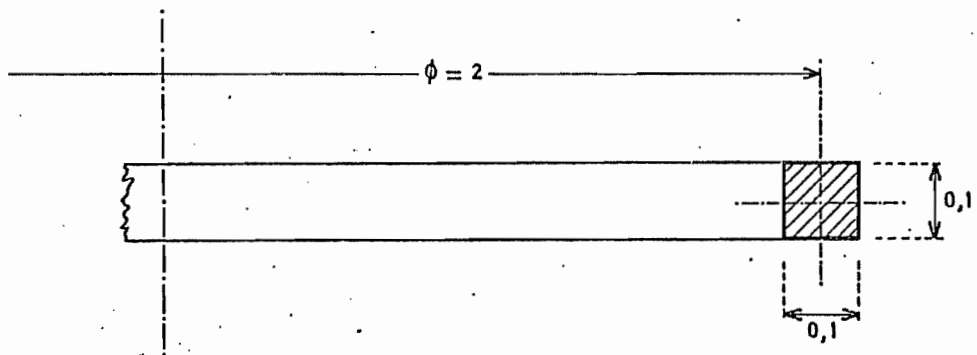


FIG. A 1 RAIDISSEUR A SECTION CARREE

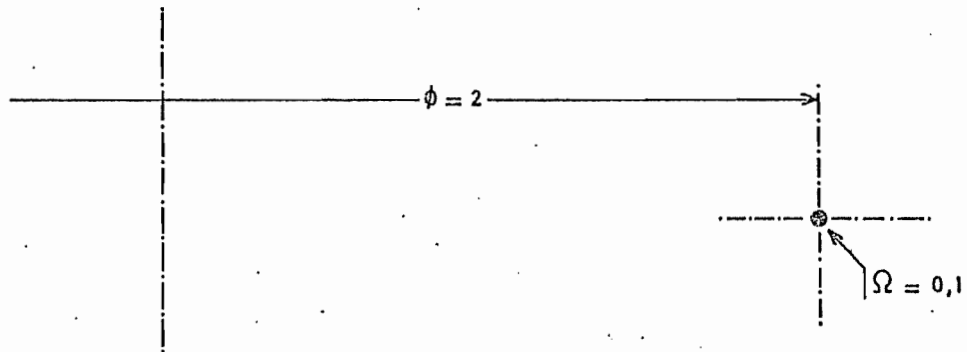


FIG. A 2 IDEALISATION PAR L'ELEMENT DE RAIDISSEUR

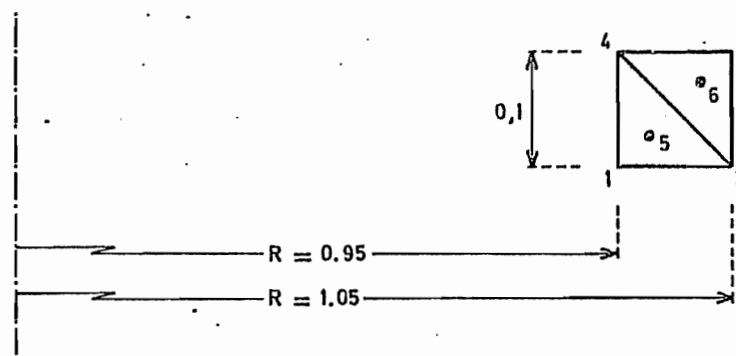
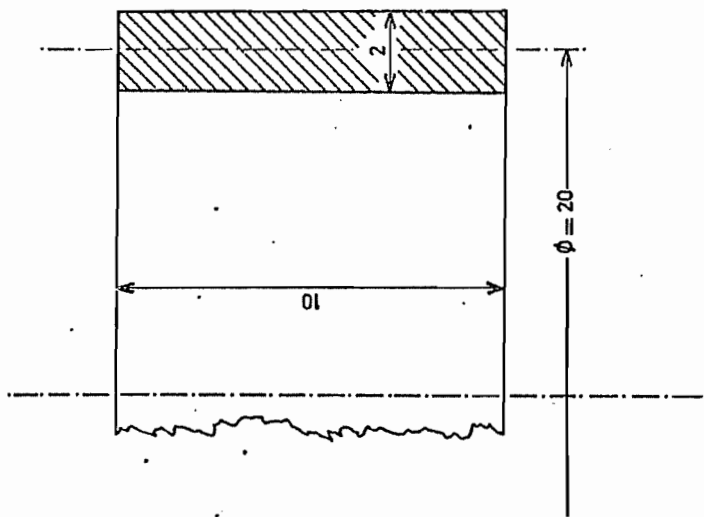
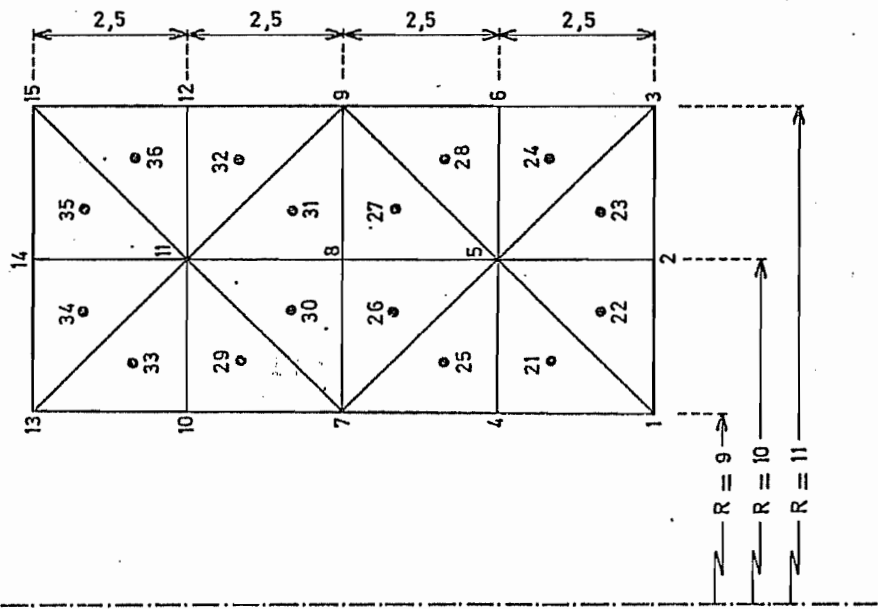


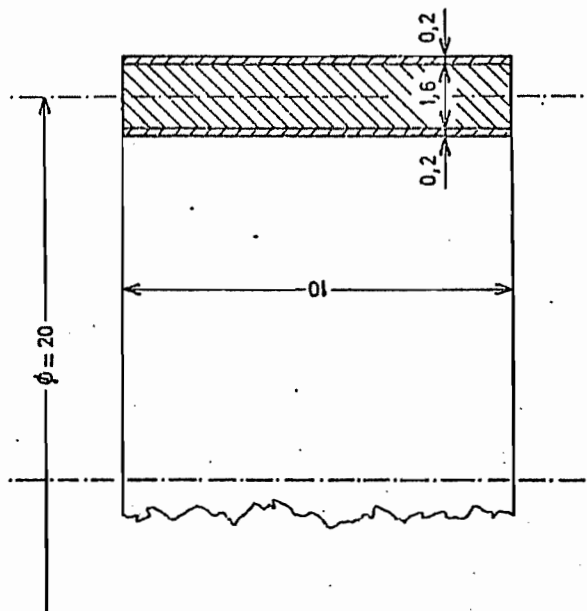
FIG. A 3 IDEALISATION PAR DEUX ELEMENTS DE TORE



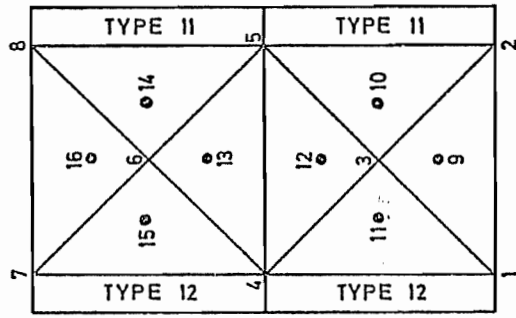
COQUE CYLINDRIQUE
FIG. A 4



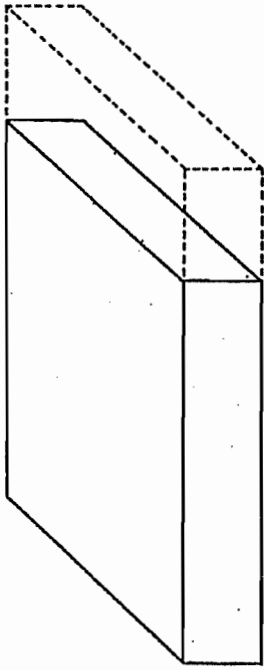
MODELISATION PAR 16 ELEMENTS T. I.
FIG. A 5



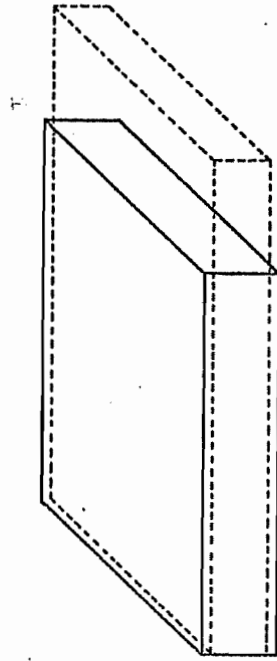
CYLINDRE COMPOSITE
FIG. A 6



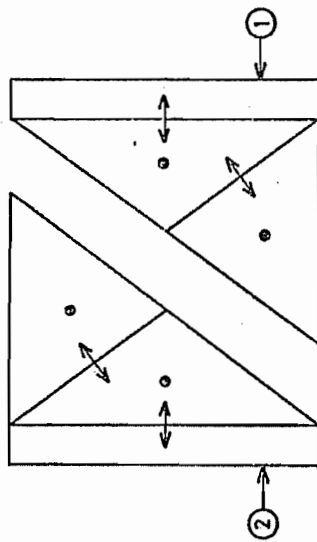
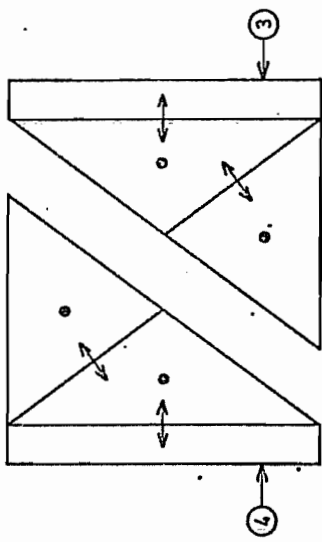
MODELISATION DU CYLINDRE COMPOSITE
FIG. A 7



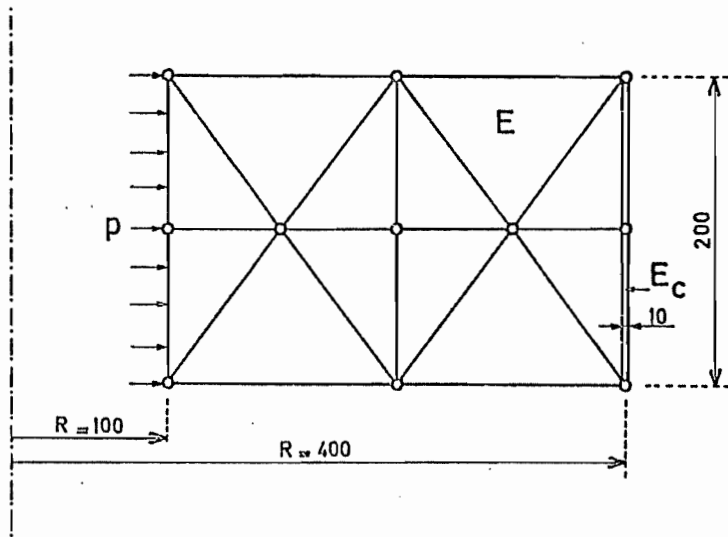
DEFORMATION EN ETAT TRIAXIAL DE TENSION
FIG. A 9.1



DEFORMATION EN ETAT PLAN DE TENSION
FIG. A 9.2



DECOUPEGE EN SOUS-STRUCTURES
FIG. A 8



$$E_C = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kg}'/\text{mm}^2$$

$$E = 23,0769 \text{ kg}'/\text{mm}^2$$

$$p = 1 \text{ kg}'/\text{mm}^2$$

FIG. A 10

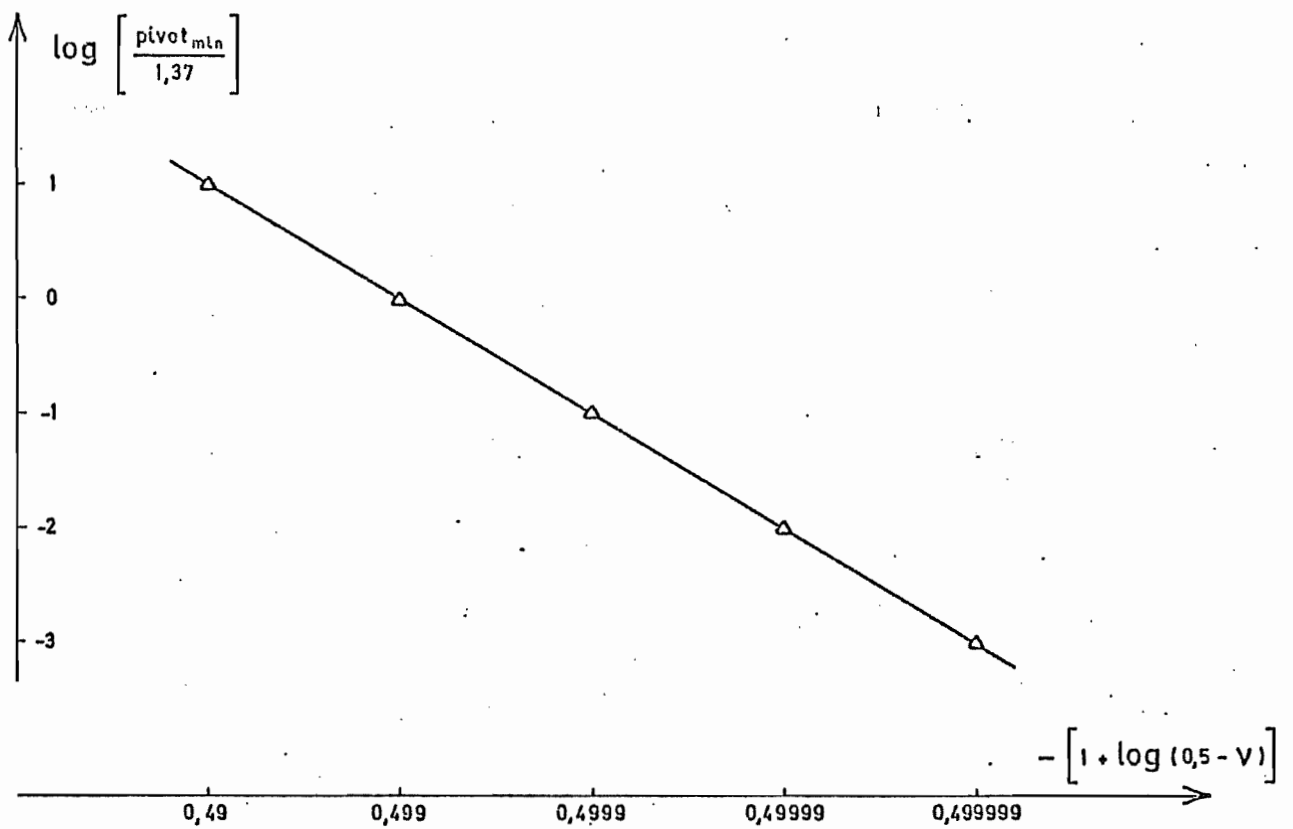


FIG. A 11

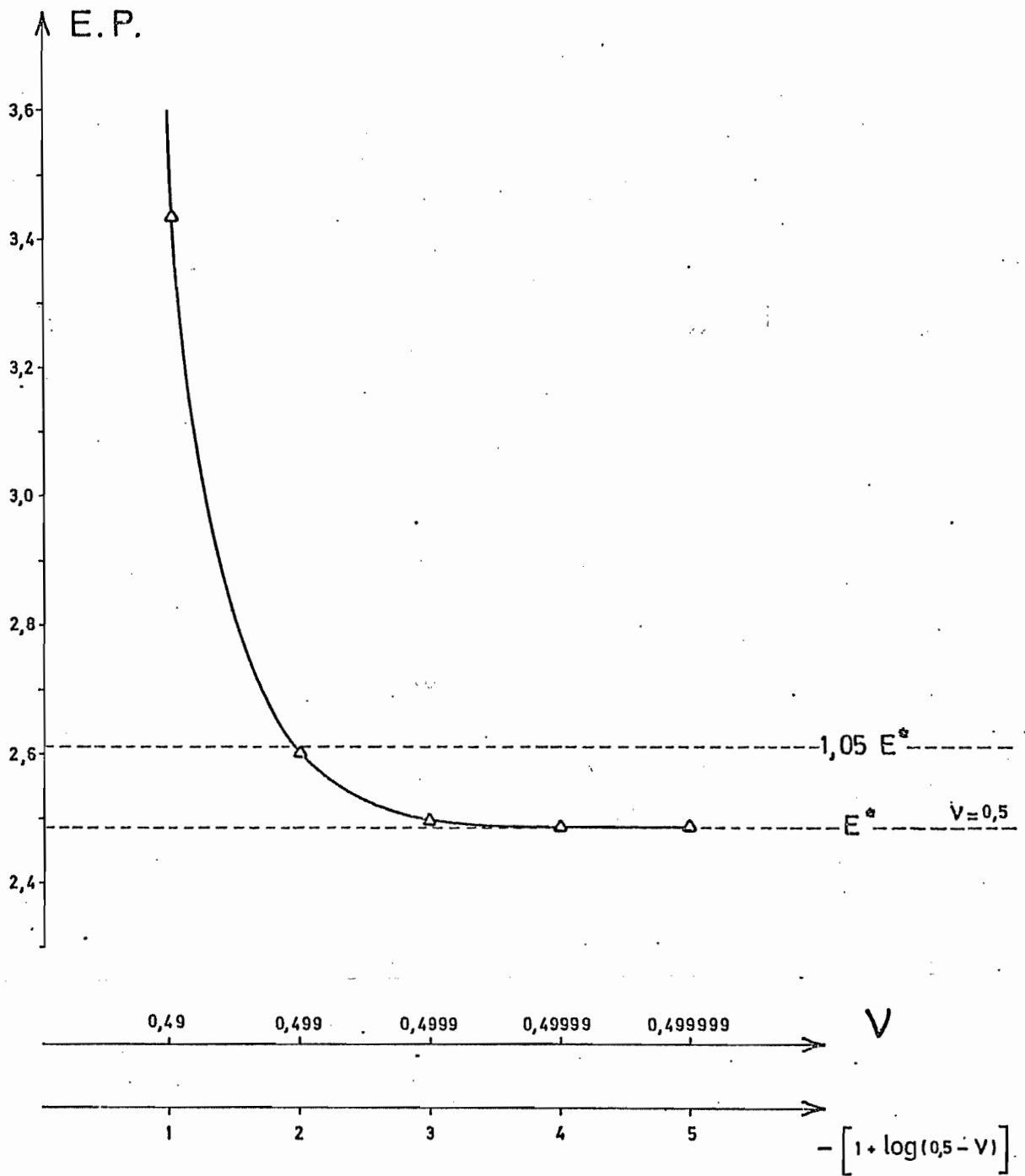


FIG. A 12

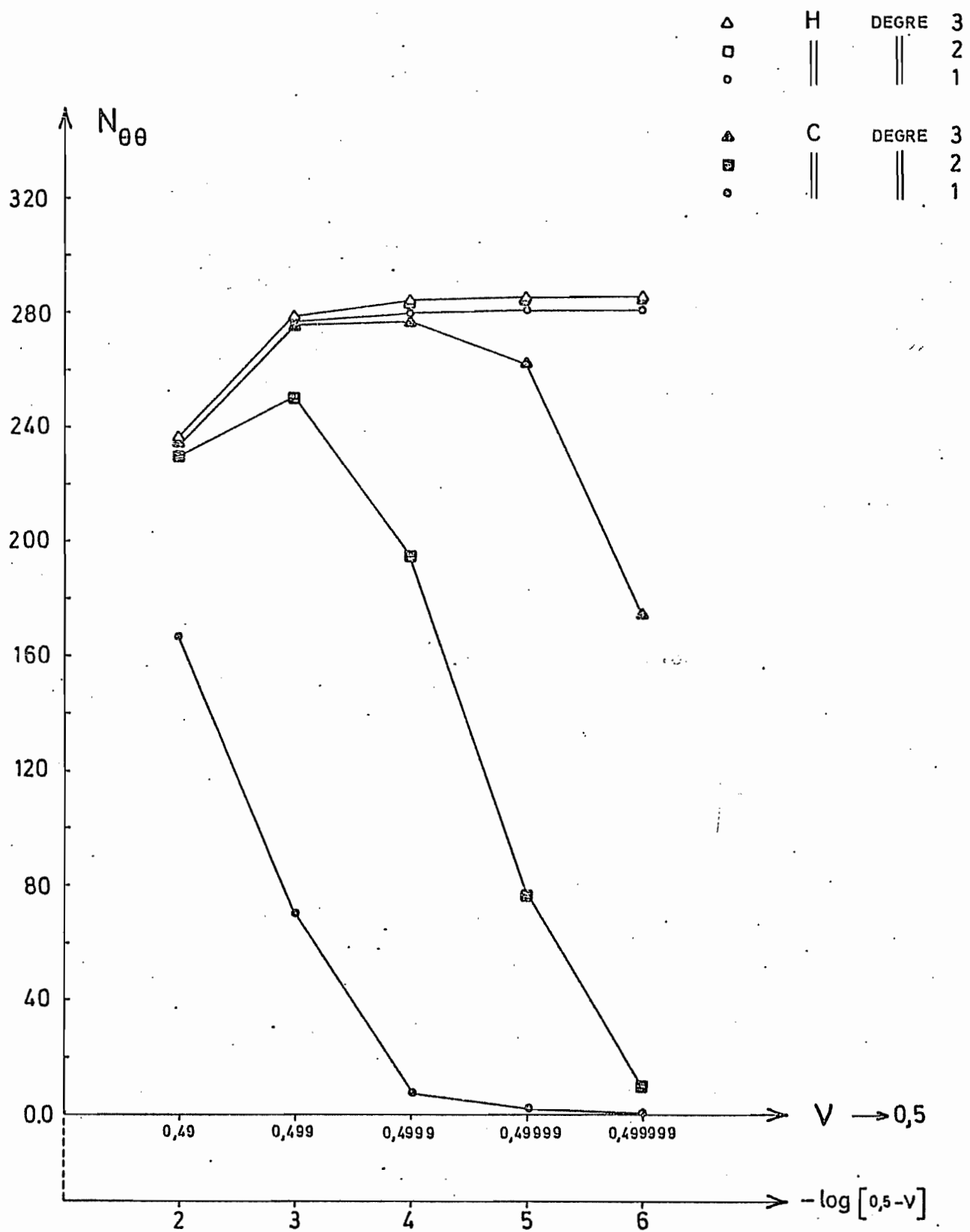


FIG. B 2 EFFORT CICONFERENCIEL DANS LA COQUE

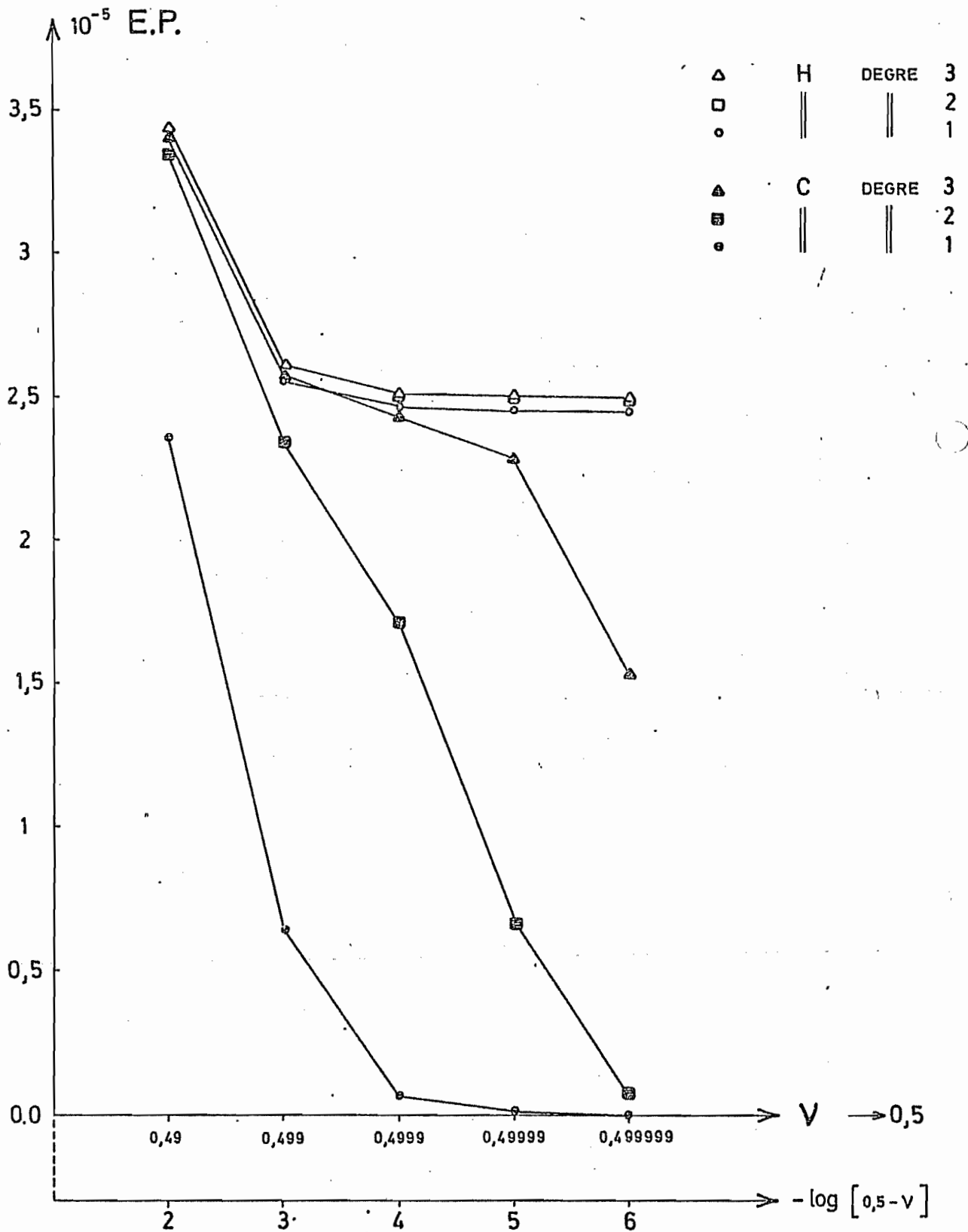


FIG. B 1 ENERGIE DE DEFORMATION