

Convexité et inflexions

Pascal DUPONT, Nicole VAST

Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux

1 Introduction

Les notions de croissance et de décroissance, d'extrémum, de concavité et de convexité, d'inflexion, au-delà de leur utilité pratique, jouent un rôle fondamental dans ce qui est traditionnellement appelé l'étude d'une fonction, en vue de sa représentation graphique.

Chacun sait, plus ou moins précisément, qu'un parallèle peut être tracé entre les trois premières notions, d'une part, et les trois dernières, d'autre part. Les premières sont associées aux propriétés de la dérivée première de la fonction et les dernières, à celles de la dérivée seconde. Dans le tableau suivant, les notions qui sont, intuitivement, en correspondance ont été écrites en regard l'une de l'autre.

1 ^{er} ordre	2 ^e ordre
croissance	convexité
décroissance	concavité
extrémum	inflexion

Bien sûr, le parallèle est loin d'être parfait :

- Deux sortes d'extrémums sont distinguées : les minimums et les maximums, alors qu'une telle différence n'est pas faite entre les deux types d'inflexions (voir les Figures 1 et 2). Ceci est dû au fait qu'une telle distinction n'a pas trouvé d'utilité dans la pratique.



FIGURE 1



FIGURE 2

- Une inflexion est généralement définie comme un point séparant un intervalle sur lequel une fonction est convexe et un autre sur lequel elle est concave, alors que, selon l'usage le plus répandu, un extrémum ne sépare pas nécessairement un intervalle sur lequel une fonction est croissante et un autre sur lequel elle est décroissante. Par exemple, dans la Figure 3, chacun

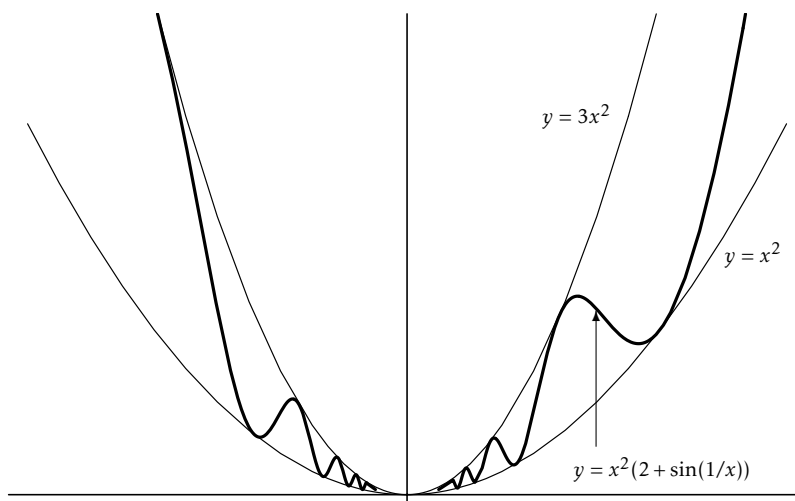


FIGURE 3

conviendra que la fonction (donnée par $f(x) = (2 + \sin(1/x))x^2$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$) possède un minimum (global strict) en 0, bien qu'il n'y ait aucun intervalle $]0; \varepsilon[$ sur lequel elle soit croissante.

- Si ce sont les courbes planes qui sont étudiées, au lieu des graphes de fonctions, la notion d'inflexion garde toujours un sens, tandis que celle d'extrémum n'en a plus : elle n'est pas liée à la courbe de manière intrinsèque, mais à son orientation dans le système d'axes.

Cette dernière objection est très sérieuse. Mais, même si elle limite les considérations qui vont suivre aux graphes de fonctions, nous continuons à penser que le parallèle entre les notions du premier ordre et celles du second ordre mérite attention et devrait être poursuivi aussi loin que possible.

Une telle perspective, qui nous pousse à remettre les définitions en question, est sans nul doute stimulante. Notre but sera de nous débarrasser de la divergence citée au deuxième point. Pour cela, imaginons que nous modifions la définition d'extrémum —disons, de minimum—, en fait que nous transposions au premier ordre la définition d'une inflexion séparant un intervalle de concavité d'un intervalle de convexité. Nous dirions, par exemple, qu'une fonction f possède un minimum (local) en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est décroissante sur $]a - \varepsilon; a] \cap \text{dom } f$ et croissante sur $[a; a + \varepsilon[\cap \text{dom } f$.

Selon cette nouvelle définition, la fonction f de la Figure 3 n'aurait pas de minimum en 0. Peut-être quelqu'un sera-t-il d'accord avec cette vision des choses, mais *pas nous*. Dès lors, la seule façon de nous en tirer est de modifier la définition d'inflexion. Dans ce but, analysons la situation de la Figure 3.

Nous voulons dire que f possède un minimum à l'origine parce que cette fonction ne prend que des valeurs positives, c'est-à-dire plus grandes que la valeur nulle qu'elle prend à l'origine. L'idée est de comparer la valeur de la fonction au candidat minimum avec ses valeurs en des abscisses proches. Seulement, vérifier si la fonction est croissante sur $[a; a + \varepsilon[$ demande que soient comparées les valeurs de la fonction en *deux* points variables de l'intervalle. C'est ce second degré de liberté qui conduit à une définition trop sévère.

Or, il est possible d'affaiblir la définition d'inflexion dans cet esprit. En effet, les définitions de concavité et de convexité sont basées sur la comparaison des arcs du graphe de la fonction et des cordes correspondantes ; ici encore, deux degrés de liberté sont en jeu : les abscisses des extrémités des arcs. Dès lors, lorsque nous définirons une notion d'« inflexion », notre choix sera de ne considérer que des arcs dont l'une des extrémités est le point candidat.

Afin d'éviter des longueurs, nous avons choisi d'introduire le terme *dépression* pour désigner le fait qu'un tel arc du graphe de la fonction se trouve sous la corde correspondante, et celui de *bombement* pour la notion duale, lorsque l'arc du graphe se trouve au-dessus de la corde.

Bien que, de notre point de vue, la notion ainsi introduite soit plus fondamentale que la notion usuelle d'inflexion, nous avons choisi de ne pas bousculer les usages, et d'introduire pour désigner celle-là le terme de *flexion* ; en outre, pour prendre en compte la première des remarques ci-dessus, nous distinguerons les deux types possibles de flexion (en appelant *tilde* celle qui apparaît sur la Figure 1 et *cotilde* celle de la Figure 2) ; nous ne pensons pas que cette distinction ait une réelle utilité dans les applications, mais elle nous facilitera le langage.

Nous passerons en revue des conditions nécessaires et suffisantes de convexité et d'existence d'inflexions avec ce nouveau point de vue, mais aussi avec le point de vue habituel.

Nous rectifierons ensuite quelques idées reçues : par exemple, un extrémum de la dérivée première ne donne pas nécessairement lieu à une inflexion de la fonction. (Voir l'Exemple 7.)

Presque toutes les notions et tous les résultats peuvent être dualisés en échangeant les termes *convexe* et *concave*, etc ; de plus, certains d'entre eux peuvent aussi être dualisés en échangeant *gauche* et *droite* ; la plupart du temps, nous ne mentionnerons qu'un des deux résultats.

Nous avons aussi choisi de regrouper tous les exemples à la fin de l'article, dans l'espoir que le lecteur les trouvera plus aisément à cet endroit qu'à l'intérieur du texte.

Bien que la notion de convexité ait sa signification mathématique pure, elle est traditionnellement étudiée plus largement dans les livres d'Économie mathématique que dans ceux d'Analyse. Quelques-uns de ces livres sont repris dans la bibliographie.

2 Dépression

Soit f une fonction d'une variable réelle et a un réel de son domaine.

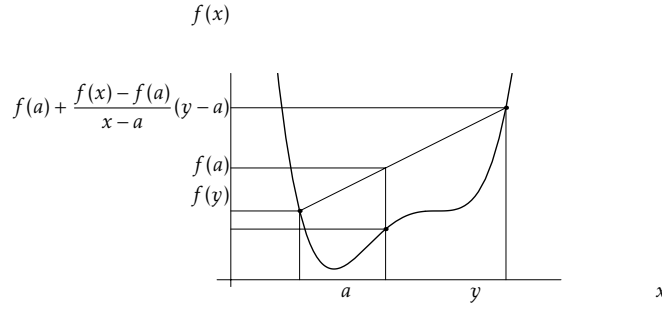


FIGURE 4

► Nous disons que f est *déprimée à droite* en a si, pour x plus grand que a mais suffisamment proche de lui, le graphe de f restreint à $]a; x[$ est sous la droite joignant $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Formellement :

Définition 1 Nous disons que f est *déprimée à droite* en a si

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x, y \in]a; a + \varepsilon[\cap \text{dom } f) \\ y < x \Rightarrow f(y) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(y - a). \quad (1)$$

(Voir la Figure 4.) La condition (1) est équivalente à :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in]a; a + \varepsilon[\cap \text{dom } f)(\forall \lambda \in]0; 1[) \\ (1 - \lambda)a + \lambda x \in \text{dom } f \Rightarrow f((1 - \lambda)a + \lambda x) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(x).$$

Des graphes montrant différents cas de dépression à droite en 0 sont représentés par les Figures 5, 6, 7 et 8.

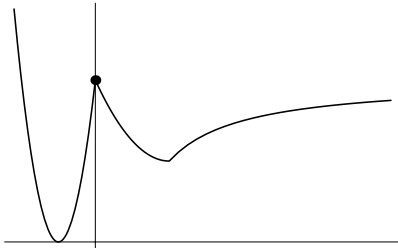


FIGURE 5

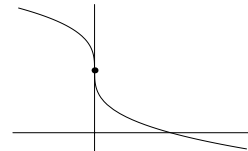


FIGURE 6

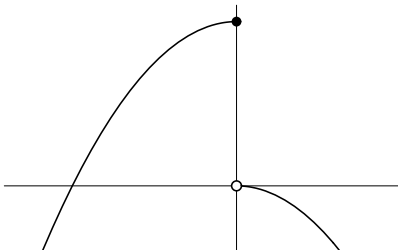


FIGURE 7

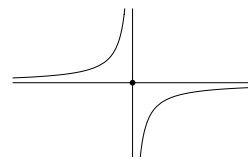


FIGURE 8

Si, dans (1), nous remplaçons l'inégalité par une inégalité stricte, nous obtenons la notion de *dépression stricte à droite*.

Il faut noter que demander que la partie du graphe située *entre* les abscisses a et x soit *sous* la sécante équivaut à demander que la partie du graphe *au-delà* de l'abscisse x soit *au-dessus* de la sécante : pour le voir, il suffit d'interchanger x et y dans la condition (1).

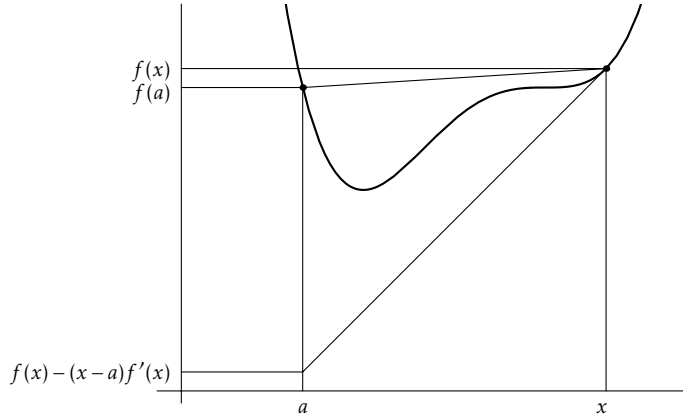


FIGURE 9

► À la suite de [10], nous introduisons le symbole $\Delta_a f$ pour la pente de la droite joignant $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$, comme fonction de x ; donc,

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

et $\Delta_a f$ est définie partout où f l'est, excepté en a lui-même. Bien sûr, si f est dérivable en a , nous complétons la définition par $\Delta_a f(a) = f'(a)$; il est clair que dans ce cas $\Delta_a f$ est continue en a .

Dans certaines situations, même si elle n'est pas dérivable en a , f possède une dérivée à droite $f'_r(a)$ en ce point ; si, dans un tel cas, nous ne devons travailler qu'avec des valeurs $x \geq a$, nous poserons $\Delta_a f(a)$ égal à $f'_r(a)$.

► Des manipulations d'inégalités analogues à celles de la Proposition 5.1 de [3] conduisent à la

Proposition 2 *La fonction f est déprimée à droite en a si et seulement si $\Delta_a f$ est croissante sur un intervalle $]a; a + \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$).* ■

Une conséquence de cette proposition est que $\lim_{x \rightarrow a^+} \Delta_a f(x)$ est la même chose que $\inf_{x > a} \Delta_a f(x)$; donc, si f est déprimée à droite en a , alors ou bien elle est dérivable à droite en a , ou bien $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$.

Dans le premier cas, $\Delta_a f$ est donc croissante sur $]a; a + \varepsilon[$.

Une autre caractérisation de la dépression à droite en a pour une fonction f dérivable sur un intervalle $]a; b[$ est que la tangente au graphe de f en un point $(x, f(x))$, pour une abscisse x plus grande que a et suffisamment proche de lui, a une pente plus grande que la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$ et, donc, coupe la verticale d'abscisse a sous le point $(a, f(a))$ (voir la Figure 9) :

Proposition 3 *Si, pour un $b > a$, f est dérivable sur $]a; b[$, alors elle est déprimée à droite en a si et seulement si*

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in]a; a + \varepsilon[) f'(x) \geq \Delta_a f(x).$$

Cette condition équivaut à :

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in]a; a + \varepsilon[) f(a) \geq f(x) - (x - a)f'(x).$$

DÉMONSTRATION : D'après la Proposition 2, f est déprimée à droite en a si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$0 \leq (\Delta_a f)'(x) = \frac{f'(x) - \Delta_a f(x)}{x - a}$$

pour tout x dans $]a; a + \varepsilon[$; puisque $x > a$, cela entraîne que $f'(x) \geq \Delta_a f(x)$. ■

► Nous pourrions, évidemment, définir la notion de *dépression à gauche* et dire qu'une fonction est *déprimée* en un point si elle y est déprimée à la fois à gauche et à droite. De la même manière, une fonction pourrait être dite *bombée à droite* en a si, pour x plus grand que a et suffisamment proche de lui, le graphe de f restreint à $]a; x[$ est au-dessus de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$; et ainsi de suite.

Les versions *strictes* de ces notions peuvent aussi être définies.

Les caractérisations analogues à celle de la Proposition 2 sont assez claires à formuler et à énoncer.

3 Tildes

Introduisons à présent une notion faible d'« inflexion » :

Définition 4 Nous disons que f a un tilde en a si elle est bombée à gauche et déprimée à droite en ce point ; elle a un cotilde en a si $-f$ y a un tilde ; elle a une flexion en a si elle y a un tilde ou un cotilde.

Les tildes stricts et cotildes stricts sont définis en utilisant les versions strictes de bombement à gauche, etc.

Dans les Figures 6, 7 et 8, la fonction a un tilde (strict) en 0.

Les résultats suivants concernent les tildes. Le lecteur devinera aisément leurs analogues relatifs aux cotildes.

Notez que nous ne demandons pas dans la définition que f soit continue en a . Toutefois, si elle ne l'est pas, de curieux phénomènes peuvent survenir : voir les Exemples 1 et 2.

► La proposition suivante fournit une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un tilde ; elle résulte directement de la Proposition 3 (et de son analogue pour le bombement à gauche).

Proposition 5 Si f est dérivable sur un voisinage de a , alors elle a un tilde en a si et seulement si $\Delta_a f \leq f'$ sur un certain voisinage de a . ■

► Nous allons à présent établir le lien entre la notion de tilde et celle de dérivée. Tout d'abord, remarquons que, si f est dérivable et a un tilde en a , alors, puisque $\Delta_a f$ est continue en a , décroissante sur un intervalle $]a - \varepsilon; a[$ et croissante sur un intervalle $]a; a + \varepsilon[$ (Proposition 2), $\Delta_a f$ possède un minimum en a . La réciproque est fautive, comme le montre l'Exemple 3.

La Proposition suivante affine un peu le dernier résultat.

Proposition 6 Si f est dérivable sur un voisinage de a et possède un tilde en ce point, alors f' admet un minimum en a .

DÉMONSTRATION : Soit $x \in]a; a + \varepsilon[$, pour un certain $\varepsilon > 0$. D'après la remarque qui suit la Proposition 2, $f'(a) = \Delta_a f(a) \leq \Delta_a f(x)$; d'après la Proposition 3, $\Delta_a f(x) \leq f'(x)$; donc, $f'(a) \leq f'(x)$. Un argument semblable peut être utilisé lorsque $x \in]a - \varepsilon; a[$, grâce à l'analogue des Propositions 2 et 3 pour le bombement à gauche. ■

Cependant, un minimum de f' ne donne pas nécessairement lieu à un tilde : voir l'Exemple 7.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait, cette hypothèse est inutilement forte, mais nous n'avons pas l'intention d'utiliser les résultats les plus fins de la théorie de l'intégration), $\Delta_a f$ peut aussi être pensée comme la « moyenne de base a de f' » ; en effet,

$$\Delta_a f(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f'.$$

Il en résulte que, si pour tout x dans un voisinage de a , $f'(x) \geq f'(a)$, on a aussi pour un tel x :

$$\Delta_a f(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f' \geq \frac{1}{x-a} \int_a^x f'(a) = f'(a) = \Delta_a f(a).$$

Dès lors,

Proposition 7 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a et si f' possède un minimum en a , alors $\Delta_a f$ admet aussi un minimum en a .

Une fois de plus, la condition n'est pas suffisante : voir l'Exemple 3.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a , il résulte des deux dernières propositions qu'un tilde de f est un minimum de $\Delta_a f$; en fait, cette conclusion est encore valable sans supposer f de classe $\mathcal{C}^1$ (mais f' doit exister au point a lui-même, évidemment) comme nous l'avons déjà noté plus haut.

De l'existence d'un minimum pour f' en a découlent que $f''(a)$, s'il existe, est nul (ceci résulte de la condition nécessaire bien connue d'existence d'un extrémum pour une fonction) et que le graphe de f coupe sa tangente en $(a, f(a))$: si $x > a$, par le Théorème de la Moyenne, il existe ξ dans $]a; x[$ tel que

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \geq f'(a)(x-a)$$

(puisque $f'(a) \leq f'(\xi)$ pour tout ξ et que $x - a > 0$), et si $x < a$ pour la même raison, il existe ξ dans $]x; a[$ tel que

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) \leq f'(a)(x - a)$$

(puisque $f'(a) \leq f'(\xi)$ pour tout ξ et que $x - a < 0$). Ces inégalités expriment que la partie gauche du graphe est situé sous la tangente et la partie droite au-dessus.

► À présent, nous allons prouver que f'' ne s'annule pas seulement lorsque f' possède un extrémum, mais aussi sous l'hypothèse plus faible que $\Delta_a f$ possède un extrémum.

Proposition 8 *Si f est dérivable sur un voisinage de a et deux fois dérivable en a et si $\Delta_a f$ possède un minimum en a , alors $f''(a) = 0$.*

DÉMONSTRATION : Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x dans $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, $f'(x)$ existe et $\Delta_a f(x) \geq \Delta_a f(a) = f'(a)$. Pour tout x dans $]a; a + \varepsilon[$, par le Théorème de la Moyenne, il existe ξ dans $]a; x[$ tel que $f'(\xi) = \Delta_a f(x)$ et il en découle que

$$\frac{f'(\xi) - f'(a)}{\xi - a} \geq 0,$$

qui montre que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

qui existe par hypothèse, est nécessairement positive ; de même, nous voyons que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

est nécessairement négative. Par conséquent,

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$$

ne peut être que nulle. ■

Il est clair que la réciproque est fausse.

4 Convexité

Considérons à présent la notion de convexité. Comme elle a été longuement étudiée dans les articles [3], [4] et [6] parus récemment dans cette revue, nous passerons rapidement sur les choses bien connues, pour nous étendre davantage sur les idées nouvelles que nous apportent les résultats des paragraphes précédents.

► Soit I un intervalle de la droite réelle. Une fonction f est convexe sur I si elle est définie sur cet intervalle et si, pour tous $x < y$ dans I , le graphe de f restreint à $]x; y[$ est en dessous de la corde d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Formellement :

Définition 9 *Nous disons que f est convexe sur I si $I \subseteq \text{dom } f$ et*

$$(\forall x, y \in I) \ x < z < y \Rightarrow f(z) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x). \quad (2)$$

Cette notion peut être appréhendée de multiples manières ; à ce sujet, nous renvoyons à [3].

Si, dans (2), nous remplaçons l'inégalité large par une inégalité stricte, nous obtenons la notion de *convexité stricte*. Nous dirons que f est *concave* sur I si $-f$ y est convexe.

Il n'y a, dans cette définition, aucune exigence de continuité ; on sait qu'elle est une conséquence de la convexité (voir [4] ou, pour une démonstration directe, [6]).

L'inégalité qui termine la condition (2) est équivalente à chacune des suivantes :

$$\begin{aligned}
(f(z) - f(x))(y - x) &\leq (f(y) - f(x))(z - x); \\
(f(z) - f(x))(y - z) &\leq (f(y) - f(z))(z - x); \\
(f(y) - f(x))(y - z) &\leq (f(y) - f(z))(y - x); \\
\Delta_x f(z) &\leq \Delta_x f(y); \\
\Delta_x f(z) &\leq \Delta_z f(y); \\
\Delta_x f(y) &\leq \Delta_z f(y).
\end{aligned}
\tag{3}$$

Ainsi, f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, $\Delta_x f$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$. (Et aussi, puisque $\Delta_x f(y) = \Delta_y f(x)$, f est convexe si et seulement si, pour tout $y \in I$ fixé, $x \mapsto \Delta_x f(y)$ est croissante sur $I \setminus \{y\}$.)

► La notion de convexité est clairement liée à celle de dépression. La différence est que, là, nous avons choisi un point fixe a et considéré uniquement les sécantes issues de $(a, f(a))$, tandis qu'ici nous laissons les deux extrémités des sécantes varier le long du graphe de f .

Ainsi, il est clair qu'une fonction est déprimée en tout point d'un intervalle ouvert lorsqu'elle est convexe sur cet intervalle. Mais la réciproque est fautive : voir l'Exemple 4. Les interactions entre convexité et dépression sont également étudiées dans la

Proposition 10 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) f est convexe sur $]a; b[$;
- b) f est convexe sur $]a; b[$ et déprimée à droite en a .

DÉMONSTRATION : Il est clair que $1 \Rightarrow 2$; la démonstration de $2 \Rightarrow 1$ est un peu plus technique : Soit $x < z < y$ dans $]a; b[$. La thèse est :

$$\Delta_x f(z) \leq \Delta_x f(y). \tag{4}$$

Si $x > a$, tout se passe dans $]a; b[$ et (4) résulte de la convexité de f sur l'intervalle ouvert. On suppose donc $x = a$ et (4) devient :

$$\Delta_a f(z) \leq \Delta_a f(y). \tag{5}$$

Comme f est déprimée à droite en a , il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Delta_a f$ est croissante sur $]a; a + \varepsilon[$. Soit $z_0 = \min\{z, a + \varepsilon\}$, $z_1 = (2a + z_0)/3$, $z_2 = (a + 2z_0)/3$. On a donc (voir la Figure 10, où les segments indiqués

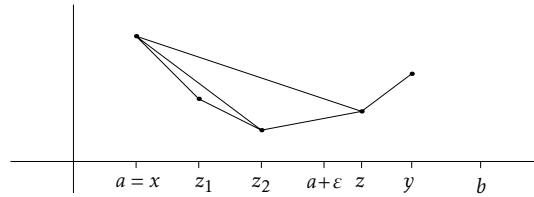


FIGURE 10

ont pour pentes les $\Delta_r f(s)$ utilisés dans la démonstration) $\Delta_a f(z_1) \leq \Delta_a f(z_2)$ ou, ce qui revient au même (cf. (3)),

$$\Delta_a f(z_2) \leq \Delta_{z_1} f(z_2).$$

Mais, par la convexité de f sur $]a; b[$,

$$\Delta_{z_1} f(z_2) \leq \Delta_{z_2} f(z).$$

Donc, $\Delta_a f(z_2) \leq \Delta_{z_2} f(z)$ ou, de manière équivalente (cf. (3)) :

$$\Delta_a f(z) \leq \Delta_{z_2} f(z).$$

En utilisant encore la convexité de f sur $]a; b[$:

$$\Delta_{z_2} f(z) \leq \Delta_z f(y),$$

et par transitivité,

$$\Delta_a f(z) \leq \Delta_z f(y),$$

qui équivaut à (5). ■

5 Tildes forts

Nous rappelons maintenant la notion traditionnelle d'inflexion, en distinguant les deux cas possibles, et nous mettons les choses au point au sujet de certains résultats.

Définition 11 Nous disons que f a un tilde fort en a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est concave sur $]a - \varepsilon; a] \cap \text{dom } f$ et convexe sur $]a; a + \varepsilon[\cap \text{dom } f$; elle a un cotilde fort en a si $-f$ y a un tilde fort; elle a une inflexion en a si elle y a un tilde fort ou un cotilde fort.

En remplaçant, dans cette définition, la concavité et la convexité par leurs variantes strictes, nous définissons les *tildes forts stricts* et les *cotildes forts stricts*.

Il est évident qu'un tilde fort est un tilde. Toutefois cette dernière notion est strictement plus faible : voir l'Exemple 6.

Par conséquent, si f est dérivable sur un voisinage de a et possède un tilde fort en ce point, alors f' admet un minimum en a (Proposition 6), mais la réciproque est fautive : voir l'Exemple 7.

Le critère suivant est bien connu et facile à utiliser. Nous n'en rappelons pas la démonstration, mais il est important de remarquer qu'elle utilise le fait que, si f est convexe sur $]a; b[$ et continue à droite en a , alors elle est convexe sur $]a; b[$.

Proposition 12 Si f possède une dérivée seconde sur un voisinage de a (excepté éventuellement en a lui-même), alors elle a un tilde fort en ce point si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in]a - \varepsilon; a[$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a; a + \varepsilon[$. ■

Une démonstration du résultat suivant peut être trouvée dans [8], Théorème 7.6.

Proposition 13 Si, pour un certain $n \in \mathbf{N}^*$, f est $(2n + 1)$ fois dérivable sur un voisinage de a , si $f^{(2n+1)}$ est continue en a et si

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0 < f^{(2n+1)}(a)$$

(resp.

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0 > f^{(2n+1)}(a)),$$

alors f a un tilde fort strict (resp. un cotilde fort strict) en a . ■

Réciproquement, si f a un tilde fort strict en a et

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0 \neq f^{(k)}(a),$$

alors k est impair (sinon, la première partie du Théorème 7.6 de [8] pourrait être appliquée) et $f^{(k)}(a) > 0$ (sinon, la seconde partie de la Proposition 13 pourrait être appliquée). Mais un tel k n'existe pas nécessairement : voir l'Exemple 5.

6 Résumé

Le diagramme du Tableau 1 résume les implications mentionnées entre toutes les propriétés d'une fonction en un point qui ont été étudiées plus haut. Toutes les implications qui ne sont pas indiquées comme des équivalences sont strictes. Nous ne rappelons pas ici les hypothèses de régularité sur la fonction.

7 Exemples

1. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par $f(x) = 1 - x^2$ lorsque $x \leq 0$ et $f(x) = -x^2$ lorsque $x > 0$ (voir la Figure 7), alors f est concave sur $\mathbf{R}_-$ et sur $\mathbf{R}_+$ (mais pas sur $\mathbf{R}$) ; pourtant, elle a un tilde (strict) en 0.
2. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto -1/x$ si $x \neq 0$ et $0 \mapsto 0$ (voir la Figure 8), alors f a un tilde (strict) en 0. Elle est convexe sur $\mathbf{R}_-$ et concave sur $\mathbf{R}_+$.

Tableau 1 : Résumé des liens entre les différentes notions

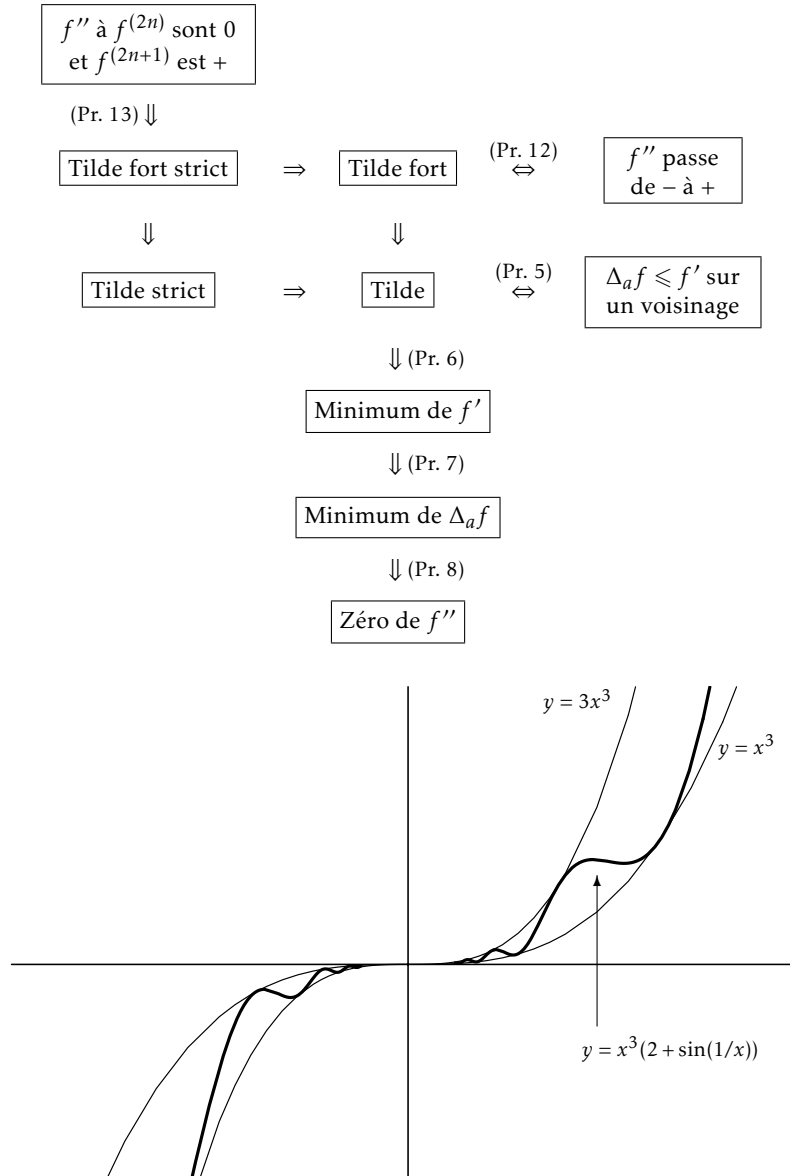


FIGURE 11

3. Soit f définie comme suit :

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : \begin{cases} x \mapsto x^3(2 + \sin(1/x)) \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \mapsto 0. \end{cases}$$

(Voir la Figure 11.) Lorsque $x \neq 0$,

$$\Delta_0 f(x) = \frac{f(x)}{x} = x^2(2 + \sin(1/x))$$

et

$$f'(x) = x(3x(2 + \sin(1/x)) - \cos(1/x)) ;$$

de plus, $\Delta_0 f(0) = f'(0) = 0$. Donc, $\Delta_0 f$ possède un minimum (global strict) à l'origine, alors que f' n'en a pas puisque son signe change une infinité de fois dans tout voisinage de 0. De même, f n'a pas de tilde en 0 puisque $\Delta_0 f$ n'est croissante sur aucun intervalle $[0; \varepsilon[$.

4. Considérons $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto -\sin|x|$ et $I =]-\pi; \pi[$. Bien que f soit déprimée en chaque point de I , elle n'est pas convexe sur I . (Voir la Figure 12.)

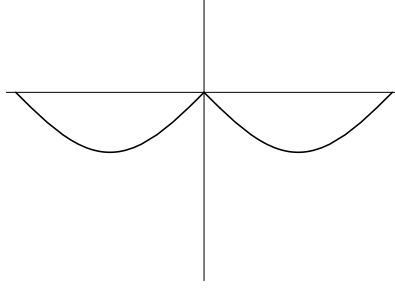


FIGURE 12

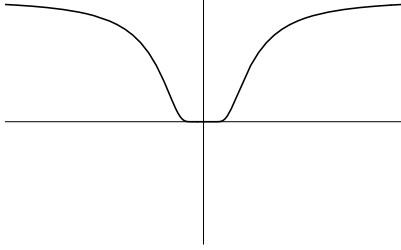


FIGURE 13

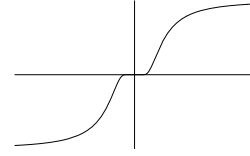


FIGURE 14

5. Soit f la fonction définie pour x non nul par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ et par $f(0) = 0$. (Voir la Figure 13.) Il est bien connu (voir [7] ou, pour plus de détails, [10]) que cette fonction possède des dérivées de tous ordres à l'origine et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . De plus, si $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2 \exp(-1/x^2) / x^3$$

et

$$f''(x) = 2 \exp(-1/x^2) \frac{2 - 3x^2}{x^6}.$$

Donc, $f''(x) > 0$ pour tout x dans $]-\sqrt{6}/3; \sqrt{6}/3[$, et par [2] (p. 182) ou [3], f est strictement convexe sur cet intervalle. Maintenant, soit g la fonction impaire définie pour les x strictement positifs par $g(x) = \exp(-1/x^2)$. (Voir la Figure 14.) D'après la discussion précédente, g a un tilde fort à l'origine ; mais il n'y a aucun n tel que $g^{(n)}(0) \neq 0$, bien que toutes ces dérivées existent.

6. Soit f la fonction impaire dont les valeurs sur $\mathbf{R}_+$ sont données par

$$f(x) = 2^{k-1} x \left(3 + \sin \pi \left(\frac{x}{2^k} - \frac{3}{2} \right) \right)$$

si $x \in [2^k; 2^{k+1}[$, $k \in \mathbf{Z}$. L'idée centrale de la construction de cette fonction est la suivante : considérons l'arc de sinussoïde

$$\{(x, \sin x) : -\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$$

dans son cadre, le rectangle de sommets $A = (\pi/2, -1)$, $B = (\pi/2, 1)$, $C = (-\pi/2, 1)$ et $D = (-\pi/2, -1)$. Alors, pour chaque entier k , déformons l'arc et son cadre pour les inscrire dans le trapèze de sommets $A_k = (2^{k+1}, 2^{2k+1})$, $B_k = (2^{k+1}, 2^{2k+2})$, $C_k = (2^k, 2^{2k+1})$ et $D_k = (2^k, 2^{2k})$. (Voir la Figure 15.) Le nœud de l'affaire est que B_k et C_k sont alignés avec O , de même que D_k et A_k . La partie négative du graphe est symétrique par rapport à l'origine.

L'origine est un tilde pour f (parce que les tangentes au graphe de f en les points d'abscisse positive coupent l'axe Oy en dessous de l'origine, et les tangentes au graphe en les points d'abscisse négative, au-dessus), mais ce n'est pas un tilde fort puisque f est convexe sur chacun des intervalles $[2^k; 2^{k+1}]$ et concave sur chaque $[2^k x_0; 2^{k+1}]$, où $x_0 \approx 1,61924$ est l'unique racine dans $]\frac{3}{2}; 2[$ de l'équation

$$\frac{\pi x}{2} = \operatorname{ctg} \pi \left(x - \frac{3}{2} \right).$$

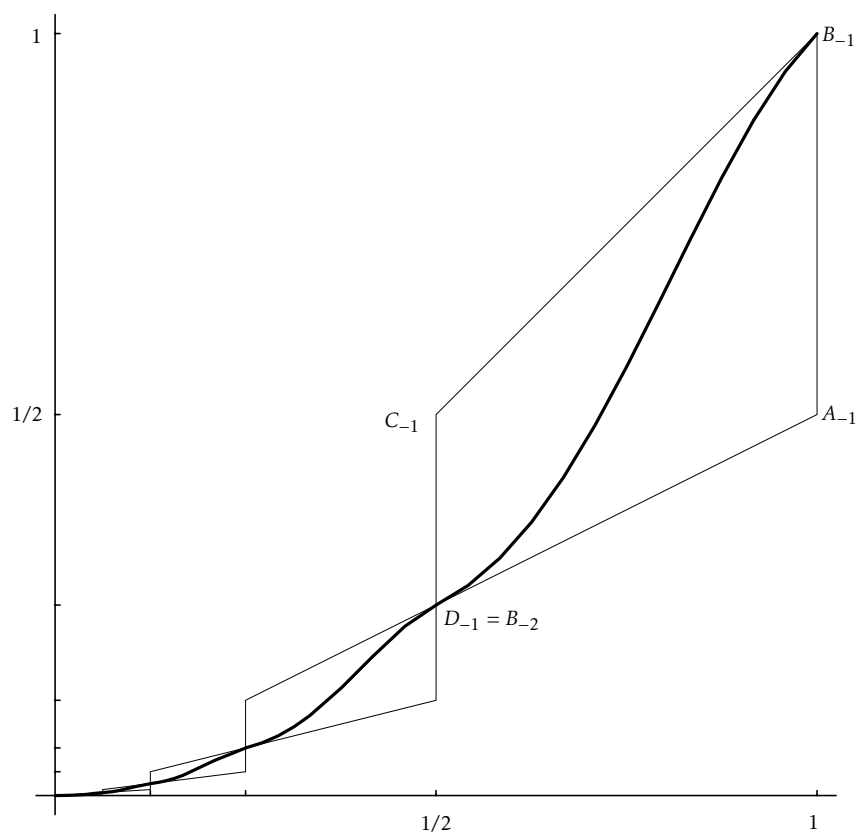


FIGURE 15

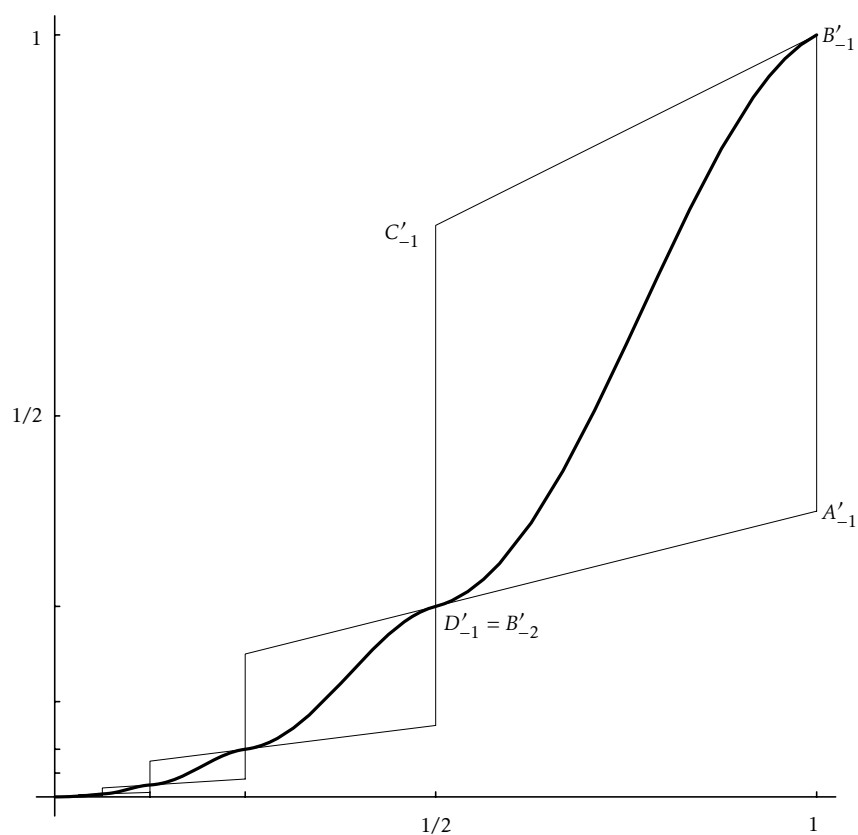


FIGURE 16

7. Cet exemple est une version modifiée de l'Exemple 6 (que nous conseillons d'étudier en premier).

Soit f la fonction impaire dont les valeurs sur $\mathbf{R}_+^*$ sont données par

$$f(x) = (5 \cdot 2^{2k-2} + 3 \cdot 2^{k-2}x) + (3 \cdot 2^{2k-2} + 2^{k-2}x) \sin \pi \left(\frac{x}{2^k} - \frac{3}{2} \right)$$

si $x \in [2^k, 2^{k+1}[$, $k \in \mathbf{Z}$.

Cette fois, le cadre rectangulaire $ABCD$ est déformé en le trapèze $A'_k B'_k C'_k D'_k$, où $A'_k = (2^{k+1}, 3 \cdot 2^{2k-1})$, $B'_k = (2^{k+1}, 2^{2k+2})$, $C'_k = (2^k, 3 \cdot 2^{2k})$ et $D'_k = (2^k, 2^{2k})$ (voir la Figure 16); ces points sont choisis de manière telle que les droites $B'_k C'_k$ et $D'_k A'_k$ coupent l'axe Oy au-dessus de l'origine.

Cette fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$, avec $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ lorsque $x \neq 0$. Dès lors, f' possède un minimum (global strict) à l'origine.

Cependant, f n'a pas de tilde à l'origine puisque, pour tout k ,

$$\frac{126 + 29\sqrt{3}}{3} \cdot 2^{2k-6} = f\left(\frac{11}{12} \cdot 2^k\right) > \frac{11}{12} \cdot f(2^k) = \frac{11}{12} \cdot 2^{2k}.$$

Références

- [1] Tom M. APOSTOL, *Calculus*, Vol. 1, Deuxième édition, J. Wiley & Sons, New York, 1967
- [2] Gabriel ARCHINARD, Bernard GUERRIEN, *Analyse mathématique pour économistes*, Economica, Paris, 1988
- [3] Jacques BAIR, Gentiane HAESBROECK, *Variations autour de la définition des fonctions convexes*, Mathématique et Pédagogie **105** (1996), 57–70 et **106** (1996), 27–41
- [4] Jacques BAIR, Guillermo HANSEN, *Propriétés différentielles des fonctions convexes*, Mathématique et Pédagogie **1??** (1996), ??–??
- [5] Georges CHILOV, *Analyse mathématique*, Tome I, Mir, Moscou, 1973 (traduit du russe)
- [6] Pascal DUPONT, *Une caractérisation des fonctions convexes sur un intervalle ouvert*, Mathématique et Pédagogie **1??** (1996), ??–??
- [7] Bernard R. GELBAUM, John M. H. OLMSTED, *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day, San Francisco, 1964
- [8] A. KARTACHEV, B. ROJDESTVENSKI, *Analyse mathématique*, Mir, Moscou, 1988 (traduit du russe)
- [9] Kelvin LANCASTER, *Mathematical Economics*, Macmillan, New York, 1968
- [10] Jean MAWHIN, *Analyse — Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992

Adresse des auteurs :

Pascal DUPONT, Nicole VAST
 Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux,
 U.E.R. de Mathématique,
 Passage des Déportés 2
 5030 Gembloux
 Courrier électronique : dupont@fsagx.ac.be