

La simulation du transport de nitrates dans un aquifère crayeux du Crétacé en Belgique :

approche expérimentale et numérique

*Simulation of nitrate transport in a Cretaceous Chalk aquifer
in Belgium: experimental and numerical approach*

Pierre BIVER*,**, Alain DASSARGUES*

Mots-clés: Expérience, Simulation numérique, Migration, Nitrate, Nappe eau, Craie, Crétacé.
Belgique

Résumé

Les pollutions des eaux souterraines par des nitrates sont de plus en plus fréquentes surtout dans les régions où l'agriculture intensive est pratiquée. L'aquifère de Hesbaye situé au Nord-Est de la Belgique, est la principale source d'eau potable de la région liégeoise. Cet aquifère est constitué de craies du Crétacé et depuis plusieurs années une montée régulière des teneurs en nitrates est constatée.

La double porosité du milieu crayeux constitue une des difficultés majeures pour décrire de façon précise le transport de nitrates dans la nappe. On distingue la porosité due aux pores dans la matrice crayeuse et d'autre part celle due aux fractures et aux fissures.

Pour représenter et simuler la contamination de l'eau contenue dans les fractures, le concept bien connu d'Elément de Volume Représentatif (EVR) a été adopté comme hypothèse de travail de manière à utiliser un modèle gouverné par les équations classiques d'advection-dispersion. Ensuite, à l'intérieur de l'EVR, la contamination de l'eau des pores est prise en compte en considérant un coefficient de transfert de l'eau mobile des fissures vers l'eau immobile des pores représentant ainsi le processus de dispersion dans les pores de la matrice crayeuse.

Dans un premier temps, des données expérimentales ont été recueillies, fournissant notamment le coefficient de diffusion moléculaire et les valeurs de dispersivités au sein des pores, nécessaires pour déterminer le coefficient de transfert dans l'EVR fissuré. Ensuite, des simulations ont été réalisées en utilisant un code aux Eléments Finis. Une méthode d'upwind objective et un schéma spécial d'intégration temporelle ont été adoptés.

Actuellement, le modèle peut résoudre l'équation à deux dimensions de la convection - dispersion en régime transitoire tout en tenant compte de processus « secondaires » tels que l'adsorption linéaire sur le solide et l'effet d'eau immobile.

Abstract

Contamination of ground water by nitrates is becoming increasingly frequent in regions where intensive agriculture is practised. The Hesbaye aquifer in northeastern Belgium is the main source of drinking water in the Liege region. This aquifer is contained by Cretaceous Chalk and a regular increase in nitrate concentration has been recorded over the past few years.

Because the Chalk has a double porosity it is difficult to determine exactly how nitrates are transported in the ground water. One porosity is due to the Chalk matrix pores and the other is due to fractures and fissures.

To represent and simulate the contamination of the fracture water, the well-known concept of Representative Volume Element (RVE) was adopted as a working hypothesis so as to be able to use a model governed by

* Laboratoires de géologie de l'ingénieur, d'hydrogéologie et de prospection géophysique (LGIH), Université de Liège, Sart Tilman, Bât. B 19, 4000 Liège, Belgique.

** Département de mécanique des matériaux, Stabilité des constructions et mécanique des structures, MSM, Université de Liège.

standard advection-dispersion equations. The contamination of the pore waters is then incorporated within the RVE by considering a transfer coefficient for the water moving through the fissures towards the static water in the pores, thus representing dispersion in the Chalk matrix pores.

The first step was to gather experimental data which, notably, provided the coefficient of molecular diffusion and the dispersivity values within the pores, necessary for determining the coefficient of transfer within the fractured RVE. Simulations were then made using a Finite Element code. An upwind objective method and a special time integration pattern were adopted.

At present the model can resolve the equation for 2-D convection-dispersion in a non-steady state regime, whilst taking into account « secondary » processes such as linear adsorption on the solid and the effect of static water.

Introduction

Les plateaux crayeux recouverts de limons sont des zones où une agriculture intensive est souvent pratiquée en Europe occidentale. Les nappes aquifères contenues dans les craies subissent par conséquent un apport important en nitrates.

Relativement peu de modèles mathématiques ont été élaborés pour simuler le transport des nitrates car on considère généralement que les processus de transfert sont compliqués par des interactions chimiques complexes (adsorption non linéaire et non isotherme, dégradation,...). Dans l'aquifère de Hes-

baye, situé près de Liège en Belgique, il semblerait que ces phénomènes sont actifs presque exclusivement dans les terrains superficiels surmontant la zone crayeuse saturée de l'aquifère. Par conséquent, ils peuvent être décrits par des modèles chimiques limités à la zone non saturée.

Nous nous attacherons, dans la suite, à décrire le transport des nitrates dans la partie saturée de l'aquifère crétacé de Hesbaye en négligeant les interactions chimiques.

Les équations de convection - dispersion peuvent s'écrire en exprimant les équations de conservation de la masse respectivement dans l'eau mobile, dans l'eau immobile et au contact du solide :

$$Rd_m \cdot \frac{\partial C_m}{\partial t} + \text{div} (v \cdot C_m) - \text{div} (D_h \cdot \text{grad} \cdot C_m) + A_m \cdot C_m - \alpha_m \cdot C_{im} = 0 \quad (1)$$

$$Rd_{im} \cdot \frac{\partial C_{im}}{\partial t} + A_{im} \cdot C_{im} - \alpha_{im} \cdot C_m = 0 \quad (2)$$

$$F + K_d \cdot (C_{im} + C_m) = 0 \quad (3)$$

avec les coefficients suivants :

$Rd_{im} = 1 + \theta_s / \theta_{im} \cdot \rho_s \cdot (1-p) \cdot K_d$ = coefficient de retard dans l'eau immobile

$Rd_m = 1 + \theta_s / \theta_m \cdot \rho_s \cdot p \cdot K_d$ = coefficient de retard dans l'eau mobile

$A_{im} = k_{im} + (Rd_{im} - 1) \cdot k_s + \alpha_{im}$

$A_m = k_m + (Rd_m - 1) \cdot k_s + \alpha_m$

$\alpha_{im} = \alpha_d^* / \theta_{im}$

$\alpha_m = \alpha_d^* / \theta_m$

\vec{v} = vitesse moyenne effective

D_h = tenseur de dispersion hydrodynamique

C_m = concentration volumique de nitrates dans l'eau mobile

C_{im} = concentration volumique de nitrates dans l'eau immobile

θ_x = fraction volumique de x

k_x = constante de dégradation du polluant dans x

p = fraction de la surface de contact solide-liquide concernée par l'eau mobile

α_d^* = constante de transfert entre l'eau mobile et l'eau immobile

ρ_s = masse spécifique du solide

Dans ces équations, il est tenu compte de l'effet d'eau immobile, de l'adsorption et dégradation linéaires, de la convection, de la diffusion moléculaire et de la dispersion mécanique. Il est nécessaire de considérer tous ces processus dans un élément de volume représentatif [Bear et Verruijt, 1987] et surtout d'en déterminer les paramètres en fonction de cette hypothèse.

Dans la craie du Crétacé, on peut supposer que la dégradation et l'adsorption sont faibles et que par conséquent $A_{im} = \alpha_{im}$, $A_m = \alpha_m$, $Rd_{im} = Rd_m = 1$.

La vitesse \vec{v} , au sens de Darcy, est fournie par un modèle écoulement tridimensionnel de la nappe de Hesbaye [Dassargues *et al.*, 1988] utilisant la méthode des éléments finis en régime transitoire depuis l'année 1951 jusqu'à nos jours.

Le tenseur de dispersion hydrodynamique doit être obtenu à partir d'essais de traçage *in situ* et des tests de dispersion en laboratoire sur des échantillons de grandes tailles (pour inclure un nombre suffisamment représentatif de fissures). Le dernier paramètre à évaluer sera α_d^* caractérisant le transfert

de polluant en solution de l'eau mobile vers l'eau immobile et *vice versa*. Dans le milieu poreux crayeux à double porosité, ce coefficient est caractéristique principalement de la porosité de la matrice crayeuse. En effet, la perméabilité de cette matrice poreuse est très largement inférieure à celle des fissures (10^{-8} m/s pour 10^{-4} m/s respectivement). De ce fait, pour la détermination de α^* , une étude approfondie des processus de transfert dans la craie non fissurée est nécessaire pour prouver l'adéquation des concepts théoriques à la réalité physique.

1. - Etude expérimentale

1.1. - Essais réalisés sur la matrice crayeuse

Deux séries d'essais sont réalisés avec un dispositif de circulation d'eau polluée assurant une concentration constante aux frontières. Les premiers essais sont uniquement diffusifs, de différentes durées (de

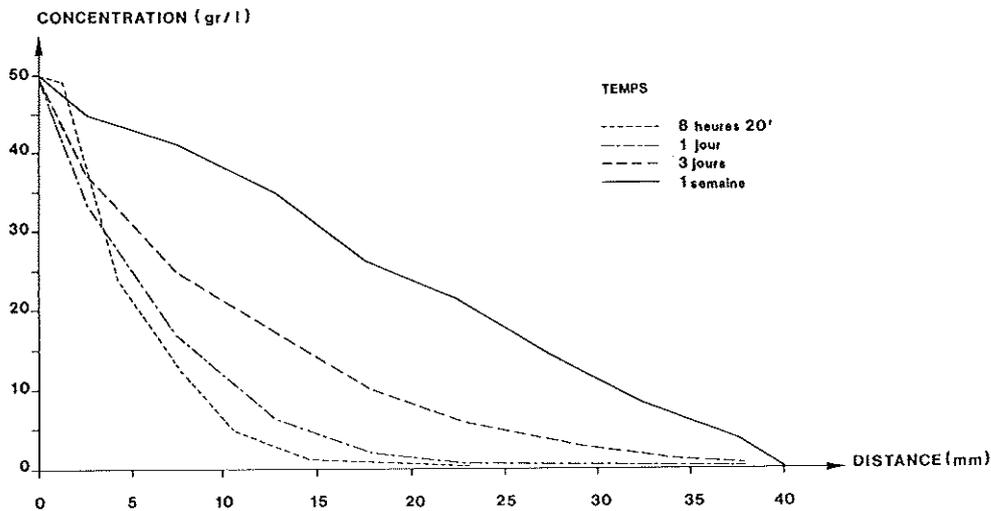


Fig. 1. - Essais de diffusion moléculaire, un bloc de matrice crayeuse est mis en contact avec une solution à 50 gr/l en nitrates : pénétration du polluant en fonction du temps (Molecular diffusion tests; a block of Chalk matrix is placed in contact with a solution of 50 g/l nitrates: penetration of the pollutant versus time)

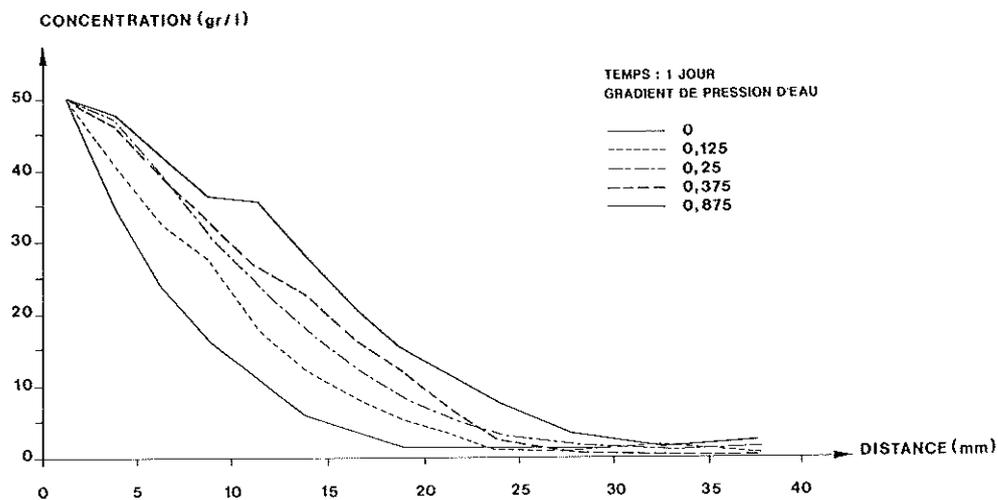


Fig. 2. - Essais de dispersion : pénétration du polluant en fonction du gradient (Dispersion tests: penetration of the pollutant versus gradient)

8 heures à une semaine), les autres incluent la composante de dispersion puisque les échantillons sont soumis à différents gradients de pression (de 0 à 0,875). Les résultats de ces essais sont repris aux figures 1 et 2. Les contenus en nitrates dans la craie sont déterminés par analyses chimiques (après découpage de l'échantillon testé, broyage et lessivage à l'eau, la mesure est faite à l'électrode spécifique dans la solution obtenue).

Les résultats obtenus sont interprétés sur base de solutions analytiques et numériques. En considérant qu'il n'y a pas d'adsorption dans la matrice crayeuse, le coefficient de diffusion moléculaire D_m est estimé à $4.5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ (essais diffusifs). Lorsque la vitesse de l'eau n'est pas nulle (essais dispersifs), il est possible de déterminer la dispersivité longitudinale α_L égale dans ce cas ci à 0.11 m. Ces valeurs sont comparables à celles obtenues en laboratoire par Porel [1988] à l'occasion d'essais de traçage à l'uranine : $3.4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ pour le coefficient de diffusion moléculaire et 0.02 à 0.2 m pour la dispersivité longitudinale.

Pour vérifier le caractère intrinsèque du coefficient de dispersivité longitudinale, on recherche la corrélation avec la vitesse effective (fig. 3); une régression quasi linéaire est possible excepté pour deux échantillons manifestement moins poreux ou moins « microfissurés » que les autres. Ceci nous amène à reconnaître que la distinction entre chenaux poreux et microfissures n'est pas toujours nette; en fait, les microfissures peuvent être détectées à l'échelle de l'échantillon (décimétrique) mais dans ce cas, le coefficient obtenu n'est pas représentatif de la matrice poreuse.

1.2. - Détermination du coefficient de transfert eau mobile - eau immobile dans la matrice crayeuse

Considérant que la majeure partie de l'eau immobile est constituée de l'eau continue dans les pores de la matrice, il y correspond alors 42 % du volume total de l'eau contre 2 % dans les fissures. Par une simulation du transport de polluant dans un bloc de matrice crayeuse, avec des concentrations imposées aux frontières, il est possible d'évaluer l'évolution dans le temps de la concentration moyenne dans l'eau de pores et en déduire la valeur de α_d^* .

Sans dégradation de polluant et sans adsorption, l'équation de bilan de la masse d'eau immobile s'écrit :

$$\frac{\partial C_{im}}{\partial t} + \frac{\alpha_d^*}{\theta_{im}} (C_{im} - C_m) = 0 \quad (4)$$

Si la concentration en polluant dans l'eau mobile (C_m) ne varie pas avec le temps, cette équation peut être intégrée comme suit :

$$C_{im} = C_m (1 - e^{-\alpha_d^* / \theta_{im} \cdot t}) \quad (5)$$

où $\theta_{im} = \theta_{pores} = 42 \%$, C_m et t sont connus.

Par simulation numérique, à une valeur de concentration en polluant dans l'eau immobile (C_{im}) correspond une valeur déduite de α_d^* . Les valeurs de α_d^* sont reprises à la figure 4, elles sont relativement constantes (de $6.8 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ à $2.4 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$) et par conséquent, nous pourrions prendre l'hypothèse qu'il s'agit d'un paramètre intrinsèque du milieu poreux équivalent. Cependant, dans cette approche la dispersion mécanique n'a pas été prise en compte. D'autres

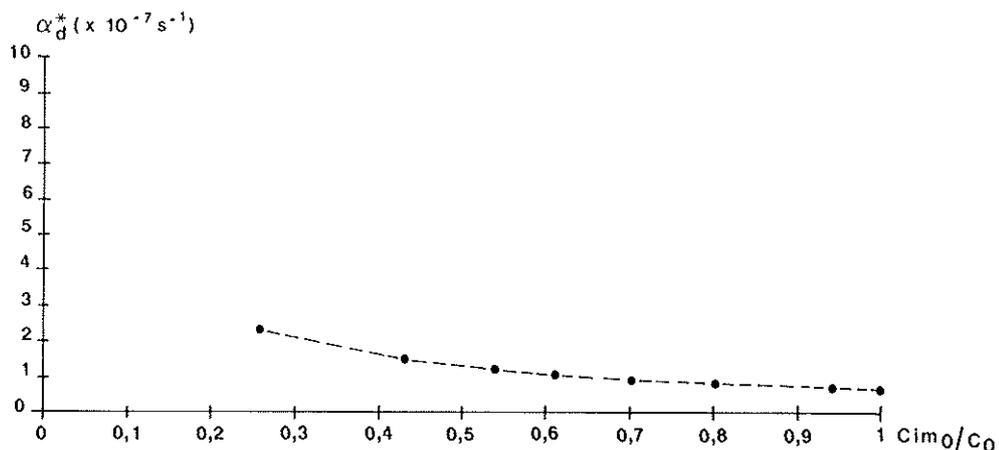


Fig. 3. - Dispersion mécanique corrélée à la vitesse effective de l'eau (Mechanical dispersion correlated with the effective velocity of the water)

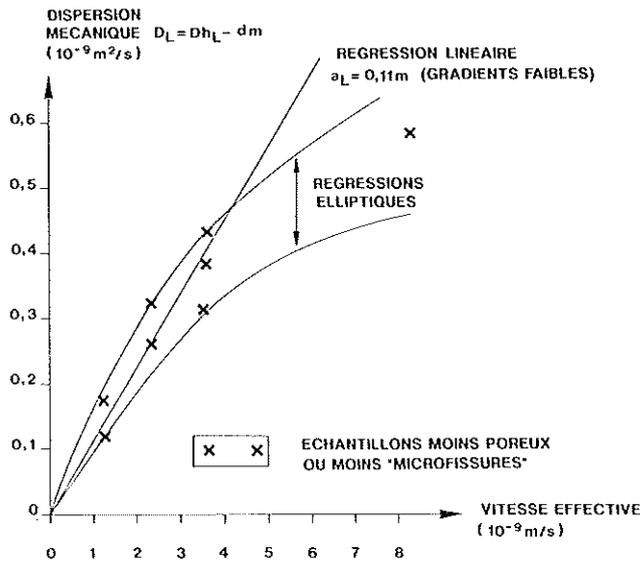


Fig. 4. - Evolution du coefficient α^* en fonction du rapport des concentrations en nitrates dans l'eau immobile et l'eau mobile (Trend of the coefficient α^* versus the ratio of nitrate concentrations in static and mobile water).

simulations numériques peuvent être faites en incluant ce processus. Cependant le gradient hydraulique maximum dans l'aquifère étudié étant limité à environ $0.5 \cdot 10^{-2}$, la dispersion mécanique à l'intérieur de la matrice crayeuse ne représentera pas plus de 5 % de la dispersion hydrodynamique totale.

Le transport de polluant à l'intérieur des blocs crayeux non fissurés ou seulement microfissurés est principalement diffusif.

$$\int_{\Delta t} \int_{\Delta V} L(N_1(t'), N_i(\vec{x}), C_{mi}^{tn} + N_2(t'), N_i(\vec{x}), C_{mi}^{tn+1}) \cdot W_i(\vec{x}, t') \cdot dv \cdot dt' = 0 \text{ pour } i = 1, N \quad (6)$$

où $N_1(t') = 1 - t'/\Delta t$ } fonctions d'interpolations
 $N_2(t') = t'/\Delta t$ } temporelles
 $N_i(\vec{x})$ sont les fonctions classiques d'interpolation spatiale

C_{mi} sont les concentrations nodales
 $W_i(\vec{x}, t)$ sont les fonctions tests ou les fonctions de pondération spatio-temporelles.

$$W_i(\vec{x}, t) = N_i(\vec{x}) \cdot F(t') + \alpha \cdot \frac{\Delta x \parallel}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \text{grad}(N_i(\vec{x})) \cdot F(t') \quad (7)$$

où α est le coefficient de décentrage
 $\Delta x \parallel$ est la largeur de l'élément dans la direction de la vitesse \vec{v}

2. - Recherche numérique

2.1. - Bases de la méthode Full Upwind Petrov Galerkin (FUPG)

La méthode des Eléments Finis classique [Zienkiewicz, 1977] ne convient pas pour résoudre l'équation d'advection - diffusion, et une formulation particulière sera nécessaire.

L'équation à résoudre contient à côté des dérivées spatiales secondes, des dérivées spatiales premières (terme en $\vec{v} \cdot \text{grad}$). Numériquement, ces deux types de termes ont des comportements très différents et l'intégration par le schéma classique de Bubnov - Galerkin qui fonctionne bien pour des équations ne contenant que des dérivées spatiales secondes se heurte à de sérieuses difficultés [Munhoven, 1992; Biver, 1991] qui se traduisent par des oscillations, instabilités, diffusion numérique parasite, etc. Ces phénomènes apparaissent au fur et à mesure que l'advection augmente. C'est donc quand l'advection prend de l'ampleur que le schéma d'intégration numérique doit être modifié. Le rapport entre les flux advectifs et dispersifs peut être caractérisé par le nombre de Péclet; lorsque celui-ci croît la méthode de Bubnov - Galerkin devient inapplicable. Pour résoudre ce problème, on est amené à donner plus de poids aux termes « amonts » (par rapport à la vitesse de convection), donc à choisir des fonctions de pondération spatiale décentrées, différentes des fonctions de forme. Cette procédure est connue sous le nom de méthode de Petrov - Galerkin.

Supposons que $L(C_m) = 0$ est l'expression de l'équation d'équilibre local. L'équilibre moyen est obtenu comme suit :

Dans le cas à deux dimensions, le décentrage spatial a lieu de préférence uniquement dans la direction de l'écoulement, puisque c'est le terme convectif, dirigé suivant \vec{v} qui induit les problèmes. Il s'agit alors de la méthode appelée « Streamline Upwind Petrov - Galerkin » utilisant les fonctions de pondération suivantes :

Christie *et al.* [1976] ont montré que dans le cas unidimensionnel, à vitesse constante et régime permanent, les valeurs exactes aux nœuds sont trouvées par cette méthode moyennant :

$$\alpha = \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{2}{Pe} \quad (8)$$

où $Pe = \frac{v \cdot \Delta x}{D_h}$ est le nombre de Péclet utilisé
 $D_h = D_m + a_L \cdot v$

Le même choix donne aussi de bons résultats lorsqu'on l'utilise pour effectuer le décentrage spatial unidirectionnel dans les cas à deux dimensions [Munhoven, 1992].

Pour le régime transitoire, Biver [1991] indique

$$W_i(\vec{x}, t) = N_i(\vec{x}) \cdot F(t') + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \text{grad}(N_i(\vec{x})) \cdot F(t') + \beta \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \text{grad}(N_i(\vec{x})) \cdot \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial F(t')}{\partial t'} \quad (9)$$

Heinrich et Yu [1986] proposent les fonctions de pondération temporelle suivantes :

$$F(t') = 4 \cdot N_1(t') \cdot N_2(t') \quad (10)$$

α et β sont les coefficients de décentrage, choisis de telle manière que la solution exacte aux nœuds soit trouvée pour un problème unidimensionnel :

$$\alpha = \coth\left(\frac{Pe}{2}\right) - \frac{2}{Pe} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{Cr}{3} - \frac{2\alpha}{Pe \cdot Cr}$$

où $Cr = \frac{v \cdot \Delta t}{\Delta x}$ est le nombre de Courant

2.2. - Simulation des processus secondaires du transport de polluant

a) Dégradation et adsorption

La technique FUPG est une méthode d'intégra-

$$R_{dim} \cdot \frac{\partial C_{im}}{\partial t'} + A_{im} C_{im} - \alpha_{im} [N_1(t') \cdot C_{im}^m + N_2(t') \cdot C_{im}^{m+1}] \quad (12)$$

Cette équation est résolue analytiquement et la va-

$$C_{im}(t') = [C_{im}^m - \alpha_{im} \cdot R_{dim} / A_{im} \cdot (C_{im}^m / R_{dim} - C_{im}^{m-tn+1} / A_{im})] \cdot e^{-A_{im} t' / R_{dim}} + \alpha_{im} \cdot R_{dim} / A_{im} \cdot (C_{im}^m / R_{dim} - C_{im}^{m-tn+1} / A_{im}) \quad (13)$$

où $C_{im}^{m-tn+1} = \frac{C_{im}^{m+1} - C_{im}^m}{\Delta t}$

L'équation (13) peut être introduite dans l'équation de bilan de masse de l'eau mobile. L'équation résultante n'est alors exprimée qu'en fonction de la concentration de polluant dans l'eau mobile et peut être résolue numériquement par la méthode FUPG exposée plus haut.

Comme les fonctions de pondération de la mé-

thode FUPG varient avec le temps, l'effet d'eau immobile est pris en compte sur tout le pas de temps par la fonction $F(t')$ et sa dérivée. De bons résultats sont trouvés pour des problèmes uni et bidimensionnels, sans modifier les valeurs de α et β . Les simulations de la migration d'un « pulse » et d'une discontinuité avec advection et effet d'eau immobile sont illustrées aux figures 5a et 5b. D'autres valeurs de α et β peuvent toujours être recherchées par une analyse d'erreur.

que les fonctions de pondération temporelle symétriques sont supérieures aux dissymétriques pour assurer un minimum de diffusion numérique. Le décentrage de l'équation (7) s'avère souvent insuffisant et pour représenter la variation temporelle du stockage (terme en $\frac{\partial C}{\partial t}$), on est amené à compléter la méthode « Streamline Upwind Petrov - Galerkin » par un décentrage supplémentaire portant sur l'espace et le temps. La méthode est alors appelée « Full Upwind Petrov - Galerkin » et se sert des fonctions de pondération suivantes :

tion consistante, il n'est donc pas difficile de tenir compte de ces deux processus dans le modèle si la même interpolation peut être utilisée pour les deux. Des résultats de simulation ont montré [Biver, 1991] une bonne précision pour le cas de la migration d'un « pulse » de polluant avec dégradation et adsorption. Ces constatations sont évidentes pour cette dernière, car si elle est considérée comme linéaire, il n'est pas surprenant qu'elle induise uniquement une multiplication de la dérivée temporelle de la concentration par une constante scalaire.

Pour la dégradation, Codina *et al.* [1990] ont montré qu'avec une méthode upwind consistante il était possible de garder une précision satisfaisante pour les termes linéaires.

b) L'effet d'eau immobile

Si la discrétisation temporelle relative à la concentration de polluant dans l'eau mobile est introduite dans l'équation de conservation de la masse de l'eau immobile, on obtient :

riation temporelle de l'eau immobile est trouvée :

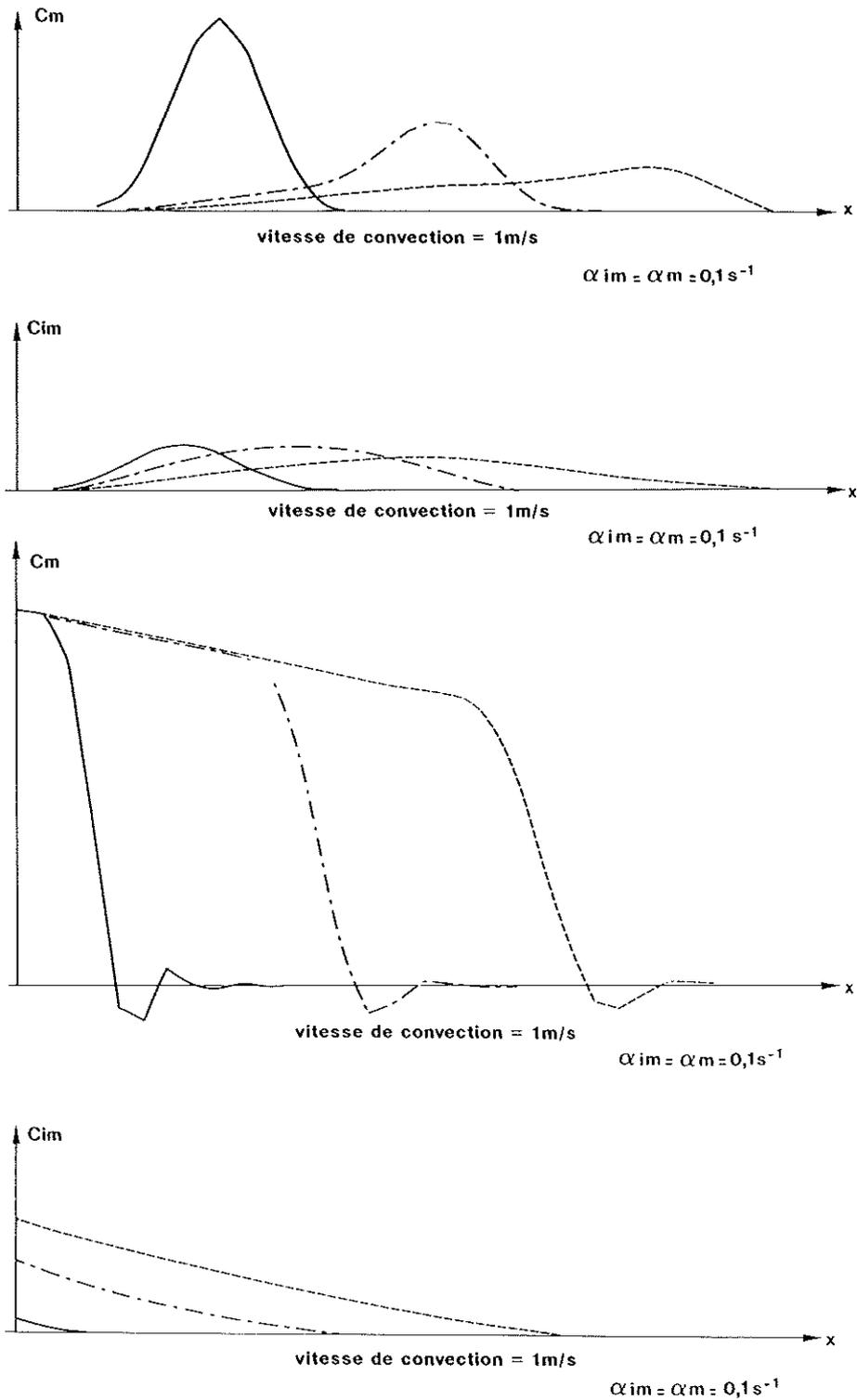


Fig. 5. - Advection d'un « pulse » de polluant (en haut) et d'une discontinuité en polluant (en bas), en tenant compte de l'effet d'eau immobile : diagrammes des concentrations contenues dans l'eau mobile (C_m) et dans l'eau immobile (C_{im}) (Advection of a pollutant « pulse » (top) and a pollutant discontinuity (bottom) taking into account the effect of static water : concentration diagrams for mobile water (C_m) and static water (C_{im}))

Conclusions

L'approche déterministe qui a été choisie pour simuler le transport des nitrates dans le milieu poreux crayeux à double porosité a dans un premier stade exigé deux types de recherches : une étude expérimentale du milieu poreux crayeux et une recherche numérique afin de résoudre les équations d'advection - diffusion.

D'un point de vue expérimental, les caractéristiques de l'effet d'eau immobile dans la matrice crayeuse ont pu être déterminées. D'autre part, les valeurs des dispersivités à différentes échelles dans l'aquifère crayeux de Hesbaye font l'objet de nos études expérimentales actuelles par traçages en écoulements convergents et uniformes. La simulation de ces essais de traçages permettra la détermination des coefficients de dispersion à prendre en compte dans notre modèle tout en tenant compte de processus habituellement négligés comme notamment l'effet d'eau immobile.

Pour ce faire, la construction d'un modèle n'introduisant qu'un minimum de dispersion numérique et pouvant tenir compte d'un maximum de phénomènes intervenant dans le transport des nitrates a été entreprise. La méthode FUPG présentée ci-dessus permet de résoudre les équations concernées mais d'autres méthodes seront développées également, notamment les méthodes mixtes Eulériennes - Lagrangiennes.

Remerciements

Les développements numériques ont été réalisés sur le code aux Eléments Finis LAGAMINE du département MSM de l'Université de Liège. Ce code est développé actuellement dans le domaine de la modélisation des réservoirs souterrains par le MSM et les LGIH (Laboratoires de géologie de l'ingénieur, d'hydrogéologie et de prospection géophysique) grâce au soutien financier du Service de la politique scientifique de la Communauté française de Belgique.

La portabilité sur un système IBM/Risc 6000 des développements numériques est rendue possible grâce au soutien d'IBM Belgique.

Références bibliographiques

- BEAR J., VERRUJYT A. (1987). - Modelling groundwater flow and pollution. - 415 p., Reidel Publ. Company.
- BIVER P. (1990). - Recherche phénoménologique sur la propagation des polluants dans un milieu poreux et application à un cas concret. - Rapport IRSIA, Université de Liège, non publié.
- BIVER P. (1991). - Recherche phénoménologique sur la propagation des polluants dans un milieu poreux et application à un cas concret. - Rapport IRSIA, Université de Liège, non publié.
- CHRISTIE I., GRIFFITHS D.F., MITCHELL A.R., ZIENKIEWICZ O.C. (1976). - Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. - *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 10, pp. 1389-1396.
- CODINA R., ONATE E., CERVERA M. (1990). - The intrinsic time for the FUPG formulation using quadratic elements, submitted to the International Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- DASSARGUES A., BIVER P., MONJOIE A., CHARLIER R., CESCOTTO S. (1989). - Contrat d'étude de la modélisation des phénomènes de pollution dans l'aquifère « Crétacé de Hesbaye ». - Rapport HESB 891 pour la région wallonne de Belgique, non publié.
- DASSARGUES A., RADU J.P., CHARLIER R. (1988). - Finite element modelling of a large water table aquifer in transient conditions. - *Adv. in Water Resources*, vol. 11, pp. 58-66.
- HEINRICH J.C. and YU C. (1986). - Petrov Galerkin methods for the time-dependent convective transport equation. - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 883-901.
- HUSSAIN A.K.M. (1981). - The laboratory determination of longitudinal and lateral dispersion coefficient in unidirectional groundwater flow. - Ph. D. Thesis.
- IDELSÖHN S.R. (1989). - Upwind techniques via variational principles. - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 769-784.
- LOUIS Cl. (1968). - Etude des écoulements d'eau dans les roches fissurées et de leur influence sur la stabilité des massifs rocheux. - Thèse présentée à l'Université de Karlsruhe, C.F. Bulletin de la direction des études et recherches, Série A.
- MUNHOVEN S. (1992). - Modélisation d'un aquifère salé, Mémoire pour l'obtention du grade d'ingénieur civil, Année 1991-1992, Faculté des Sciences appliquées, non publié.
- MULLER O. (1990). - Etude expérimentale et simulation numérique d'une pollution miscible dans un aquifère crayeux. - Mémoire pour l'obtention du grade d'ingénieur civil géologue, Année 1989-1990, Faculté des sciences appliquées, non publié.
- POREL G. (1988). - Transfert de soluté en aquifère crayeux, causes de modifications des résultats de traçages. - Université de Lille.
- ZIENKIEWICZ O.C. (1987). - The Finite Element Method. - 787 p., Mc Graw-Hill, London.