Triangles de Pascal et compagnie

Travail en collaboration avec Julien Leroy et Michel Rigo

Manon Stipulanti Boursière FRIA

Séminaire compréhensible
19 avril 2017

Dans les épisodes précédents...

Triangle de Pascal classique

$\binom{m}{k}$		k							
		0	1	2	3	4	5	6	7
	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	2	1	2	1	0	0	0	0	0
m	3	1	3	3	1	0	0	0	0
	4	1	4	6	4	1	0	0	0
	5	1	5	**10**	**10**	5	1	0	0
	6	1	6	15	**20**	15	6	1	0
	7	1	7	21	35	35	21	7	1

Coefficient binomial classique d'entiers :

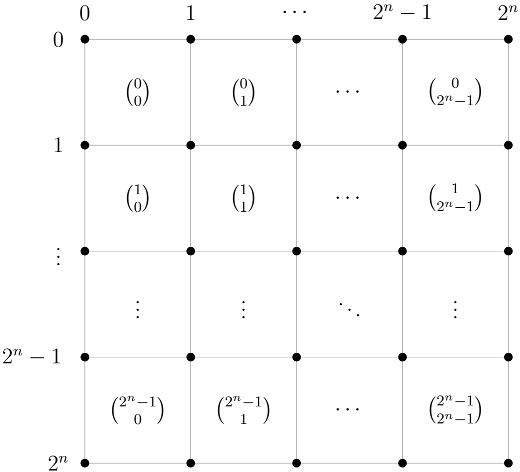
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

Règle de Pascal :

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$$

Une construction

- Grille : intersection entre $\mathbb{N}^2$ et $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

- Colorier la grille :
  Colorier les 2^n lignes et colonnes du triangle de Pascal

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

en

- blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
- noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$

- Colorier la grille :
  Colorier les 2^n lignes et colonnes du triangle de Pascal

$$\left(\binom{m}{k} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$

  en
  - blanc si $\binom{m}{k} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{m}{k} \equiv 1 \bmod 2$
- Normaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
  $\rightsquigarrow$ Suite de compacts dans $[0,1] \times [0,1]$

Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$

Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$

0 1

$$\binom{0}{0}$$

1

Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$

0 1

$$\binom{0}{0}$$

1

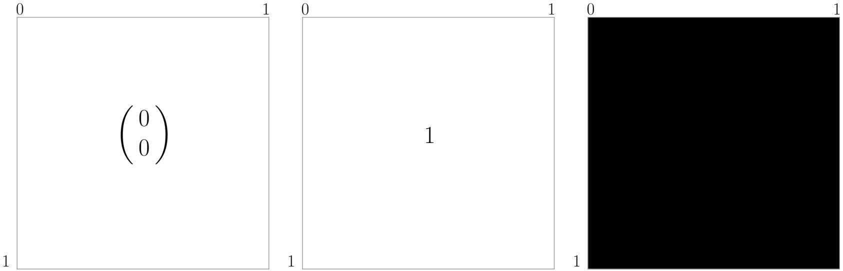
0 1

1

1

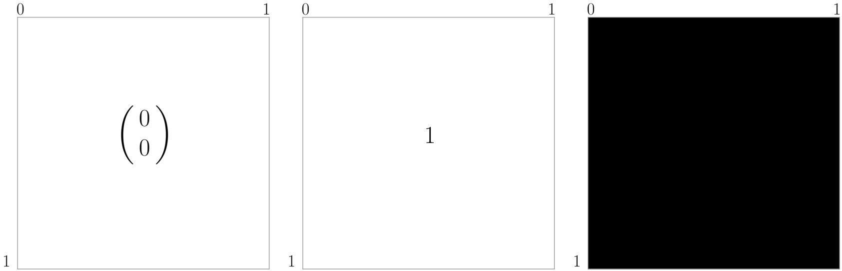
Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$



Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$



$n = 1$

$n = 0$

0 1

$\binom{0}{0}$

1

0 1

1

1

0 1

1

$n = 1$

0 2

$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$

2

Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$

0 1

$\binom{0}{0}$

1

0 1

1

1

0 1

1

$n = 1$

0 2

$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$

2

0 2

1	0
1	1

2

Exemples pour $n = 0$ et $n = 1$

$n = 0$

0 1

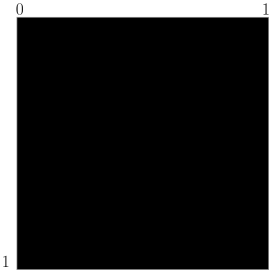
$\binom{0}{0}$

1

0 1

1

1



$n = 1$

0 2

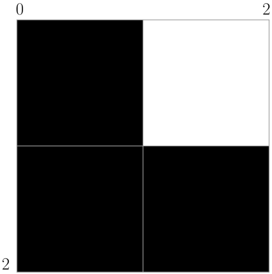
$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$

2

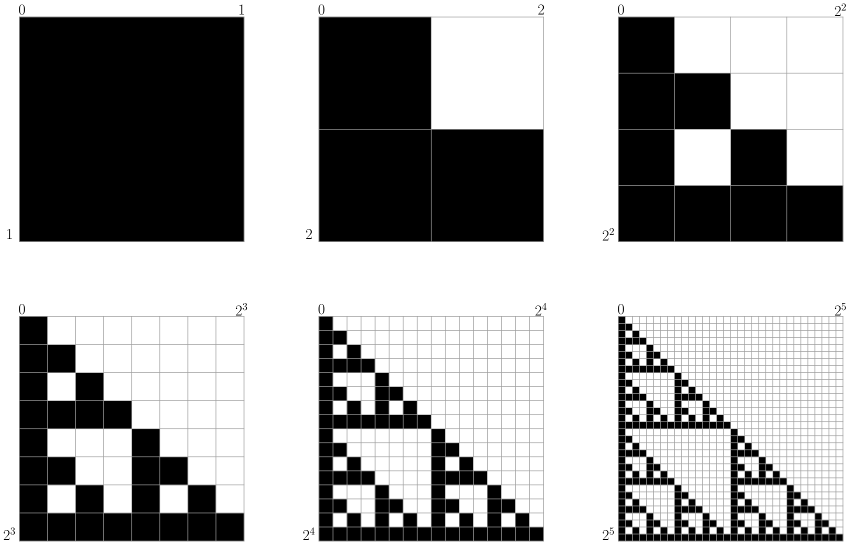
0 2

1	0
1	1

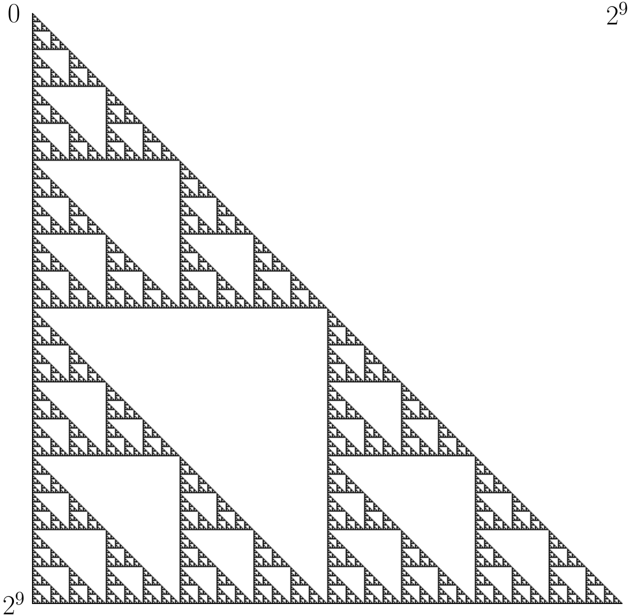
2



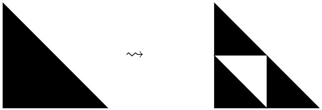
Les six premiers éléments de la suite



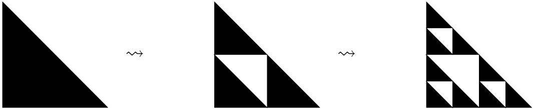
Le dixième élément de la suite



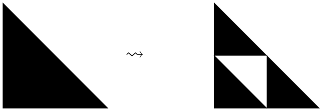
Un autre objet : le triangle de Sierpiński

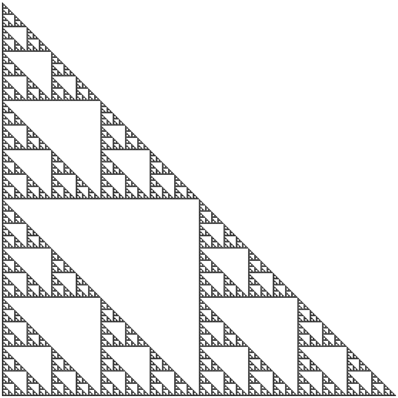


Un autre objet : le triangle de Sierpiński



Un autre objet : le triangle de Sierpiński





Fait folklorique

La suite que l'on vient de construire converge, pour la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Fait folklorique

La suite que l'on vient de construire converge, pour la distance de Hausdorff, vers le triangle de Sierpiński (lorsque n tend vers l'infini).

Définition :

- *ϵ-épaissi* d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^2$

$$[S]_\epsilon = \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$$

- $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^2), d_h)$ espace complet des compacts non vides de $\mathbb{R}^2$ muni de la *distance de Hausdorff* d_h

$$d_h(S, S') = \min\{\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid S \subset [S']_\epsilon \quad \text{et} \quad S' \subset [S]_\epsilon\}$$

Remarque
(F. von Haeseler, H.-O. Peitgen, G. Skordev, 1992)

En prenant d'autres modulos, la suite converge aussi vers un objet limite.
Par exemple, la suite converge lorsque le triangle de Pascal est considéré modulo p^s où p est premier, s est un entier positif.

Nouvelle idée

Remplacer les coefficients binomiaux d'entiers par les coefficients binomiaux de mots finis

<u>Définition</u> : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Exemple : $u = 101001$ $\qquad v = 101$

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Exemple : $u = \mathbf{101}001$ $\quad$ $v = 101$ $\quad$ 1 occurrence

Coefficients binomiaux de mots finis

<u>Définition</u> : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

<u>Exemple</u> : $u = \mathbf{10}100\mathbf{1}$ $\quad v = 101 \quad$ 2 occurrences

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Exemple : $u = \mathbf{101}0\mathbf{01}$ $\qquad v = 101 \qquad$ 3 occurrences

Coefficients binomiaux de mots finis

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Exemple : $u = 101\mathbf{01}$ $\qquad v = 101$ $\qquad$ 4 occurrences

Définition : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

Exemple : $u = 101001$ $\qquad$ $v = 101$ $\qquad$ 5 occurrences

Coefficients binomiaux de mots finis

<u>Définition</u> : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

<u>Exemple</u> : $u = 10\mathbf{1}0\mathbf{01}$ $\quad v = 101 \quad$ 6 occurrences

Coefficients binomiaux de mots finis

<u>Définition</u> : Un *mot fini* est une suite finie de lettres appartenant à un ensemble fini que l'on appelle *alphabet fini*.

Coefficient binomial de mots finis

Soient u, v deux mots finis.
Le *coefficient binomial* $\binom{u}{v}$ de u et v le nombre de fois que le mot v apparaît en tant que sous-suite du mot u (en tant que mot "éclaté" ou sous-mot).

<u>Exemple</u> : $u = 101001 \qquad v = 101$

$$\Rightarrow \binom{101001}{101} = 6$$

Remarque :
Généralisation naturelle des coefficients binomiaux d'entiers

Avec un alphabet à une lettre $\{a\}$

$$\binom{a^m}{a^k} = \binom{\overbrace{a\cdots a}^{m \text{ fois}}}{\underbrace{a\cdots a}_{k \text{ fois}}} = \binom{m}{k} \quad \forall\, m, k \in \mathbb{N}$$

Cadre de travail

Définition :

- $\mathrm{rep}_2(n)$ représentation (gloutonne) en base 2 de $n \in \mathbb{N}_{>0}$ qui commencent par 1
- $\mathrm{rep}_2(0) := \varepsilon$ où ε est le mot vide
- $L_2 = \{\varepsilon\} \cup 1\{0,1\}^*$

n		$\mathrm{rep}_2(n)$
0		ε
1	1×2^0	1
2	$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	10
3	$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	11
4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	100
5	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$	101
6	$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$	110
$\vdots$	$\vdots$	

Triangle de Pascal généralisé en base 2

$\rightsquigarrow$ représentations en base 2 ordonnées généalogiquement : d'abord par longueur, puis selon l'ordre du dictionnaire

$\binom{u}{v}$		ε	1	10	11	100	101	110	111
	ε	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	10	1	1	1	0	0	0	0	0
u	11	1	**2**	0	**1**	0	0	0	0
	100	1	1	2	0	1	0	0	0
	101	1	2	1	1	0	1	0	0
	110	1	2	2	1	0	0	1	0
	111	1	3	0	**3**	0	0	0	1

(column header: v)

Coefficient binomial de mots finis : $\binom{u}{v}$

Règle :

$$\binom{ua}{vb} = \binom{u}{vb} + \delta_{a,b}\binom{u}{v}$$

Triangle de Pascal généralisé en base 2

$\rightsquigarrow$ représentations en base 2 ordonnées généalogiquement : d'abord par longueur, puis selon l'ordre du dictionnaire

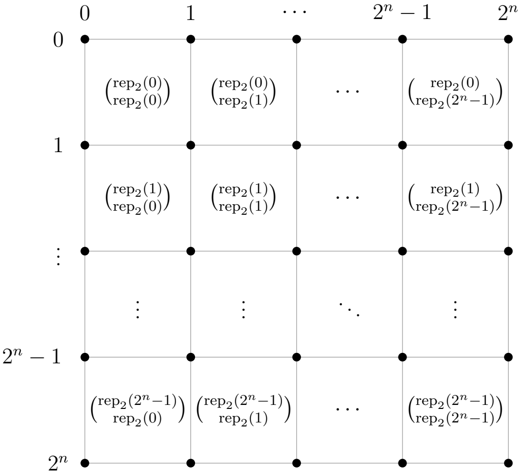
		v							
		ε	**1**	10	**11**	100	101	110	**111**
	ε	**1**	0	0	0	0	0	0	0
	1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
	10	1	1	1	0	0	0	0	0
u	**11**	**1**	**2**	0	**1**	0	0	0	0
	100	1	1	2	0	1	0	0	0
	101	1	2	1	1	0	1	0	0
	110	1	2	2	1	0	0	1	0
	111	**1**	**3**	0	**3**	0	0	0	**1**

Le triangle de Pascal classique

Questions :

- Après coloration et renormalisation peut-on espérer une convergence vers un analogue du triangle de Sierpiński ?
- Est-il possible de décrire facilement cet objet limite ?

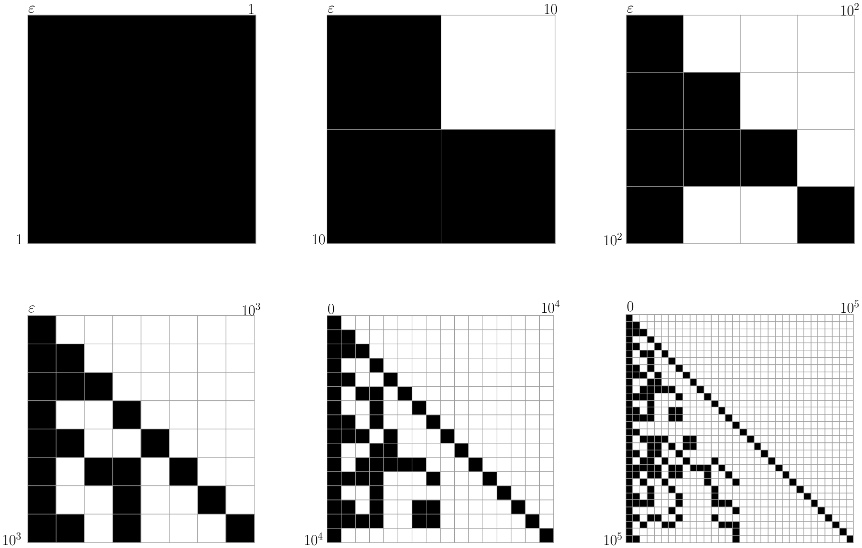
- Grille : intersection entre $\mathbb{N}^2$ et $[0, 2^n] \times [0, 2^n]$



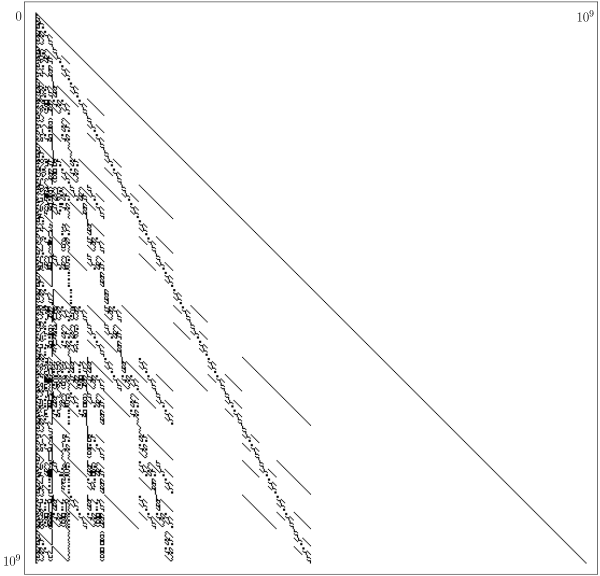
$\mathbb{N}^2 \cap [0, 2^n]^2$

- Colorier la grille :
  Colorier les 2^n lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé
  $$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\leq m,k<2^n}$$
  en
  - blanc si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 1 \bmod 2$

- Colorier la grille :
  Colorier les 2^n lignes et colonnes du triangle de Pascal généralisé
  $$\left(\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \bmod 2\right)_{0\le m,k<2^n}$$
  en
  - blanc si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 0 \bmod 2$
  - noir si $\binom{\mathrm{rep}_2(m)}{\mathrm{rep}_2(k)} \equiv 1 \bmod 2$
- Normaliser par une homothétie de rapport $1/2^n$
  $\rightsquigarrow$ Suite de compacts dans $[0,1]\times[0,1]$


ε
1
1
ε
10
10
ε
10²
10²
ε
10³
10³
0
10⁴
10⁴
0
10⁵
10⁵

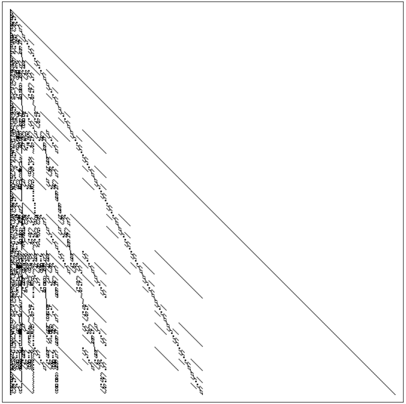
Le dixième élément de la suite

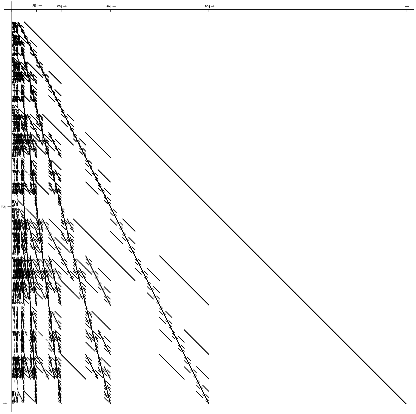


Un résultat clé

Théorème [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

La suite de compacts converge vers un objet limite $\mathcal{L}$.





Description "simple" de $\mathcal{L}$: fermeture topologique d'une union de segments décrits grâce à une propriété combinatoire "simple"

Extension modulo p

Simplicité : coloriage en fonction de la parité

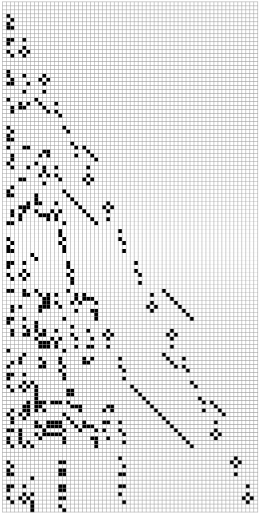
Extension

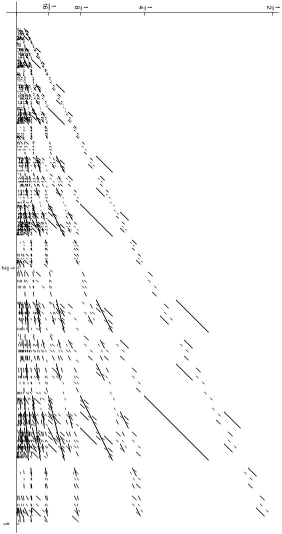
Tout reste vrai pour les coefficients binomiaux $\equiv r \bmod p$ avec

- représentation en base 2 des entiers
- p un nombre premier
- $r \in \{1, \ldots, p-1\}$

Exemple avec $p = 3$, $r = 2$

Gauche : coefficients binomiaux “noirs” $\equiv 2 \bmod 3$
Droite : estimation de l’objet limite correspondant





Compter les coefficients binomiaux strictement positifs

Triangle de Pascal généralisé en base 2

	$\binom{u}{v}$	v									
		ε	1	10	11	100	101	110	111	n	$S_2(n)$
	ε	1	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	**2**
	10	1	1	1	0	0	0	0	0	2	**3**
u	11	1	2	0	1	0	0	0	0	3	**3**
	100	1	1	2	0	1	0	0	0	4	**4**
	101	1	2	1	1	0	1	0	0	5	**5**
	110	1	2	2	1	0	0	1	0	6	**5**
	111	1	3	0	3	0	0	0	1	7	**4**

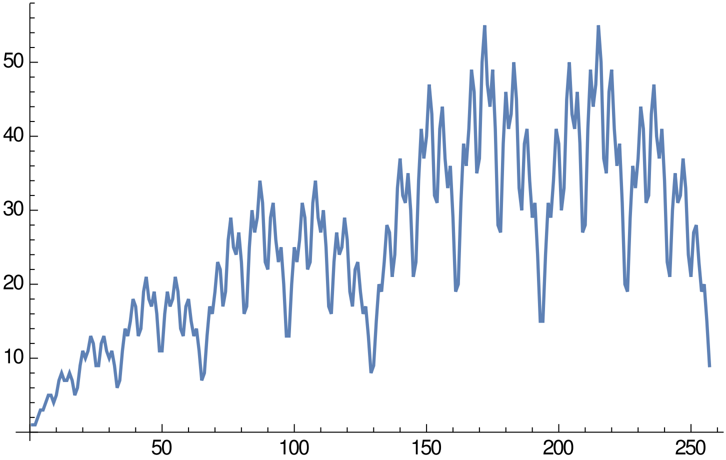
Définition : $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \text{nombre d'éléments non nuls sur la } n\text{ème ligne} \\ &\quad \text{du triangle de Pascal généralisé en base 2} \\ &= \#\left\{ \binom{\mathrm{rep}_2(n)}{\mathrm{rep}_2(m)} > 0 \mid m \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Premiers termes de $(S_2(n))_{n\geq 0}$:

$$1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 4, 5, 7, 8, 7, 7, 8, 7, 5, 6$$
$$9, 11, 10, 11, 13, 12, 9, 9, 12, 13, 11, 10, \ldots$$

La suite $(S_2(n))_{n\geq 0}$ dans l'intervalle $[0, 256]$



Structure palindromique $\rightsquigarrow$ régularité

Arbres des sous-mots

<u>Définition</u> : Soit w un mot sur $\{0,1\}$.

On associe, à w, un arbre $\mathcal{T}(w)$ comme suit :

- la racine est ε
- si u et ua sont des sous-mots de w avec $a \in \{0,1\}$, alors ua est un fils de u

Cet arbre s'appelle l'*arbre des sous-mots* de w

Arbres des sous-mots

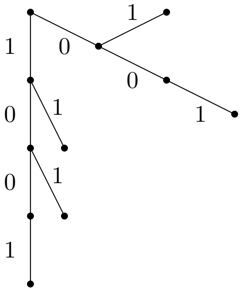
Définition : Soit w un mot sur $\{0,1\}$.
On associe, à w, un arbre $\mathcal{T}(w)$ comme suit :

- la racine est ε
- si u et ua sont des sous-mots de w avec $a \in \{0,1\}$, alors ua est un fils de u

Cet arbre s'appelle l'*arbre des sous-mots* de w

Exemple : $w = 1001$

longueur	sous-mots				
0	ε				
1	0		1		
2	00	01	10		11
3	001		100	101	
4			1001		

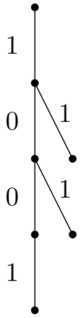


$\mathcal{T}(1001)$

Représentations en base 2 : pas de zéros de tête
$\rightsquigarrow$ on supprime la partie droite de l'arbre : on ne regarde pas le fils 0 du mot vide ε
$\rightsquigarrow$ nouvel arbre $\mathcal{T}_2(w)$

Exemple : $w = 1001$

longueur	sous-mots
0	ε
1	1
2	$10, 11$
3	$100, 101$
4	1001



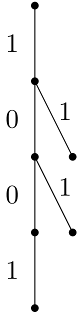
$\mathcal{T}_2(1001)$

Intérêt : le nombre de sommets sur chaque niveau n de l'arbre donne le nombre de sous-mots de longueur n de w

Intérêt : le nombre de sommets sur chaque niveau n de l'arbre donne le nombre de sous-mots de longueur n de w

Exemple : $w = 1001$

	niveau	nombre de sous-mots
	0	1
	1	1
	2	2
	3	2
	4	1
Total		7



$\mathcal{T}_2(1001)$

Lien avec S_2 : $\mathrm{val}_2(1001) = 9$ $S_2(9) = 7$

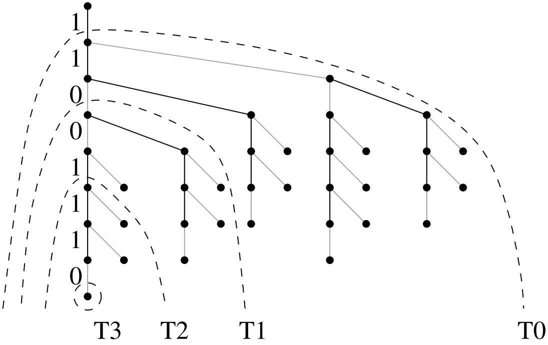
Un moyen simple de construire $\mathcal{T}_2(w)$

1. Partir d'un arbre linéaire w
2. Découper w en blocs de 0 et en blocs de 1
3. Chaque nouveau changement de chiffre donne un sous-arbre à reporter sur le dessus de l'arbre

Un moyen simple de construire $\mathcal{T}_2(w)$

1. Partir d'un arbre linéaire w
2. Découper w en blocs de 0 et en blocs de 1
3. Chaque nouveau changement de chiffre donne un sous-arbre à reporter sur le dessus de l'arbre

Exemple : $w = 11001110 = 1^2 0^2 1^3 0^1$



Résulats préliminaires

Proposition [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

Pour tout $\ell \geq 1$ et tout $0 \leq r < 2^\ell$,
la suite $(S_2(n))_{n\geq 0}$ satisfait $S_2(0) = 1$, $S_2(1) = 2$ et

$$S_2(2^\ell + r) = \begin{cases} S_2(2^{\ell-1} + r) + S_2(r), & \text{if } 0 \leq r < 2^{\ell-1}; \\ S_2(2^{\ell+1} - r - 1), & \text{if } 2^{\ell-1} \leq r < 2^\ell. \end{cases}$$

Lemme 1 [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

Soit u un mot de $\{0,1\}^*$.
On définit $\underline{u}$ en remplaçant dans u chaque 0 par 1 et chaque 1 par 0.
Alors

$$\#\left\{v \in L_2 \mid \binom{1u}{v} > 0\right\} = \#\left\{v \in L_2 \mid \binom{1\underline{u}}{v} > 0\right\}.$$

En particulier, $S_2(2^\ell + r) = S_2(2^{\ell+1} - r - 1)$ si $2^{\ell-1} \leq r < 2^\ell$ (palindromie).

Preuve : Au tableau...

Lemme 2 [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

Soit u un mot de $\{0,1\}^*$.
Alors

$$\#\left\{v \in L_2 \mid \binom{100u}{v} > 0\right\} = 2 \cdot \#\left\{v \in L_2 \mid \binom{10u}{v} > 0\right\} - \#\left\{v \in L_2 \mid \binom{1u}{v} > 0\right\}.$$

Preuve : Au tableau...

Lemme 3 [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

Soit u un mot de $\{0,1\}^*$.
Alors

$$\#\left\{v \in L_2 \mid \binom{101u}{v} > 0\right\} = \#\left\{v \in L_2 \mid \binom{1u}{v} > 0\right\} + \#\left\{v \in L_2 \mid \binom{11u}{v} > 0\right\}.$$

<u>Preuve</u> : Au tableau...

- 2-*noyau* de h

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(h) &= \{h(n), h(2n), h(2n+1), h(4n), h(4n+1), h(4n+2), \ldots\}\\ &= \{(h(2^i n + j))_{n\geq 0} \mid i \geq 0 \text{ and } 0 \leq j < 2^i\}\end{aligned}$$

- 2-*noyau* de h

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_2(h) &= \{h(n), h(2n), h(2n+1), h(4n), h(4n+1), h(4n+2), \ldots\}\\ &= \{(h(2^i n + j))_{n\geq 0} \mid i \geq 0 \text{ and } 0 \leq j < 2^i\}\end{aligned}$$

- 2-*régulier* s'ils existent

$$(t_1(n))_{n\geq 0}, \ldots, (t_\ell(n))_{n\geq 0}$$

tels que chaque $(t(n))_{n\geq 0} \in \mathcal{K}_2(h)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des suites t_j

Théorème [J. Leroy, M. Rigo, M. S., 2016]

La suite $(S_2(n))_{n\geq 0}$ satisfait, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_2(2n+1) &= 3\,S_2(n) - S_2(2n) \\ S_2(4n) &= 2\,S_2(2n) - S_2(n) \\ S_2(4n+2) &= 4\,S_2(n) - S_2(2n). \end{aligned}$$

En particulier, $(S_2(n))_{n\geq 0}$ est 2-régulier.

Preuve : Au tableau...

Dans les prochains épisodes...

Fait :

- fonction sommatoire de la suite $(S_2(n))_{n\geq 0}$ et comportement asymptotique
- généralisation au cas du système de numération de Fibonacci : étude de la suite $(S_F(n))_{n\geq 0}$ et de sa fonction sommatoire
- extension à n'importe quelle base entière $b \geq 2$: étude de la suite $(S_b(n))_{n\geq 0}$ et de sa fonction sommatoire

À faire :

- étude de la convergence de la suite de compacts dans d'autres bases que la base 2 (bases entières, système de numération de Fibonacci, etc.)
- et tellement de choses encore !