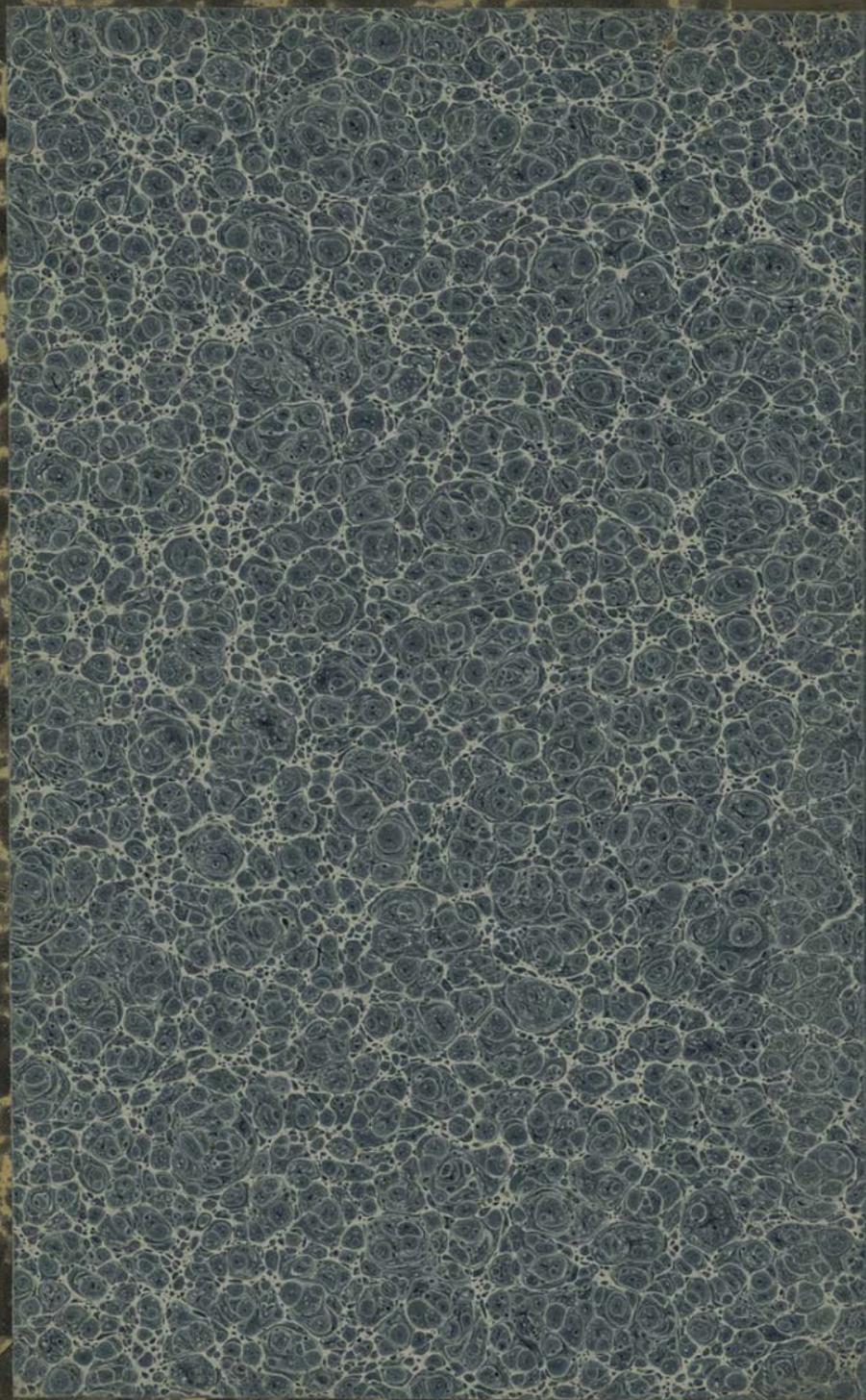
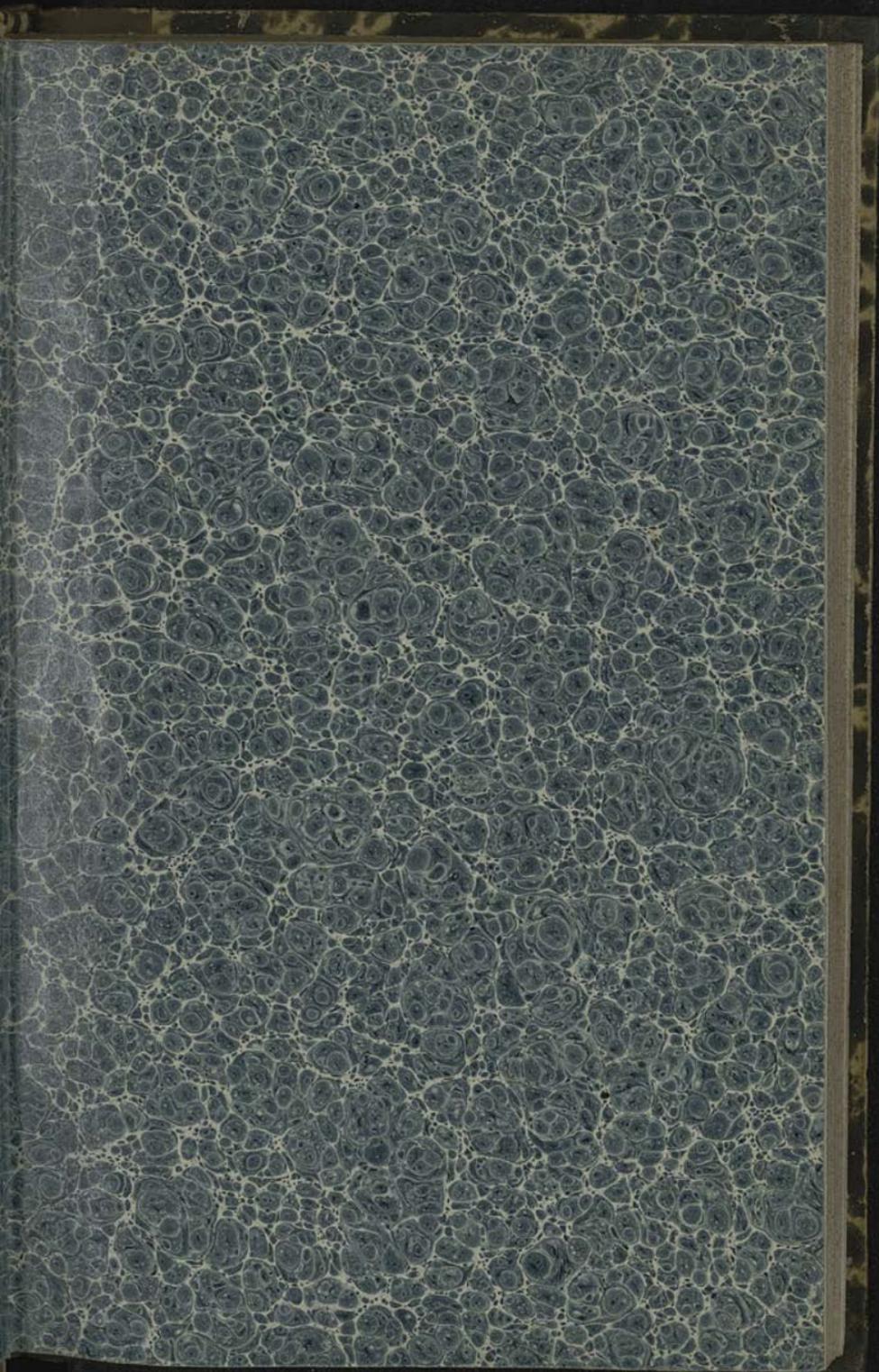
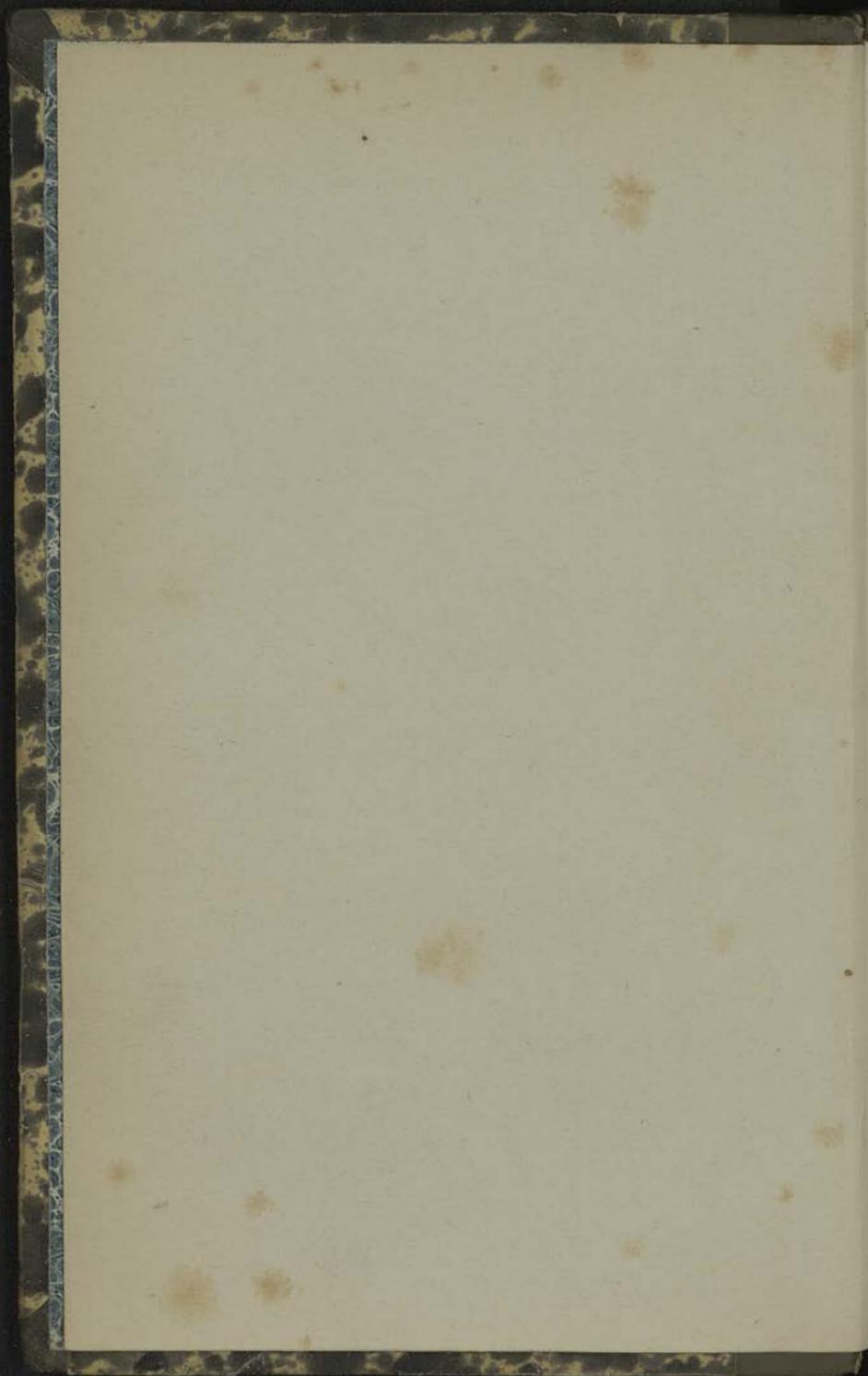


No. I
38. - 10.







MANUEL
DU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES.
GÉOMÉTRIE.

On trouve à la même librairie :

Manuel du Baccalauréat ès Sciences, rédigé d'après les programmes officiels des lycées prescrits pour les examens du baccalauréat en 1866, par *MM. J. Langlebert*, professeur de sciences physiques et naturelles à Paris, et *E. Catalan*, agrégé de l'Université, professeur à l'Université de Liège; 2 gros vol. in-12, avec gravures dans le texte et planches gravées.

Chaque volume se compose de plusieurs parties, qui se vendent séparément pour chaque degré de baccalauréat et pour chaque classe des lycées.

Première Partie, Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan* : 6^e édition; 1 vol. in-12.

Deuxième Partie, Manuel de Géométrie, suivi de notions sur quelques courbes, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan* : 6^e édition; 1 vol. in-12, avec gravures dans le texte.

Troisième Partie, Manuel de Trigonométrie rectiligne et de Géométrie descriptive, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan* : 6^e édition; 1 vol. in-12, avec gravures dans le texte et planches gravées.

Quatrième Partie, Manuel de Cosmographie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan* : 6^e édition; 1 vol. in-12, avec gravures dans le texte et planches gravées.

Cinquième Partie, Manuel de Mécanique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. E. Catalan* : 7^e édition; 1 vol. in-12, avec gravures dans le texte et planches gravées.

Sixième Partie, Manuel de Physique, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert* : 13^e édition; 1 fort vol. in-12, avec gravures dans le texte.

Septième Partie, Manuel de Chimie, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert* : 14^e édition; 1 fort vol. in-12, avec gravures dans le texte.

Huitième Partie, Manuel d'Histoire Naturelle, rédigé d'après les programmes officiels, par *M. J. Langlebert* : 14^e édition; 1 fort vol. in-12, avec gravures dans le texte.

Pour la Partie littéraire, consulter le *Manuel du Baccalauréat ès Lettres*, par *MM. E. Lefranc et G. Jeannin*.

L'éditeur se réserve le droit de traduction.

MANUEL
DE GÉOMÉTRIE

Rédigé d'après les nouveaux Programmes officiels
d'Enseignement des Lycées impériaux
prescrits pour les examens du Baccalauréat

Par E. CATALAN

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE, DOCTEUR ÈS SCIENCES,
PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

SIXIÈME ÉDITION

Ornée de gravures dans le texte.



PARIS.

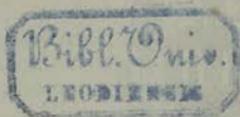
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE CLASSIQUES

De JULES DELALAIN et FILS

RUE DES ÉCOLES, VIS-A-VIS DE LA SORBONNE.

M DCCC LXVI.

Aux termes d'un décret impérial en date du 27 novembre 1864, l'examen du baccalauréat ès sciences complet porte sur les matières enseignées dans la classe de mathématiques élémentaires des lycées (deuxième année); celui du baccalauréat ès lettres, sur les matières enseignées dans les classes de rhétorique et de philosophie des lycées. L'examen du baccalauréat ès sciences restreint pour la partie mathématique continue, jusqu'à nouvel ordre, d'être exigé et subi dans les conditions existantes et avec les programmes actuellement en vigueur.



Tout contrefacteur ou débitant de contrefaçons de cet ouvrage sera poursuivi conformément aux lois; tous les exemplaires sont revêtus de notre griffe.

Jules Delalain et Fils

GÉOMÉTRIE.

PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES.

(Les chiffres renvoient aux paragraphes où la question est traitée.)

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(Deuxième Année).

N° 14.

Géométrie.

Géométrie plane.

On reprendra rapidement le Programme N° 3 de la classe de troisième (p. viii) et le Programme N° 5 de la classe de seconde (p. ix), en les complétant sur quelques points, particulièrement sur l'inscription des polygones réguliers (cas du décagone) et la détermination du rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres, 189, 203. — On terminera cette révision par des exercices et problèmes sur la comparaison des aires : construire un carré équivalent à un polygone donné, 240 ; — construire un carré dont le rapport à un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données, 241 ; — construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés adjacents fassent une somme ou aient entre eux une différence donnée, 244 ; — application à la construction des racines des équations du second degré à une inconnue, 245.

Géométrie dans l'espace.

Du plan et de la ligne droite, 253-282. — Condition pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, 259.

Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan, 264.

Parallélisme des droites et des plans, 265-282.

Angle dièdre, 284. — Génération des angles dièdres par la rotation d'un plan autour d'une droite, 285. — Dièdre droit, 290.

Mesure des angles dièdres, 287-289.

Propriétés des plans perpendiculaires entre eux, 290-300.

2. Géométrie.

b a

- Angles trièdres, 286. — Cas d'égalité et de symétrie, 308-312.
- Propriétés de l'angle trièdre supplémentaire, 301-303.
- Limite de la somme des faces d'un angle polyèdre convexe, 306.
- Limite de la somme des angles dièdres d'un angle trièdre, 307. — Analogies et différences entre les angles trièdres et les triangles rectilignes, 311.
- Des polyèdres, 313-326. — Prisme, 316, 317. — Parallépipède, cube, pyramide, 315-318. — Sections planes, parallèles, du prisme et de la pyramide, 322, 323.
- Mesure des volumes, 327-239. — Volume du parallépipède, du prisme, de la pyramide, du tronc de pyramide à bases parallèles, du tronc de prisme triangulaire, 327-339.
- De la symétrie dans les polyèdres, 340-353. — Plan de symétrie, 340. — Centre de symétrie¹, 340.
- Comparaison des faces des angles dièdres, des angles polyèdres homologues, de deux polyèdres symétriques, 345-347. — Équivalence de leurs volumes, 352, 353.
- Polyèdres semblables², 354-361.
- Cas de similitude de deux pyramides triangulaires, 355.
- Rapport des volumes de deux polyèdres semblables, 360. — Pôle de similitude de deux polyèdres semblables, et semblablement placés, 358.
- Les corps ronds, 369-414. — Cylindre droit à base circulaire, 369, 370. — Mesure de la surface latérale et du volume, 378-382. — Extension aux cylindres droits à base quelconque, 379, 380.
- Cône droit à base circulaire, 371, 372. — Sections parallèles à la base, 383. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles, 383-385. — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles, 386-389.
- Sphère, 390-414. — Sections planes; grands cercles; petits cercles, 391-395. — Pôles d'un cercle, 396-399. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane, 400.
- Plan tangent, 401. — Angle de deux arcs de grand cercle, 402-404.
- Notions sur les triangles sphériques: leur analogie parfaite avec les angles trièdres, 405-407.

1. L'étude de la symétrie par rapport à un point se ramène à celle de la symétrie par rapport à un plan, en imprimant une rotation de 180° à l'une des deux figures autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le centre de symétrie.

2. On appelle ainsi ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune et dont les angles polyèdres homologues sont égaux.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre, 408-410. Aire de la zone, de la sphère entière, 411-414. — Exercices, 421-425.

Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets, 415. — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre, 416. — Volume du secteur sphérique, de la sphère entière, du segment sphérique, 417-420. — Exercices, 421-425. — Volume approché d'un solide limité par une surface quelconque (*voir la note, page 164*).

N° 43.

Notions sur quelques courbes.

Définition de l'ellipse par la propriété des foyers, 426. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu, 430. — Axes, 427, 428. — Sommets, 429. — Rayons vecteurs, 429.

Définition générale de la tangente à une courbe, 432.

Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point et d'un même côté de cette ligne, des angles égaux, 433.

Mener la tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe ; par un point extérieur, 434. — Normale à l'ellipse, 436.

Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice, 438. — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu, 439. — Axe, 441. — Sommet, 441. — Rayon vecteur, 441.

La tangente fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point de contact, 441.

Mener la tangente à la parabole par un point pris sur la courbe ; par un point extérieur, 441. — Normale, 442. — Sous-normale, 442.

Relation entre le carré d'une ordonnée perpendiculaire à l'axe et la distance de cette ordonnée au sommet, 443.

Définition de l'hélice, considérée comme résultant de l'enroulement du plan d'un triangle rectangle sur un cylindre droit à base circulaire, 445. — Pas de l'hélice, 448.

La tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre un angle constant, 446.

Construire la projection de l'hélice et de la tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre (*voir les Notions de Géométrie descriptive*).

N° 5.

(Classe de Troisième.)

Éléments de Géométrie plane (1^{re} Partie).

Ligne droite et plan, 8, 12. — Ligne brisée, 10. — Ligne courbe, 11. Angle, 15. — Génération des angles par la rotation d'une droite autour d'un de ses points, 16. — Angle droit, 28.

Triangles, 41-44. — Cas d'égalité les plus simples, 45-51. — Propriétés du triangle isocèle, 52-55. — Cas d'égalité des triangles rectangles, 63, 64.

Droites parallèles¹, 65-77. — Somme des angles d'un triangle, d'un polygone quelconque, 80-82. — Propriétés des parallélogrammes, 85-91.

De la circonférence du cercle, 92-102. — Dépendance mutuelle des arcs et des cordes, des cordes et de leur distances au centre, 103-108.

Tangente au cercle, 109, 110. — Intersection et contact de deux cercles, 111-116.

Mesure des angles, 117-122. — Angle inscrit, 123-125.

Usage de la règle et du compas dans les constructions sur le papier, 126. — Commune mesure de deux droites, 127-129. — Tracé des perpendiculaires et des parallèles, 134-136. — Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles, 130-133. — Abréviations des constructions au moyen de l'équerre et du rapporteur, 122, 136. — Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes, 121. — Mener une tangente au cercle par un point extérieur, 141. — Décrire, sur une droite donnée, un segment capable d'un angle donné, 142.

Lignes proportionnelles, 143-146.

Polygones semblables, 147-159. — Conditions de similitude des triangles, 149-154. — Rapport des périmètres de deux polygones semblables, 159.

Relations entre la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit, 160.

Théorèmes relatifs au carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus, 163-165.

Théorème relatif aux sécantes du cercle, issues d'un même point, 166.

1. On admettra qu'on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite.

Problèmes : Diviser une droite donnée en parties égales ou proportionnelles à des longueurs données, 170, 171. — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, 172-174. — Mener une tangente commune à deux cercles, 177. — Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné, 178.

N° 3.

(Classe de Seconde.)

Éléments de géométrie plane (2^e Partie).

Polygones réguliers, 180-197. — Leur inscription dans le cercle : carré, hexagone, 182-190.

Moyen d'évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre¹, 198-205.

Mesure des aires, 211-223. — Aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque, 211-223. — Aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque (voir page 197). — Théorème du carré construit sur l'hypoténuse, 224.

Aire d'un polygone régulier, 230. — Aire du cercle et du secteur circulaire, 230-239.

Rapport des aires de deux figures semblables, 227-229.

Notions sur le levé des plans et l'arpentage (*App.*², 1-41). — Levé au mètre (*App.*, 9, 10). — Levé au graphomètre (*App.*, 14-20). — Levé à l'équerre d'arpenteur (*App.*, 11-13). — Levé à la planchette (*App.*, 25-27).

Du plan et de la ligne droite dans l'espace, 253-282. — Perpendiculaires et obliques au plan, 255-263. — Parallélisme des droites et des plans, 265-282.

Angles dièdres, 284. — Plans perpendiculaires entre eux, 290-300.

Notions sur les angles trièdres et polyèdres, 286, 302-307.

Des polyèdres : sections planes du prisme et de la pyramide, 313, 322, 323.

Mesure des volumes : parallépipède, prisme, pyramide et tronc de pyramide à bases parallèles, 327-339.

Notions sur les polyèdres semblables : rapports des surfaces et des volumes, 354-361.

1. La solution de cette question sera complétée dans le cours de mathématiques élémentaires. — La longueur de la circonférence du cercle sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont les côtés diminuent indéfiniment.

2. L'*Appendice*, page 185, recommence une nouvelle série de numéros.

CLASSE DE PHILOSOPHIE.

N° 9.

Géométrie.

L'enseignement de cette classe ne demande pas de programmes particuliers; on reprend les matières déjà enseignées dans les années de seconde et rhétorique, conformément au Programme de Géométrie, N^{os} 5 et 7 (voir *ci-dessous*). Le professeur introduira seulement quelques leçons complémentaires sur la similitude des figures dans l'espace, 354-361.

N° 5.

(Classe de Seconde.)

Éléments de géométrie plane (2^e Partie). Voir page ix.

N° 7.

(Classe de Rhétorique.)

Révision des principales propositions relatives à la ligne droite et au plan, 252-312.

Cylindre droit à base circulaire, 369, 370. — Mesure de la surface latérale et du volume, 378-382. — Extension aux cylindres droits à base quelconque, 379, 380.

Cône droit à base circulaire, 371, 372. — Sections parallèles à la base, 383. — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles, 383-385. — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles, 386-389.

Sphère, 390-414. — Sections planes; grands cercles, petits cercles, 391-395. — Pôles d'un cercle, 396-399. — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane, 400. — Plan tangent à la sphère, 401.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre, 408-410. — Aire de la zone, de la sphère entière, 411-414. — Exercices, 421-425.

Mesure du volume de la sphère considérée comme somme d'une infinité de pyramides ayant pour bases des polygones plans infiniment petits et le rayon pour hauteur, 419. — Autre méthode de mesure fondée sur la considération du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets, 415. — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre, 416. — Volume du secteur sphérique, de la sphère, 417-420. — Exercices, 421-425.

TABLE DES MATIÈRES.

—
Les chiffres renvoient aux pages.
—

GÉOMÉTRIE.	1
CHAP. I. — Préliminaires.	1
CHAP. II. — Triangles. — Égalité des triangles. — Propriétés du triangle isocèle. — Perpendiculaires et obliques. — Égalité des triangles rectangles.	8
CHAP. III. — Parallèles. — Applications de la théorie des parallèles. — Quadrilatères. — Propriétés des parallélogrammes.	16
CHAP. IV. — Préliminaires. — Cordes et arcs. — Tangente à la circonférence. — Circonférences sécantes et tangentes.	25
CHAP. V. — Mesure des angles. — Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes — Angles inscrits. — Usage de la règle et du compas. — Commune mesure de deux droites ou de deux angles. — Construction des angles et des triangles. — Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Autres problèmes.	34
CHAP. VI. — Lignes proportionnelles. — Polygones semblables.	46
CHAP. VII. — Théorèmes.	53
CHAP. VIII. — Problèmes.	62
CHAP. IX. — Polygones réguliers. — Problèmes sur les polygones réguliers. — Applications numériques. — Rapport de la circonférence au diamètre.	66
CHAP. X. — Préliminaires. — Aire du rectangle. — Aire du parallélogramme. — Aire du triangle. — Aire du trapèze. — Aire d'un polygone quelconque. — Relations entre les carrés construits sur les côtés d'un triangle. — Rapport des aires de deux polygones semblables. — Aire d'un polygone régulier. — Aire du cercle.	80
CHAP. XI. — Problèmes. — Applications numériques.	91
CHAP. XII. — Préliminaires. — Perpendiculaire au plan. — Droites parallèles. — Plans parallèles.	100
CHAP. XIII. — Angles formés par les plans. — Mesure des angles dièdres. — Plans perpendiculaires entre eux. — Angles trièdres supplémentaires. — Propriétés des angles polyèdres. — Égalité des angles trièdres. — Angles trièdres symétriques.	110

CHAP. XIV. — Des polyèdres. — Volume du parallépipède. — Volume du prisme. — Volume de la pyramide. — Volume du tronc de pyramide.	121
CHAP. XV. — De la symétrie des figures.	133
CHAP. XVI. — Polyèdres semblables. — Applications numériques.	139
CHAP. XVII. — Génération des surfaces. — Aire d'une surface courbe. — Volume du corps terminé par cette surface. — Mesure du cylindre. — Mesure du cône.	152
CHAP. XVIII. — Cercles de la sphère. — Plan tangent. — Angle de deux arcs de grands cercles. — Triangles sphériques.	159
CHAP. XIX. — Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière. — Aire de la sphère. — Mesure du corps engendré par un triangle tournant autour d'un axe. — Mesure du corps engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe. — Volume de la sphère. — Applications numériques.	164
NOTIONS SUR QUELQUES COURBES.	174
De l'ellipse. — De la parabole. — De l'hélice.	174
APPENDICE.	185
Du levé des plans. — De la chaîne d'arpenteur. — Levé au mètre. — De l'équerre d'arpenteur. — Du graphomètre. — Levé au graphomètre. — Des échelles. — Construction du plan. — Levé à la planchette. — Problèmes. — De l'arpentage.	185

GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE I.

Ligne droite et plan (8, 12). — Ligne brisée (10). — Ligne courbe (11). — Angle (15). — Génération des angles par la rotation d'une droite autour d'un de ses points (16). — Angle droit (27).

Préliminaires.

1. Toute chose occupe, dans l'espace, un lieu déterminé. Ce lieu, considéré sous le rapport de sa forme, et indépendamment de la matière qu'il contient, est appelé *corps*.
2. La *limite* d'un corps, c'est-à-dire ce qui le sépare de l'espace environnant, est une *surface*.
3. Si deux corps se pénètrent, l'intersection de leurs surfaces est une *ligne*.
4. L'intersection de deux lignes est un *point*.
On appelle également *points* les extrémités d'une ligne.
5. Les corps, les surfaces et les lignes se désignent sous le nom générique de *figures*.
6. La *Géométrie* est la science des figures.
7. Deux figures sont *égales* lorsqu'elles sont *superposables*, c'est-à-dire lorsqu'elles peuvent *coïncider*.
8. Tout le monde acquiert, par l'expérience, la notion de la *ligne droite*. Par exemple, l'arête d'une règle bien dressée est sensiblement une *droite*, etc.
9. On doit admettre, comme étant vérifiée par l'expérience, la *demande* suivante :
Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite, mais on n'en peut faire passer qu'une.

10. La *ligne brisée* est celle qui est composée de lignes droites.
— Elle est aussi appelée *polygone*.

11. Une *ligne courbe* est celle qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites.

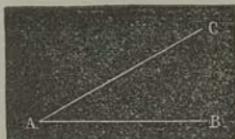
12. Le *plan* est une surface indéfinie sur laquelle est située tout entière la droite qui joint deux quelconques de ses points.

13. Une *figure plane* est celle qui est tout entière dans un même plan.

14. La *Géométrie plane* est la partie de la Géométrie relative aux figures planes.

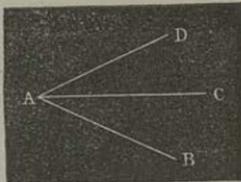
La *Géométrie de l'espace* est relative aux figures non situées dans un même plan.

15. La portion de plan comprise entre deux droites indéfinies AB, AC, issues du même point A, s'appelle *angle*. Le point A est le *sommet* de l'angle ; les droites AB, AC en sont les *côtés*.



On désigne un angle par la lettre du sommet, ou par les trois lettres qui indiquent les côtés, en ayant soin de mettre au milieu celle du sommet. Ainsi, l'on dit : l'angle A, l'angle BAC ou l'angle CAB.

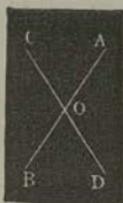
16. Si la droite AC, d'abord appliquée sur AB, *tourne* autour du point A, *en restant constamment dans le même plan*, elle engendrera l'angle BAC.



17. Deux angles BAC, CAD, extérieurs l'un à l'autre, qui ont même sommet et un côté commun, sont dits *adjacents*.

18. La *bissectrice* d'un angle BAD est la droite AC qui divise cet angle en deux parties égales.

19. Demande. — *Tout angle a une bissectrice, et n'en a qu'une.*



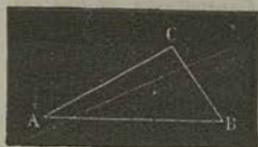
20. Lorsque deux droites AB, CD, se coupent en un point O, elles forment quatre angles consécutifs, AOC, COB, BOD, DOA. Ces angles, considérés deux à deux, sont ou *adjacents*, ou *opposés au sommet*. Par exemple, AOC, COB sont adjacents, tandis que AOC, BOD sont opposés au sommet.

21. Un *polygone* est une portion de plan terminée par des droites. On donne aussi ce nom à la ligne brisée qui limite cette portion de plan (10).

On appelle *diagonale* d'un polygone, la droite qui joint deux sommets non consécutifs.

22. Le polygone de trois côtés s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés, *quadrilatère*; celui de cinq côtés, *pentagone*; celui de six côtés, *hexagone*, etc.

23. Une ligne *convexe* est celle qui ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite.

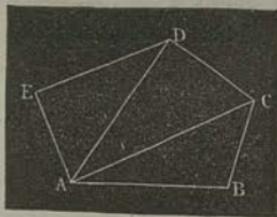


24. Demande. — Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Ainsi, dans le triangle ABC, on a

$$AB < AC + BC.$$

25. THÉORÈME. — Dans tout polygone, un côté quelconque est plus petit que la somme de tous les autres.



1° Soit le polygone convexe ABCDE. Menons les diagonales AC, AD : nous aurons

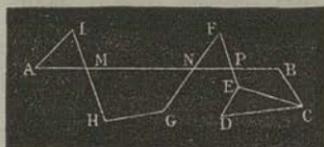
$$AB < BC + AC, \quad AC < CD + AD.$$

$$AD < DE + EA;$$

d'où, en ajoutant membre à membre, et retranchant les parties communes,

$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

2° Soit le polygone quelconque ABCDEFGHI. Nous aurons, en menant une ou plusieurs diagonales, telles que CE, et en appelant M, N, P les points où la droite AB rencontre les autres côtés :



$$\begin{aligned} AM &< AI + IM, \\ MN &< MH + HG + GN, \\ NP &< NF + FP, \\ PB &< PE + CE + CB, \\ CE &< CD + DE. \end{aligned}$$

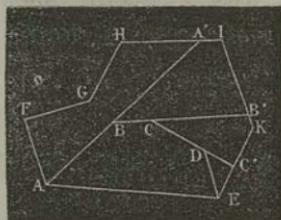
Ces inégalités donnent

$$AM + MN + NP + PB + CE < AI + IM + MH + HG + GN + NF + FP + PE + CE + CB + CD + DE,$$

ou

$$AB < AI + IH + HG + GF + FE + CB + CD + DE.$$

26. THÉORÈME. — Une ligne brisée convexe ABCDE est plus petite que toute ligne brisée AFGHIK qui l'enveloppe, et qui est terminée aux mêmes extrémités.



Pour que la ligne convexe soit enveloppée par l'autre, il faut qu'en menant la droite AE, le polygone convexe ABCDE soit intérieur à l'autre polygone.

Cela étant, prolongeons dans le même sens les côtés AB, BC, ..., et soient A', B', ..., leurs points de rencontre avec la ligne AFG... Nous aurons, par le théorème précédent :

$$\begin{aligned} AB + BA' &< AF + FG + GH + HA', \\ BC + CB' &< BA' + A'I + IB', \\ CD + DC' &< CB' + B'K + KC', \\ DE &< DC' + C'E. \end{aligned}$$

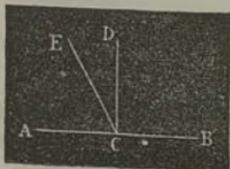
Donc, en ajoutant,

$$AB + BC + CD + DE < AF + FG + GH + HI + IK + KE.$$

27. THÉOREME. — Une ligne brisée convexe est plus petite que toute ligne brisée qui l'enveloppe de toutes parts.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

28. Lorsqu'une droite CD rencontre une droite AB, de manière que les angles adjacents ACD, BCD soient égaux, chacun d'eux est un *angle droit*, et la ligne CD est dite *perpendiculaire* sur AB. Le point C est le *pied* de la perpendiculaire.



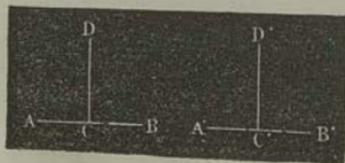
29. La droite CE, qui fait avec AB des angles adjacents ACE, BCE, inégaux entre eux, est une *oblique* relativement à AB. L'angle ACE, moindre que l'angle droit ACD, est un *angle aigu*; l'angle BCE, plus grand que l'angle droit BCD, est *obtus*.

30. Demande. — D'un point C, pris sur une droite AB, on peut toujours élever une droite CD perpendiculaire à la première, mais l'on n'en peut élever qu'une*.

31. THÉOREME. — Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Soient les droites CD, C'D', respectivement perpendiculaires à AB, A'B' : je dis que l'angle droit ACD est égal à l'angle droit A'C'D'.

Transportons la seconde figure sur la première de manière que le point C' coïncide avec le point C, et qu'un point A' de A'B' coïncide avec un point A de AB : les deux droites A'B', AB coïncideront (9). Par suite, la droite C'D' prendra la direction CD ; sans quoi l'on pourrait, par le point C, élever deux perpendiculaires à AB.

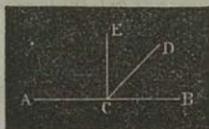


32. Deux angles sont *complémentaires* ou *supplémentaires*, suivant que leur somme est égale à un angle droit ou à deux angles droits.

* Cette proposition peut être regardée comme un cas particulier de celle qui a été énoncée ci-dessus (19). Elles ont, l'une et l'autre, le degré d'évidence de cette autre demande : *Toute droite finie a un milieu unique.*

33. THÉORÈME. — Toute droite CD qui en rencontre une autre AB fait avec celle-ci, d'un même côté, deux angles supplémentaires.

Par le pied C de l'oblique CD, menons la perpendiculaire CE à AB; nous aurons

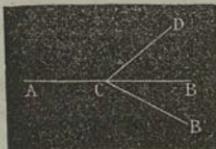


$$\begin{aligned} \text{ACD} &= \text{ACE} + \text{ECD}, \\ \text{BCD} &= \text{BCE} - \text{ECD}; \end{aligned}$$

d'où, à cause de $\text{ACE} = \text{BCE} = 1^d$,

$$\text{ACD} + \text{BCD} = 2^d.$$

34. Réciproque. — Si deux angles adjacents ACD, DCB, sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs AC, CB sont en ligne droite.



Car, si CB n'est pas le prolongement de AC, soit CB' ce prolongement : nous aurions par hypothèse,

$$\text{ACD} + \text{DCB} = 2^d;$$

et, par la proposition directe,

$$\text{ACD} + \text{DCB}' = 2^d,$$

d'où

$$\text{DCB} = \text{DCB}';$$

ce qui serait absurde.

35. Corollaire. — La somme de tous les angles consécutifs formés d'un même côté d'une droite, par d'autres droites quelconques, issues d'un même point de la première, égale 2 droits.

36. Corollaire. — La somme des quatre angles consécutifs formés par deux droites qui se coupent, égale 4 droits.

37. Corollaire. — La somme de tous les angles consécutifs formés autour d'un même point, par des droites issues de ce point, égale 4 droits.

38. THÉORÈME. — Lorsque deux droites AB, CD se coupent, les angles AOC, BOD, opposés au sommet, sont égaux.



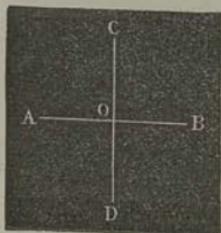
Le théorème précédent donne

$$\begin{aligned} \text{AOC} + \text{COB} &= 2^d, \\ \text{BOD} + \text{COB} &= 2^d; \end{aligned}$$

donc

$$\text{AOC} = \text{BOD}.$$

39. Corollaire. — Le prolongement OD de la perpendiculaire OC à une droite AB est également perpendiculaire à cette droite AB.



En effet, les angles BOD, AOD, respectivement égaux aux angles égaux AOC, BOC, sont égaux entre eux. Donc OD est perpendiculaire à AB.

40. Corollaire. — Si une droite CD est perpendiculaire à une autre droite AB, réciproquement celle-ci est perpendiculaire à la première.

CD étant perpendiculaire à AB, les quatre angles AOC, BOC, AOD, BOD sont droits. Donc, en particulier, les angles BOC, BOD sont droits et égaux. Donc OB est perpendiculaire à CD.

Résumé.

Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.

Dans tout polygone, un côté quelconque est plus petit que la somme de tous les autres.

Une ligne brisée convexe est plus petite que toute ligne brisée qui l'enveloppe, et qui est terminée aux mêmes extrémités.

Une ligne brisée convexe est plus petite que toute ligne brisée qui l'enveloppe de toutes parts.

Tous les angles droits sont égaux entre eux.

Toute droite qui en rencontre une autre fait avec celle-ci, d'un même côté, deux angles supplémentaires.

Réciproquement, si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs sont en ligne droite.

La somme de tous les angles consécutifs formés d'un même côté d'une droite, par d'autres droites quelconques issues d'un même point de la première, égale 2 droits.

La somme des quatre angles consécutifs formés par deux droites qui se coupent, égale 4 droits.

La somme de tous les angles consécutifs formés autour d'un même point, par des droites issues de ce point, égale 4 droits.

Lorsque deux droites se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.

Le prolongement de la perpendiculaire à une droite est également perpendiculaire à cette droite. Si une droite est perpendiculaire à une autre droite, réciproquement celle-ci est perpendiculaire à la première.



CHAPITRE II.

Triangles (41-44). — Cas d'égalité les plus simples (45-51)*. — Propriétés du triangle isocèle (52-55). — Cas d'égalité des triangles rectangles (63, 64).

Triangles.

41. On appelle *triangle équilatéral* celui qui a ses trois côtés égaux; *triangle isocèle*, celui qui a deux côtés égaux, et *triangle scalène*, celui qui a ses trois côtés inégaux.

42. Dans un triangle isocèle, le côté adjacent aux deux côtés égaux prend le nom de *base*.

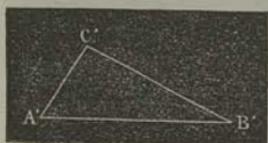
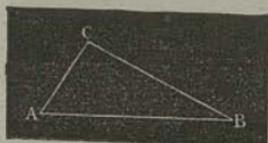
43. Un triangle est dit *rectangle*, *obtusangle* ou *acutangle*, suivant qu'il a un angle droit, un angle obtus ou trois angles aigus.

44. Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est nommé *hypoténuse*.

* Ces cas les plus simples, quels sont-ils? Ils doivent sans doute comprendre ce théorème: *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.* Autrement, sur quoi reposerait toute la Géométrie?

Égalité des triangles.

45. THÉORÈME. — Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.



Soient l'angle A égal à l'angle A', le côté AB égal à A'B', et le côté AC égal à A'C' : je dis que les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux.

Portons le second triangle sur le premier, de manière que le côté A'B' coïncide avec AB. A cause de l'égalité des angles A, A', le côté A'C' prendra la direction AC ; et, comme A'C' = AC, le sommet C' tombera en C. Donc les deux triangles coïncident, c'est-à-dire qu'ils sont égaux (7).

46. THÉORÈME. — Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. Supposons

$$AB = A'B', \quad A = A', \quad B = B'.$$

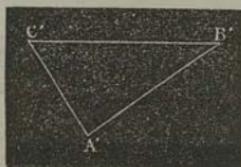
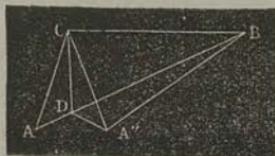
Portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que A'B' coïncide avec AB. Le côté A'C' prendra la direction AC, et le côté B'C' prendra la direction BC. Le point C', devant se trouver à la fois sur AC et sur BC, tombera en C. Donc les deux triangles sont égaux.

47. THÉORÈME. — Lorsque deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, le côté opposé au plus grand angle est plus grand que le côté opposé au plus petit angle.

Soient

$$AC = A'C', \quad BC = B'C', \quad ACB > A'C'B'.$$

Je dis que le côté AB est plus grand que le côté A'B'.



Portons le triangle $A'B'C'$ sur ABC , de manière que $B'C'$ coïncide avec BC : le côté $A'C'$ tombera dans l'intérieur de l'angle ACB , et prendra une position telle que CA' . Imaginons ensuite la bissectrice CD de l'angle ACA' , et soit D le point où elle rencontre AB . Menons DA' ; puis faisons tourner le triangle DCA' autour de CD , jusqu'à ce que l'angle DCA' vienne s'appliquer sur son égal DCA : il est clair que DA' coïncidera avec DA .

Actuellement, le triangle $A'DB$ donne

$$A'B < A'D + BD,$$

ou

$$A'B' < AD + BD,$$

ou enfin

$$A'B' < AB.$$

48. Réciproque. — Lorsque deux triangles ACB , $A'C'B'$, ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et un côté inégal, l'angle C , opposé au plus grand côté AB , est plus grand que l'angle C' opposé au plus petit côté $A'B'$.

Si les angles C , C' étaient égaux, les deux triangles pourraient coïncider (45) ; et contrairement à l'hypothèse, les côtés AB , $A'B'$ auraient même grandeur. Et si l'angle C' était plus grand que C , le côté $A'B'$ serait, contre l'hypothèse, plus grand que AB (47). On a donc

$$C > C'.$$

49. Remarque. — La démonstration précédente devient inutile si l'on applique le principe suivant :

Si l'énoncé d'un théorème renferme toutes les hypothèses que l'on peut établir sur un sujet déterminé, et si chaque hypothèse conduit à une conclusion différente de toutes les autres, les réciproques du théorème sont vraies.

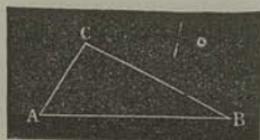
Nous pourrions donc désormais, dans la plupart des cas, nous dispenser de démontrer les réciproques.

50. THÉORÈME. — Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.

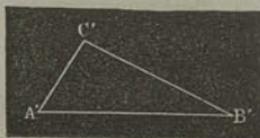
Soient

$$AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'.$$

Je dis que les deux triangles sont égaux.



Cette égalité serait évidente si l'angle A était égal à l'angle A'; car alors les deux triangles auraient un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.

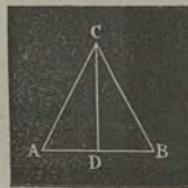


Or, si l'angle A était différent de A', le côté BC serait, contrairement à l'hypothèse, différent de B'C' (47). Donc les angles A, A' sont égaux.

51. Remarque. — Dans deux triangles égaux, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Propriétés du triangle isocèle.

52. THÉORÈME. — Dans tout triangle isocèle ABC, les angles A, B, opposés aux côtés égaux BC, AC, sont égaux.



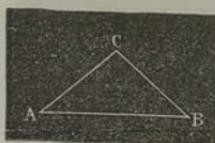
Joignons le sommet C au milieu de la base AB, par la droite CD. Le triangle ABC sera décomposé en deux triangles ADC, BDC, dans lesquels CD est commun, $AD = BD$, et $AC = BC$. Donc ces deux triangles sont égaux (50). Donc

$$A = B.$$

53. THÉORÈME. — Dans tout triangle isocèle, la droite menée du milieu de la base au sommet opposé, est : 1° perpendiculaire à cette base, 2° bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux.

D'après la démonstration précédente, les deux angles supplémentaires ADC, CDB sont égaux entre eux; donc CD est perpendiculaire à AB. De plus, les deux angles ACD, BCD sont égaux entre eux; donc CD est la bissectrice de l'angle ACB.

54. Réciproque. — Si un triangle ABC a deux angles égaux, A, B , les côtés BC, AC , opposés à ces angles, sont égaux.

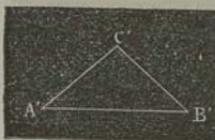


Soit un triangle $A'B'C'$ égal à ABC . Le côté $A'C'$ de ce triangle auxiliaire est adjacent à l'angle A' égal à A . Donc

$$A'C' = AC.$$

De plus, $A'C'$ est opposé à l'angle B' , lequel est aussi égal à A . Donc $A'C' = BC$. Donc enfin

$$AC = BC.$$

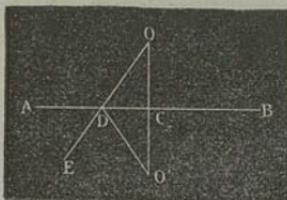


55. Corollaire. — Tout triangle équilatéral est équiangle; et réciproquement.

Perpendiculaires et obliques.

56. THÉORÈME. — D'un point O , pris hors d'une droite AB :
1° on peut toujours mener une perpendiculaire OC à cette droite AB ; 2° on n'en peut mener qu'une.

1° Joignons un point quelconque D de la droite AB , avec le point O par la droite DO . Faisons *tourner* ensuite, autour de AB , la partie supérieure de la figure, jusqu'à ce que DO vienne prendre la position DO' . Enfin, menons la droite OO' : je dis qu'elle sera perpendiculaire à AB .



En effet, le triangle ODO' est isocèle, et le point C est le milieu de OO' . Donc CD est perpendiculaire à OO' (53), ou OO' perpendiculaire à AB (40).

2° Prolongeons la droite quelconque OD : l'angle EDC sera plus grand que $O'DC$. D'ailleurs, ce dernier angle est égal à ODC . Il résulte de là que la droite AB fait, avec DOE , des angles adjacents inégaux. Donc ces deux droites ne sont pas perpendiculaires entre elles.

57. Si d'un point O , extérieur à une droite AB , on mène la perpendiculaire OC et une oblique OD , l'intervalle CD , compris

entre le pied de l'oblique et le pied de la perpendiculaire, est appelé *projection* de l'oblique.

58. THÉORÈME. — Si d'un point O , extérieur à une droite AB , on mène la perpendiculaire OC , et plusieurs obliques OD , OE , OF :

1° La perpendiculaire OC est plus courte que toute oblique ;
2° deux obliques OD , OE , qui ont des projections égales, sont égales ; 3° de deux obliques OD , OF , celle qui a la plus grande projection est la plus grande.

1° Prolongeons la perpendiculaire OC d'une longueur CO' égale à OC , et menons $O'D$. Les deux triangles rectangles OCD , $O'CD$ sont égaux (45). Donc le triangle ODO' donne

$$2 OC < 2 OD,$$

ou

$$OC < OD.$$

2° Les deux triangles rectangles OCD , OCE sont égaux. Donc

$$OD = OE.$$

3° Menons $O'F$. La ligne convexe ODO' est plus courte que OFO (26). Donc

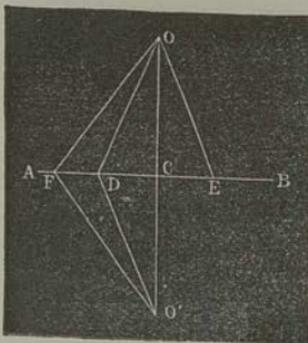
$$OD < OF.$$

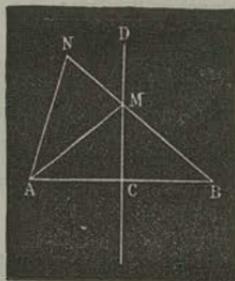
59. Réciproque. — Si, d'un point extérieur à une droite, on mène la perpendiculaire et plusieurs obliques : 1° deux obliques égales ont des projections égales ; 2° de deux obliques inégales, la plus grande a la plus grande projection. (Voy. n° 49.)

60. Corollaire. — D'un point à une droite on ne peut mener trois droites égales.

61. THÉORÈME. — 1° Tout point de la perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est également distant des extrémités de cette droite.

2° Tout point extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.





1° Soit M un point quelconque de la perpendiculaire CD au milieu C de AB. Les deux obliques MA, MB ont des projections égales ; donc

$$MA = MB.$$

2° Soit N un point extérieur à la perpendiculaire ; menons AN, BN ; nous aurons

$$AN < BN.$$

En effet, soit M le point où NB rencontre CD. Le triangle ANM donne

$$AN < AM + MN,$$

ou

$$AN < BM + MN ;$$

ou enfin

$$AN < BN.$$

62. On appelle *lieu géométrique* une figure contenant tous les points qui satisfont à une même condition, ou qui jouissent d'une même propriété.

D'après cette définition, les deux parties du théorème précédent et les réciproques de ce théorème, peuvent se résumer ainsi :

La perpendiculaire élevée au milieu d'une droite est le lieu géométrique des points tels, que chacun d'eux est également distant des extrémités de la droite.

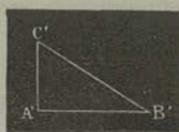
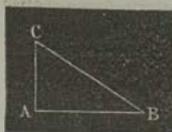
Égalité des triangles rectangles.

63. THÉORÈME. — *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.*

Soient

$$CB = C'B', AC = A'C' ;$$

A et A' étant les angles droits. Je dis que les deux triangles sont égaux.



Cette proposition serait démontrée si le côté AB était égal à A'B' (43). Portons A'C'B' sur ACB, de manière que A'C' coïncide avec AC. Les angles

Λ , A' étant égaux, le côté $A'B'$ prendra la direction de AB . Mais alors CB et $C'B'$ seront des obliques égales, menées d'un même point C à la droite AB . Donc (59)

$$AB = A'B'.$$

64. THÉORÈME. — *Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Soient, dans les deux triangles rectangles ACB , $A'C'B'$,

$$CB = C'B', \quad C = C'.$$

Portons le second triangle sur le premier, de manière que $C'B'$ coïncide avec CB . Le côté $C'A'$ prendra la direction de CA . Par suite, $B'A'$ devra coïncider avec BA , sans quoi l'on pourrait mener, du point B , deux perpendiculaires à la droite AC .

Résumé.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun.

Lorsque deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, le côté opposé au plus grand angle est plus grand que le côté opposé au plus petit angle.

Réciproquement, lorsque deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et un côté inégal, l'angle opposé au plus grand côté est plus grand que l'angle opposé au plus petit côté.

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.

Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Dans tout triangle isocèle, la droite menée du milieu de la base au sommet opposé, est : 1° perpendiculaire à cette base; 2° bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux.

Réciproquement, si un angle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux.

D'un point pris hors d'une droite : 1° on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite; 2° on n'en peut mener qu'une.

Si, d'un point extérieur à une droite, on mène la perpendiculaire et plusieurs obliques :

1° La perpendiculaire est plus courte que toute oblique; 2° deux obliques qui ont des projections égales, sont égales; 3° de deux obliques, celle qui a la plus grande projection est la plus grande.

Réciproquement, si, d'un point extérieur à une droite, on mène la perpendiculaire et plusieurs obliques: 1° deux obliques égales ont des projections égales; 2° de deux obliques inégales, la plus grande a la plus grande projection.

Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est également distant des extrémités de cette droite.

Tout point extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.

Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal.

Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

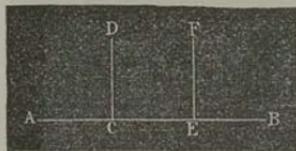
CHAPITRE III.

Droites parallèles (65-77)*. — Somme des angles d'un triangle; d'un polygone quelconque (80-82). — Propriétés des parallélogrammes (85-91).

Parallèles.

65. On nomme *parallèles* deux droites qui, étant situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les suppose prolongées.

66. THÉORÈME. — Deux droites CD, EF, perpendiculaires à une même droite AB, sont parallèles entre elles.

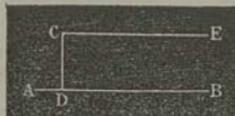


Car, si elles se rencontraient en un point O, il y aurait deux perpendiculaires OC, OE abaissées de ce point sur la droite AB, ce qui est impossible (56).

67. Remarque. — Ce théorème justifie la définition précédente (65).

* On admettra qu'on ne peut mener, par un point donné, qu'une seule parallèle à une droite (Note du Programme).

68. Corollaire. — Par un point donné C, on peut mener une parallèle à une droite donnée AB.

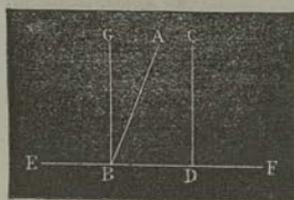


Du point C, menons CD perpendiculaire à AB, et CE perpendiculaire à CD : cette dernière droite sera parallèle à AB (66).

69. Demande. — Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

70. Corollaire. — Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

71. THÉORÈME. — Deux droites AB, CD, l'une oblique et l'autre perpendiculaire à une même droite EF, se rencontrent.



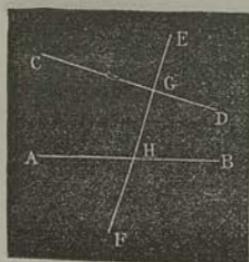
Par le point B, menons BG perpendiculaire à EF; cette droite BG sera parallèle à CD (66) : donc BA, suffisamment prolongée, doit rencontrer CD (69).

72. Corollaire. — Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

73. Corollaire. — Si deux droites A, B se coupent, leurs perpendiculaires respectives A', B' se coupent aussi.

En effet, si les droites A', B' étaient parallèles entre elles, les droites A, B seraient toutes deux perpendiculaires à A' (72); donc, contrairement à l'hypothèse, elles ne se couperaient pas (66).

74. Si deux droites AB, CD, parallèles ou non, sont coupées par une droite EF, cette dernière est appelée *transversale*.



Elle détermine, avec les deux autres droites, huit angles qui, considérés deux à deux, prennent différentes dénominations :

1° Deux angles, situés d'un même côté de la transversale, et placés de la même manière relativement aux deux droites, sont dits *correspondants*. Tels sont, par exemple, AHE et CGE.

2° Deux angles, situés de côté et d'autre de la transversale, et en dedans des deux droites, sont *alternes-internes*. Ainsi AHE, DGF sont alternes-internes.

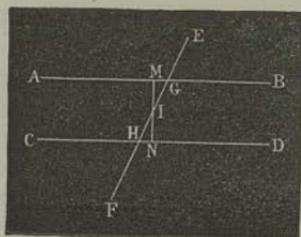
3° Deux angles, situés de côté et d'autre de la transversale, mais en dehors des deux droites, sont *alternes-externes*. Les angles AHF, DGE sont dans ce cas.

4° Deux angles, situés d'un même côté de la transversale, et en dedans des deux droites, sont *internes d'un même côté*. Tels sont AHE et CGF.

5° Enfin, deux angles, situés d'un même côté de la transversale, et en dehors des deux droites, sont dits *externes d'un même côté*. Tels sont, par exemple, AHF et CGE.

75. THÉOREME. — Deux parallèles AB, CD font, avec une même transversale EF :

- 1° Des angles correspondants, égaux ;
- 2° Des angles alternes-internes, égaux ;
- 3° Des angles alternes-externes, égaux ;
- 4° Des angles internes d'un même côté, supplémentaires ;
- 5° Des angles externes d'un même côté, supplémentaires.



Comme les angles dont le sommet est en G sont égaux ou supplémentaires, et qu'il en est de même à l'égard des angles qui ont leur sommet au point H, il suffit, pour démontrer toutes les parties du théorème, de faire voir que les angles alternes-internes *aigus* sont égaux entre eux.

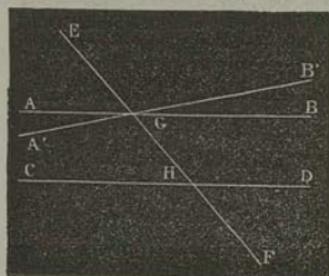
Imaginons, à cet effet, la droite MIN menée par le milieu I de GH, perpendiculairement à AB : elle est perpendiculaire à CD (72), et elle détermine deux angles GIM, HIN égaux entre eux (37). Par suite, les deux triangles rectangles GMI, IHN sont égaux (64). Donc

$$\text{angle IGM} = \text{angle HNI}.$$

76. Réciproques. — Deux droites AB, CD sont parallèles lorsqu'elles font, avec une même transversale EF :

- 1° Des angles correspondants, égaux ;
- 2° Des angles alternes-internes, égaux ;
- 3° Des angles alternes-externes, égaux ;
- 4° Des angles internes d'un même côté, supplémentaires ;
- 5° Des angles externes d'un même côté, supplémentaires.

Supposons, par exemple, que les angles correspondants EGB , EHD soient égaux entre eux : je dis que les droites AB , CD sont parallèles.



En effet si ces droites rencontrent, menons $A'GB'$ parallèle à CD : les angles EGB' , EHD seront égaux entre eux (75). Mais, par hypothèse, ce dernier angle est égal à EGB ; donc celui-ci serait égal à EGB' ; ce qui est absurde. Il n'est donc pas possible que AB rencontre CD : autrement dit, ces deux droites sont parallèles.

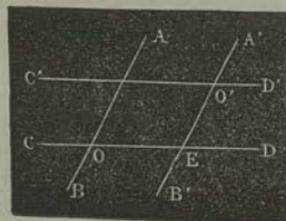
On démontre, avec la même facilité, les autres parties du théorème.

77. *Remarque.* — Le raisonnement que nous venons de développer est connu sous le nom de *réduction à l'absurde*. Ce mode de démonstration est surtout employé quand on veut établir la *reciproque* d'un théorème connu; mais, autant que possible, on doit préférer les démonstrations *directes*.

Applications de la théorie des parallèles.

78. THÉORÈME. — Deux angles sont égaux ou supplémentaires lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre.

Soient les deux parallèles AB , $A'B'$, et les deux parallèles CD , $C'D'$. Je dis que les quatre angles en O et les quatre angles en O' sont, deux à deux, égaux ou supplémentaires.



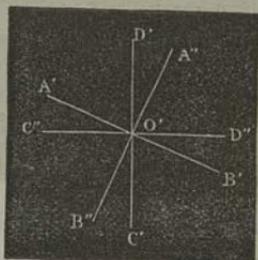
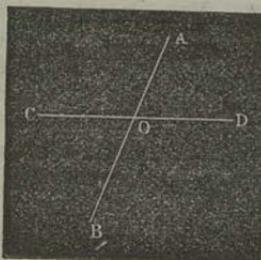
Prolongeons $A'B'$: cette droite rencontrera CD (69). Les deux angles AOC , $A'EC$ sont égaux comme correspondants. De même, les deux angles $A'O'C'$, $A'EC$ sont égaux. Donc

$$\angle AOC = \angle A'O'C'.$$

On comparerait de même les autres angles.

79. THÉORÈME. — Deux angles sont égaux ou supplémentaires, lorsque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre.

Soyent les deux perpendiculaires AB , $A'B'$, et les deux perpendiculaires CD , $C'D'$. Je dis que les quatre angles en O et les quatre angles en O' sont, deux à deux, égaux ou supplémentaires.



Menons, par le point O' , $A''B''$ parallèle à AB , et $C''D''$, parallèle à CD : les angles AOC , $A''O''C''$ sont égaux (78). De plus,

$$A''O''C'' = 1^d + A'O''C'',$$

$$A'O''C'' = 1^d + A'O''C''.$$

Donc

$$A''O''C'' = A'O''C''$$

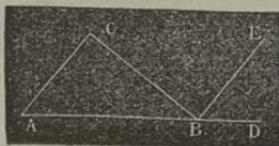
ou

$$AOC = A'O''C''.$$

Somme des angles d'un triangle, d'un polygone quelconque.

80. THÉORÈME. — Dans tout triangle ABC , la somme des trois angles est égale à 2 droits.

Prolongeons indéfiniment le côté AB , et menons BE parallèle à AC . Les angles CAB , EBD sont égaux comme correspondants; les angles ACB , CBE sont égaux comme alternes-internes (75). La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des angles DBE , EBC , CBA , ou égale à deux angles droits (33).



81. Corollaires. — 1^o Un triangle ne peut avoir ni deux angles droits, ni deux angles obtus ;

2^o Dans tout triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires ;

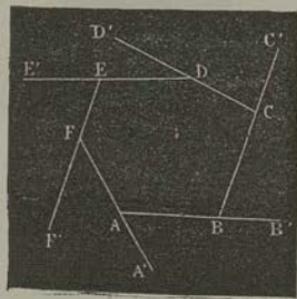
3^o Chaque angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs qui y sont opposés ;

4^o Si deux angles d'un triangle sont, chacun à chacun, égaux à deux angles d'un autre triangle, les deux derniers angles sont égaux entre eux.

82. THÉORÈME. — La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois 2 droits qu'il a de côtés moins deux.

Joignons l'un des sommets à tous les sommets opposés, par des diagonales. Le polygone sera décomposé en triangles dont le nombre égalera celui des côtés du polygone, moins deux : en effet, les deux côtés adjacents au sommet considéré appartiennent aux triangles déterminés par les deux côtés suivants. Or, la somme des angles de tous les triangles est égale à la somme des angles intérieurs du polygone ; et, d'après le théorème précédent, la somme des angles de chacun des triangles est égale à 2 droits. Si donc n représente le nombre des côtés du polygone, la somme des angles intérieurs sera $2^d \times (n - 2)$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

83. THÉORÈME. — La somme des angles extérieurs de tout polygone convexe est égale à 4 droits.



La somme de l'angle intérieur FAB et de l'angle extérieur adjacent BAA' est égale à 2 droits : donc la somme de tous les angles intérieurs et extérieurs vaut autant de fois 2 droits qu'il y a de côtés dans le polygone ; et comme la somme des angles intérieurs est égale à celle-ci, diminuée de 4 droits, il reste 4 droits pour la somme des angles extérieurs.

Quadrilatères.

84. Parmi les quadrilatères, on remarque :

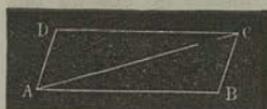
- 1° Le *trapèze*, qui a deux côtés parallèles, nommés *bases* ;
- 2° Le *parallélogramme*, qui a ses côtés parallèles, deux à deux ;
- 3° Le *rectangle*, qui a tous ses angles droits ;
- 4° Le *losange*, qui a tous ses côtés égaux ;
- 5° Le *carré*, qui a ses côtés égaux et ses angles droits : le carré est un *losange-rectangle*.

Propriétés des parallélogrammes.

85. THÉORÈME. — *Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

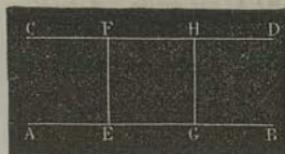
Menons la diagonale AC, et comparons les triangles ABC, ADC.

Le côté AC est commun, les angles BCA, DAC sont égaux comme alternes-internes; les angles BAC, DCA sont égaux par la même raison. Donc les deux triangles sont égaux. Donc



$$AB = CD, BC = AD.$$

86. Corollaire. — *Deux parallèles sont partout également distantes.*



Soient deux parallèles AB, CD, et deux droites EF, GH perpendiculaires à AB et à CD (72). La figure EFGH est un rectangle. Donc $EF = GH$.

C'est là ce qu'exprime l'énoncé du corollaire.

87. Réciproques. — 1° *Si, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme;*

2° *Si, dans un quadrilatère, deux côtés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

1° Reportons-nous à la figure du n° 85, et comparons encore les deux triangles ADC, ABC. Ils seront égaux, comme ayant les côtés égaux, chacun à chacun. Donc les angles ACD, CAB sont égaux entre eux (76); et les droites CD, AB sont parallèles (75, 2°).

2° Même démonstration.

88. *Remarque.* — Dans tout parallélogramme, les angles opposés sont égaux, et les angles adjacents à un même côté sont supplémentaires.

89. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

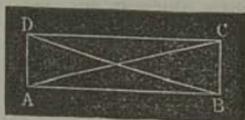


Dans les deux triangles AOB, COD :
 $AB = CD$, $\angle ABO = \angle CDO$, $\angle BAO = \angle DCO$.
 Donc ces deux triangles sont égaux :
 Donc

$$BO = DO, \quad AO = CO.$$

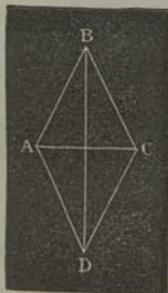
90. THÉORÈME. — *Les diagonales d'un rectangle sont égales.*

En effet, les deux triangles ABC, BAD ont un angle égal compris entre un côté commun et un côté égal; donc ils sont égaux (45). Donc



$$AC = BD.$$

91. *Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles.*



La diagonale BD a deux de ses points B et D, également éloignés, chacun, des extrémités de la diagonale AC; donc elle est perpendiculaire au milieu de cette dernière (62).

Résumé.

Deux droites, perpendiculaires à une même droite, sont parallèles entre elles.

Par un point donné, on peut mener une parallèle à une droite donnée.

Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

Deux droites, l'une oblique et l'autre perpendiculaire à une même droite, se rencontrent.

Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si deux droites se coupent, leurs perpendiculaires respectives se coupent aussi.

Deux parallèles font, avec une même transversale : 1° des angles correspondants égaux ; 2° des angles alternes-internes égaux ; 3° des angles alternes-externes, égaux ; 4° des angles internes d'un même côté, supplémentaires ; 5° des angles externes d'un même côté, supplémentaires.

Réciproquement, deux droites sont parallèles lorsqu'elles font, avec une même transversale : 1° des angles correspondants égaux ; 2° des angles alternes-internes égaux, etc.

Deux angles sont égaux ou supplémentaires, lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre.

Deux angles sont égaux ou supplémentaires, lorsque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre.

Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux droits.

La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux droits, qu'il a de côtés moins deux.

La somme des angles extérieurs de tout polygone convexe est égale à quatre droits.

Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.

Deux parallèles sont partout également distantes.

Réciproquement, 1° si, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme ; 2° si, dans un quadrilatère, deux côtés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.

Les diagonales d'un rectangle sont égales.

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles.

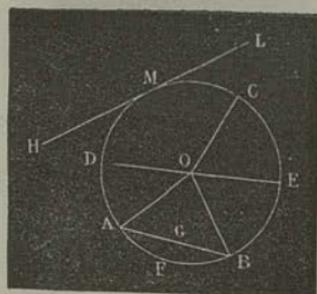
CHAPITRE IV.

De la circonférence du cercle (92-102). — Dépendance mutuelle des arcs et des cordes, des cordes et de leurs distances au centre (103-108). — Tangente au cercle (109, 110). — Intersection et contact de deux cercles (111-116).

Préliminaires.

92. La *circonférence* est une ligne plane dont tous les points sont également distants d'un point intérieur qu'on appelle *centre*.

93. Le *cercle* est la partie du plan limitée par la circonférence.



94. Une droite telle que OA , menée du centre à un point quelconque de la circonférence, est un *rayon*. D'après la définition (92), tous les rayons OA , OB , OC , sont égaux.

95. Toute droite DOE , qui passe par le centre, et qui se termine à deux points de la circonférence, est un *diamètre*. Tous les diamètres sont égaux.

96. Une portion quelconque de la circonférence, telle que AFB , est appelée *arc*. La droite AB , qui joint les extrémités d'un arc, est une *corde*. On dit que la corde *sous-tend* l'arc, ou que l'arc est *sous-tendu* par la corde.

A la même corde AB répondent toujours deux arcs AFB , ACB ; mais l'arc *sous-tendu* est le plus petit des deux.

97. La portion de cercle $AFBG$, comprise entre un arc et sa corde, est nommé *segment*. La partie $OAFBO$, comprise entre un arc et les rayons menés à ses extrémités, est un *secteur*.

98. Une droite HL , qui n'a qu'un point M de commun avec la circonférence, est une *tangente*.

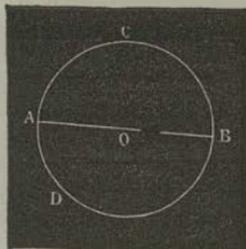
Le point M est appelé *point de contact*.

99. Enfin une droite qui traverse la circonférence se nomme *sécante*.

100. THÉORÈME. — Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points.

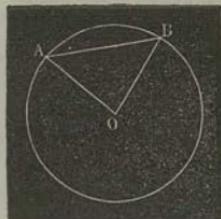
Si une droite pouvait rencontrer la circonférence en trois points, les rayons menés à ces points étant égaux, il s'ensuivrait que, d'un point à une droite, on pourrait mener trois droites égales : ce qui est impossible (60).

101. THÉORÈME. — Tout diamètre partage le cercle et la circonférence, chacun en deux parties égales.



Plions la figure suivante AB : la partie ACB de la circonférence devra coïncider avec la partie ADB ; car tous les rayons sont égaux entre eux.

102. THÉORÈME. — Toute corde est plus petite que le diamètre.



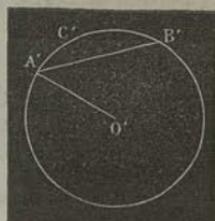
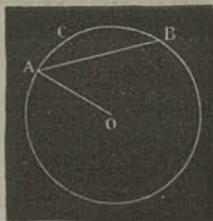
En effet, dans le triangle AOB, on a

$$AB < AO + OB.$$

Cordes et arcs.

103. THÉORÈME. — Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.

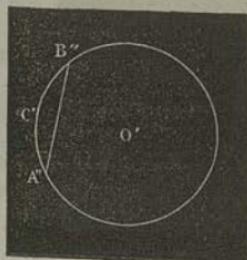
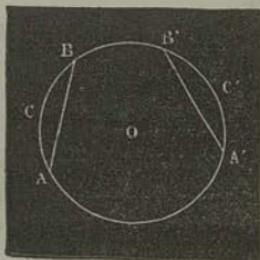
1^o Soient deux cercles O, O' égaux, c'est-à-dire ayant des rayons égaux ; soit $ACB = A'C'B'$. Je dis que $AB = A'B'$.



Transportons le cercle O' sur le cercle O , de manière que le rayon $A'O'$ coïncide avec le rayon AO . Les deux circonférences, ayant même centre et même rayon, coïncideront; et, l'arc $A'C'B'$ étant égal à l'arc ACB , le point B' tombera en B .
Donc

$$A'B' = AB.$$

2° Soient, sur une même circonférence, les arcs ACB , $A'C'B'$; égaux entre eux. Je dis que $AB = A'B'$.



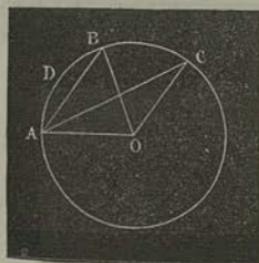
Imaginons une circonférence O' , égale à la circonférence O , et soit, sur cette circonférence auxiliaire, un arc $A'C'B' = ACB = A'C'B'$. D'après le premier cas, la corde $A'B'$ est égale aux deux cordes AB , $A'B'$. Donc celles-ci sont égales entre elles.

104. THÉORÈME. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc (moindre qu'une demi-circonférence) est sous-tendu par une plus grande corde.*

Par le théorème précédent, on peut toujours supposer que les deux arcs appartiennent à la même circonférence, et que, partant du même point, le plus petit soit appliqué sur le plus grand. Soient alors ADB et $ADBC$ ces deux arcs. Menons les rayons AO , BO , CO .

Les deux triangles AOB , AOC ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun; donc (47)

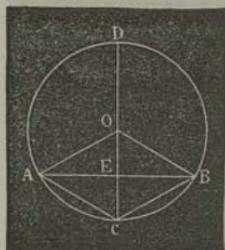
$$AB < AC.$$



105. Réciproques des deux théorèmes précédents. — Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :

- 1° Des cordes égales sous-tendent des arcs égaux ;
- 2° Une plus grande corde sous-tend un plus grand arc.

106. THÉORÈME. — Le diamètre CD , perpendiculaire à une corde AB , partage cette corde et les deux arcs correspondants, chacun en deux parties égales.



Menons les rayons OA , OB , et les cordes AC , BC .

Les obliques égales ont des projections égales (59, 1°), donc

$$AE = EB;$$

et le diamètre CD est perpendiculaire au milieu de AB . Par suite, les cordes AC , BC sont égales; donc

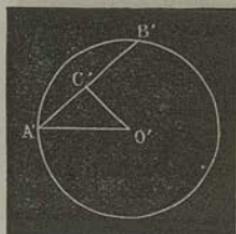
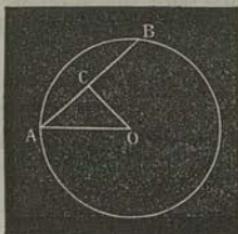
$$\text{arc } AC = \text{arc } BC.$$

On démontre de même que les arcs AD , BD sont égaux.

107. THÉORÈME. — Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :

- 1° Deux cordes égales sont également éloignées du centre ;
- 2° De deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée du centre.

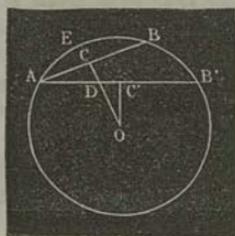
1° Soient, dans les deux cercles égaux O , O' , deux cordes égales AB , $A'B'$. Je dis qu'elles sont également éloignées des centres O , O' , c'est-à-dire que les perpendiculaires OC , $O'C'$ sont égales entre elles.



Ces perpendiculaires divisent les deux cordes, chacune en deux parties égales (106). Si donc nous menons les rayons AO , $A'O'$, nous formerons deux triangles rectangles égaux entre eux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal. Donc

$$OC = O'C'.$$

2° Considérons, dans un même cercle O , deux cordes inégales AB , $A'B'$, inscrites au même demi-cercle et ayant une extrémité commune. AB' étant supposée plus grande que AB , l'arc ABB' est plus grand que l'arc AEB (105). Donc la perpendiculaire OC , abaissée sur AB , coupe AB' en un point D . Et comme OD est oblique à AB' , tandis que OC' est perpendiculaire à cette corde, nous aurons (58, 1°)

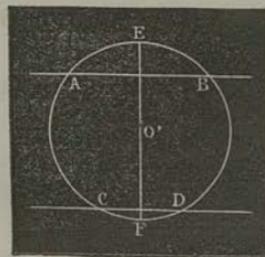


$$OD > OC' ;$$

d'où, à plus forte raison,

$$OC > OC'.$$

108. THÉORÈME. — Deux parallèles interceptent, sur la circonférence, des arcs égaux.



Soient les deux sécantes AB , CD , parallèles entre elles.

Si nous menons le diamètre EF , perpendiculaire aux deux sécantes, nous aurons (106)

$$\text{arc } AF = \text{arc } BF, \text{ arc } CF = \text{arc } DF;$$

d'où, en retranchant,

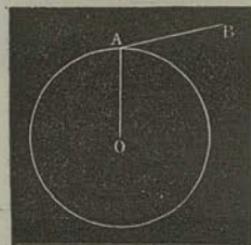
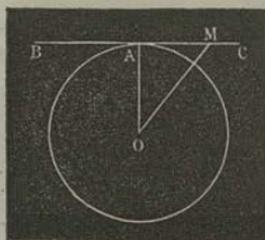
$$\text{arc } AC = \text{arc } BD^*.$$

* Le cas où l'une des droites AB , CD deviendrait tangente à la circonférence, suppose le théorème suivant.

Tangente à la circonférence.

109. THÉORÈME. — 1° La perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence ;

2° Toute oblique à l'extrémité d'un rayon est sécante.



1° Soit la droite BC, perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Si nous prenons sur BC un point quelconque M différent de A, l'oblique OM sera plus grande que la perpendiculaire OA ; et le point M, dont la distance au centre est plus grande que le rayon, sera extérieur au cercle. Donc, la droite BC est tangente à la circonférence.

2° Soit la droite AB, oblique à l'extrémité du rayon OA. Si nous menons du centre une perpendiculaire sur AB, cette droite étant plus petite que l'oblique OA (58, 4°), coupera AB en un point intérieur à la circonférence. Donc la droite AB est sécante.

110. Réciproques. — 1° La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact ;

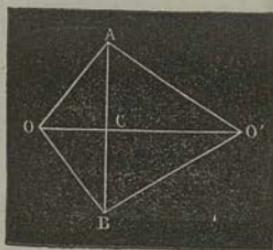
2° La perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente passe par le point de contact.

Circonférences sécantes et tangentes.

111. Deux circonférences situées dans un même plan peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, cinq positions différentes. Elles peuvent être, en effet : 1° extérieures l'une à l'autre ; 2° tangentes extérieurement ; 3° sécantes ; 4° tangentes intérieurement ; 5° intérieures l'une à l'autre.

112. Lemme. — Si deux circonférences ont un point commun A situé d'un côté de la ligne des centres OO' , elles ont un second point commun B, symétrique du premier par rapport à cette ligne.

Abaissons la perpendiculaire ACB sur OO' , et prenons $CB = CA$: le point B est dit *symétrique* de A , par rapport à OO' .



Menons OA, OB : ces deux obliques, ayant des projections égales, sont égales (39, 1°). Donc le point B appartient à la circonférence décrite du point O comme centre, et passant en A . Pour la même raison, il appartient à la seconde circonférence. La proposition est donc démontrée.

143. THÉORÈME. — Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire au milieu de la corde commune.

En effet, la perpendiculaire élevée au milieu de la corde commune est le lieu géométrique des points tels, que chacun d'eux est également distant des extrémités de cette corde (62) : donc elle passe par l'un et l'autre centre, donc elle se confond avec la ligne des centres (9).

144. THÉORÈME. — Lorsque deux circonférences se touchent, la ligne des centres passe par le point de contact.

En effet, si le point de contact était situé en dehors de la ligne des centres, les deux circonférences auraient un second point commun (142) ; ce qui est contre l'hypothèse.

145. THÉORÈME. — Deux cercles étant situés dans un même plan :

1° Si les circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ;

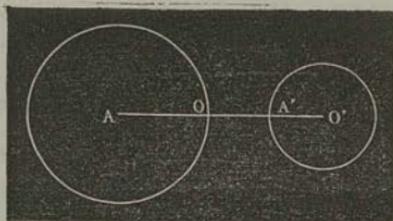
2° Si les circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons ;

3° Si les circonférences sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence ;

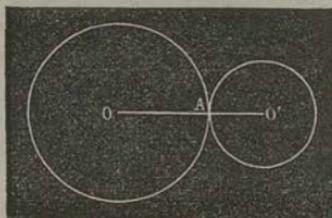
4° Si les circonférences sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons ;

5° Si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.

En effet :

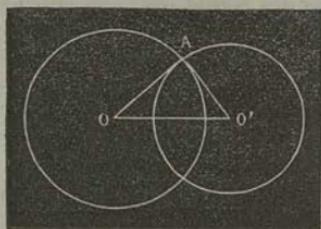


$$1^{\circ} \quad OO' = OA + O'A' + AA';$$



2° Les centres O, O', et le point de contact A, étant en ligne droite, on a

$$OO' = OA + O'A;$$



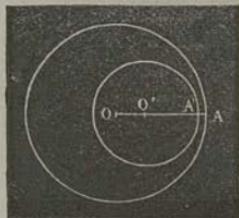
3° Le triangle OAO' donne

$$OO' < OA + O'A,$$

$$O'O > OA - O'A;$$



$$4^{\circ} \quad OO' = OA - O'A;$$



$$5^{\circ} \quad OA = OO' + O'A' + AA'.$$

Donc

$$OO' < OA - O'A'.$$

116. *Remarque.* — Les réciproques de ce théorème sont évidentes par le principe du n° 49.

Résumé.

Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points.

Tout diamètre partage le cercle et la circonférence, chacun en deux parties égales.

Toute corde est plus petite que le diamètre.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc (moindre qu'une demi-circonférence) est sous-tendu par une plus grande corde.

Réciproquement, dans un même cercle ou dans des cercles égaux : 1° des cordes égales sous-tendent des arcs égaux ; 2° une plus grande corde sous-tend un plus grand arc.

Le diamètre perpendiculaire à une corde, partage cette corde et les deux arcs sous-tendus, chacun en deux parties égales.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux : 1° deux cordes égales sont également éloignées du centre ; 2° de deux cordes inégales, la plus grande est la moins éloignée du centre.

Deux parallèles interceptent, sur la circonférence, des arcs égaux.

La perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence.

Toute oblique à l'extrémité d'un rayon est sécante.

Réciproquement, 1° la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact ; 2° la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente passe par le point de contact.

Si deux circonférences ont un point commun situé d'un côté de la ligne des centres, elles ont un second point commun, symétrique du premier par rapport à cette ligne.

Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Lorsque deux circonférences se touchent, la ligne des centres passe par le point de contact.

Deux cercles étant situés dans un même plan :

1° Si les circonférences sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ;

2° Si les circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons ;

3° Si les circonférences sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence ;

4° Si les circonférences sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons ;

5° Si les circonférences sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.

CHAPITRE V.

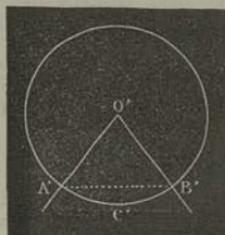
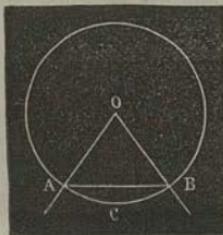
Mesure des angles (117-122). — Angle inscrit (123-125). — Usage de la règle et du compas dans les constructions sur le papier (126). — Commune mesure de deux droites (127-129). — Tracé des perpendiculaires et des parallèles (134-136). — Problèmes élémentaires sur la construction des angles et des triangles (130-133). — Abréviation des constructions au moyen de l'équerre et du rapporteur (122, 136). — Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes (121). — Mener une tangente au cercle par un point extérieur (141). — Décrire, sur une droite donnée, un segment capable d'un angle donné (142).

Mesure des angles.

117. THÉORÈME.—*Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre, correspondant à des arcs égaux, sont égaux.*

1° Soient les deux cercles égaux O, O' , et soit $ACB = A'C'B'$: je dis que les angles *au centre* $AOB, A'O'B'$ sont égaux.

Menons les cordes $AB, A'B'$: ces droites sont égales (103). Par suite, les triangles $AOB, A'O'B'$ sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. Donc $O = O'$.



2° Si les deux arcs égaux sont situés sur une même circonférence, on ramènera ce cas au précédent, comme on a fait au numéro cité.

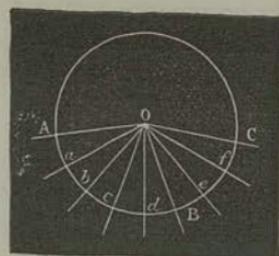
418. THÉORÈME. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre sont entre eux comme les arcs correspondants.*

Par la proposition précédente, nous pouvons toujours supposer que les deux arcs sont situés sur la même circonférence, et que, leurs extrémités coïncidant, le plus petit arc soit appliqué sur le plus grand.

Cela posé, soient AB, AC les deux arcs, AOB, AOC les deux angles correspondants : je dis que le rapport des angles est égal à celui des arcs, ou que l'on a

$$\frac{AOB}{AOC} = \frac{AB}{AC}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, les arcs AB, AC commensurables, et soit Aa leur plus grande commune mesure.



Supposons en outre, pour fixer les idées, que cette commune mesure, ayant été portée sur AC, soit contenue 8 fois dans cet arc, et 5 fois dans l'arc AB, de telle sorte que le rapport des arcs soit $\frac{8}{5}$. Par les points de division a, b, c, ..., et le centre O, menons les droites indéfinies Oa, Ob, Oc... Il résultera, de cette construction, des angles AOa, aOb, ...,

tous égaux entre eux, comme répondant à des arcs égaux. Or, les angles AOC, AOB contiennent, respectivement, 8 fois et 5 fois l'angle AOa, lequel est leur plus grande commune mesure. Le rapport des angles AOC, AOB est donc $\frac{8}{5}$. C'est ce qu'il fallait démontrer*.

419. Par le théorème ci-dessus, la comparaison des angles se trouve ramenée à la comparaison des arcs décrits d'un

* Si les arcs AB, AC étaient incommensurables, on aurait encore $\frac{AOB}{AOC} = \frac{AB}{AC}$. Voyez, sur ce point, mes *Éléments de Géométrie* (2^e édition).

même rayon, et des sommets de ces angles comme centres. Si, comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous prenons pour unité d'angle l'angle droit, et si en même temps nous prenons pour unité d'arc le quart de la circonférence, ou le quadrans, le même théorème entraînera la conséquence suivante :

120. Corollaire. — *Tout angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

En effet, si dans la proportion $\frac{AOB}{AOC} = \frac{AB}{AC}$, on suppose que AOC et AC soient l'unité d'angle et l'unité d'arc, le rapport $\frac{AOB}{AOC}$, mesure de l'angle AOB, sera égal au nombre qui mesure l'arc AB. L'énoncé précédent signifie seulement que ces deux mesures sont égales.

Évaluation des angles en degrés, minutes et secondes.

121. Afin de pouvoir évaluer plus facilement les angles, on suppose le quadrans partagé en 90 parties égales, appelées *dégrés*. Chaque degré se divise en 60 *minutes*; chaque minute en 60 *secondes*, etc. Si, par le centre de la circonférence, on mène des droites à tous les points de division, l'angle droit sera partagé en 90 angles égaux entre eux; puis chacun de ceux-ci en 60 angles égaux entre eux, etc. D'après ce que nous avons démontré ci-dessus, la grandeur d'un angle dépend seulement du nombre de degrés, minutes, secondes, etc., de l'arc correspondant. C'est pourquoi l'on dit : *un angle de 1°*, *un angle de 1'*, *un angle de 1''*, etc., en faisant porter, en quelque sorte, sur l'angle droit, le mode de division établi d'abord pour le quadrans.

Il est bon de se rappeler les valeurs suivantes :

1° La circonférence est partagée en 360°;

2° L'angle droit = 90°;

3° L'angle d'un triangle équilatéral = 60°;

4° Chacun des angles aigus d'un triangle rectangle isocèle = 45°, etc.

122. Pour évaluer un angle donné, on emploie un demi-cercle de corne ou de laiton, auquel on donne le nom de *rap-*

porteur. Ce demi-cercle porte un *limbe*, partagé en 180 ou en 360 parties égales. Si l'on fait coïncider le centre avec le sommet de l'angle donné, et le zéro de la division avec un point situé sur l'un des côtés de l'angle, on pourra lire, sur le limbe, le nombre de degrés ou de demi-degrés correspondant à l'angle.

Ainsi que l'indique son nom, l'instrument sert aussi à rapporter sur le papier un angle observé.

Angles inscrits.

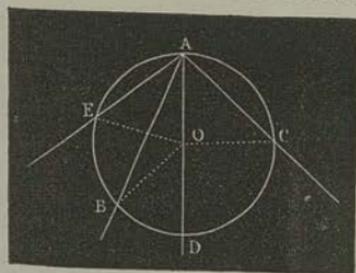
123. THÉORÈME. — *Un angle dont le sommet est sur la circonférence a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Cet énoncé signifie qu'un angle tel que BAC est la moitié de l'angle au centre BOC, correspondant à l'arc BC compris entre les côtés du premier.

Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter.

D'abord, si les côtés de l'angle sont des sécantes, le centre peut être situé sur un des côtés, ou entre eux, ou extérieurement à ces côtés.

1° Soit l'angle BAD, dont un des côtés passe par le centre : je dis que BAD est la moitié de BOD.



En effet, l'angle BOD est extérieur au triangle isocèle BOA ; donc il est double de chacun des angles égaux ABO, BAO (81, 3°).

2° Soit l'angle BAC : je dis que cet angle est la moitié de BOC.

Menons le diamètre AOD ; nous aurons

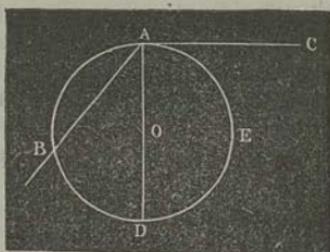
$$\text{BAD} = \frac{1}{2} \text{BOD}, \quad \text{DAC} = \frac{1}{2} \text{DOC};$$

donc

$$\text{BAD} + \text{DAC} = \frac{1}{2} (\text{BOD} + \text{DOC}) = \frac{1}{2} \text{BOC}.$$

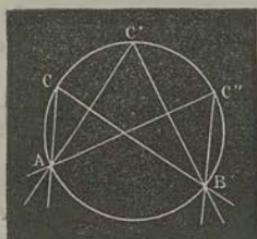
3° On prouverait de même que l'angle BAE est la moitié de BOE.

Considérons maintenant l'angle BAC, formé par une tangente AC et une sécante AB.



Menons le diamètre AOD. L'angle BAC sera décomposé en un angle aigu BAD et un angle droit DAC. Or, l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ BD, et l'angle droit a pour mesure le quadrans, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ DEA. Donc BAC a pour mesure

$$\frac{1}{2} BD + \frac{1}{2} DEA = \frac{1}{2} BDEA.$$



124. Corollaire. — Tous les angles ACB, AC'B, AC''B, ..., INSCRITS à un même segment ACB, sont égaux.

125. Remarque. — A cause de cette propriété, le segment ACB est dit capable de l'angle ACB.

Usage de la règle et du compas.

126. Le tracé des droites et des circonférences, au moyen de la règle et du compas, n'exige aucune explication. Quant à la vérification de la règle, elle résulte de cette propriété fondamentale, que, par deux points donnés, on ne peut faire passer qu'une ligne droite (9). Si, avec une règle, on a tracé sur le papier une ligne passant par deux points donnés, et si la nouvelle ligne qu'on obtient en recommençant cette opération, après avoir interverti la situation des extrémités de la règle, ne coïncide pas avec la première, ces lignes ne sont pas droites, et la règle est mal dressée.

Commune mesure de deux droites ou de deux angles.

127. PROBLÈME. — Trouver la plus grande commune mesure de deux droites.

La commune mesure de deux droites A, B, est une autre droite M, partie aliquote de A et de B. La recherche de la plus grande commune mesure de deux droites équivaut

done à l'opération du plus grand commun diviseur de deux nombres.

D'après cela, pour résoudre le problème proposé : portez la plus petite droite B sur la plus grande A, autant de fois qu'elle y peut être contenue ; portez le reste C sur B autant de fois qu'il y peut être contenu ; puis le deuxième reste D sur le premier reste C, etc. Si les droites A, B sont *commensurables*, vous arriverez à un dernier reste M qui divisera exactement le reste précédent : ce sera la plus grande commune mesure demandée.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait trouvé :

$$A = 3B + C, \quad B = 2C + D, \quad C = 7D + E, \quad D = 3E.$$

On tire, de ces égalités :

$$\begin{aligned} C &= 21E + E = 22E, \\ B &= 44E + 3E = 47E, \\ A &= 144E + 22E = 166E. \end{aligned}$$

Ainsi la plus grande commune mesure E est contenue 166 fois dans A et 47 fois dans B ; donc

$$\frac{A}{B} = \frac{166}{47}.$$

128. REMARQUES.—I. La fraction $\frac{166}{47}$ est *irréductible*, parce que les nombres 166, 47 sont premiers entre eux ; ce qui doit être*.

II. Si les droites données sont *incommensurables*, l'opération indiquée n'aura pas de fin, et l'on ne pourra pas, en général, déterminer rigoureusement le rapport cherché. Mais en négligeant le dernier reste obtenu, on trouvera, au lieu de ce rapport, une valeur qui en approchera d'autant plus, que le reste négligé sera plus petit.

III. La règle ci-dessus, exacte en théorie, est à peu près illusoire dans la pratique, parce que *les pointes du compas* ne peuvent se rapprocher indéfiniment. On évite cet inconvénient en doublant ou triplant, à chaque fois, les deux restes consécutifs que l'on veut comparer.

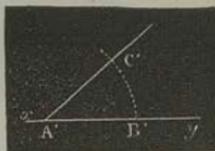
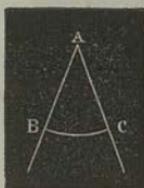
* Voyez l'Arithmétique.

429. PROBLÈME. — *Trouver la plus grande commune mesure de deux angles donnés.*

Des sommets de ces angles, comme centres, décrivons, avec la même ouverture de compas, deux arcs compris entre leurs côtés. En opérant d'une manière analogue à celle qui a été indiquée dans le problème précédent, nous pourrons trouver la plus grande commune mesure M des deux arcs. Et si nous prenons l'angle correspondant à M , cet angle sera la plus grande commune mesure demandée.

Construction des angles et des triangles.

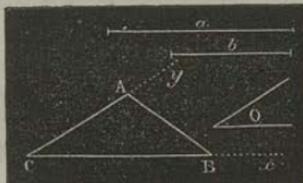
430. PROBLÈME. — *Construire un angle égal à un angle donné A .*



Après avoir tracé une droite indéfinie xy , et avoir pris, sur cette droite, un point A' , plaçons en ce point la pointe d'un compas à crayon, et décrivons l'arc indéfini $B'C'$. Avec la même ouverture de compas, et du sommet A comme centre, décrivons l'arc BC . Enfin, avec un compas à pointes sèches, prenons la distance BC , et portons-la de B' en C' . Si nous faisons passer une droite par le point A' et par le point C' ainsi déterminé, l'angle $B'A'C'$ sera égal à A .

En effet, d'après la construction, les arcs $BC, B'C'$ sont égaux (105); donc les angles au centre $BAC, B'A'C'$ sont égaux (117).

Nous avons indiqué, plus haut, l'usage du rapporteur.]



431. PROBLÈME. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés a, b , et l'angle compris O .*

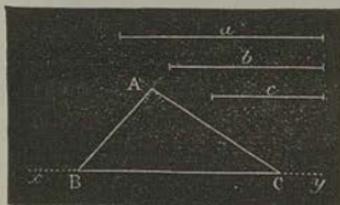
Tirons la droite indéfinie Cx ; formons, au point C , l'angle xCy égal à l'angle donné O ; prenons $CB = a$, $CA = b$, et menons AB . Le triangle demandé est ABC .

132. PROBLÈME. — *Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles.*

Si les deux angles doivent être, l'un et l'autre, adjacents au côté donné, la construction se fait immédiatement. Si l'un des deux angles donnés doit être opposé au côté connu, le troisième angle, étant supplémentaire de la somme des deux premiers, s'obtient facilement, et le problème est ramené au premier cas.

133. PROBLÈME. — *Construire un triangle, connaissant les trois côtés a, b, c .*

Sur une droite indéfinie xy , prenons $BC = a$. Des points B et C comme centres, avec des rayons respectivement égaux à c et b , traçons deux circonférences. Enfin, joignons l'un des points où elles se coupent, avec les points B, C, par les droites AB, AC. Le triangle demandé sera ABC.



Pour que le problème soit possible, le plus grand côté doit être plus petit que la somme des deux autres (415).

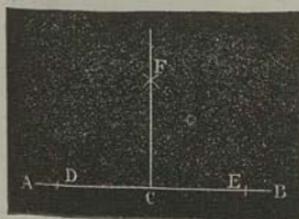
Tracé des perpendiculaires et des parallèles.

134. PROBLÈME. — *Par un point donné C, mener une perpendiculaire à une droite donnée AB.*

Ce problème présente deux cas principaux :

1^{er} Cas : *Le point étant situé sur la droite.*

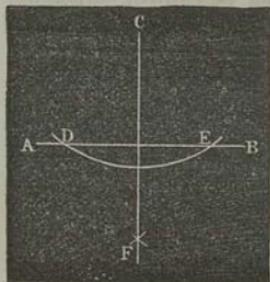
Du point C comme centre, et d'un même rayon arbitraire, décrivons deux arcs qui coupent en D, E la droite AB. De ces deux points, pris comme centres, et d'un même rayon, plus grand que CD, décrivons, d'un même côté de AB, deux arcs qui se couperont en un point F. La droite CF est la perpendiculaire demandée.



En effet, chacun des points C, F est également distant des extrémités D, E de la droite finie DE. Donc CF est perpendiculaire au milieu de DE (62).

2° Cas : *Le point étant situé hors la droite.*

Du point C comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, traçons une circonférence qui coupe, aux points D, E, la droite donnée AB; puis, de ces deux points pris comme centres, et d'un même rayon plus grand que la moitié de DE, décrivons deux arcs qui se coupent en F. La droite CF sera la perpendiculaire demandée.

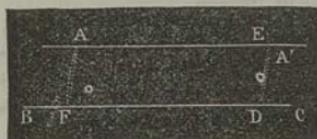


En effet, les points C, F sont, chacun, également distants des extrémités de DE; donc, etc.

435. *Remarque.* — Quelquefois, pour tracer des perpendiculaires, on emploie l'équerre, c'est-à-dire un triangle rectangle, en bois ou en verre. Seulement, comme les variations atmosphériques peuvent faire jouer cet instrument, il est bon de le vérifier souvent. Cette vérification est fondée sur la définition de l'angle droit (28) : après avoir appliqué l'un des petits côtés de l'équerre le long d'une règle, et avoir marqué, sur le papier, la direction du côté perpendiculaire, on fait tourner l'équerre autour de ce dernier côté, et l'on recommence la construction. Si les deux perpendiculaires coïncident, l'équerre est juste.

436. **PROBLÈME.** — *Par un point donné A, mener une parallèle à une droite donnée BC.*

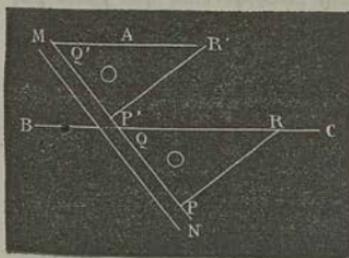
Première solution. Du point donné A, comme centre, décrivez un arc DE, qui coupe en D la droite BC. Du point D



comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivez l'arc AF. Portez la distance des points F, A sur l'arc DE, de D en A'. Enfin tirez la droite AA'; elle sera parallèle à BC.

En effet, d'après cette construction, le quadrilatère AA'DF a ses côtés opposés égaux deux à deux : cette figure est donc un parallélogramme (87, 1°).

Seconde solution. Plaçons une équerre RPQ, de manière que le côté QR coïncide avec BC, et que le côté QP s'appuie contre une règle fixe MN. Faisons ensuite glisser

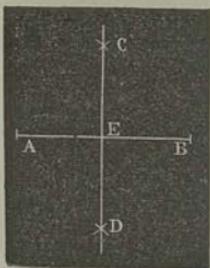


cette équerre jusqu'à ce que le premier côté, QR, vienne passer par le point A : la droite Q'R' sera parallèle à QR. En effet, ces droites forment, avec MN, des angles correspondants égaux.

Ce dernier procédé, beaucoup plus rapide que l'autre, est très-exact.

Autres problèmes.

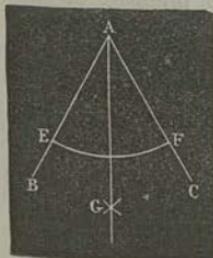
137. PROBLÈME. — *Diviser en deux parties égales une droite donnée AB.*



Des extrémités A, B, comme centres, avec un même rayon arbitraire, plus grand que la moitié de AB, décrivons deux circonférences : elles se couperont en deux points C, D, également éloignés, chacun, des extrémités de AB. Donc la droite CD est perpendiculaire au milieu de AB.

* *Théoriquement*, ce procédé est très-exact : en réalité, il vaut mieux, soit pour trouver le milieu d'une droite, soit

pour la partager en plusieurs parties égales, employer le compas à pointes sèches. Avec un peu d'habitude, on parvient, après quelques tâtonnements, à trouver les points de division.



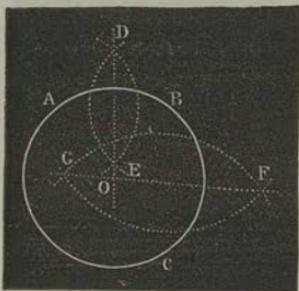
138. PROBLÈME. — *Diviser en deux parties égales un angle donné BAC.*

Du sommet A comme centre, décrivons un arc qui coupe en E, F les côtés de l'angle. De ces deux derniers points comme centres, avec une même ouverture de compas suffisamment grande, traçons deux arcs qui se coupent en G. La droite AG est la *bissectrice* cherchée, et elle partage en deux parties égales l'arc EF (106 et 117).

139. PROBLÈME. — *Décrire une circonférence qui passe par trois points donnés A, B, C.*

Si les trois points étaient en ligne droite, le problème serait impossible (100).

Soient donc A, B, C trois points donnés, non en ligne droite. Des points A, B comme centres, et d'un même rayon, décrivez deux arcs se coupant aux points D, E. Menez la droite DE : elle sera perpendiculaire au milieu de AB* (113). Des points B, C

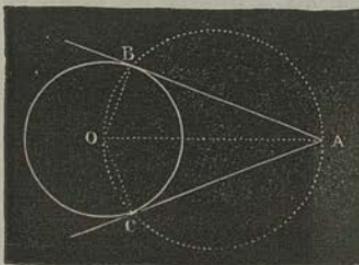


comme centres, et d'un même rayon, décrivez deux nouveaux arcs qui se coupent en F, G : la droite FG sera perpendiculaire au milieu de CD. Les deux droites DE, FG, respectivement perpendiculaires à deux droites qui se coupent, se rencontrent en un point O (73), centre de la circonférence cherchée. En effet, ce point est également distant des points A, B, C.

140. Remarque. — Si on élevait une perpendiculaire au milieu de AC, elle passerait au point O. On a donc ce théorème : *A tout triangle, on peut circonscrire une circonférence, mais on n'en peut circonscrire qu'une.*

141. PROBLÈME. — *D'un point A, donné hors d'un cercle O, mener une tangente à ce cercle.*

Joignons le point A au centre O ; puis sur OA, comme diamètre, décrivons une circonférence : elle coupera, aux points B, C, la circonférence donnée. Menons AB, AC. Ces deux droites satisfont à la question.

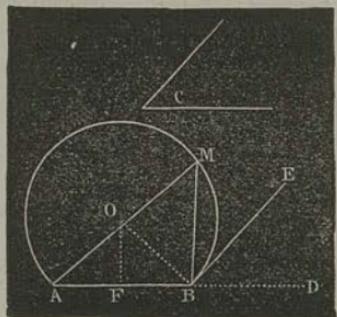


En effet, l'angle OBA, inscrit à un demi-cercle, est droit (123); donc BA est tangente, en B, à la circonférence (109, 1°). De même pour AC.

* La droite AB a été omise sur la figure, parce qu'elle n'est pas nécessaire à la construction.

142. PROBLÈME. — *Construire, sur une droite donnée AB, un segment capable d'un angle donné C.*

Supposons le problème résolu, et soit AMB le segment cherché. Si, au point B, nous menons la tangente BE, l'angle EBD, formé par cette tangente et par le prolongement de AB, sera égal à l'angle donné C (123). D'ailleurs, BE est perpendiculaire au rayon OB ; et le centre O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Donc, pour résoudre le problème proposé :



Menez une droite BE qui fasse, avec le prolongement de AB, un angle égal à l'angle donné C. Au point B, menez BO perpendiculaire à BE, et, au milieu de AB, élevez la perpendiculaire FO. Du point O, où ces perpendiculaires se coupent, décrivez l'arc BMA : il détermine, avec la corde AB, le segment AMBA, capable de l'angle donné (125).

Résumé.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre, correspondant à des arcs égaux, sont égaux.

Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre sont entre eux comme les arcs correspondants.

Tout angle α pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.

Un angle dont le sommet est sur la circonférence α pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Tous les angles inscrits à un même segment sont égaux.

CHAPITRE VI.

Lignes proportionnelles (143-146). — Polygones semblables (147-159).
— Conditions de similitude des triangles (149-154). — Rapport des
périmètres de deux polygones semblables (159).

Lignes proportionnelles.

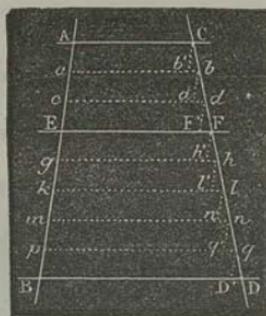
143. THÉORÈME. — *Les segments de deux droites quelconques, déterminés par trois parallèles, sont proportionnels.*

1^o Si les deux droites sont parallèles, la proposition est évidente (85).

2^o Soient deux droites quelconques AB, CD, et trois parallèles AC, EF, BD.

Supposons que le point E partage AB en deux parties commensurables entre elles, et qui soient, par exemple, dans le rapport de 3 à 5.

Portons la plus grande commune mesure Aa, à partir du point A, sur AB : elle sera contenue 3 fois dans AE, et 5 fois dans EB.



Par les points de division a, c, \dots menons des parallèles aux transversales données. Puis, par les points C, b, d, \dots menons des parallèles à AB. Les triangles $cb'b, b'd'd, \dots$ seront tous égaux entre eux. En effet, deux quelconques d'entre eux, par exemple $Cb'b$ et $bd'd$, ont les angles égaux, chacun à chacun (78); de plus, à cause des parallèles et de ce que $Aa = ac$, le côté Cb' du premier est égal au côté bd' du second. Par conséquent,

$$Cb = bd = dF = \dots$$

La droite CD est donc partagée en 8 parties égales, et CF en contient 3.

Par suite,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}.$$

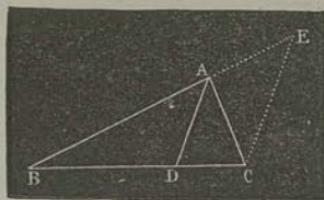
144. Réciproque. — Toute droite qui partage proportionnellement les deux côtés non parallèles d'un trapèze, est parallèle aux deux bases.

Cette réciproque se démontre par la réduction à l'absurde (77).

145. Corollaires. — I. Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, partage proportionnellement les deux autres côtés ; et réciproquement.

II. Les segments de deux droites quelconques, déterminés par tant de parallèles que l'on voudra, sont proportionnels.

146. THÉORÈME. — Dans tout triangle, la bissectrice de chaque angle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.



Soit, dans le triangle ABC, la bissectrice AD de l'angle A : je dis que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

Menons, par le sommet C, une parallèle CE à la bissectrice, et soit E le point où elle rencontre BA prolongée. Nous aurons (144)

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}.$$

Les angles BAD, BEC sont égaux comme correspondants, et les angles DAC, ACE sont égaux comme alternes-internes. Donc, à cause de $\angle BAD = \angle DAC$, les angles BEC, ACE sont égaux. Par suite, $AC = AE$; donc la seconde proportion équivaut à la première.

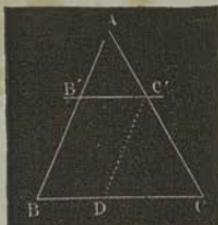
Polygones semblables.

147. Définitions. — 1° Deux triangles sont dits semblables lorsque les côtés du premier sont proportionnels aux côtés du second.

2° Deux polygones sont dits semblables quand ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

148. THÉORÈME. — Toute parallèle $B'C'$, à l'un des côtés d'un triangle ABC , détermine un triangle $A'B'C'$ semblable au premier.

Nous avons (144)



$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'};$$

d'où, par les propriétés des proportions,

$$\frac{AB'}{AB' + BB'} = \frac{AC'}{AC' + CC'};$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Menons $C'D$ parallèle à AB ; nous aurons aussi

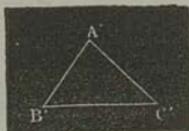
$$\frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}.$$

Mais la figure $BB'C'D$ est un parallélogramme; donc $BD = B'C'$; et enfin

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

149. THÉORÈME. — Deux triangles semblables sont équiangles entre eux.

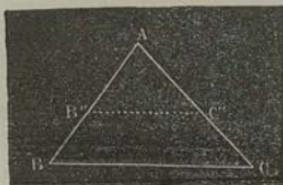
Supposons



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}; \quad (1)$$

je dis que

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$



Prenons $AB' = A'B'$, $AC' = A'C'$, et menons $B'C'$.

En vertu de l'hypothèse,

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'};$$

donc la droite $B'C'$ est parallèle à BC (142). Conséquemment,

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{AC'} \quad (1)$$

ou

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (2)$$

En comparant les deux suites de rapports égaux (1), (2), on conclut $B'C' = B'C$. Les deux triangles $AB'C'$, $A'B'C'$ sont donc égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. D'ailleurs, à cause de $B'C'$, parallèle à BC , les deux triangles $AB'C'$, ABC sont équiangles entre eux; donc $A'B'C'$ et ABC jouissent de la même propriété.

150. Réciproque. — Deux triangles équiangles entre eux sont semblables.

Supposons $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Je dis que l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Prenons $AB' = A'B'$, $AC' = A'C'$, et menons $B'C'$.

Les deux triangles $AB'C'$, $A'B'C'$ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Donc les angles B' et B' sont égaux; et, comme $B = B'$, les angles B' et B sont égaux. Ainsi la droite $B'C'$ est parallèle à BC , et le triangle $AB'C'$, ou son égal $A'B'C'$, est semblable à ABC .

151. Corollaires. — I. Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.

II. Deux triangles isocèles sont semblables lorsque les angles à la base, ou lorsque les angles au sommet opposé, sont égaux.

152. Remarque. — Dans deux triangles semblables, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels et sont dits homologues.

153. THÉORÈME. — Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés proportionnels.

Soient $A = A'$,

et

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Si l'on répète la construction précédente, les triangles $AB'C'$, et $A'B'C'$ seront égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. Mais, en vertu de l'hypothèse,

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'};$$

donc la droite $B'C'$ est parallèle à BC ; donc le triangle $AB'C'$, égal à $A'B'C'$, est semblable à ABC . C'est ce qu'il fallait démontrer.

154. THÉORÈME.— *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés parallèles, chacun à chacun, ou lorsqu'ils les ont perpendiculaires.*

Nommons A, B, C les angles du premier triangle, et A', B', C' les angles qui leur correspondent dans le second : je dis que

$$A = A', B = B', C = C'.$$

Nous savons déjà (78 et 79) que ces angles sont égaux ou supplémentaires; examinons donc les hypothèses suivantes

$$1^{\circ} \quad A' = 2^d - A, \quad B' = 2^d - B, \quad C' = 2^d - C;$$

mais alors

$$A + A' + B + B' + C + C' = 6^d,$$

ce qui est absurde.

$$2^{\circ} \quad A' = 2^d - A, \quad B' = 2^d - B, \quad C' = C.$$

Cette hypothèse donne

$$A + A' + B + B' = 4^d;$$

et comme $A + B = A' + B'$, il vient

$$A + B = 2^d;$$

ce qui est absurde.

$$3^{\circ} \quad B' = B, \quad C' = C;$$

alors

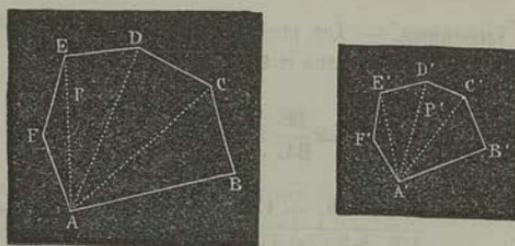
$$A' = A;$$

donc les deux triangles sont équiangles et semblables.

155. *Remarque.* — Les côtés homologues sont les côtés parallèles entre eux ou perpendiculaires entre eux : car ils sont opposés aux angles égaux.

156. *THÉORÈME.* — Deux polygones semblables P, P' ont les angles égaux et les côtés proportionnels, chacun à chacun.

Admettons, pour plus de simplicité, que les deux polygones aient été décomposés en triangles, au moyen de diagonales.



1° Chacun des triangles de P répondant à un triangle semblable dans P' (148), il est clair que, dans ces deux polygones, deux angles correspondants quelconques sont égaux, comme composés d'angles égaux.

2° La similitude des triangles donne cette suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \dots$$

donc, en supprimant les rapports $\frac{AC'}{A'C'}$, $\frac{AD}{A'D'}$, ...;

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \dots$$

157. Dans deux polygones semblables, les côtés proportionnels sont dits *homologues*, parce qu'ils sont homologues dans les triangles correspondants. Les côtés homologues sont adjacents aux angles respectivement égaux.

158. On appelle *points homologues* deux points situés de la même manière dans les deux polygones. Autrement dit, deux points sont homologues lorsque, étant joints aux extrémités de

deux côtés homologues, ils déterminent deux triangles semblables et semblablement disposés.

Les *droites homologues* sont celles dont les extrémités sont homologues, chacune à chacune.

Le rapport de deux côtés homologues est appelé *rapport de similitude* des deux polygones.

Rapport des périmètres de deux polygones semblables.

159. THÉORÈME. — *Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux dans le rapport de similitude.*

En effet,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots;$$

donc,

$$\frac{AB + BC + CD + \dots}{A'B' + B'C' + C'D' + \dots} = \frac{AB}{A'B'}$$

Résumé.

Les segments de deux droites quelconques, déterminés par trois parallèles, sont proportionnels.

Réciproquement, toute droite, qui partage proportionnellement les deux côtés non parallèles d'un trapèze, est parallèle aux deux bases.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, partage proportionnellement les deux autres côtés; et réciproquement.

Les segments de deux droites quelconques, déterminés par tant de parallèles que l'on voudra, sont proportionnels.

Dans un triangle quelconque, la bissectrice de chaque angle divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux côtés adjacents.

Deux triangles sont dits *semblables* lorsque les côtés du premier sont proportionnels aux côtés du second.

Deux polygones sont dits *semblables* quand ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine un triangle semblable au premier.

Deux triangles semblables sont équiangles entre eux.

Réciproquement, deux triangles équiangles entre eux sont semblables.

Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.

Deux triangles isocèles sont semblables lorsque leurs angles à la base, ou lorsque leurs angles au sommet opposé, sont égaux.

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés proportionnels.

Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés parallèles, chacun à chacun, ou lorsqu'ils les ont perpendiculaires.

Deux polygones semblables ont les angles égaux et les côtés proportionnels, chacun à chacun.

Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux dans le rapport de similitude.

CHAPITRE VII.

Relations entre la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse, les segments de l'hypoténuse, l'hypoténuse elle-même et les côtés de l'angle droit (160). — Théorèmes relatifs au carré du nombre qui exprime la longueur du côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu ou obtus (163-165). — Théorème relatif aux sécantes du cercle, issues d'un même point (166).

Théorèmes.

160. THÉORÈME. — *Si, du sommet A de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire AD sur l'hypoténuse BC :*

1° *Les deux triangles partiels sont semblables entre eux, et semblables au triangle total ;*

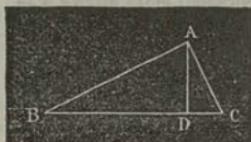
2° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et la projection de ce côté sur l'hypoténuse ;*

3° *La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des deux côtés de l'angle droit.*

4° *Les angles ABC, CAD sont égaux, comme ayant pour complément l'angle BAD : donc les trois triangles rectangles ADB, CDA, CAB ont un angle aigu égal ; donc ils sont semblables (151).*

2° En comparant les triangles ADB, CAB, nous aurons

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{CB}.$$



Ainsi, AB est moyen proportionnel entre BD et BC (*Arith.*, 225).

De même, AC est moyen proportionnel entre BC et CD.

3° Les deux triangles ADB, CDA donnent

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

Donc AD est moyen proportionnel entre BD et CD.

161. *Remarque.* — Si l'on suppose que les droites AB, BC, ... aient été mesurées au moyen d'une certaine unité, on pourra les représenter par des nombres, et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$AB = \sqrt{BC \cdot BD}, \quad AC = \sqrt{BC \cdot CD}, \quad AD = \sqrt{BD \cdot CD}.$$

162. *Corollaire.* — Si, d'un point d'une circonférence, on mène la perpendiculaire au diamètre, et des cordes aux extrémités de ce diamètre :

1° Chaque corde est moyenne proportionnelle entre sa projection et le diamètre ;

2° La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des deux cordes.

163. **THÉORÈME.** — Dans tout triangle rectangle, la seconde puissance du nombre qui représente l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit.

Abaissons, du sommet de l'angle droit, la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse. D'après le théorème précédent,

$$\overline{AB}^2 = BC \cdot BD, \quad \overline{AC}^2 = BC \cdot CD;$$

d'où

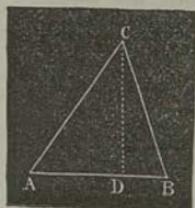
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD) = \overline{BC}^2.$$

164. *Remarque.* — Si trois nombres entiers sont tels que la seconde puissance du plus grand d'entre eux soit égale à la somme des secondes puissances des deux autres, on pourra construire un triangle rectangle dont les côtés soient proportionnels à ces trois nombres.

Par exemple, un triangle rectangle peut avoir pour côtés 3^m , 4^m , 5^m ; ou 5^m , 12^m , 13^m ; ou 8^m , 15^m , 17^m ; etc.

165. THÉORÈME. — 1° Dans tout triangle, la seconde puissance du nombre qui représente le côté opposé à un angle aigu est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux autres côtés, moins deux fois le produit du nombre qui représente l'un de ces côtés, par le nombre qui représente la projection de l'autre côté sur celui-ci ;

2° Dans tout triangle obtusangle, la seconde puissance du nombre qui représente le côté opposé à l'angle obtus est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux autres côtés, plus deux fois le produit du nombre qui représente l'un de ces côtés, par le nombre qui représente la projection de l'autre côté sur celui-ci.



1° Soit le côté BC, opposé à l'angle aigu A. En abaissant CD perpendiculaire sur AB, nous aurons, par le théorème précédent,

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2.$$

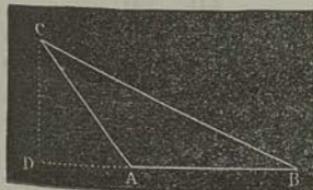
La droite BD étant la différence entre AB et AD, nous aurons aussi, par un théorème connu :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AB \cdot AD.$$

Ajoutant ces égalités, nous trouvons

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \cdot AD.$$

2° Si l'angle A est obtus, on a pareillement



$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2AB \cdot AD;$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \cdot AD.$$

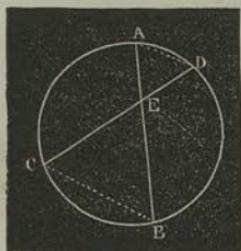
166. THÉORÈME. — 1° Les segments de deux cordes qui se coupent dans le cercle sont inversement proportionnels ;

2° Les sécantes qui se coupent hors du cercle sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures ;

3° Une tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et la partie extérieure de celle-ci.

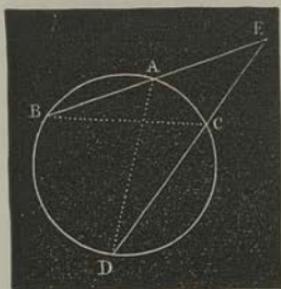
1° Soient AB et CD les deux cordes, se coupant en E : je dis que

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$$



c'est-à-dire que, les deux segments d'une corde formant les extrêmes de la proportion, les deux segments de l'autre corde en seront les moyens. C'est là ce que signifie l'expression *inversement proportionnels*.

Menons AD et BC : dans les triangles ADE, BCE, les angles en E sont égaux comme opposés par le sommet, et les angles D, B sont égaux parce qu'ils sont inscrits au même segment (124). La comparaison des côtés homologues donne la proportion ci-dessus.

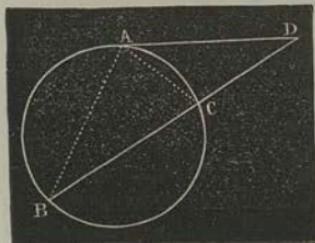


2° Menons AD et CB : les deux triangles ADE, CBE ont l'angle E commun et les angles B, D égaux ; donc

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$$

3° Soient la tangente AD et la sécante BCD ; je dis que

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$



Menons AB et AC : dans les triangles BAD, ACD, l'angle D est commun, et les angles ABD, CAD sont égaux comme ayant même mesure (123) ; donc les triangles sont semblables.

Applications numériques.

167. PREMIER PROBLÈME. — *Les deux petits côtés d'un triangle rectangle sont égaux ; l'un a 13^m,631, l'autre a 65^m,254. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?*

Appelons x cette longueur, exprimée en mètres ; nous aurons, par le théorème du n° 163,

$$x = \sqrt{(13,631)^2 + (65,254)^2}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve :

$$\begin{array}{r} \log 13,631 = 1,1345277 \\ 2 \log 13,631 = 2,269054 \\ \text{Nomb. corresp.} = 485,8044 + \\ \log 65,254 = 1,8146071 \\ 2 \log 65,254 = 3,6292142 \\ \text{Nomb. corresp.} = 4258,0830 + \\ \hline x^2 = 4443,8871 \\ \log x^2 = 3,6477630 \\ \frac{1}{2} = \log x = 1,8238815 \\ x = 66,6625 \end{array}$$

La longueur demandée est donc, à moins de 0^m,0001, 66^m,6625.

168. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Un chemin de fer, rectiligne, a pour longueur 3 853^m,7 ; la différence de niveau entre ses deux extrémités égale 12^m,63. A quoi est égale la base du chemin ?*

Dans cette question, il s'agit de calculer l'un des petits côtés d'un triangle rectangle, connaissant les deux autres côtés. Le théorème rappelé tout à l'heure donne pour la longueur du côté inconnu,

$$x = \sqrt{(3\ 853,7)^2 - (12,63)^2}.$$

Pour simplifier le calcul, appliquons la formule

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 ;$$

nous aurons

$$x = \sqrt{(3\ 853,7 + 12,63)(3\ 853,7 - 12,63)},$$

c'est-à-dire

$$x = \sqrt{3\ 866,33 \cdot 3\ 841,07}.$$

$$\log 3\ 866,33 = 3,5872989 \quad +$$

$$\log 3\ 841,07 = 3,5844522 \quad +$$

$$\log x^2 = 7,1717511$$

$$\frac{1}{2} = \log x = 3,5858755$$

$$x = 3\ 853,680.$$

La base du chemin est donc égale à 3 853^m,680. Ainsi qu'on pouvait s'y attendre, cette valeur diffère très-peu de la longueur même du chemin.

169. TROISIÈME PROBLÈME. — *Les trois côtés d'un triangle ont pour longueurs :*

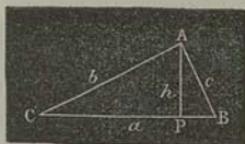
$$a = 28^m,734, \quad b = 23^m,654, \quad c = 5^m,248.$$

On demande : 1° de quelle espèce est le triangle; 2° quelle est la longueur de la perpendiculaire abaissée sur le plus grand côté, du sommet opposé à ce côté?

1° Pour déterminer l'espèce du triangle, c'est-à-dire pour savoir s'il est *rectangle*, *acutangle* ou *obtusangle*, il suffit de faire attention qu'à chacun de ces trois cas correspondent, respectivement, les relations

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 < b^2 + c^2, \quad a^2 > b^2 + c^2 \quad (163,465).$$

Or, d'après les données, nous avons $a^2 > b^2 + c^2$; donc le triangle est *obtusangle*.



2° Soit ABC ce triangle. Abaissons, du sommet A, la perpendiculaire AP sur le côté BC : cette perpendiculaire h est ce qu'on appelle la *hauteur*.

Pour la déterminer, observons que les deux théorèmes dont nous venons de faire usage donnent

$$h^2 = c^2 - \overline{BP}^2, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BP.$$

On tire, de la seconde équation,

$$BP = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

La substitution de cette valeur dans l'autre formule conduit à

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2.$$

Pour faciliter le calcul numérique, décomposons le second membre en deux facteurs (*Algèbre*, 43); nous aurons

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right).$$

Le premier facteur, $c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, égale $\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} = \frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}.$$

De même,

$$\begin{aligned} c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} &= \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \\ &= \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}.$$

Pour simplifier cette expression, on représente habituellement par $2p$ le périmètre du triangle, ou la somme des trois côtés. De cette manière, les quatre facteurs

$$a+b+c, \quad a+c-b, \quad a+b-c, \quad b+c-a$$

ont pour valeurs, respectivement,

$$2p, \quad 2(p-b), \quad 2(p-c), \quad 2(p-a);$$

de telle sorte que

$$h^2 = 4 \frac{p(p-b)(p-c)(p-a)}{a^2},$$

$$\text{et } h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}^*.$$

Si nous appliquons cette *formule générale* à l'exemple particulier proposé nous aurons

$$a = 28,731$$

$$b = 23,654$$

$$c = 5,248$$

$$2p = 57,633$$

$$p = 28,8165$$

$$p - a = 0,0855$$

$$p - b = 5,1625$$

$$p - c = 23,5685^{**}$$

$$\log p = 1,4596413 +$$

$$\log(p - a) = 2,9319661 +$$

$$\log(p - b) = 0,7128604 +$$

$$\log(p - c) = 1,3723320 +$$

$$2,4767995$$

$$\frac{4}{2} = 1,2383998 +$$

$$\log 2 = 0,3010300 +$$

$$\log a = 1,4583507 -$$

$$\log h = 0,0810791$$

$$h = 1,2052.$$

Ainsi la hauteur cherchée égale, à fort peu près, 1^m,2052.

* Cet exemple montre combien il est utile de *représenter* d'abord par des lettres les données d'un problème, et de ne calculer la valeur numérique de l'inconnue qu'après en avoir trouvé l'expression algébrique.

** Il est bon de remarquer, comme moyen de vérification, que la somme des trois restes $p - a$, $p - b$, $p - c$ doit être égale à p .

Résumé.

Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse :

1° Les deux triangles partiels sont semblables entre eux, et semblables au triangle total ;

2° Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et la projection de ce côté sur l'hypoténuse ;

3° La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des deux côtés de l'angle droit.

Si, d'un point d'une circonférence, on mène la perpendiculaire au diamètre, et des cordes aux extrémités de ce diamètre :

1° Chaque corde est moyenne proportionnelle entre sa projection et le diamètre ;

2° La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des deux cordes.

Dans tout triangle rectangle, la seconde puissance du nombre qui représente l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux côtés de l'angle droit.

Dans tout triangle, la seconde puissance du nombre qui représente le côté opposé à un angle aigu est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux autres côtés, moins deux fois le produit du nombre qui représente l'un de ces côtés, par le nombre qui représente la projection de l'autre côté sur celui-ci.

Dans tout triangle obtusangle, la seconde puissance du nombre qui représente le côté opposé à l'angle obtus est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui représentent les deux autres côtés, plus deux fois le produit du nombre qui représente l'un de ces côtés, par le nombre qui représente la projection de l'autre côté sur celui-ci.

Les segments de deux cordes qui se coupent dans le cercle sont inversement proportionnels.

Les sécantes qui se coupent hors du cercle sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures.

Une tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et la partie extérieure de celle-ci.

CHAPITRE VIII.

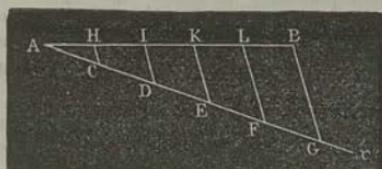
Problèmes : Diviser une droite donnée en parties égales ou proportionnelles à des longueurs données (170, 171). — Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, une moyenne proportionnelle entre deux lignes données (172-174). — Mener une tangente commune à deux cercles (177). — Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné (178).

Problèmes.

170. PROBLÈME. — *Diviser en parties égales une droite donnée.*

Supposons qu'il s'agisse de diviser en cinq parties égales la droite AB.

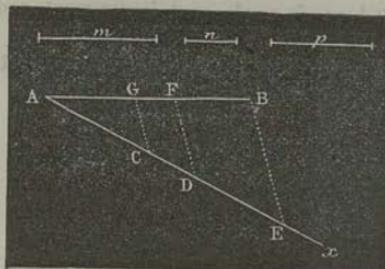
Par l'une des extrémités de AB, menons une droite indéfinie Ax. A partir du point A, prenons une longueur AC, à peu près égale au cinquième de AB, et portons-la cinq fois sur Ax. Joignons le dernier point de division G, avec le point B,



par la droite GB; puis, par les autres points C, E, D, C, menons FL, EK, DI, CH, parallèles à GB; elles diviseront en cinq parties égales la droite AB (143).

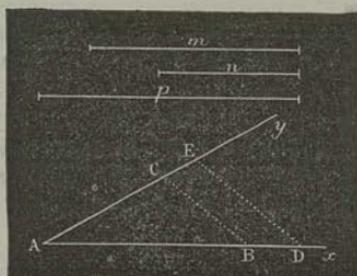
171. PROBLÈME. — *Diviser une droite donnée AB, en parties proportionnelles à des droites données m, n, p.*

Par l'extrémité A de BA, menons une droite indéfinie Ax.



Prenons sur Ax des longueurs AC, CD, DE, respectivement égales à m , n , p . Tirons BE, et, par les points D, C, menons DF, CG, parallèles à cette droite : elles diviseront AB en trois parties, AG, GF, FB qui satisfont à la question (145).

172. PROBLÈME. — Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données m , n , p .



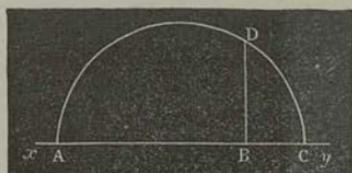
Sur les côtés d'un angle quelconque xAy , prenons $AB = m$, $AC = n$, $AD = p$; tirons BC , et menons, par le point D , la parallèle DE à BC . La droite AE sera évidemment la quatrième proportionnelle demandée.

173. PROBLÈME. — Trouver une troisième proportionnelle à deux droites données m , n .

Soit x la droite cherchée. On doit avoir $\frac{m}{n} = \frac{n}{x}$. Ce problème rentre donc dans le précédent.

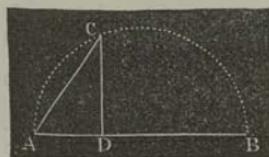
174. PROBLÈME. — Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données m , n .

1^{re} Construction. — Prenons, sur une droite indéfinie xy , $AB = m$, $BC = n$.

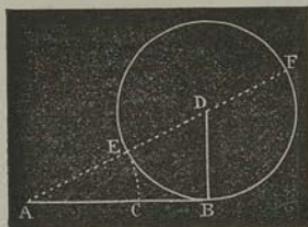


Sur $AB = m + n$ comme diamètre, décrivons la demi-circonférence ADC . Élevons au point B la demi-corde BD perpendiculaire à xy ; cette droite est la moyenne proportionnelle demandée (162, 2^o).

2^o Construction. — Sur une droite AB , égale à la plus grande m des deux droites données, décrivons la demi-circonférence ACB . Prenons $AD = n$; élevons DC perpendiculaire à AB , et menons AC : cette droite est moyenne proportionnelle entre m et n (162, 1^o).



175. PROBLÈME. — Partager, en moyenne et extrême raison, une droite donnée.



On dit qu'une droite AB est partagée en *moyenne et extrême raison* au point C, lorsque le segment AC est *moyen proportionnel* entre la droite entière AB et le second segment BC*.

De la proportion

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}, \quad (1)$$

on tire

$$\frac{AB}{AB + AC} = \frac{AC}{AC + BC},$$

c'est-à-dire

$$\frac{AB}{AB + AC} = \frac{AC}{AB},$$

ou encore

$$\frac{AB + AC}{AB} = \frac{AB}{AC}, \quad (2)$$

Ainsi, la droite donnée AB est *moyenne proportionnelle* entre le segment AC et ce même segment augmenté de AB.

De là résulte la construction suivante :

A l'extrémité B de la droite AB, élevez la perpendiculaire BD égale à la moitié de AB. Tirez AD. Prenez DE = DB, puis AC = AE : C est le point demandé.

En effet, la tangente AB est *moyenne proportionnelle* entre AF et AE; de plus, AF = AE + EF = AE + AB; en sorte que la relation (2) est vérifiée quand on y remplace AC par AE**.

* Relativement à cette locution : *moyenne et extrême raison*, le lecteur pourra consulter une note de M. Vincent (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome III, p. 1).

** Ce problème donne lieu à une discussion intéressante, que l'on trouve, soit dans nos *Feuilles d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, soit dans le *Manuel des candidats à l'École polytechnique*. Nous ferons seulement remarquer, à propos de la construction précédente qu'il n'est pas nécessaire que le diamètre de la circonférence, auxiliaire soit égal à la droite donnée.

176. *Remarque.* — En représentant par a la longueur de AB, on a

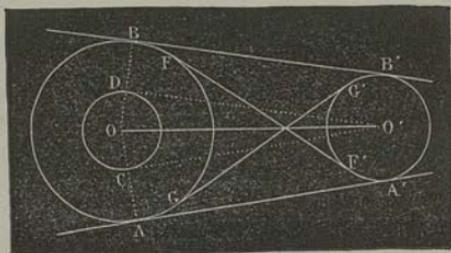
$$BD = \frac{1}{2}a, AD = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5},$$

$$AC = AE = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1).$$

Ainsi, quand une droite est partagée en moyenne et extrême raison, le plus grand segment est égal au produit de la droite par la quantité incommensurable $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

177. *PROBLÈME.* — Mener une tangente commune à deux cercles donnés O, O'.

Supposons le problème résolu, et soit AA' l'une des tangentes cherchées. Menons OA, O'A', et, par le centre O', tirons O'C parallèle à AA'. La figure AA'O'C est un rectangle. Si donc, du point O comme centre, avec OC = OA - O'A' pour rayon, nous traçons une circonférence, la droite O'C y sera tangente en C. Réciproquement, cette tangente auxiliaire étant tracée, il est bien facile de déterminer les points de contact A, A'.

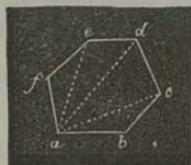
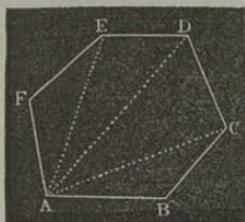


La même construction donne la seconde tangente extérieure BB'; et, en remplaçant la différence des rayons OA, OA' par leur somme, on obtient les deux tangentes intérieures FF', GG'*

* Pour la discussion de ce problème, voyez nos *Éléments de Géométrie*, p. 115.

178. PROBLÈME. — Construire, sur une droite donnée, un polygone semblable à un polygone donné.

ABCDEF étant le polygone donné, soit ab la droite donnée, laquelle doit être homologue de AB. D'après la définition des polygones semblables (145), si l'on décompose ABCDEF en triangles, puis que l'on construise successivement les triangles abc , acd , ade , acf , de manière que chacun d'eux soit semblable à celui qui y correspond, le polygone $abcdef$ satisfera à la question.



179. Remarque. — Si le polygone donné est un terrain, le contour d'un bâtiment, etc., $abcdef$ sera ce qu'on appelle le plan de ce terrain ou de ce bâtiment.

La construction précédente se présente à chaque instant dans l'Arpentage, dans l'Architecture, etc.

CHAPITRE IX.

Polygones réguliers (180-197). — Leur inscription dans le cercle : carré, hexagone, décagone (182-190). — Détermination du rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres (198-205)*.

Polygones réguliers.

180. On appelle *polygone régulier* celui qui est à la fois équiangle et équilatéral.

Ainsi, un triangle équilatéral, un carré, sont des polygones réguliers.

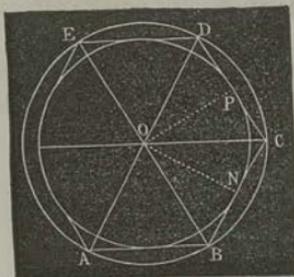
* La longueur de la circonférence du cercle sera considérée, sans démonstration, comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont les côtés diminuent indéfiniment. (*Programme officiel.*)

181. THÉORÈME. — Deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont semblables.

En effet, ces deux polygones ont les côtés proportionnels, chacun à chacun, et leurs angles sont tous égaux (156).

182. THÉORÈME. — Tout polygone régulier est, 1° inscriptible à une circonférence; 2° circonscriptible à une circonférence.

1° Menons les bissectrices AO, BO, des angles A et B du polygone régulier; joignons le point O, où ces lignes se coupent, aux sommets C, D, E,.... Je dis que toutes les droites OA, OB, OC,.... sont égales.



Les côtés du polygone étant tous égaux entre eux, et OB étant la bissectrice de l'angle B, les deux triangles ABO, CBO sont égaux, comme ayant un angle égal, compris entre deux côtés égaux. Mais ABO est isocèle. Donc CBO l'est pareillement; donc

$$OC = OB = OA.$$

De plus, OC est la bissectrice de l'angle BCD.

Le même raisonnement est applicable aux deux triangles OBC, OCD; et ainsi de suite. Donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon, passe par tous les sommets du polygone régulier.

2° Les triangles AOB, BOC,.... étant isocèles et égaux, leurs hauteurs OM, ON, OP sont égales; donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec OM pour rayon, touche tous les côtés, chacun en son milieu.

183. Le point O, centre commun de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite, est appelé *centre* du polygone.

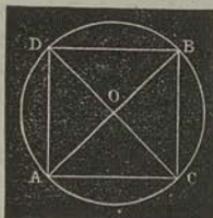
Le rayon OM du cercle inscrit est l'*apothème* du polygone.

184. Remarque. — Dans deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les rayons des cercles circonscrits sont des droites homologues. Il en est de même des apothèmes.

Donc les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits, ou comme les apothèmes (159).

Problèmes sur les polygones réguliers.

185. PROBLÈME. — Incrire un carré à un cercle donné O.



Menons arbitrairement deux diamètres AB, CD, perpendiculaires entre eux; ils coupent la circonférence aux points A, B, C, D, sommets du carré cherché.

En effet, les quatre triangles rectangles isocèles AOC, COB, BOD, DOA sont égaux entre eux.

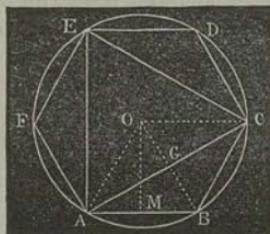
186. Remarque. — Le triangle rectangle AOC donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 = 2 \overline{AO}^2;$$

d'où

$$\frac{AC}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

Ainsi, le côté du carré est au rayon du cercle circonscrit, comme $\sqrt{2}$ est à 1.



187. PROBLÈME. — Incrire, à un cercle donné, un hexagone régulier.

Supposons le problème résolu, et soit ABCDEF l'hexagone. Menons les rayons AO, BO.

L'arc AB étant le $\frac{1}{6}$ de la circonférence, l'angle AOB a pour valeur $\frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Donc

$$\text{angle BAO} = \text{angle ABO} = \frac{2^d - \frac{2}{3}^d}{2} = \frac{2}{3}^d.$$

Le triangle AOC est donc équilatéral, et $AB = AO$. En d'autres termes, le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.

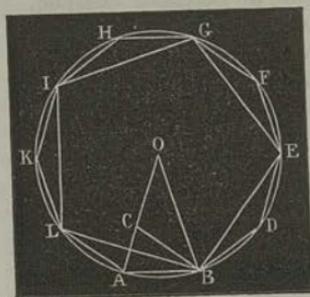
Donc, pour résoudre le problème proposé, on prendra une ouverture de compas égale au rayon; et, partant du point A pris arbitrairement, on portera cette ouverture six fois sur la circonférence.

188. *Remarque.* — Si l'on joint, par des droites, les sommets non consécutifs, A, C, E, on forme le triangle équilatéral inscrit ACE. On reconnaît aisément que l'apothème OG de cette figure est égal à la moitié du rayon, et que son côté est au rayon, comme $\sqrt{3}$ est à 1.

189. PROBLÈME. — Incrire, à un cercle donné, un décagone régulier.

AB étant le côté du décagone, l'angle $\text{AOB} = \frac{4^d}{40} = \frac{2^d}{5}$;

donc angle $\text{BAO} = \text{angle ABO} = \frac{2^d - \frac{2^d}{5}}{2} = \frac{4^d}{5}$. Ainsi, dans



le triangle isocèle AOB, l'angle à la base est double de l'angle au sommet. D'après cela, si nous menons la bissectrice BC, le triangle BCO sera isocèle; et les triangles ABO, ACB, ayant un angle commun et un angle égal, seront semblables. Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO};$$

ou, à cause de $AB = BC = CO$:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{CO}{AO}.$$

Conséquemment, le côté du décagone régulier est égal à la plus grande partie du rayon du cercle circonscrit, partagé en moyenne et extrême raison.

Il suffit donc, pour résoudre le problème proposé, d'appliquer au rayon AO la construction connue (175).

D'après cette construction, $AB = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1)$ (176).

190. *Remarque.* — Si l'on joint, de deux en deux, les sommets du décagone, on forme le pentagone régulier inscrit

BLIGE. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les deux propositions suivantes :

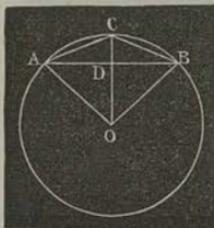
1° Le carré du côté BL du pentagone est égal au carré du côté AB du décagone, augmenté du carré du rayon ;

2° Le côté BL du décagone est moyen proportionnel entre le segment AC du rayon et ce segment augmenté du rayon.

Chacun de ces théorèmes donne

$$BL = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

491. PROBLÈME. — Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, et le rayon du cercle, trouver le côté du polygone régulier inscrit, d'un nombre double de côtés.



AB étant le côté donné, menons la bissectrice OC de l'angle au centre AOB : AC sera le côté du polygone cherché.

Supposons à présent que l'on veuille calculer la longueur de ce côté, connaissant celle de AB. Dans le triangle AOC (163),

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 - 2CO \cdot DO;$$

et, dans le triangle rectangle ADO,

$$DO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD}^2}.$$

Faisons, pour abrégér,

$$AO = CO = R, \quad AB = C, \quad AC = c;$$

nous aurons

$$c^2 = R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{C^2}{4}};$$

d'où

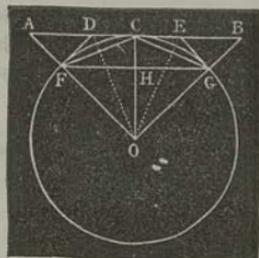
$$c = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - C^2}}.$$

* Cette formule peut être transformée ainsi :

$$c = \sqrt{R \left(R + \frac{C}{2} \right)} - \sqrt{R \left(R - \frac{C}{2} \right)}.$$

192. PROBLÈME. — *Connaissant le côté d'un polygone régulier circonscrit, et le rayon du cercle, trouver le côté du polygone régulier circonscrit, d'un nombre double de côtés.*

Soit AB le côté donné, touchant en son milieu C la circonférence O (182). Menons AO, BO, CO.



Divisons les angles égaux AOC, BOC, chacun en deux parties égales, par les droites OD, OE. Le côté cherché est évidemment DE; et si nous menons DF, EG, ces deux droites seront les moitiés de deux nouveaux côtés du polygone circonscrit, à cause de l'égalité des quatre triangles DFO, DCO, ECO, EGO.

193. Remarques. — 1° Si l'on mène la corde FG, cette droite, évidemment parallèle à AB, est le côté d'un polygone inscrit, semblable au polygone dont AB est un côté. Il est donc très-facile de construire l'un de ces polygones, connaissant l'autre.

2° Nous avons vu que l'on peut inscrire, à un cercle donné, un carré, un triangle équilatéral et un pentagone régulier. On peut également, au moyen de la règle et du compas, construire le pentécagone régulier inscrit*. Il résulte de là, et des deux problèmes précédents, que les polygones réguliers inscrits ou circonscriptibles par des procédés géométriques, sont ceux de

3,	6,	12,	24,	48,	96, . . .	côtés;
4,	8,	16,	32,	64,	128, . . .	côtés;
5,	10,	20,	40,	80,	160, . . .	côtés;
15,	30,	60,	120,	240,	480, . . .	côtés.

194. PROBLÈME. — *Connaissant le rayon R et l'apothème r d'un polygone régulier, trouver le rayon R' et l'apothème r' d'un polygone régulier isopérimètre, d'un nombre double de côtés.*

Soient AB le côté du premier polygone; O, son centre; OA, le rayon du cercle circonscrit; OD, l'apothème. Prolon-

* Et même le polygone régulier inscrit de 17 côtés. Voy. nos *Éléments de Géométrie*.

Ainsi, la différence entre le second rayon et le second apothème est moindre que le quart de la différence entre le premier rayon et le premier apothème.

Applications numériques.

196. Le côté c d'un dodécagone régulier est égal à $0^m,23$. Quel est le rayon R du cercle circonscrit ?

Ce rayon est égal au côté C de l'hexagone régulier inscrit au même cercle (187). Or, si l'on suppose $C=R$ dans la formule du n° 191, on aura

$$c = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{3R^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Le radical double $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ est égal à $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ *; donc

$$c = R\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

On conclut, de cette équation,

$$R = \frac{c}{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}};$$

ou, en multipliant les deux termes de la fraction par $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$R = c\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Remplaçant c par $0,23$, et effectuant par logarithmes, on trouve enfin

$$R = 0^m,444\ 326.$$

197. Calculer le rayon et l'apothème d'un polygone régulier de 16 côtés, dont le périmètre serait égal à 7 mètres.

Le côté du carré isopérimètre avec le polygone dont il s'agit serait représenté par $\frac{7}{4}$; donc (186) l'apothème r et le rayon R de ce carré auraient pour valeurs, respectivement :

* En effet, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$.

$$r = \frac{7}{8}, \quad R = \frac{7}{8} \sqrt{2}.$$

Soient r' , R' , r'' , R'' les apothèmes et les rayons des polygones réguliers de 8 et de 16 côtés, isopérimétrés avec le carré : l'application des formules (A) et (B) (194) donne successivement :

$$r' = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8} + \frac{7}{8} \sqrt{2} \right) = \frac{7}{16} (1 + \sqrt{2}),$$

$$R' = \sqrt{\frac{7}{8} \sqrt{2} \cdot \frac{7}{16} (1 + \sqrt{2})} = \frac{7}{16} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}},$$

$$r'' = \frac{7}{32} \left[1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \right],$$

$$\begin{aligned} R'' &= \sqrt{\frac{7}{32} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}) \cdot \frac{7}{16} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{7}{32} \sqrt{2 (1 + \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}) \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{7}{32} \sqrt{8 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{20 + 14\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Partant de $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 57$, et appliquant les logarithmes, on trouve

$$r = 0^m,875,$$

$$R = 1^m,237\ 437\ 88,$$

$$r' = 1^m,056\ 218\ 44,$$

$$R' = 1^m,117\ 348,$$

$$r'' = 1^m,086\ 783,$$

$$R'' = 1^m,101\ 960.$$

Ces valeurs satisfont aux relations

$$R' - r' < \frac{1}{4} (R - r), \quad R'' - r'' < \frac{1}{4} (R' - r'). \quad (195)$$

Rapport de la circonférence au diamètre.

198. THÉORÈME. — Une circonférence étant donnée, on peut toujours y inscrire et y circoncrire deux polygones réguliers semblables tels, que la différence de leurs périmètres soit moindre qu'une grandeur donnée quelconque.

Inscrivons et circoncrivons à la circonférence deux polygones réguliers semblables; puis doublons indéfiniment le nombre des côtés de ces deux polygones. Je dis : 1^o que la différence entre les périmètres des polygones semblables, circonscrit et inscrit, diminue quand le nombre de leurs côtés augmente; 2^o que l'on peut pousser l'opération assez loin pour rendre la différence entre les périmètres des polygones auxquels on s'arrêtera inférieure à une grandeur donnée quelconque.

1^o Soient AB, FG (192) les côtés de deux polygones réguliers semblables, et DE, FC les côtés des polygones qui se déduisent des deux autres par les constructions indiquées ci-dessus. Désignons par n le nombre des côtés des deux premières figures, par P , p leurs périmètres respectifs, par P' , p' les périmètres des polygones de $2n$ côtés. Nous aurons

$$P = n \cdot AB = n(AD + DE + EB), \quad p = n \cdot FG,$$

$$P' = n \cdot (FD + DE + EG), \quad p' = n \cdot (FC + CG).$$

Or, l'oblique AD est plus grande que la perpendiculaire DF; de même EB est plus grand que EG. Donc

$$P > P'.$$

D'un autre côté, la ligne brisée FCG est plus grande que la ligne droite FG. Donc

$$p' > p.$$

Comme chaque polygone inscrit est enveloppé par le polygone circonscrit semblable, nous avons aussi (27)

$$P > p, \quad P' > p'.$$

Les quatre inégalités précédentes peuvent donc être remplacées par l'inégalité continue

$$P > P' > p' > p.$$

On conclut, de cette dernière.

$$P' - p' < P - p.$$

2° Représentons par R le rayon OC, par a l'apothème OH ; nous aurons (184)

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{a};$$

d'où, par les propriétés des proportions,

$$P - p = P \cdot \frac{R - a}{R}.$$

Dans le second membre, le facteur P va en diminuant, et le dénominateur R est constant ; donc il suffit de prouver que $R - a$ a pour limite zéro.

Or, $R - a$, ou $FO - OH$, est moindre que FH, c'est-à-dire moindre que la moitié du côté du polygone inscrit auquel on s'arrête ; d'ailleurs l'angle AOB peut être rendu aussi petit qu'on le voudra. Donc FG, corde de cet arc, a pour limite zéro, et $CH = R - a = AO - OH$, a également pour limite zéro.

199. Puisque la différence entre les périmètres des polygones semblables, circonscrit et inscrit, diminue indéfiniment, de manière à pouvoir devenir moindre que toute grandeur donnée, ces périmètres ont une limite commune. Cette limite est ce qu'on appelle *longueur* de la circonférence.

200. THÉORÈME.—*Deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons.*

Soient deux circonférences ayant pour rayons R, r, et dont les longueurs soient C, c.

Inscrivons, à ces deux circonférences, deux polygones réguliers semblables, ayant pour périmètres P, p ; nous aurons (184),

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Si nous doublons indéfiniment le nombre des côtés des deux polygones, les périmètres P, p s'approcheront indéfiniment de C, c, qui en sont les limites. D'ailleurs, le rapport entre les

limites de deux quantités variables est la limite du rapport de ces quantités. Donc

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r}.$$

201. *Corollaire.* — La proportion précédente donne

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}.$$

Ainsi, le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences; ou, autrement dit : le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

202. *Remarque.* — Le rapport de la circonférence au diamètre est, ainsi qu'on peut le démontrer, un nombre incommensurable; on le représente ordinairement par la lettre π . Sa valeur approchée, réduite en décimales, est

$$\pi = 3,441\ 592\ 653\ 589\ 793\dots$$

203. *PROBLÈME.* — Évaluer le rapport approché de la circonférence au diamètre.

Nous venons de dire que ce rapport est incommensurable; nous ne pouvons donc l'exprimer exactement par un nombre fini de chiffres; mais nous pouvons, du moins, nous proposer d'en obtenir une valeur approchée.

A cet effet, considérons le carré dont le côté est égal à l'unité de longueur; son périmètre est 4; et r , R représentant l'apothème de ce carré et le rayon du cercle circonscrit :

$$r = \frac{1}{2}, \quad R = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Au moyen des formules du n° 194, nous pourrions, comme nous l'avons déjà indiqué ci-dessus (198), calculer les rayons et les apothèmes des polygones réguliers de 8, 16, 32, côtés, isopérimètres avec le carré.

Nous avons trouvé (195)

$$r' > r, \quad R' < R, \quad R' - r' < \frac{1}{4}(R - r);$$

donc

$$r < r' < r'' < r''' < \dots,$$

$$R > R' > R'' > R''' > \dots;$$

et, en même temps,

$$R' - r' < \left(\frac{1}{4}\right)^2 (R - r), \quad R''' - r''' < \left(\frac{1}{4}\right)^3 (R - r), \text{ etc.}$$

Ainsi, les différences entre les rayons et les apothèmes correspondants décroissent plus rapidement que les termes de la progression $\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, ...; donc elles peuvent devenir moindres que toute grandeur assignable; donc *les rayons et les apothèmes ont une limite commune*.

Il est facile de voir que *cette limite est le rayon ρ de la circonférence égale à 4*. En effet, en désignant par r_n , R_n un apothème et un rayon correspondants, on a, simultanément :

$$2\pi r_n < 4, \quad 2\pi R_n > 4, \quad 2\pi\rho = 4;$$

d'où

$$r_n < \rho < R_n;$$

et, par conséquent,

$$\lim r_n = \rho = \lim R_n.$$

204. *Remarque.* — On a

$$\frac{1}{2} = \frac{0+1}{2}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times 1}.$$

Conséquemment, on peut remplacer les termes initiaux $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, par 0 et 1.

Les explications dans lesquelles nous venons d'entrer peuvent alors être résumées dans la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème de Schwab* :

Une suite indéfinie de nombres dont les deux premiers sont 0 et 1, et dont les autres, à partir du troisième inclusivement, sont alternativement moyens par différence et moyens par quo-

tient entre les deux qui les précédent, a pour limite le rayon d'une circonférence égale à 4.

205. En effectuant le calcul, on trouve, avec 7 décimales exactes,

$$\rho = 0,636\ 619\ 6.$$

On déduit de cette valeur, à cause de $2\pi\rho = 4$,

$$\frac{1}{\pi} = 0,318\ 309\ 8\dots$$

Résumé.

Deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont semblables.

Tout polygone régulier est, 1° inscritible à une circonférence; 2° circonscriptible à une circonférence.

Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits, ou comme les apothèmes.

Une circonférence étant donnée, on peut toujours y inscrire et y circoncrire deux polygones réguliers semblables tels, que la différence de leurs périmètres soit moindre qu'une grandeur donnée quelconque.

Deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons.

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant. Ce rapport est un nombre incommensurable. Sa valeur approchée, réduite en décimales, est $\pi = 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\dots$

CHAPITRE X.

Mesure des aires (211-223).—Aire du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, d'un polygone quelconque (211-223).—Aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque*.
 — Théorème du carré construit sur l'hypoténuse (224).— Aire d'un polygone régulier (230). — Aire du cercle et du secteur circulaire (230-239). — Rapport des aires de deux figures semblables (227-229).

Préliminaires.

206. On appelle *figures équivalentes* celles qui sont décomposables en parties égales, chacune à chacune.

207. Si les parties égales qui composent les deux figures *équivalentes* sont disposées de la même manière, ces figures deviennent *égales*.

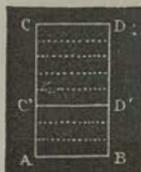
208. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé, lequel prend le nom de *base*.

209. La hauteur d'un parallélogramme, d'un rectangle ou d'un trapèze, est la perpendiculaire commune à deux côtés parallèles, lesquels se nomment *bases*.

210. Deux rectangles de même base et de même hauteur sont *égaux*; car ils ont les côtés égaux et les angles égaux, chacun à chacun.

Aire du rectangle.

211. THÉORÈME. — Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.



Plaçons le plus petit rectangle ABC'D' sur le plus grand, de manière que AB soit la base commune.

Je dis que l'on aura

$$\frac{ABCD}{ABC'D'} = \frac{BD}{BD'}$$

Supposons les hauteurs BD, BD', commensurables entre elles, et par exemple, dans le rapport de 8 à 3.

* Voir à l'Appendice le levé des plans, pour la solution de cette question.

Divisons BD en 8 parties égales : BD' en comprendra 3 ; et si, par les points de division, nous menons des parallèles à AB, le rectangle ABCD sera partagé en 8 rectangles égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur. ABC'D' contient 3 de ces rectangles. Donc

$$\frac{ABCD}{ABC'D'} = \frac{BD}{BD'}$$

212. Corollaire. — Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

213. THÉORÈME. — Le rapport de deux rectangles est égal au produit du rapport de leurs bases, par le rapport de leurs hauteurs.

Soient R, R' deux rectangles ayant pour bases, respectivement, B, B', et pour hauteurs H, H'. Je dis que

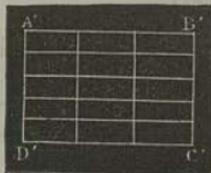
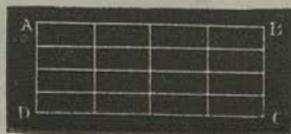
$$\frac{R}{R'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}$$

Prenons un rectangle auxiliaire R'', dont la base soit B et la hauteur H'. Le théorème précédent donne

$$\frac{R}{R''} = \frac{H}{H'}, \quad \frac{R''}{R'} = \frac{B}{B'}$$

Le produit des rapports de R à R'' et de R'' à R' est égal au rapport de R à R' (*Arithm.*, 212). Donc les deux dernières égalités donnent celle qu'il s'agissait de démontrer.

214. Remarques. — 1° Soient deux rectangles ABCD, A'B'C'D' tels, que leurs bases soient dans le rapport de 4 à 3, et leurs hauteurs dans celui de 4 à 5. Le théorème précédent exprime que le rapport des rectangles est $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, ou qu'un même rectangle peut être contenu 16 fois dans ABCD et 15 fois dans A'B'C'D'. C'est ce qui est rendu évident par la figure.



2° Supposons qu'avec une certaine unité, on ait mesuré B, B', H, H'; alors ces lignes pourront être remplacées par leurs longueurs, c'est-à-dire par des nombres. Représentons ces nombres par b, b', h, h' : le théorème ci-dessus deviendra

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{b'h'}$$

Ce résultat s'énonce ainsi : *Deux rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

3° On doit bien observer que bh est le produit de deux nombres, et non le produit de deux lignes ; ce qui n'aurait aucun sens.

215. Supposons que l'on prenne R' pour unité de surface ; alors le nombre $\frac{R}{R'}$ est ce qu'on appelle *aire* du rectangle R . En représentant cette aire par a , nous aurons

$$a = \frac{bh}{b'h'}$$

On voit que l'*aire* est, pour les rectangles, ce que la *longueur* est pour les droites : un nombre mesurant la grandeur.

216. L'expression précédente se simplifiera, si, au lieu de prendre arbitrairement le rectangle R' , nous choisissons pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur. En effet, nous aurons $b' = h' = 1$,

et $a = bh.$

Ce nouveau résultat s'énonce ainsi :

L'aire d'un rectangle est égale à sa base multipliée par sa hauteur ; ou :

Un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

217. Corollaire. — *L'aire d'un carré est égale à la seconde puissance de son côté.*

En effet, si dans la formule $a = bh$ on suppose $h = b$, on obtient $a = b^2$. Si, par exemple, le côté d'un carré est représenté par 5, l'aire de ce carré sera 25.

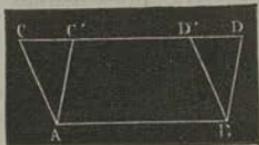
C'est à cause de cette propriété que l'on donne le nom de carrés aux secondes puissances des nombres. (*Arithm.*, 186.)

Aire du parallélogramme.

218. THÉORÈME. — *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Supposons que les parallélogrammes aient même base inférieure AB ; leurs bases supérieures CD , $C'D'$ seront en ligne droite.

Le premier parallélogramme $ABCD$ se compose du trapèze ABD' , diminué du triangle DBD' . De même, $ABC'D'$ se compose de ABD' diminué de CAC' . Or, les triangles CAC' , DBD' sont égaux, à cause de $A = B$, $AC = BD$, $AC' = BD'$. Donc, d'après la définition (206), les parallélogrammes sont équivalents.



219. Corollaire. — *Tout parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Aire du triangle.

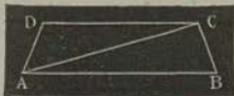
220. THÉORÈME. — *Tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.*

En effet, la diagonale d'un parallélogramme partage cette figure en deux triangles égaux.

221. Corollaire. — *Tout triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Aire du trapèze.

222. THÉORÈME. — *Tout trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la demi-somme de ses bases.*

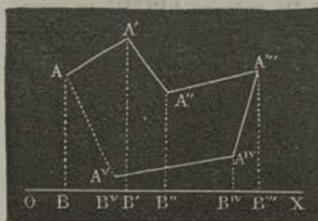


En effet, le trapèze $ABCD$ se compose des triangles ABC , CAD de même hauteur que $ABCD$.

Aire d'un polygone quelconque.

223. Tout polygone étant décomposable en triangles, si l'on peut mesurer la base et la hauteur de chacun d'eux, on déterminera l'aire du polygone.

Cette méthode, simple et rigoureuse en *théorie*, ne l'est plus dans l'*application*. Elle ne pourrait servir, par exemple, à mesurer un terrain de forme irrégulière. Le procédé suivant, commode à employer, conduit à une formule qu'il est bon de connaître.



Menons, dans le plan du polygone $AA'A''\dots$, une droite indéfinie OX , et prenons, sur cette droite, une *origine* O .

Abaissons ensuite, des différents sommets du polygone, des perpendiculaires sur OX^* , puis mesurons chacune d'elles, ainsi que sa distance au point O .

Désignons par b, b', b'', \dots , les distances OB, OB', OB'', \dots et par a, a', a'', \dots les perpendiculaires. Enfin, représentons par P l'aire du polygone; nous aurons

$$2P = (a + a')(b' - b) + (a' + a'')(b'' - b') + (a'' + a''')(b''' - b'') - (a''' + a'')(b'' - b') - (a'' + a')(b' - b) - (a + a')(b - b')$$

ou, en mettant a, a', a'', \dots , en facteur commun (*Arithm.*, 44),

$$2P = a(b' - b'') + a'(b'' - b''') + a''(b''' - b''') + a'''(b'' - b''') + a''(b'' - b''') + a'(b' - b'') + a(b - b''')$$

Pour abrégier, appelons *abscisses* les distances b, b', b'', \dots , et *ordonnées* les perpendiculaires a, a', a'', \dots ; nous pourrions dire que :

*L'aire d'un polygone quelconque est égale à la demi-somme des produits que l'on obtient en multipliant l'ordonnée de chaque sommet par la différence entre les abscisses des deux sommets voisins**.*

* Sur le terrain, cette construction se fait aisément avec l'équerre d'arpenteur.

** Cette différence, qui peut être positive ou négative, doit toujours être prise dans le même ordre.

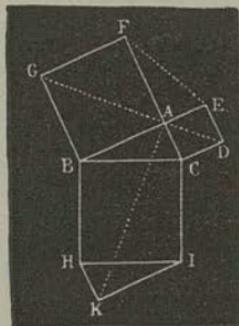
Relations entre les carrés construits sur les côtés d'un triangle.

224. THÉOREME. — *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*

Première démonstration. — Chacun de ces carrés a pour mesure la seconde puissance du nombre qui mesure son côté (217).

D'ailleurs, la seconde puissance du nombre qui mesure l'hypoténuse est égale à la somme des secondes puissances des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit (163). Donc le premier carré est équivalent à la somme des deux autres.

Seconde démonstration. — Après avoir construit des carrés sur les côtés du triangle BAC, rectangle en A, menons IK parallèle à AB, et HK parallèle à AC; le triangle IHK sera égal à BCA (46). Menons ensuite FE, AK, GA, DA : ces deux dernières droites n'en font qu'une, parce que, divisant en deux parties égales les angles droits FAB, EAC, opposés par le sommet, elles sont également inclinées sur la droite BAE.



Cela posé, il est visible que les quatre quadrilatères DEFG, DCBG, ACIK, KHBA sont égaux. En effet,

1° Si nous faisons tourner DEFG autour de DG, AED s'appliquera sur ACD, et AFG s'appliquera sur ABC....

2° Si nous faisons tourner ACIK autour du point C, jusqu'à ce que CA coïncide avec CD, le côté CI, égal à CB, s'appliquera sur celui-ci, parce que les deux angles ACl, DCB, composés de l'angle ACB augmenté d'un angle droit, sont égaux. De même, IK viendra coïncider avec BG.

3° Si nous faisons tourner KHBA autour de B, de manière que AB s'applique sur GB, la première figure viendra coïncider avec DCBG....

Observons actuellement que la somme des carrés BF, CE se compose de la somme des deux premiers quadrilatères, diminuée des deux triangles égaux BAC, EAF, et que le carré construit sur l'hypoténuse se compose de la somme des deux der-

niens quadrilatères, diminuée des deux triangles égaux BAC, IKH. Donc, conformément à la définition (206), le dernier carré est équivalent à la somme des deux autres.

La première démonstration s'applique aussi à la proposition suivante, qui ne diffère pas d'un des théorèmes ci-dessus (165).

225. THÉORÈME. — 1° Dans tout triangle, le carré construit sur le côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces côtés, et pour hauteur la projection du second côté sur le premier.

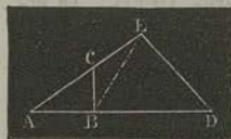
2° Dans tout triangle obtusangle, le carré construit sur le côté opposé à l'angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, plus deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces côtés et pour hauteur la projection du second côté sur le premier.

226. Corollaire. — Un triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle, selon que le carré du plus grand côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.

Rapport des aires de deux polygones semblables.

227. THÉORÈME. — Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.

Soient d'abord deux triangles ABC, ADE, ayant un angle égal A. Je dis que l'on aura



$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{AB}{AD}.$$

Menons BE; les triangles ABC, ABE ont même sommet B, et leurs bases AC, AE sont situées sur une même droite; ces deux triangles ont donc même hauteur; conséquemment, ils sont proportionnels à leurs bases, c'est-à-dire que

$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

On trouve de même

$$\frac{ABE}{AED} = \frac{AB}{AD}.$$

Il résulte, de ces deux proportions,

$$\frac{ABC}{AED} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{AB}{AD}.$$

Si, dans la figure, les deux triangles ABC , ADE sont semblables, on aura

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}.$$

Donc

$$\frac{ABC}{AED} = \left(\frac{AC}{AE}\right)^2 = \frac{AC^2}{AE^2}.$$

228. THÉORÈME. — *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues quelconques.*

Deux polygones semblables P , p , sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun (147).

Soient T, T', T'', \dots les triangles composant P ; soient t, t', t'', \dots les triangles du polygone p , correspondant aux premiers; soient enfin C, c deux côtés homologues: nous aurons par le théorème précédent, et à cause de la proportionnalité entre les diagonales homologues et les côtés homologues (156),

$$\frac{T}{t} = \frac{C^2}{c^2}, \quad \frac{T'}{t'} = \frac{C^2}{c^2}, \quad \frac{T''}{t''} = \frac{C^2}{c^2}, \dots;$$

puis, par les propriétés des proportions,

$$\frac{T + T' + T'' + \dots}{t + t' + t'' + \dots} = \frac{C^2}{c^2};$$

ou enfin

$$\frac{P}{p} = \frac{C^2}{c^2}.$$

229. Corollaire. — *Les aires de deux polygones réguliers semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles circonscrits, ou comme les carrés des apothèmes.*

En effet, le rapport des rayons ou celui des apothèmes, est égal au rapport de similitude des deux polygones (184).

Aire d'un polygone régulier.

230. THÉORÈME. — *L'aire d'un polygone régulier est égale au périmètre multiplié par la moitié de l'apothème.*

Tout polygone régulier est décomposable en triangles isocèles égaux, ayant pour bases les côtés du polygone. En appelant c l'un de ces côtés et a l'apothème, l'aire de chaque triangle sera représentée par $\frac{1}{2}ca$. Si donc le polygone a n côtés, son périmètre p est nc ; et comme

$$\frac{1}{2}ca \cdot n = cn \cdot \frac{1}{2}a = p \cdot \frac{1}{2}a,$$

on a

$$P = p \cdot \frac{1}{2}a.$$

P étant l'aire du polygone.

Aire du cercle.

231. THÉORÈME. — *Une circonférence étant donnée, on peut toujours y inscrire et y circoncrire deux polygones réguliers semblables tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée quelconque. (Voir le n° 498.)*

232. Quand on double indéfiniment le nombre des côtés de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même circonférence, la différence entre leurs aires diminue indéfiniment, de manière à devenir moindre que toute grandeur donnée. Il résulte de là que les aires des polygones inscrits et les aires des polygones circonscrits tendent vers une limite commune. Cette limite est ce qu'on appelle *aire du cercle donné*.

233. THÉORÈME. — *L'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.*

L'aire d'un polygone régulier est égale au produit du périmètre par la moitié de l'apothème (230). Or, les limites respectives du polygone, du périmètre et de l'apothème sont le cercle, la circonférence et le rayon; et d'un autre côté, la limite d'un produit est égale au produit des limites des facteurs; donc l'aire du cercle est égale à la longueur de la circonférence, multipliée par la moitié du rayon.

234. *Scolie.* — 1° Soit c une circonférence de rayon R ;
on a (201)

$$c = 2 \pi R.$$

2° Soit C l'aire du cercle de même rayon R ; on aura

$$C = 2 \pi R \cdot \frac{1}{2} R,$$

ou

$$C = \pi R^2.$$

235. *Corollaire.* — Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

236. Deux cercles doivent être considérés comme les limites de polygones semblables. Ils jouissent donc des propriétés qui appartiennent à ces polygones. Il en est de même pour les arcs et pour les secteurs *semblables*, ou appartenant à un même angle au centre. Ainsi :

237. *THÉORÈME.* — 1° Les arcs semblables sont entre eux comme les rayons ;

2° Les secteurs semblables sont entre eux comme les carrés des rayons.

238. *THÉORÈME.* — Dans un même cercle, deux secteurs sont entre eux comme les arcs, ou comme les angles au centre.

239. *THÉORÈME.* — L'aire d'un secteur est égale à l'arc multiplié par la moitié du rayon.

Résumé.

Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux.

Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

Le rapport de deux rectangles est égal au produit du rapport de leurs bases, par le rapport de leurs hauteurs.

Deux rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

L'aire d'un rectangle est égale à sa base multipliée par sa hauteur, ou un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

L'aire d'un carré est égale à la seconde puissance de son côté.

Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.

Un parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.

Un triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

Un trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la demi-somme de ses bases.

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.

Dans tout triangle, le carré construit sur le côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces côtés, et pour hauteur la projection du second côté sur le premier.

Dans tout triangle obtusangle, le carré construit sur le côté opposé à l'angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, plus deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces côtés, et pour hauteur la projection du second côté sur le premier.

Un triangle est acutangle, rectangle, ou obtusangle, selon que le carré de son plus grand côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés de ses deux autres côtés.

Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés de leurs côtés homologues.

Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues quelconques.

Les aires de deux polygones réguliers semblables sont entre elles comme les carrés des rayons des cercles circonscrits, ou comme les carrés des apothèmes.

L'aire d'un polygone régulier est égale au périmètre multiplié par la moitié de l'apothème.

Une circonférence étant donnée, on peut toujours y inscrire et y circonscire deux polygones réguliers semblables tels, que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée quelconque.

L'aire du cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.

Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

Les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons.

Les secteurs semblables sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.

Dans un même cercle, deux secteurs sont entre eux comme leurs arcs, ou comme leurs angles au centre.

L'aire d'un secteur est égale à l'arc multiplié par la moitié du rayon.

CHAPITRE XI.

Exercices et problèmes sur la comparaison des aires (240-245). —

Construire un carré équivalent à un polygone donné (240). —

Construire un carré dont le rapport à un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données (241). — Construire un rectangle équivalent à un carré donné, et dont les côtés adjacents fassent une somme ou aient entre eux une différence donnée (244).

— Application à la construction des racines des équations du second degré à une inconnue (245).

Problèmes.

240. PROBLÈME I. — *Construire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.*

Soit X le côté inconnu du carré équivalent à un parallélogramme dont la base et la hauteur sont des droites données, B, H. On doit avoir (243)

$$\frac{B}{X} \cdot \frac{H}{X} = 1;$$

d'où

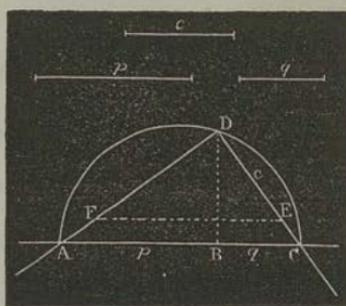
$$\frac{B}{X} = \frac{X}{H}.$$

Ainsi, le côté du carré est moyen proportionnel entre la base et la hauteur du parallélogramme.

On verrait, de même, que le côté du carré équivalent à un triangle donné est moyen proportionnel entre la base et la moitié de la hauteur du triangle.

241. PROBLÈME II. — *Construire un carré qui soit à un carré donné, dans le rapport de deux droites données.*

Soit c le côté du carré donné, et soient p, q les droites données.



Prenons, sur une droite indéfinie, $AB = p$, $BC = q$; sur AC , comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; élevons en B la perpendiculaire BD au diamètre; tirons les droites indéfinies DA , DC ; prenons, sur celle-ci, $DE = c$; enfin, par le point E , tirons EF parallèle à CA . Je dis que DF est le côté du carré cherché.

En effet, en désignant par \overline{AD}^2 et \overline{CD}^2 * les carrés construits sur AD et CD , nous avons d'abord

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}.$$

De plus, à cause des parallèles EF , CA :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DF}{DE} = \frac{DF}{c},$$

ou

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{\overline{DF}^2}{c^2};$$

donc

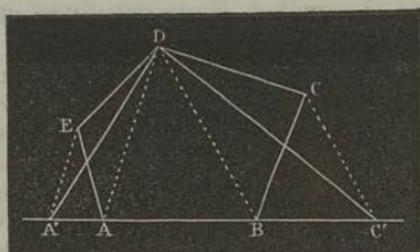
$$\frac{\overline{DF}^2}{c^2} = \frac{p}{q}.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où CD égalerait c , DA serait le côté du carré demandé.

242. PROBLÈME III. — Construire un triangle équivalent à un polygone donné.

Soit, pour fixer les idées, le pentagone $ABCDE$, qu'il s'agit

* Cette notation est fondée sur le théorème relatif à la mesure du carré (217).



de transformer en un triangle équivalent.

Par le sommet C, menons CC' parallèle à la diagonale DB , et soit C' le point où cette parallèle coupe le prolongement de AB ; menons DC' .

Au moyen de cette construction, nous avons remplacé le triangle BCD par le triangle équivalent $BC'D$: en effet, ces deux triangles ont même base DB et même hauteur. Donc, à cause de la partie commune $AEDB$, le quadrilatère $AEDC'$ est équivalent au pentagone donné.

De même, si nous menons EA' parallèle à DA , nous remplacerons le triangle DEA par le triangle équivalent $DA'A$. Le pentagone proposé sera donc transformé en un triangle $A'DC'$ équivalent.

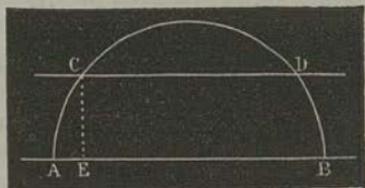
La construction est évidemment indépendante de l'espèce du polygone donné.

243. PROBLÈME IV. — Construire un carré équivalent à un polygone donné P .

Après avoir construit un triangle T équivalent à P (Probl. III), on cherchera le carré C équivalent au triangle T (Probl. I) : c'est le carré demandé.

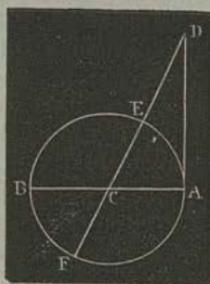
244. PROBLÈME V. — Construire un rectangle équivalent à un carré donné, connaissant la somme ou la différence des côtés adjacents.

1° Soit AB la somme de la base et de la hauteur du rectangle inconnu. Sur cette droite, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Menons CD parallèle à AB et à une distance de AB égale au côté du carré : ordinairement, la droite CD rencontre la circonférence en deux points C, D^* . Si, de l'un d'eux, nous abaissons CE perpendiculaire à AB , les côtés adjacents du rectangle cherché seront AE et BE .



* Voir la Remarque 1, ci-après.

En effet, la perpendiculaire CE est moyenne proportionnelle entre les segments AE, BE (162).



2^o Soit AB la différence donnée : sur cette droite AB, comme diamètre, décrivons la circonférence AEBF. Au point A, élevons la tangente AD, égale au côté du carré donné. Enfin, joignons le point D au centre C par la sécante DECF. Les dimensions du rectangle cherché sont DE et DF.

Effectivement, la tangente AD est moyenne proportionnelle entre ces deux droites (166), dont la différence est AB.

245. *Remarques.* — I. Nommons s la somme de la base et de la hauteur du rectangle, et c le côté du carré donné. La droite CD coupera la demi-circonférence, si l'on a $c < \frac{1}{2}s$; elle sera tangente si $c = \frac{1}{2}s$; et alors le rectangle cherché sera précisément le carré donné. Enfin, si l'on a $c > \frac{1}{2}s$, la droite CD est extérieure à la circonférence, et le problème est impossible.

II. On conclut, de cette discussion, ce théorème d'arithmétique : *Le produit de deux facteurs dont la somme est constante, est le plus grand possible, lorsque ces facteurs sont égaux.*

III. L'équation générale du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

prend, si l'on met en évidence les signes de p et de q , les quatre formes suivantes :

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1), \quad x^2 - px + q = 0 \quad (2),$$

$$x^2 + px - q = 0 \quad (3), \quad x^2 - px - q = 0 \quad (4).$$

Si l'on change x en $-x$, les équations (1), (3) se transforment dans les équations (2), (4).

Donc l'équation générale du second degré peut toujours se ramener à l'une ou à l'autre des équations (2), (4), lesquelles peuvent être écrites ainsi :

$$x(p - x) = q \quad (5), \quad x(x - p) = q \quad (6).$$

Dans l'équation (5), la somme des facteurs x , $p - x$ de q , est égale à p .

Dans l'équation (6), la différence des facteurs x , $x - p$ de q , est égale à p .

Nous voyons donc que les deux problèmes résolus ci-dessus équivalent à la résolution d'une équation du second degré; et que, réciproquement, les racines d'une équation du second degré peuvent être facilement construites*.

Applications numériques.

246. PREMIER PROBLÈME. — *Trouver la surface d'un terrain AA'A'... (223), d'après les mesures suivantes:*

$$\begin{aligned} a &= 30^m,17, & a' &= 37^m,15, & a'' &= 29^m,18, & a''' &= 31^m,17, \\ a^{iv} &= 42^m,35, & a_v &= 40^m,65; \\ b &= 7^m,23, & b' &= 49^m,37, & b'' &= 40^m,15, & b''' &= 63^m,71, \\ b^{iv} &= 52^m,45, & b_v &= 48^m,40. \end{aligned}$$

Appliquant la formule du numéro cité, et prenant le mètre carré pour unité de surface, nous aurons, P étant l'aire du terrain,

$$\begin{aligned} 2 P &= 30,17 \cdot 0,97 + 37,15 \cdot 32,92 + 29,18 \cdot 44,34 \\ &+ 31,17 \cdot 42,30 - 42,35 \cdot 45,31 - 40,65 \cdot 45,22 \\ &= 29,264 \ 9 + 1222,978 \ 0 + 1293,8412 + 383,391 \ 0 \\ &- 559,578 \ 5 - 481,593 \ 0 = 4 \ 888,323 \ 6; \\ P &= 944,1618. \end{aligned}$$

Ainsi, la surface du terrain serait $944^m,1618$.

247. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Un arpenteur, après avoir mesuré un terrain de forme rectangulaire, a oublié quelles en sont les dimensions. Il voudrait se les rappeler, sachant que leur somme est 650 mètres, et que la surface du terrain a été trouvée égale à 10 hectares 46 ares 45 centiares.*

* Les problèmes précédents sont absolument indispensables. On en trouve beaucoup d'autres, à peu près aussi importants que ceux-ci, soit dans mes *Éléments de Géométrie*, soit dans mes *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*.

D'un autre côté,

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

p étant le demi-périmètre (169). La formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des trois côtés est donc

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ainsi, l'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du produit que l'on obtient en multipliant le demi-périmètre par ce demi-périmètre diminué de chacun des côtés.

D'après les données, nous aurons (169)

$$\log p = 1,4596413$$

$$\log(p-a) = 2,9319661$$

$$\log(p-b) = 0,7128601$$

$$\log(p-c) = 1,3723320$$

$$\hline 2,4767995$$

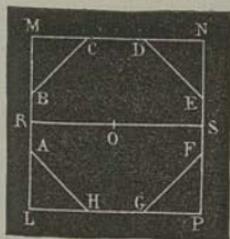
$$\frac{1}{2} = 1,2383998 = \log T.$$

$$T = 17,3141.$$

La surface cherchée égale donc $17^m,3141$.

249. QUATRIÈME PROBLÈME. — Calculer le côté d'un carré équivalent à un octogone régulier dont le côté égale $0^m,6$.

Commençons par évaluer l'aire A d'un octogone régulier



dont le côté $AB = c$. Soit O le centre de ce polygone. Menons ROS perpendiculaire aux deux côtés opposés AB, EF : cette droite RS est le diamètre du cercle inscrit, ou le double de l'apothème $OR = a$. Prolongeons ensuite, de deux en deux, les côtés de l'octogone ; nous obtiendrons un carré LMNP ayant $2a$ pour côté.

Cela posé, les triangles rectangles isocèles ALH, BMC nous donnent (186)

$$AL = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad BM = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$LM = 2a = \frac{c}{\sqrt{2}} + c + \frac{c}{\sqrt{2}};$$

ou

$$2a = c(\sqrt{2+1}).$$

On conclut, de cette valeur,

$$A = 2c^2(\sqrt{2+1}).$$

Soit à présent x le côté du carré cherché; nous aurons

$$x^2 = 2c^2(\sqrt{2+1});$$

d'où

$$x = c\sqrt{2+\sqrt{8}}.$$

Supposant $c = 0^m,6$, et opérant par logarithmes, on trouve enfin

$$x = 4^m,3184.$$

250. CINQUIÈME PROBLÈME. — *Quel serait le diamètre d'un bassin circulaire équivalent à la cour du Louvre ?*

La cour du Louvre est de forme carrée: son côté égale, à fort peu près, 60 toises*. Sa surface équivaut donc à 3600 toises carrées, ou à $\frac{3600}{(0,513074)^2}$ mètres carrés (*Arithm.*, 184).

D'un autre côté, l'aire du cercle de rayon R est πR^2 (234); donc, en prenant le mètre pour unité, nous aurons

$$\pi R^2 = \frac{3600}{(0,513074)^2};$$

d'où

$$R = \frac{60}{0,513074} \sqrt{\frac{4}{\pi}}.$$

$$\log 60 = 1,7781512 +$$

$$\log 0,513074 = 1,7101800 -$$

$$\log \pi = 0,4971499 -$$

$$\frac{1}{2} = 0,2485750 -$$

$$\log R = 1,8193962$$

$$R = 63,9774$$

Le diamètre du bassin serait donc $131^m,955$.

* Ce nombre est traditionnel: les anciens ingénieurs attribuaient à la cour du Louvre une étendue de quatre arpents.

251. SIXIÈME PROBLÈME. — On donne un secteur circulaire dont l'angle au centre est de $43^{\circ} 3' 18''$ et dont la surface est équivalente à 1 hectare. Quel est le rayon de ce secteur ?

Si nous prenons le mètre pour unité, l'aire du secteur sera représentée par le nombre 10 000, parce que 1 hectare égale 10 000 mètres carrés (*Arithm.*, 174). D'un autre côté, le cercle peut être regardé comme un secteur dont l'angle au centre serait égal à 360° . En observant que, dans un même cercle, deux secteurs sont entre eux comme leurs angles (238), nous aurons donc, R étant le rayon cherché,

$$\frac{\pi R^2}{10\ 000} = \frac{360^{\circ}}{43^{\circ} 3' 18''}.$$

Pour évaluer le rapport contenu dans le second membre, multiplions d'abord les deux termes par 40 : le produit $18' \cdot 40$ est égal à $3'$, et nous aurons

$$\frac{\pi R^2}{10\ 000} = \frac{3\ 600}{430^{\circ} 33'}.$$

Multiplions par 20 les deux termes du nouveau rapport : $33' \cdot 20 = 11^{\circ}$; en sorte que

$$\frac{\pi R^2}{10\ 000} = \frac{72\ 000}{8\ 614}.$$

Cette équation donne ensuite, par un calcul logarithmique analogue à celui que nous avons effectué dans le problème précédent,

$$R = 463^{\text{m}}, 44.$$

252. SEPTIÈME PROBLÈME. — Trouver, à moins de 1 millimètre, le rayon d'un cercle, tel, que si ce rayon augmentait de 1 centimètre, la surface du cercle augmenterait de 1 mètre carré.

Prenons le centimètre pour unité ; nous aurons (234)

$$\pi (R + 1)^2 - \pi R^2 = 10\ 000,$$

d'où
$$R = \frac{5\ 000}{\pi} - 0,5.$$

Or, $\frac{1}{\pi} = 0,3183098$. Donc $\frac{5\,000}{\pi} = \frac{1}{\pi} \times 5\,000 = 1591,5$ à moins de 0,4;

puis $R = 1591,0 = 15^m,910$.

CHAPITRE XII*.

Du plan et de la ligne droite dans l'espace (253-282). — Condition pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan (259). — Perpendiculaires et obliques au plan (255-263). — Propriétés de la perpendiculaire et des obliques menées d'un même point à un plan (264). — Parallélisme des droites et des plans (265-282).

Préliminaires.

253. THÉORÈME. — *Trois points, A, B, C, non en ligne droite, déterminent un plan.*

Soit AB la droite indéfinie menée par les points A, B. Suivant AB, faisons passer un plan quelconque ; puis, imaginons que ce plan tourne autour de AB, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point donné C. Alors sa position dans l'espace est déterminée.

Je dis maintenant que tout autre plan passant par les points A, B, C coïncide avec le premier.

En effet, toute droite qui rencontre deux des trois lignes AB, AC, BC est située tout entière dans chacun des deux plans (42) ; donc ces deux plans coïncident.

254. Corollaires. — 1° *Deux droites qui se coupent sont dans un plan, et en déterminent la position ;*

2° *Deux droites parallèles déterminent la position d'un plan.*

255. THÉORÈME. — *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

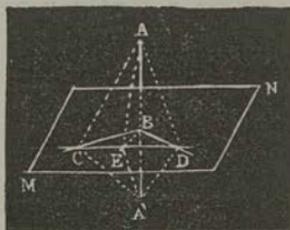
Si l'on pouvait trouver, sur l'intersection, trois points qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans donnés, passant par ces trois points, se confondraient ; ce qui serait contraire à l'hypothèse.

* Voir à l'Appendice les notions sur le levé des plans et l'arpentage.

Perpendiculaire au plan.

256. THÉORÈME. — *Si une droite AB est perpendiculaire à deux droites BC, CD, passant par son pied dans un plan MN, elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener, par son pied, dans le même plan.*

Soit BE une quelconque de ces droites : je dis que AB est perpendiculaire à BE.



Menons la droite DEC, de manière qu'elle rencontre BC, BD, BE ; prenons, sur AB, de part et d'autre du plan, les distances égales BA, BA' ; joignons enfin les points A, A' aux points C, E, D.

La droite BC est perpendiculaire au milieu de AA' ; donc $AC = A'C$; de même, $AD = A'D$.

Conséquemment, les deux trian-

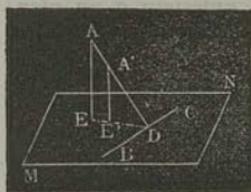
gles ACD, A'CD sont égaux, et les deux angles ACE, A'CE le sont pareillement. Il suit de là que les deux triangles ACE, A'CE sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc $AE = A'E$. La droite BE, ayant deux de ses points situés chacun à égale distance des extrémités de AA', est perpendiculaire au milieu de celle-ci ; donc AA', est perpendiculaire à BE.

257. THÉORÈME. — *Si une droite AB est perpendiculaire à trois droites AC, AD, AE menées par un de ses points, celles-ci sont toutes trois dans un même plan.*

Car, si la droite AE n'était pas dans le plan CAD, celui-ci couperait le plan BAE suivant une droite AE', différente de AE, et qui, d'après le théorème précédent, serait perpendiculaire à AB. On aurait donc, dans un même plan, deux droites AE, AE', perpendiculaires à une même droite AB, en un même point ; ce qui est absurde.

258. Corollaire. — *Tant de droites que l'on voudra, perpendiculaires à une même droite en un même point, sont dans un même plan.*

259. A cause des deux propriétés qui viennent d'être démontrées, on adopte les définitions suivantes :



droite ; puis, par le point D et dans le plan MN, menons DE perpendiculaire à BC. Enfin, abaissons AE perpendiculaire sur DE. AE sera perpendiculaire au plan MN.

Nous supprimons la démonstration, parce qu'elle diffère très-peu de celle qui précède.

Quant à la seconde partie de la proposition, elle est presque évidente, car si, par le point A, on pouvait mener deux perpendiculaires à MN, le plan de ces droites couperait MN suivant une perpendiculaire à l'une et à l'autre ; ce qui est absurde (56).

262. Si, sur la droite AD, nous prenons un point quelconque A', et si nous abaissons A'E' perpendiculaire à DE, la droite A'E' sera, d'après la construction précédente, perpendiculaire au plan MN.

Cela posé, admettons les définitions suivantes :

La projection d'un point, sur un plan, est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan ;

La projection d'une ligne est le lieu géométrique des projections de tous ses points.

Nous concluons, de la remarque et de la démonstration précédentes, deux théorèmes importants :

263. THÉORÈME. — *La projection d'une ligne droite, sur un plan, est une ligne droite.*

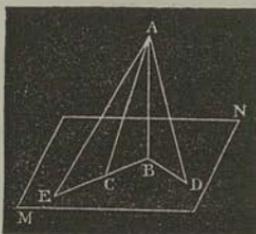
264. THÉORÈME. — 1° *Si deux droites sont perpendiculaires entre elles, la projection de la première, faite sur un plan passant par la seconde, est perpendiculaire à celle-ci.*

2° *Réciproquement : Si la projection d'une droite, faite sur un plan passant par une autre droite, est perpendiculaire à celle-ci, les deux droites sont perpendiculaires entre elles.*

1° Soit, comme ci-dessus (264, 2^e cas), la perpendiculaire AD à une droite BC située dans le plan MN. Si l'on trace, dans ce plan, DE perpendiculaire à BC, cette droite DE est la projection de AD : le théorème est donc démontré.

2° Soient BA perpendiculaire à BC (264, 4^e cas), et AE perpendiculaire au plan MN. Le plan BAE est perpendiculaire à BC ; donc, quel que soit le point E pris sur AE, la droite EB est perpendiculaire à BC (256).

265. THÉORÈME. — Si, d'un point A, extérieur à un plan MN, on mène la perpendiculaire AB et plusieurs obliques AC, AD, AE, à ce plan :



1° La perpendiculaire AB est plus courte que toute oblique ;

2° Deux obliques AC, AD, qui ont des projections égales, sont égales ;

3° De deux obliques AC, AE, celle qui a la plus grande projection est la plus grande.

En effet :

1° Dans le plan ABC, la perpendiculaire AB à la droite BC est plus courte que l'oblique AC ;

2° Si $BC = BD$, les deux triangles rectangles ABC, ABD sont égaux ;

3° Si l'on a $BE > BD$, prenons $BC = BD$; les deux obliques AC, AE seront situées dans un même plan ; donc

$$AE > AC ;$$

ou, à cause de

$$AC = AD,$$

$$AE > AD.$$

Droites parallèles.

266. THÉORÈME. — Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

Par définition, deux droites parallèles sont dans un même plan. Or, par la droite et par le point donnés, on ne peut faire passer qu'un seul plan ; et, dans ce plan, on ne peut mener, par le point donné, qu'une seule parallèle à la droite donnée (69).

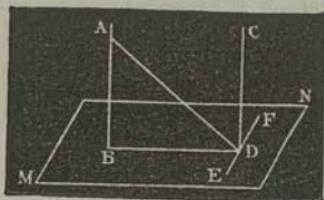
267. THÉORÈME. — Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Soient deux parallèles AB, CD, et soient un plan MN, perpendiculaire à AB : je dis qu'il est perpendiculaire à CD.

Le plan des deux parallèles coupe le plan MN suivant une droite BD, perpendiculaire à AB ; donc la droite CD, parallèle à AB, rencontre cette intersection et y est perpendiculaire.

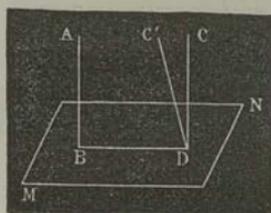
Menons, par le point D, dans le plan MN, la droite EF per-

pendiculaire à BD , et joignons le même point D à un point quelconque A de AB . D'après un théorème démontré ci-dessus



(264, 2°), EF sera perpendiculaire à AD . Mais cette droite EF est déjà perpendiculaire à BD ; donc elle est perpendiculaire à CD (256). Donc enfin, la droite CD , perpendiculaire aux deux droites DB, DE , est perpendiculaire à MN .

268. Réciproque. — Deux droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles.



Soient AB et CD ces deux droites. Si elles ne sont pas parallèles, menons par le point D une parallèle DC' à AB ; elle sera perpendiculaire à MN . Mais DC est déjà perpendiculaire à ce plan; on pourrait donc, par un même point, mener deux perpendiculaires à un même plan; ce qui est impossible (261).

269. THÉORÈME. — Deux droites A, B , parallèles à une droite C , sont parallèles entre elles.

Si les trois droites sont dans un même plan, la proposition est démontrée (70). Supposons donc que A ne soit pas dans le plan des parallèles B, C . Menons un plan P , perpendiculaire à C . Les droites A et B seront perpendiculaires à ce plan (267); donc elles sont parallèles entre elles (268).

270. Corollaire. — L'intersection de deux plans menés suivant deux droites parallèles, est parallèle à ces droites.

En effet, si par un point de l'intersection, on mène une parallèle commune aux deux droites, cette parallèle devant se trouver à la fois dans les deux plans, se confond avec leur intersection.

271. THÉORÈME. — Tout plan, mené suivant une parallèle B à une droite A , est parallèle à celle-ci.

Si la droite A rencontrait le plan, ce ne pourrait être qu'en un point de la droite B : ces deux droites ne seraient donc pas parallèles.

272. Réciproque. — *Tout plan, mené suivant une droite parallèle à un plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.*

273. Corollaires. — 1° *Une droite et un plan étant parallèles, si, par un point du plan, on mène une parallèle à la droite, cette parallèle sera tout entière dans le plan;*

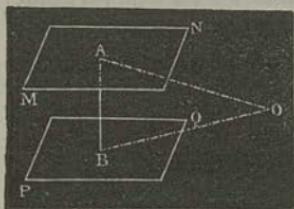
2° *Une droite, parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.*

Plans parallèles.

274. Deux plans sont dits *parallèles* lorsque, étant prolongés indéfiniment, ils ne peuvent se rencontrer.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant :

275. THÉORÈME. — *Deux plans MN, PQ, perpendiculaires à une même droite AB, sont parallèles entre eux.*



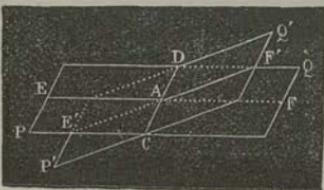
Si ces plans se rencontrent, soit O un point de leur intersection. Joignons ce point aux deux points A et B, où la droite perçoit les plans; les deux droites OA, OB seront perpendiculaires à AB; ce qui est absurde. Donc les plans sont parallèles.

276. Corollaire. — *Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à un plan donné.*

277. THÉORÈME. — *Les intersections de deux plans parallèles, par un troisième plan, sont parallèles.*

En effet, si ces intersections se rencontraient en un point, ce point serait commun aux deux plans, lesquels ne seraient pas parallèles.

278. Corollaire. — *Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un plan donné.*



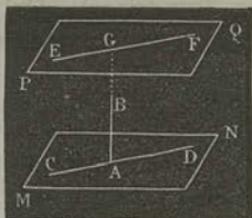
Si, par le point A, on peut faire passer deux plans PQ, P'Q', parallèles à MN, soit CD leur intersection.

Menons, par le point A, un plan qui coupe MN, et qui ne passe pas suivant CD. Soient EF, E'F', GH les intersections de ce plan avec PQ, P'Q', MN. Les deux premières droites seront parallèles à la troisième (277); ce qui est absurde, puisqu'elles se coupent (269).

279. THÉORÈME. — *Si deux plans MN, PQ sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

Soit la droite AB perpendiculaire au plan MN. Je dis qu'elle est perpendiculaire au plan PQ.

Par la droite AB faisons passer un plan, et soit CD son intersection avec MN. En vertu du corollaire précédent, ce plan auxiliaire coupe PQ; et, en vertu du théorème, son intersection avec PQ est parallèle à CD.



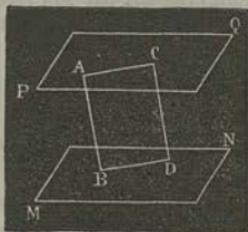
La droite AB, perpendiculaire à CD, rencontre donc EF ou PQ en un point G; de plus, elle est perpendiculaire à EF.

Il résulte de là que AB est perpendiculaire à une droite quelconque menée par son pied, dans le plan PQ; en d'autres termes, elle est perpendiculaire à ce plan (259).

280. THÉORÈME. — *Deux plans M, N, parallèles à un plan P, sont parallèles entre eux.*

Soit une droite perpendiculaire à ce dernier plan; elle est perpendiculaire aux deux autres (279): donc ceux-ci sont parallèles entre eux (275).

281. THÉORÈME. — *Les parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.*



Soient AB, CD deux droites parallèles, terminées aux deux plans parallèles MN, PQ: je dis que $AB = CD$.

Imaginons le plan de ces deux droites; il coupe les deux autres plans suivant deux parallèles AC, BD: donc la figure ABCD est un parallélogramme; donc

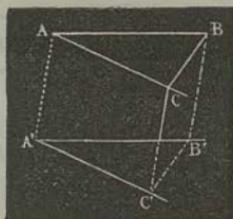
$$AB = CD.$$

282. Corollaire. — Deux plans parallèles sont partout également distants.

283. THÉOREME. — Si deux angles BAC , $B'A'C'$, non situés dans un même plan, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles sont égaux, et leurs plans sont parallèles.

Prenons $AB = A'B'$, $AC = A'C'$; menons AA' , BB' , CC' , BC et $B'C'$.

La figure $ABA'B'$, qui a deux côtés égaux et parallèles, est un parallélogramme; donc AA' et BB' sont égales et parallèles.



De même pour AA' et CC' . Donc les droites BB' , CC' , égales et parallèles à AA' , sont égales et parallèles entre elles; donc la figure $BCB'C'$ est un parallélogramme, et $BC = B'C'$.

Par suite, les deux triangles ABC , $A'B'C'$ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun; donc les angles A , A' sont égaux.

Quant à la seconde partie du théorème, elle est évidente, attendu que si les plans BAC , $B'A'C'$ se rencontraient, leur intersection serait, en même temps, parallèle à AB et à AC (269); ce qui est absurde.

Résumé.

Trois points, non en ligne droite, déterminent un plan.

Deux droites qui se coupent sont dans un plan, et en déterminent la position.

Deux droites parallèles déterminent la position d'un plan.

L'intersection de deux plans est une ligne droite.

Si une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener, par son pied, dans le même plan.

Si une droite est perpendiculaire à trois droites menées par un de ses points, celles-ci sont toutes trois dans un même plan.

Tant de droites que l'on voudra, perpendiculaires à une même droite en un même point, sont dans un même plan.

Si une droite est perpendiculaire à deux droites qui passent par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire au plan.

Le lieu géométrique des droites perpendiculaires à une même droite, en un même point, est le plan perpendiculaire à la droite, en ce point.

D'un point donné on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan donné, mais on n'en peut mener qu'une.

La projection d'une ligne droite, sur un plan, est une ligne droite.

Si deux droites sont perpendiculaires entre elles, la projection de la première, faite sur un plan passant par la seconde, est perpendiculaire à celle-ci.

Réciproquement, si la projection d'une droite, faite sur un plan passant par une autre droite, est perpendiculaire à celle-ci, les deux droites sont perpendiculaires entre elles.

Si, d'un point extérieur à un plan, on mène la perpendiculaire et plusieurs obliques à ce plan : 1^o la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ; 2^o deux obliques qui ont des projections égales sont égales ; 3^o de deux obliques, celle qui a la plus grande projection est la plus grande.

Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Réciproquement, deux droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles.

Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.

L'intersection de deux plans, menés suivant deux droites parallèles, est parallèle à ces droites.

Tout plan, mené suivant une parallèle à une droite, est parallèle à celle-ci.

Réciproquement, tout plan, mené suivant une droite parallèle à un plan, coupe celui-ci suivant une parallèle à la droite.

Une droite et un plan étant parallèles, si, par un point du plan on mène une parallèle à la droite, cette parallèle est tout entière dans le plan.

Une droite, parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.

Deux plans, perpendiculaires à une même droite, sont parallèles entre eux.

Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à un plan donné.

Les intersections de deux plans parallèles, par un troisième plan, sont parallèles.

Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un plan donné.

Si deux plans sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.

Deux plans, parallèles à un troisième, sont parallèles entre eux.

Les parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales.

Deux plans parallèles sont partout également distants.

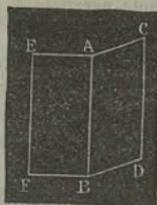
Si deux angles, non situés dans un même plan, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles sont égaux et leurs plans sont parallèles.

CHAPITRE XIII.

Angle dièdre (284). — Génération des angles dièdres par la rotation d'un plan autour d'une droite (285). — Dièdre droit (290). — Mesure des angles dièdres (287-289). — Propriétés des plans perpendiculaires entre eux (290-300). — Angles trièdres (286). — Cas d'égalité et de symétrie (308-312). — Propriétés de l'angle trièdre supplémentaire (301-303). — Limite de la somme des faces d'un angle polyèdre convexe (306). — Limites de la somme des angles dièdres d'un angle trièdre (307). — Analogies et différences entre les angles trièdres et les triangles rectilignes (311).

Angles formés par les plans.

284. On appelle *angle dièdre* l'espace indéfini EABD, compris entre deux plans EABF, CABD qui se rencontrent. Ces deux plans sont les *faces* de l'angle dièdre, et la droite AB, suivant laquelle ils se coupent, en est l'*arête*.



285. Si le plan AEFB, d'abord appliqué sur ACDB, tourne autour de la droite AB, il engendre l'angle dièdre EABD*.

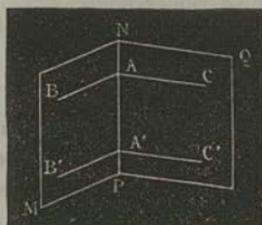
286. On appelle *angle polyèdre* l'espace indéfini compris entre plusieurs plans qui se rencontrent en un même point.

Si le nombre des plans se réduit à trois, l'angle prend le nom d'*angle trièdre*.

* Afin de pouvoir faire les démonstrations, on représente un angle dièdre sous l'aspect d'un livre entr'ouvert, ou d'une feuille rectangulaire pliée par la moitié; mais on doit toujours supposer que les faces de l'angle sont indéfiniment prolongées.

Mesure des angles dièdres.

287. Lemme. — Si, en un point A de l'arête NP d'un angle dièdre $MNPQ$, on mène, dans les deux faces, des perpendiculaires à cette droite, l'angle BAC est constant pour un même angle dièdre.



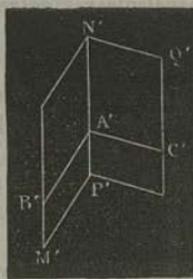
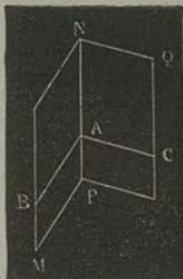
Menons, en un autre point A' de l'arête, et dans les deux faces, les perpendiculaires $A'B'$, $A'C'$ à cette droite. Les deux angles BAC , $B'A'C'$ sont égaux, comme ayant leurs côtés parallèles (282). C'est ce qu'il fallait démontrer.

L'angle dièdre $MNPQ$ et l'angle plan BAC sont dits *correspondants*.

288. THÉORÈME. — Deux angles dièdres, correspondant à des angles plans égaux, sont égaux.

Soient les angles dièdres $MNPQ$, $M'P'N'Q'$, et les angles plans correspondants BAC , $B'A'C'$: je dis que si ces derniers sont égaux, les angles dièdres seront égaux.

Transportons le second angle dans le premier, de manière que l'angle plan $B'A'C'$ coïncide avec son égal BAC .



Les arêtes NP , $N'P'$ sont perpendiculaires aux plans BAC , $B'A'C'$; donc elles coïncident. Par suite, les faces du second angle dièdre coïncident avec celles du premier. Ainsi, ces deux figures sont égales.

La réciproque est vraie ; car si les angles plans BAC , $B'A'C'$ sont inégaux, les angles dièdres le sont aussi.

289. THÉORÈME. — Deux angles dièdres quelconques sont entre eux comme les angles plans correspondants.

Plaçons le plus petit angle dièdre dans le plus grand, de manière que leurs arêtes et deux de leurs faces coïncident.

Soient alors $MNPQ$, $MNPQ'$ ces angles. Menons arbitrairement un plan perpendiculaire à l'arête NP ; il coupe les faces suivant des droites OA , OB , OB' ; et les angles AOB , AOB' sont les angles plans correspondant aux deux angles dièdres.

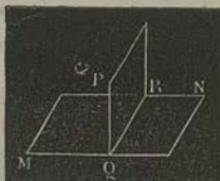
Cela posé, je dis que l'on a

$$\frac{MNPQ}{MNPQ'} = \frac{AOB}{AOB'}$$

Supposons, pour fixer les idées, que les angles plans soient entre eux dans le rapport de 7 à 5; c'est-à-dire qu'un même angle AOm , contenu 7 fois dans AOB , soit contenu 5 fois dans AOB' .

Par les droites de division Om , On , Op , ..., et l'arête NP , faisons passer des plans; ils divisent l'angle $MNPQ$ en 7 angles dièdres, égaux entre eux, comme répondant à des angles plans égaux; et l'angle $MNPQ'$ contient 5 de ces angles dièdres. Le rapport des deux angles dièdres $MNPQ$, $MNPQ'$ est donc, comme le rapport des angles plans AOB , AOB' , égal à $\frac{7}{5}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Plans perpendiculaires entre eux.



290. Lorsqu'un plan PQ rencontre un plan MN , de manière que les angles dièdres adjacents $PRQN$, $PRQM$ soient égaux, chacun d'eux est un angle dièdre droit, et le plan PQ est dit *perpendiculaire* sur MN .

291. THÉORÈME. — *Tous les angles dièdres droits sont égaux entre eux.*

En effet, les angles plans correspondants sont droits; donc ils sont égaux (31); donc les angles dièdres sont égaux (288).

292. Remarque. — Par la considération de l'angle plan correspondant, nous avons ramené le théorème précédent, relatif aux angles dièdres, au théorème analogue, relatif au plan. La même réduction a lieu pour les propositions suivantes, qu'il suffit d'énoncer.

293. Deux angles dièdres sont dits *complémentaires* ou *supplémentaires*, suivant que leur somme est égale à un dièdre droit ou à deux dièdres droits (32).

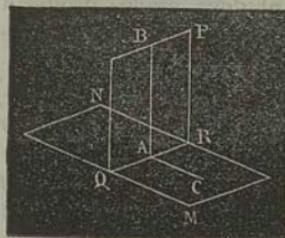
294. THÉORÈME. — *Tout plan qui en rencontre un autre fait avec celui-ci, d'un même côté, deux dièdres supplémentaires* (33).

295. Réciproque. — *Si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs faces extérieures sont dans un même plan* (34).

296. THÉORÈME. — *Lorsque deux plans se coupent, les angles dièdres opposés sont égaux deux à deux* (38).

297. Corollaire. — *Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, réciproquement celui-ci est perpendiculaire au premier* (40).

298. THÉORÈME. — *Tout plan PQ, mené suivant une droite AB, perpendiculaire à un plan MN, est perpendiculaire à ce dernier.*



Par le pied A de la perpendiculaire AB, menons, dans le plan MN, la droite AC perpendiculaire à l'intersection QR. D'après l'hypothèse, la droite AB est perpendiculaire à AC. Or, l'angle BAC est celui qui mesure le dièdre PRQM; donc celui-ci est droit.

299. THÉORÈME. — *L'intersection de deux plans P, Q, perpendiculaires à un troisième plan M, est perpendiculaire à ce dernier.*

Si, par un point de l'intersection, nous imaginons une perpendiculaire à M, cette droite sera contenue dans chacun des deux plans P, Q; donc elle en est l'intersection.

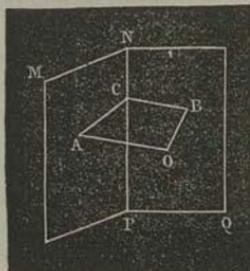
300. THÉORÈME. — *Deux plans, perpendiculaires à un troisième et passant par deux droites parallèles (non perpendiculaires à ce troisième plan), sont parallèles entre eux.*

Si ces plans se coupaient, leur intersection serait à la fois parallèle aux droites données (269), et perpendiculaire au plan donné (298); ce qui est absurde.

Angles trièdres supplémentaires.

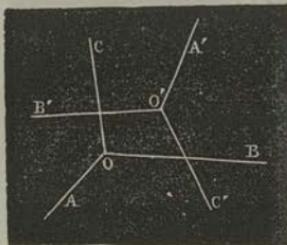
301. THÉORÈME. — Si d'un point O , pris dans l'intérieur d'un angle dièdre $MNPQ$, on abaisse des perpendiculaires sur les deux faces, l'angle AOB formé par ces droites est le supplément de l'angle dièdre.

Cet énoncé signifie que l'angle AOB est supplémentaire de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre.



Le plan AOB , perpendiculaire aux faces MP , NQ (298), est perpendiculaire à leur intersection NP (299); donc il coupe les faces suivant des droites AC , BC perpendiculaires à NP (258); c'est-à-dire que ACB est l'angle plan correspondant à l'angle dièdre $MNPQ$. Or, le quadrilatère $ACBO$ ayant deux angles droits, A et B , les angles O et C sont supplémentaires.

302. THÉORÈME. — Si d'un point O' , pris dans l'intérieur d'un angle trièdre $OABC$, on abaisse des perpendiculaires sur les trois faces, on forme un nouvel angle trièdre $O'A'B'C'$ dont les faces sont les suppléments des angles dièdres de $OABC$, et vice versa.



La première partie de la proposition vient d'être démontrée. Relativement à la seconde, il suffit d'observer que, d'après le théorème précédent, l'angle trièdre $OABC$ a ses arêtes perpendiculaires aux faces de $O'A'B'C'$; donc les faces de $OABC$ sont les suppléments des angles dièdres de $O'A'B'C'$.

303. Angles trièdres supplémentaires. — Désignons par A , B , C les angles dièdres du premier trièdre, et par a , b , c les faces opposées. Désignons de même par A' , B' , C' les angles dièdres du second trièdre, et par a' , b' , c' les faces opposées

à ces angles. Nous aurons, en prenant l'angle droit pour unité :

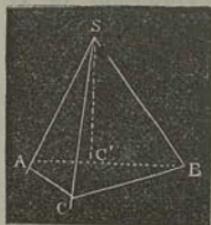
$$\begin{array}{ll} A + a' = 2, & A' + a = 2, \\ B + b' = 2, & B' + b = 2, \\ C + c' = 2, & C' + c = 2. \end{array}$$

A cause de ces relations, les angles trièdres O, O' sont dits *supplémentaires*.

Propriétés des angles polyèdres.

304. THÉORÈME. — *Dans tout angle trièdre S , une face quelconque est : 1° plus petite que la somme des deux autres ; 2° plus grande que leur différence.*

Il suffit de faire voir que la plus grande face est moindre que la somme des deux autres.



Soit ASB cette plus grande face. Menons, dans son plan, la droite SC' , de manière que l'angle ASC' égale ASC . Traçons arbitrairement, dans le même plan, la droite AB ; prenons $SC = SC'$, et tirons CA, CB .

Les triangles ASC, ASC' sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc $AC = AC'$. Et comme, dans le triangle ABC , le côté AB est plus petit que la somme des deux autres, il vient, en retranchant les parties égales, $BC' < BC$. Donc, dans les triangles $CSB, C'SB$ qui ont deux côtés égaux, chacun à chacun, l'angle CSB , opposé au plus grand côté, est plus grand que $C'SB$, opposé au plus petit côté. Ajoutant, d'une part, ASC , et, de l'autre, son égal ASC' , on a

$$CSB + ASC > C'SB + ASC',$$

ou

$$CSB + ASC > ASB.$$

305. Corollaire. — *Dans tout angle trièdre, un angle dièdre quelconque surpasse l'excès de la somme des deux autres sur 2 droits.*

Soient A, B, C les trois angles dièdres d'un trièdre, A étant le plus petit ; et soient a', b', c' les faces correspondantes du trièdre supplémentaire. On a

$$a' < b' + c',$$

ou (303)

$$2^d - A < (2^d - B) + (2^d - C);$$

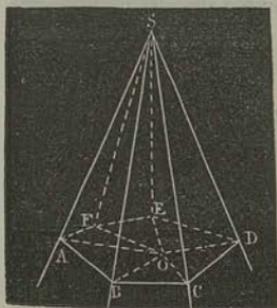
ou enfin

$$A > B + C - 2^d.$$

306. THÉORÈME. — *La somme des faces de tout angle polyèdre convexe est moindre que 4 droits.*

Soit l'angle polyèdre convexe $SABC\dots$. Je dis que l'on a

$$ASB + BSC + \dots < 4^d.$$



Coupons l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les faces : la section sera un polygone convexe $ABCD\dots$. Prenons un point O dans l'intérieur de ce polygone, et menons les droites OA, OB, \dots . Nous obtiendrons ainsi une série de triangles, en nombre égal à celui des faces de l'angle polyèdre, et dans lesquels la somme des angles qui se réunissent en O égale 4 droits.

Or, si nous considérons deux triangles consécutifs, ABO, BCO de ce polygone, et les triangles correspondants ABS, BCS , nous aurons, par le théorème précédent,

$$ABO + OBC < ABS + SBC.$$

La même relation a lieu pour les angles trièdres C, D, E, \dots . Par conséquent, *la somme des angles à la base, dans les triangles réunis en O , est moindre que la somme des angles à la base dans les triangles réunis en S .* Et comme la somme de tous les angles est la même dans les premiers triangles et dans les derniers, il faut, par compensation, que la somme des angles autour du point O surpasse la somme des angles autour du point S . C'est ce qu'il fallait démontrer.

307. THÉORÈME. — *Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre 2 droits et 6 droits.*

Nommons A, B, C les angles dièdres du trièdre donné, et

a' , b' , c' les faces correspondantes du trièdre supplémentaire (303). Nous aurons

$$A = 2^d - a', \quad B = 2^d - b', \quad C = 2^d - c';$$

d'où

$$A + B + C = 6^d - (a' + b' + c');$$

donc, 1^o

$$A + B + C < 6^d.$$

Mais, par le théorème précédent,

$$a' + b' + c' < 4^d;$$

donc, 2^o

$$A + B + C > 2^d.$$

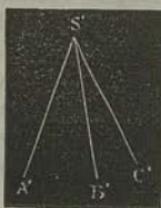
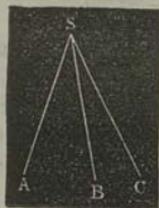
Égalité des angles trièdres.

308. THÉORÈME. — *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Soit l'angle dièdre A égal à l'angle dièdre A' . Soit la face ASC égale à $A'S'C'$, et soit enfin la face ASB égale à $A'S'B'$. Je dis que les angles trièdres sont égaux.

Transportons le trièdre S' sur le trièdre S , de manière que la face $A'S'C'$ coïncide avec son égale ASC .

L'angle dièdre A' étant égal à A , le plan de la face $A'S'B'$ s'applique sur le plan de la face ASB . Et comme ces deux faces sont égales, l'arête $S'B'$ coïncide avec SB ; donc les deux trièdres sont égaux.



309. THÉORÈME. — *Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à des angles dièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

La démonstration se fait, comme celle du théorème précédent, par voie de superposition.

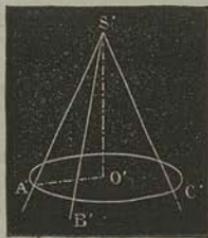
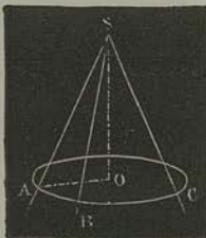
340. THÉORÈME. — Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.

Soient les angles trièdres S, S' , dans lesquels

$$ASB = A'S'B', \quad BSC = B'S'C', \quad CSA = C'S'A'.$$

Prenons, à partir des sommets S, S' , les six distances $SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C'$, égales entre elles.

Construisons les deux triangles $ABC, A'B'C'$; circonscrivons, à ces triangles, les circonférences O, O' ; enfin menons $SO, S'O'$: ces droites seront perpendiculaires, respectivement, aux plans $ABC, A'B'C'$ (265).



Il est d'abord visible que les triangles $ABC, A'B'C'$ sont égaux entre eux, comme ayant les côtés égaux, chacun à chacun; donc les cercles circonscrits O, O' sont égaux entre eux; d'où il suit que les triangles rectangles $SOA, S'O'A'$, qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, sont égaux.

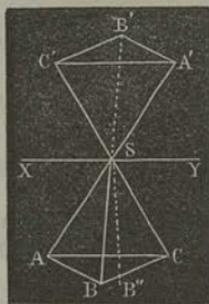
Si donc l'on transporte le trièdre S' sur le trièdre S , de manière que le triangle $A'B'C'$ coïncide avec son égal ABC , les centres O, O' coïncideront; la perpendiculaire $O'S'$ prendra la direction de OS ; et, comme ces perpendiculaires sont égales, le sommet S' tombera en S . Donc les deux angles trièdres coïncideront.

341. Remarque. — La théorie de l'égalité des trièdres est analogue à la théorie de l'égalité des triangles (45-54): chacune d'elles se compose de trois théorèmes, qui se correspondent respectivement. La théorie des trièdres serait complètement analogue à la théorie des triangles si la somme des angles dièdres d'un trièdre était constante; mais il n'en est pas ainsi: on sait seulement que cette somme est comprise entre deux dièdres droits et six dièdres droits (307).

Angles trièdres symétriques.

312. *Remarque sur les angles trièdres symétriques.* — Si l'on prolonge, au delà du sommet S , les arêtes d'un angle trièdre $SABC$, on forme un autre angle trièdre $SA'B'C'$ qui a les mêmes éléments (faces ou angles dièdres) que l'angle trièdre donné. Cependant, ces deux figures ne sont pas superposables.

En effet, si l'on imagine que l'angle trièdre $SA'B'C'$ tourne autour de XY , bissectrice des angles ASC' , CSA' , jusqu'à ce que la face $C'SA'$ vienne s'appliquer sur son égale ASC ; l'arête SB' , au lieu de coïncider avec SB , viendra prendre une position SB' telle, que les angles ASB' , CSB' seront égaux, respectivement, aux angles CSB , ASB . Autrement dit, les deux arêtes SB , SB' seront placées *symétriquement* par rapport à un plan perpendiculaire à XY , passant en S . Ces deux arêtes ne coïncideront que dans le cas particulier où les faces ASB , CSB seraient égales entre elles.



Les deux trièdres $SABC$, $SA'B'C'$ sont dits *égaux par symétrie*.

Résumé.

Deux angles dièdres, correspondant à des angles plans égaux, sont égaux.

Deux angles dièdres quelconques sont entre eux comme les angles plans correspondants.

Tous les angles dièdres droits sont égaux entre eux.

Tout plan qui en rencontre un autre, fait avec celui-ci, d'un même côté, deux dièdres supplémentaires.

Réciproquement, si deux dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs faces extérieures sont dans un même plan.

Lorsque deux plans se coupent, les angles dièdres opposés sont égaux deux à deux.

Si un plan est perpendiculaire à un autre plan, réciproquement celui-ci est perpendiculaire au premier.

Tout plan, mené suivant une droite perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à ce dernier.

L'intersection de deux plans, perpendiculaires à un troisième plan, est perpendiculaire à ce dernier.

Deux plans, perpendiculaires à un troisième et passant par deux droites parallèles (*non perpendiculaires à ce troisième plan*), sont parallèles entre eux.

Si d'un point O , pris dans l'intérieur d'un angle dièdre $MNPQ$, on abaisse des perpendiculaires sur les deux faces, l'angle AOB formé par ces droites est le supplément de l'angle dièdre.

Si d'un point O' , pris dans l'intérieur d'un angle trièdre $OABC$, on abaisse des perpendiculaires sur les trois faces, on forme un nouvel angle trièdre $O'A'B'C'$ dont les faces sont les suppléments des angles dièdres de $OABC$, *et vice versa*.

Dans tout angle trièdre, une face quelconque est : 1° plus petite que la somme des deux autres; 2° plus grande que leur différence.

Dans tout angle trièdre, un angle dièdre quelconque surpasse l'excès de la somme des deux autres sur deux droits.

La somme des faces de tout angle polyèdre convexe est moindre que quatre droits.

Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits.

Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposés.

Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à des angles dièdres égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.

Deux angles trièdres sont égaux lorsqu'ils ont les faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées.

CHAPITRE XIV.

Des polyèdres (313-326). — Prisme (316, 317). — Parallépipède, cube, pyramide (315-318). — Sections planes, parallèles, du prisme et de la pyramide (322, 323). — Mesure des volumes (327-339). — Volume du parallépipède, du prisme, de la pyramide, du tronc de pyramide à bases parallèles, du tronc de prisme triangulaire (327-339).

Des polyèdres.

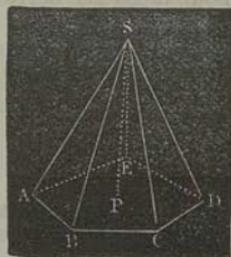
313. On nomme *polyèdre* une figure terminée par des faces planes.

Parmi les polyèdres, on distingue, à cause du nombre de leurs faces : le *tétraèdre*, qui a quatre faces ; le *hexaèdre*, qui en a six ; l'*octaèdre*, qui en a huit ; le *dodécaèdre*, qui en a douze ; l'*icosaèdre*, qui en a vingt, etc. Le tétraèdre est le plus simple de tous les polyèdres, car trois plans qui se coupent ne peuvent limiter un espace.

314. On appelle *arêtes* et *sommets* d'un polyèdre les côtés et les sommets de ses faces. Une *diagonale* est une droite qui joint deux sommets non situés dans la même face.

315. Si l'on coupe un angle polyèdre S par un plan qui en rencontre toutes les faces, on détermine un polyèdre SAB... appelé *pyramide*. Ce corps peut donc être ainsi défini :

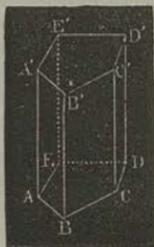
Une pyramide est un polyèdre dont les faces sont un polygone quelconque, et une série de triangles ayant un sommet commun.



Le polygone ABCDEF se nomme *base* ; la perpendiculaire SP, abaissée du sommet sur la base, est la *hauteur*, et l'ensemble des triangles ASB, BSC, ..., forme la *surface latérale* de la pyramide.

Une pyramide est *régulière* lorsque sa base est un polygone régulier, ayant pour centre le *ped* de la hauteur.

316. Si une série de plans se rencontrent consécutivement suivant des droites parallèles AA' , BB' ..., et qu'on les coupe par deux plans parallèles ABC ..., $A'B'C'$..., on détermine une figure ABC ..., appelée *prisme*.



Les faces telles que $ABA'B'$, $BCB'C'$..., sont des parallélogrammes; car chacune d'elles est un quadrilatère ayant deux côtés égaux et parallèles; de plus les deux faces ABC ..., $A'B'C'$..., appelées *bases* du prisme, sont égales. En effet, la figure $ABA'B'$ étant un parallélogramme, les côtés AB , $A'B'$ sont égaux et parallèles; donc les deux polygones ABC ..., $A'B'C'$..., ont leurs côtés égaux et leurs angles égaux, chacun à chacun (283).

317. De là, la définition suivante :

Un *prisme* est un polyèdre dont les faces sont deux polygones égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes.

La *hauteur* d'un prisme est la distance comprise entre les plans des deux bases.

La surface *latérale* du prisme est formée par l'ensemble des parallélogrammes $ABA'B'$, $BCB'C'$

Un prisme est *droit* ou *oblique* selon que les arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux bases. Dans le premier cas, les faces latérales du prisme sont des rectangles.

Un prisme droit est *régulier* lorsque ses bases sont des polygones réguliers.

318. Un *parallépipède* est un prisme dont les bases sont des parallélogrammes.

Si un parallépipède droit a ses bases rectangulaires, il prend, pour cette raison, le nom de *parallépipède rectangle*.

Enfin, le *cube* est un polyèdre qui a pour faces six carrés égaux.

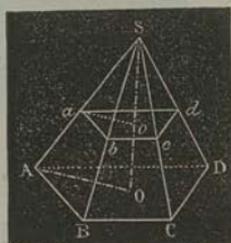
319. THÉORÈME. — Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées. (Voir n° 308*.)

* L'égalité des tétraèdres se démontre absolument comme l'égalité des trièdres; c'est pourquoi nous nous contentons d'énoncer les théorèmes qui constituent la première théorie.

320. THÉORÈME. — Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale adjacente à trois angles dièdres égaux, chacun à chacun. (Voir n° 309.)

321. THÉORÈME. — Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées. (Voir n° 310.)

322. THÉORÈME. — Les sections faites dans la surface latérale d'une pyramide, par deux plans parallèles, sont deux polygones semblables.



Soient AB , ab les sections faites dans la face SAB , par les deux plans parallèles : ces droites sont parallèles (277). Il suit de là que les deux polygones $ABC\dots$, $abc\dots$, ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

En second lieu, les droites AB , ab étant parallèles, on a

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb}$$

De même, les droites BC , bc étant parallèles, on a

$$\frac{SB}{Sb} = \frac{BC}{bc} = \frac{SC}{Sc}$$

et ainsi de suite.

Donc, à cause des rapports communs,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots$$

Les deux polygones $ABC\dots$, $abc\dots$, ayant les angles égaux et les côtés proportionnels, sont donc semblables.

323. Corollaire. — Les côtés homologues et les périmètres de deux sections parallèles sont comme les distances de ces sections au sommet de la pyramide ; leurs aires sont comme les carrés des mêmes distances.

Soient P et p les périmètres des deux polygones, A et a leurs aires ; nous aurons

$$\frac{P}{p} = \frac{SA}{Sa}, \quad \frac{A}{a} = \frac{\overline{SA}^2}{\overline{Sa}^2}.$$

Menons, du sommet S, une perpendiculaire commune aux plans des deux polygones, et soient O, o les points où elle perce ces plans. Menons encore AO et ao : ces droites seront parallèles.

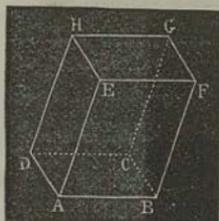
Donc

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SO}{So};$$

donc enfin,

$$\frac{P}{p} = \frac{SO}{So}, \quad \frac{A}{a} = \frac{\overline{SO}^2}{\overline{So}^2}.$$

324. THÉORÈME. — *Dans tout parallépipède, les faces opposées sont égales et parallèles.*



Soit le parallépipède ABC.... qui a pour bases les parallélogrammes égaux et parallèles ABCD, EFGH. Je dis que deux autres faces opposées quelconques sont égales et parallèles.

En effet, dans les parallélogrammes CDHG, BAEF, le côté CD est égal et parallèle au côté AB; le côté DH est égal et parallèle au côté AE; etc.

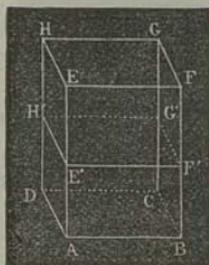
325. Corollaire. — *Dans tout parallépipède, les angles dièdres opposés sont égaux.*

326. Remarques. — I. *Dans tout parallépipède, deux faces opposées quelconques peuvent être prises pour bases;*

II. *Les arêtes d'un parallépipède sont, quatre à quatre, égales et parallèles.*

Volume du parallépipède.

327. Deux parallépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.



Plaçons le plus petit parallépipède dans le plus grand, de manière que ABCD soit la base commune. je dis que

$$\frac{ACE}{ACE'} = \frac{AE}{AE'}$$

Supposons les hauteurs AE, AE' commensurables; etc. (Voir n° 211.)

328. THÉORÈME. — Le rapport de deux parallépipèdes rectangles est égal au produit des rapports de leurs trois dimensions.

Soient a, b, c les dimensions d'un parallépipède rectangle P; soient a', b', c' les dimensions d'un autre parallépipède rectangle P'; je dis que

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}$$

Prenons deux parallépipèdes rectangles auxiliaires P'', P''', dont les dimensions soient a, b, c' pour l'un, et a, b', c' pour l'autre.

P, P'', ayant deux dimensions communes, peuvent être regardés comme ayant même base.

Donc

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'}$$

P'', P''' donnent de même

$$\frac{P''}{P'''} = \frac{b}{b'}$$

Enfin,

$$\frac{P'''}{P'} = \frac{a}{a'}$$



Le produit des rapports intermédiaires égale le rapport de P à P' (*Arithm.*, 212); donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}$$

329. *Remarque.* — Les considérations du n° 204 permettent d'énoncer, comme il suit, le théorème qui vient d'être démontré :

1° Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions;

2° Deux parallélépipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.

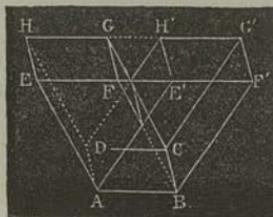
On déduit aussi de ces considérations que, si l'on prend pour unité le cube qui a pour côté l'unité de longueur, le rapport d'un parallélépipède rectangle à ce cube, ou le volume du parallélépipède, sera donné par la proposition suivante :

330. *Corollaire.* — Le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions, ou égal au produit de sa base par sa hauteur.

331. *THÉORÈME.* — Deux parallélépipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents.

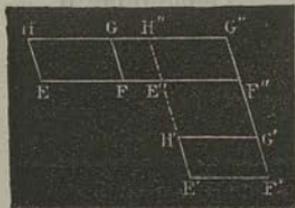
Si l'on fait coïncider les bases inférieures des deux parallélépipèdes, les deux bases supérieures seront situées dans un même plan. Cela posé, il peut se présenter deux cas : ou ces deux dernières bases seront comprises entre les deux mêmes parallèles EF', HG', ou le contraire arrivera.

1^{er} Cas. — Si, du prisme EABF'HDCG', on retranche suc-



cessivement chacun des deux prismes triangulaires EAE'HDH', FBF'GCG', on obtient les deux parallélépipèdes AG', BH. Il est facile de reconnaître que les deux prismes triangulaires sont égaux, comme ayant un angle trièdre égal compris entre trois faces égales chacune à chacune. Donc, d'après la définition (206), les deux parallélépipèdes sont équivalents.

2^e Cas. — Supposons que EFGH, E'F'G'H' soient les bases supérieures des deux parallépipèdes. Prolongeons HG, EF, E'H', F'G'; nous obtiendrons un parallélogramme EF'G'H' égal à chacun des deux autres. Concevons que ce parallé-



gramme soit la face supérieure d'un parallépipède auxiliaire ayant, pour base inférieure, la face commune aux deux parallépipèdes donnés. D'après le premier cas, le nouveau parallépipède est équivalent aux deux autres; donc ceux-ci sont équivalents entre eux.

332. THÉORÈME. — *Un parallépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

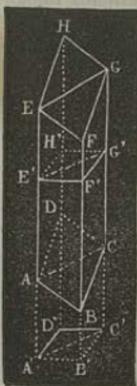
Soit un parallépipède P ayant pour hauteur a , et pour base un parallélogramme de base b et de hauteur c . D'après le théorème précédent, P équivaut à un parallépipède droit P', de même base et de même hauteur. Mais ce parallépipède auxiliaire P' peut être considéré comme ayant pour hauteur c , et pour base un rectangle de base a et de hauteur b . En vertu du même théorème, il est donc équivalent à un parallépipède rectangle P'', ayant pour arêtes a, b, c . D'ailleurs, ce dernier parallépipède P'' a pour mesure abc ou $bc \cdot a$ (330); donc P, qui équivaut à P'', a la même mesure.

Volume du prisme.

333. THÉORÈME. — *Tout prisme triangulaire est la moitié du parallépipède de base double et de même hauteur.*

ABCEFG étant un prisme triangulaire quelconque, achevons le parallépipède BH qui aurait, pour deux de ses faces, les parallélogrammes AF, CF : ce parallépipède a même hauteur que le prisme, et sa base ABCD est double de la base ABC du prisme (220). Il s'agit, évidemment, de faire voir que les deux prismes triangulaires ABCEFG, ADCEHG, dans lesquels se décompose le parallépipède, sont équivalents entre eux.

Pour cela, menons arbitrairement un plan E'F'G'H', perpendiculaire à FB, et qui laisse, d'un même côté, la face EFGH. Prenons F'B' = FB, et, par le point B', menons un second plan



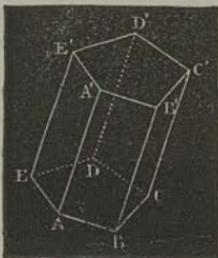
$A'B'C'D'$ perpendiculaire à FB . Nous obtenons ainsi, en prolongeant les faces du parallélépipède *oblique* donné, un parallélépipède *droit* $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Ces deux parallélépipèdes sont équivalents. En effet, si nous transportons le parallélépipède *tronqué* $E'F'G'H'EFGH$ sur $A'B'C'D'ABCD$, de manière que la face $E'F'G'H'$ coïncide avec son égale $A'B'C'D'$ (325), l'arête $E'E$, perpendiculaire à $E'F'G'H'$, prendra la direction de $A'A$. De plus, $E'A' = EA$, donc $E'E = A'A$; ainsi les sommets E, A coïncident. On démontrerait, de même, que les sommets F, G, H coïncident avec F', G', H' . Donc les deux parallélépipèdes, qui se composent du même polyèdre $ABCDE'F'G'H'$, augmenté de deux parties égales, sont équivalents.

Cela posé, le plan $AEGC$, qui décompose le parallélépipède donné en deux prismes triangulaires *obliques*, décompose aussi le second parallélépipède en deux prismes triangulaires *droits*. En répétant la démonstration précédente, on prouve que les deux prismes *obliques*, équivalent, respectivement, aux deux prismes *droits*. Or, ceux-ci sont égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur; donc les deux autres sont équivalents entre eux.

334. Corollaire. — *Tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

335. THÉORÈME. — *Un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

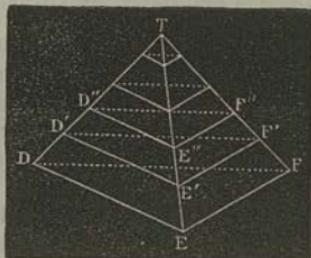
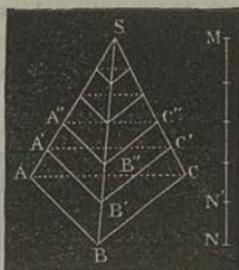
Soit, pour fixer les idées, le prisme *pentagonal* AD' . Menons des plans *diagonaux* par l'arête AA' et par les arêtes CC', DD' : nous décomposerons la figure en prismes triangulaires ayant même hauteur, et ayant pour bases les triangles qui composent la base du premier prisme. Or, chaque prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par la hauteur commune; donc le prisme total a pour mesure la somme des bases, multipliée par la hauteur.



Volume de la pyramide.

336. THÉORÈME. — Deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents.

Plaçons les deux tétraèdres de manière que leurs bases soient dans un même plan : leurs sommets S, T seront alors dans un plan parallèle au premier.



Soit MN la distance comprise entre ces deux plans, ou la hauteur commune des deux tétraèdres. Divisons cette hauteur en un certain nombre de parties égales; par les points de division, menons des plans parallèles aux bases : ils couperont les deux tétraèdres suivant des triangles équivalents deux à deux.

En effet, l'on a, par exemple (323),

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \left(\frac{MN'}{MN}\right)^2, \quad \frac{D'E'F'}{DEF} = \left(\frac{MN'}{MN}\right)^2;$$

d'où

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{D'E'F'}{DEF}.$$

Mais

$$ABC = DEF;$$

donc

$$A'B'C' = D'E'F'.$$

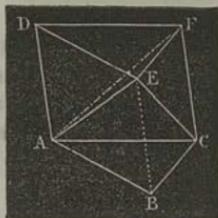
Actuellement, sur les triangles $A'B'C'$, $A''B''C''$, ..., pris pour bases, construisons des prismes intérieurs au tétraèdre S. De même, sur les triangles $D'E'F'$, $D''E''F''$, ..., pris pour bases, construisons des prismes intérieurs au tétraèdre T. Chaque

prisme de S est équivalent au prisme qui y correspond dans T; car ces deux prismes ont des bases équivalentes et des hauteurs égales. Par suite, les deux sommes de prismes ont même volume; donc les deux tétraèdres S et T, *limites* de ces sommes, ont des volumes égaux; c'est-à-dire qu'ils sont équivalents.

337. THÉORÈME.— *Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.*

1° Soit d'abord un prisme triangulaire ABCDEF. Menons un plan par le sommet E et par l'arête AC. Nous retrancherons un tétraèdre EABC ayant même base et même hauteur que le prisme, et il nous restera une pyramide ayant ACDF pour base, et le point E pour sommet.

Menons un plan suivant AE, EF; il décompose la pyramide quadrangulaire en deux tétraèdres équivalents entre eux. En effet, ils ont pour bases les triangles égaux ADF, ACF, situés dans un même plan; de plus, ces tétraèdres ont même sommet E; donc ils ont même hauteur.



D'un autre côté, les deux tétraèdres ADEF, EABC ont même base et même hauteur que le prisme; donc ils sont équivalents.

Il suit de là que les trois tétraèdres qui composent le prisme sont équivalents entre eux; donc chacun d'eux est le tiers du prisme.

2° Si l'on considère un prisme quelconque, et la pyramide de même base et de même hauteur, on pourra décomposer ces deux corps, l'un en prismes triangulaires, l'autre en tétraèdres, ayant, chacun à chacun, même base et même hauteur. Chaque prisme triangulaire est équivalent au tétraèdre correspondant; donc le prisme donné est équivalent à la pyramide.

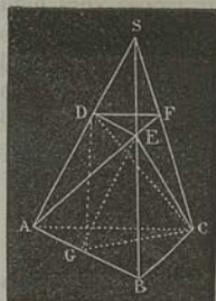
338. Corollaire.— *Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Volume du tronc de pyramide.

339. THÉORÈME. — *Un tronc de pyramide, à bases parallèles, est équivalent à la somme de trois pyramides ayant même hauteur que le tronc, et ayant pour bases respectives la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*

1^o Supposons d'abord la pyramide triangulaire S coupée par un plan parallèle à la base ABC, lequel détermine le tronc ABCDEF.

Menons, par les droites AE, EC, le plan AEC, qui détache du tronc le tétraèdre ABCE. Coupons ensuite la pyramide quadrangulaire ACDFE par le plan DEC; nous la décomposons en deux tétraèdres DEFC, DACE. Le premier satisfait évidemment à l'énoncé.



Quant au tétraèdre DACE, si nous menons par le point E une parallèle EG à DA, nous le transformerons en un tétraèdre équivalent DACG, lequel peut être considéré comme ayant pour base AGC, et pour sommet le point D. Il reste donc à faire voir que le triangle AGC est moyen proportionnel entre ABC et DEF.

Or, les triangles AGC, ABC, qui ont un angle égal adjacent à un côté égal, sont entre eux comme les deux autres côtés (227); c'est-à-dire que

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG}.$$

De même, les triangles AGC, DEF ont un angle égal et un côté égal; donc

$$\frac{AGC}{DEF} = \frac{AC}{DF}.$$

Mais les triangles semblables ABC, DEF donnent

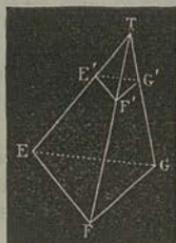
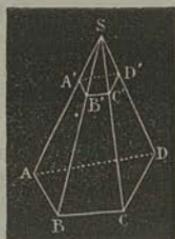
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF};$$

donc, à cause de $AG = DE$,

$$\frac{ABC}{AGC} = \frac{AGC}{DEF}$$

2° Soit actuellement un tronc $ABCD A' B' C' D'$, déterminé dans une pyramide quelconque S par un plan parallèle à la base.

Prenons, sur le plan de cette base, un triangle EFG équivalent à celle-ci, et construisons le tétraèdre T , de même hauteur que S ; le tétraèdre et la pyramide seront équivalents (336); et, si le plan $A' B' C' D'$ est prolongé, il coupera le tétraèdre T suivant un triangle $E' F' G'$ équivalent à $A' B' C' D'$ (323).



D'après cela, la pyramide $SA' B' C' D'$ est équivalente à $TE' F' G'$, et les deux troncs sont équivalents. Donc le théorème que l'on vient de démontrer pour le tronc de tétraèdre, subsiste pour le tronc de pyramide.

Résumé.

Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées.

Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun.

Deux tétraèdres sont égaux lorsqu'ils ont trois faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées.

Les sections faites dans la surface latérale d'une pyramide, par deux plans parallèles, sont deux polygones semblables.

Les côtés homologues et les périmètres de deux sections parallèles sont comme les distances de ces sections au sommet de la pyramide; leurs aires sont comme les carrés des mêmes distances.

Dans tout parallépipède, les faces opposées sont égales et parallèles.

Dans tout parallépipède, les angles dièdres opposés sont égaux.

Deux parallépipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.

Le rapport de deux parallépipèdes rectangles est égal au produit des rapports de leurs trois dimensions.

Le volume d'un parallépipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions, ou égal au produit de sa base par sa hauteur.

Deux parallépipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents.

Un parallépipède quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Tout prisme triangulaire est la moitié du parallépipède de base double et de même hauteur.

Tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

Deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents.

Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Un tronc de pyramide, à bases parallèles, est équivalent à la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune celle du tronc, et ayant pour bases respectives la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

CHAPITRE XV.

De la symétrie dans les polyèdres (340-353). — Plan de symétrie (340). — Centre de symétrie (340)*. — Comparaison des faces des angles dièdres, des angles polyèdres homologues, de deux polyèdres symétriques (345-347). — Équivalence de leurs volumes (352, 353).

De la symétrie des figures.

340. *Définitions.* — Deux points sont dits *symétriques* par rapport à un point fixe, nommé *centre de symétrie*, lorsque celui-ci divise en deux parties égales la droite qui joint les deux premiers.

* L'étude de la symétrie par rapport à un point se ramène à celle de la symétrie par rapport à un plan, en imprimant une rotation de 180° à l'une des deux figures autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le centre de symétrie. (*Note du Programme.*)

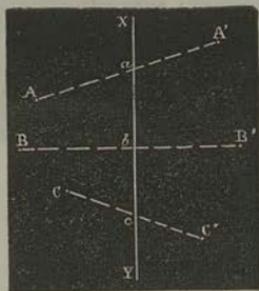
Deux points sont symétriques par rapport à une droite fixe, nommée *axe de symétrie*, lorsque cette ligne est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

Enfin, deux points sont symétriques par rapport à un plan, nommé *plan de symétrie*, lorsque celui-ci est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

Deux figures sont dites *symétriques* par rapport à un point, une droite ou un plan, lorsqu'un point quelconque de la première figure a son symétrique dans la seconde.

341. THÉORÈME. — *Deux figures, symétriques par rapport à une droite XY, sont égales entre elles.*

Soient A, B, C, ... des points de la première figure, et A', B', C', ... les points de la seconde figure, symétriques des premiers. Menons AA', BB', CC', ... : d'après la définition, ces droites sont rencontrées en leur milieu a, b, c, ... par l'axe de symétrie XY, qui est perpendiculaire à chacune d'elles.



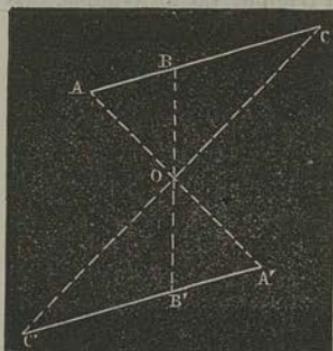
Faisons tourner la première figure autour de XY : dans ce mouvement, les droites Aa, Bb, Cc, ... que l'on suppose liées invariablement, décrivent, dans le même temps, des secteurs semblables ; donc lorsque le point A coïncide avec A', les points B, C, ... coïncident avec B', C', ... ; donc les deux figures sont égales.

Il résulte, de ce théorème, que deux figures symétriques par rapport à une droite ne jouissent d'aucune propriété particulière ; c'est pourquoi nous nous occuperons seulement de la symétrie relative, soit à un point, soit à un plan.

342. THÉORÈME. — *Si trois points sont en ligne droite, leurs symétriques, par rapport à un point ou à un plan, sont en ligne droite.*

1° Soient A, B, C trois points, supposés en ligne droite, et soient A', B', C' leurs symétriques relativement au centre O. Menons A'B' et B'C'. Les triangles ABO, A'B'O sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc

$$\text{angle ABO} = \text{angle A'B'O} ;$$

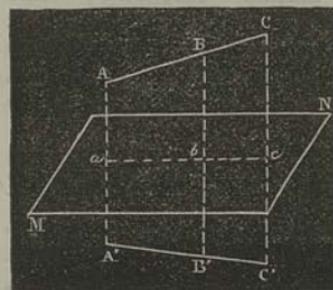


de même,

$$\text{angle } CBO = \text{angle } C'B'O.$$

Mais ABC étant une ligne droite, les points A', B', C' sont dans le plan OABC, et les angles en B sont supplémentaires; donc les angles en B' le sont pareillement, etc.

2° Soient trois points A, B, C situés en ligne droite, et soient A', B', C' leurs symétriques par rapport à un plan MN. Tous ces points sont situés dans un même plan perpendiculaire à MN et coupent celui-ci suivant une droite abc, projection de ABC (263). Il suit de là que les figures ABC, A'B'C' sont symétriques relativement à abc; donc, la première étant une droite la seconde en est pareillement une (341)*.



343. Corollaires. — I. La figure symétrique d'une droite est une droite égale à la première.

II. Deux droites symétriques coupent, en un même point, le plan de symétrie, ou bien elles sont parallèles à ce plan.

* On lit dans le programme officiel : « L'étude de la symétrie par rapport à un point se ramène à celle de la symétrie par rapport à un plan, en imprimant une rotation de 180° à l'une des deux figures autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le centre de symétrie. »

Si nous avons compris cet énoncé, il suppose la proposition suivante :

« Soient deux figures F, F', symétriques par rapport à un centre O; soient XY et P un axe et un plan perpendiculaires entre eux, et passant par le point O. Si l'on construit la figure F'', symétrique de F' relativement à l'axe XY, les figures F, F'' seront symétriques par rapport au plan P. »

Quoi qu'il en soit de cette interprétation, la marche indiquée est, à coup sûr, moins simple que celle que nous avons cru devoir suivre.

inversement disposées; 2^o les angles dièdres égaux, chacun à chacun, mais inversement disposés.

IV. *Le symétrique d'un angle dièdre est un angle dièdre égal au premier.*

346. *Remarque.* — A cause de la propriété exprimée par le dernier corollaire, on désigne d'une manière absolue, sous le nom d'*angles trièdres symétriques*, deux angles trièdres qui ont les faces égales, chacune à chacune, mais inversement disposées (342). On démontre facilement ces deux propositions :

1^o *Tout angle trièdre n'a qu'un seul symétrique;*

2^o *Deux angles trièdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

347. THÉORÈME. — *Deux angles polyèdres, symétriques par rapport à un point ou à un plan, ont les faces symétriques égales, chacune à chacune, et les angles dièdres symétriques égaux, chacun à chacun.*

Ce théorème résulte des nos 343, 344 et 345. D'ailleurs, les deux angles polyèdres ne sont pas égaux; car leurs éléments sont inversement disposés.

D'après cela, on appelle *angles polyèdres symétriques* ceux qui ont les faces égales, chacune à chacune, mais inversement disposées, et les angles dièdres égaux, mais inversement disposés.

348. Corollaires. — I. *Tout angle polyèdre n'a qu'un seul symétrique.*

II. *Deux angles polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

349. THÉORÈME. — *Deux polyèdres, symétriques par rapport à un point ou à un plan, ont: 1^o les arêtes symétriques égales; 2^o les angles plans symétriques égaux; 3^o les faces symétriques égales; 4^o les angles dièdres symétriques égaux. De plus, ces polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres symétriques, chacun à chacun, mais inversement disposés.*

Les quatre premières parties de ce théorème sont démontrées dans les nos 343, 344 et 345. Quant à la dernière partie, elle est évidente.

350. Corollaire. — *Les surfaces de deux polyèdres symétriques sont équivalentes.*

351. A cause du dernier théorème, nous nommerons, d'une manière absolue, *tétraèdres symétriques*, ceux qui ont *trois* faces égales, chacune à chacune, mais inversement disposées; et nous nommerons *polyèdres symétriques*, deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques, chacun à chacun, mais inversement disposés. Il résulte, de cette dernière définition, jointe au Théorème du n° 347, que *deux polyèdres symétriques ont les angles polyèdres symétriques*, chacun à chacun. De plus :

1° *Tout polyèdre n'a qu'un seul symétrique;*

2° *Deux polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

352. THÉORÈME. — *Deux tétraèdres symétriques sont équivalents.*

Prenons pour bases des tétraèdres deux faces égales entre elles et faisons-les coïncider : les sommets des deux tétraèdres seront alors symétriques l'un de l'autre, relativement au plan de la base commune. Les deux tétraèdres auront des hauteurs égales; donc ils ont même mesure.

353. Corollaire. — *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

Résumé.

Deux figures, symétriques par rapport à une droite, sont égales entre elles.

Si trois points sont en ligne droite, leurs symétriques, par rapport à un point ou à un plan, sont en ligne droite.

La figure symétrique d'une droite est une droite égale à la première.

Deux droites symétriques coupent, en un même point, le plan de symétrie, ou bien elles sont parallèles à ce plan.

La figure symétrique d'un triangle est un triangle égal au premier.

La figure symétrique d'un angle est un angle égal au premier.

Si quatre points A, B, C, D sont dans un même plan, leurs symétriques A', B', C', D', par rapport à un point O ou à un plan MN, sont dans un même plan.

Le symétrique d'un plan est un autre plan.

Deux plans symétriques coupent, suivant une même droite, le plan de symétrie, ou bien ils sont parallèles à ce plan.

Deux angles trièdres, symétriques par rapport à un plan ou un point, ont : 1° les faces égales, chacune à chacune, mais inversement disposées ; 2° les angles dièdres égaux, chacun à chacun, mais inversement disposés.

Le symétrique d'un angle dièdre est un angle dièdre égal au premier.

Deux polyèdres, symétriques par rapport à un point ou un plan, ont les faces symétriques égales, chacune à chacune, et les angles dièdres symétriques égaux, chacun à chacun.

Tout angle polyèdre n'a qu'un seul symétrique.

Deux angles polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.

Deux polyèdres, symétriques par rapport à un point ou un plan, ont : 1° les arêtes symétriques égales, 2° les angles plans symétriques égaux ; 3° les faces symétriques égales ; 4° les angles dièdres symétriques égaux. De plus, ces polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres symétriques, chacun à chacun, mais inversement disposés.

Les surfaces de deux polyèdres symétriques sont équivalentes.

Tout polyèdre n'a qu'un seul symétrique.

Deux polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.

Deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

CHAPITRE XVI.

Polyèdres semblables* (354-361). — Cas de similitude de deux pyramides triangulaires (355). — Rapport des surfaces et des volumes (359). — Rapport des volumes de deux polyèdres semblables (360). — Pôle de similitude de deux polyèdres semblables et semblablement placés (358).

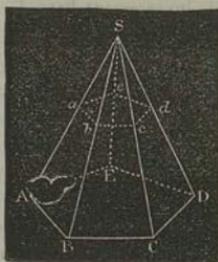
Polyèdres semblables.

354. THÉOREME. — *Tout plan, parallèle à la base d'une pyramide, détermine une pyramide semblable à la première.*

Soit $ASB\dots$ une pyramide quelconque, et soit $Sab\dots$ la pyramide obtenue en coupant la première par un plan parallèle à $ABC\dots$. Les droites ab et AB , bc et BC , \dots , sont parallèles deux à deux, donc, les faces latérales de la seconde pyramide sont respectivement semblables aux faces latérales de la pyra-

* On appelle ainsi ceux qui sont compris sous un même nombre de faces semblables chacun à chacune et dont les angles polyèdres homologues sont égaux. (*Note du Programme.*)

mième donnée. De plus, les deux bases $ABC\dots, abc\dots$, sont semblables (322); et, évidemment, les angles dièdres homologues sont égaux. Par suite, les angles trièdres à la base, dans la pyramide donnée, sont égaux à ceux qui y correspondent dans la seconde pyramide.



Ces deux figures ont donc les faces semblables, chacune à chacune, et les angles polyèdres homologues égaux; donc, d'après la définition, elles sont semblables.

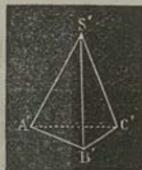
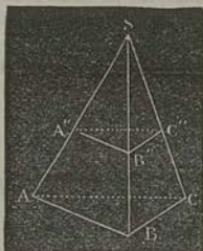
355. THÉORÈME. — Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces semblables, chacune à chacune, et semblablement disposés.

Soient l'angle dièdre $SA = S'A'$, la face ASB semblable à $A'S'B'$, et la face ASC semblable à $A'S'C'$. Je dis que les deux tétraèdres S, S' sont semblables.

Prenons $SA' = S'A'$, $SB' = S'B'$, $SC' = S'C'$: le tétraèdre $SA'B'C'$ sera égal à $S'A'B'C'$ (324).

A cause de cette égalité, et d'après l'hypothèse, nous avons

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'}$$



Par suite, les côtés du triangle $A'B'C'$ sont parallèles, respectivement, à ceux du triangle ABC , et le plan $A'B'C'$ est parallèle à ABC ; donc les tétraèdres $SA'B'C'$, $SABC$ sont semblables.

356. THÉORÈME. — Deux polyèdres semblables peuvent toujours être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.

Pour plus de simplicité, considérons seulement deux polyèdres convexes P, P' . Je dis d'abord que chacune de ces figures est décomposable en tétraèdres ayant un sommet commun.

Prenons dans l'intérieur du polyèdre P un point quelconque O, et menons, de ce point, des droites à tous les sommets. Nous décomposerons ainsi la figure en pyramides ayant un sommet commun, et dont les bases seront les faces du polyèdre. Si nous décomposons ensuite chaque pyramide en tétraèdres, la décomposition indiquée sera faite.

Soient à présent A, B, C, ... les sommets du polyèdre P, et soient A', B', C', ... les sommets de P', homologues des premiers. Si nous prenons, sur les droites OB, OA, OC, ... dont il vient d'être question, des distances Oa, Ob, Oc, ..., telles que nous ayons

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB} = \frac{Oc}{OC} = \dots = \frac{A'B'}{AB};$$

les points a, b, c, ... seront les sommets d'un polyèdre p semblable à P. En effet, ces deux figures sont composées d'un même nombre de pyramides semblables, chacune à chacune (322 et 355); donc elles ont les faces homologues semblables et les angles polyèdres homologues égaux.

La similitude des triangles Oab, OAB donne ensuite

$$\frac{Oa}{OA} = \frac{ab}{AB} = \frac{A'B'}{AB};$$

donc $ab = A'B'$; et de même, $bc = BC$, $cd = CD$, etc. Les deux polyèdres p et P' sont donc tels que leurs arêtes homologues, ou, plus généralement, que toutes leurs droites homologues sont égales; donc ces deux polyèdres sont égaux; donc le polyèdre P' est semblable à P.

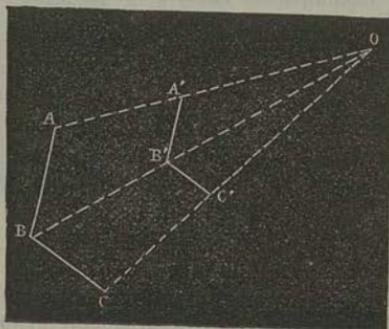
357. *Remarque.* — Les polyèdres semblables P, p sont tels, en outre, que leurs arêtes homologues sont parallèles et dirigées dans le même sens.

Pour cette raison, l'on dit que les deux polyèdres sont *semblables et semblablement placés* *. Le point O, où vont concourir les droites qui joignent les sommets homologues, est le *centre de similitude* ou le *pôle de similitude*. Cette propriété peut être généralisée ainsi qu'il suit.

* Ou *homothétiques*. Cette dénomination a été proposée par M. Chasles.

358. THÉORÈME. — Deux polyèdres, semblables et semblablement placés, ont un centre de similitude.

AB, A'B' étant deux arêtes homologues, c'est-à-dire parallèles, soit O le point de concours des droites AA', BB'.



On a, par la théorie des lignes proportionnelles :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{O'B'}$$

d'où

$$\frac{AB - A'B'}{AB} = \frac{BB'}{OB}. \quad (1)$$

Soient ensuite BC, B'C' deux nouvelles arêtes homologues, contiguës aux premières, et CC' la droite qui joint leurs extrémités C, C' : je dis que CC' passe par le point O.

En effet, O' étant le point où CC' rencontre BB', on aura, de la même manière que ci-dessus,

$$\frac{BC - B'C'}{BC} = \frac{BB'}{O'B'}. \quad (2)$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'};$$

d'où résulte

$$\frac{AB - A'B'}{AB} = \frac{BC - B'C'}{BC}. \quad (3)$$

Les proportions (1), (2) ont donc un rapport commun ; et, conséquemment,

$$\frac{BB'}{OB} = \frac{BB'}{O'B'}$$

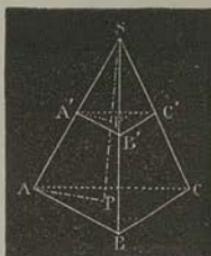
ou

$$OB = O'B.$$

Ainsi, le point O' se confond avec le point B . C'est ce qu'il fallait démontrer*.

359. THÉORÈME. — *Deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Supposons que le plus petit tétraèdre $SA'B'C'$ ait été transporté dans l'intérieur du plus grand $SABC$, de manière que ces deux figures aient, en commun, l'angle trièdre S : le plan $A'B'C'$ sera parallèle à ABC . Du point S , menons $SP'P$ perpendiculaire à ces deux plans, et soient P', P les points où elle les rencontre. Menons $A'P'$ et AP : ces droites sont parallèles. Nous aurons donc, dans les deux triangles semblables, $SA'P'$, SAP ,



$$\frac{SP'}{SP} = \frac{SA'}{SA}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SA'}{SA}\right)^2;$$

donc

$$\frac{A'B'C'}{ABC} \cdot \frac{SP'}{SP} = \left(\frac{SA'}{SA}\right)^3.$$

Le premier membre de cette égalité est égal au rapport des volumes des deux tétraèdres (338) ; le théorème est donc démontré.

360. Corollaire. — *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de deux arêtes homologues quelconques.*

* Voir, pour les propriétés des centres de similitude, les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*.

361. THÉOREME. — *Les surfaces de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

Deux faces homologues sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues (223); dont il en est de même pour les sommes des faces des deux polyèdres.

- Applications numériques.

362. PREMIER PROBLÈME. — *Quelle est l'arête d'un cube équivalent à un parallépipède rectangle dont les dimensions seraient : $a = 2^m, 23$, $b = 0^m, 64$, $c = 0^m, 55$?*

x étant la longueur cherchée, on doit avoir (330) $x^3 = abc$, ou $x^3 = 2,23 \cdot 0,64 \cdot 0,55$; d'où

$$x = \sqrt[3]{2,23 \cdot 0,64 \cdot 0,55}.$$

En opérant par logarithmes, on aura :

$$\log x = \frac{1}{3} (\log 2,23 + \log 0,64 + \log 0,55).$$

$$\log 2,23 = 0,3483049 +$$

$$\log 0,64 = \overline{1,8061800} +$$

$$\log 0,55 = \overline{1,7403627} +$$

$$\hline 1,8948476$$

$$\frac{1}{3} = 1,9649492 = \log x,$$

$$x = 0,922\ 464.$$

Ainsi, l'arête du cube serait, à fort peu près, $0^m, 922$.

363. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Trouver l'aire de la surface convexe, et le volume d'une pyramide hexagonale régulière dans laquelle le rayon R de la base égale 17 millimètres, et la hauteur H égale 63 millimètres.*

Représentons par a l'apothème de la base; par h la hauteur de chacun des triangles isocèles égaux qui forment la surface latérale de la pyramide; par B l'aire de la base; enfin par A et V l'aire et le volume cherchés.

La hauteur H de la pyramide, l'apothème a et la hauteur h sont les petits côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Donc

$$h = \sqrt{H^2 + a^2}.$$

Mais (185) $a = \frac{1}{2} R \sqrt{3}$; donc

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{3}{4} R^2}.$$

Par suite, $A = 3 R \sqrt{H^2 + \frac{3}{4} R^2}$. (1)

En second lieu, $V = \frac{1}{3} BH$ (338), $B = 3R$, $\frac{1}{2} R \sqrt{3} = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$;

donc $V = RH \cdot \frac{1}{2} R \sqrt{3}$. (2)

Pour réduire ces deux formules en nombres, nous commencerons par calculer H^2 et $\frac{3}{4} R^2$.

$$H^2 = 63^2 = 3\,969; \quad R^2 = 17^2 = 289;$$

$$\frac{3}{4} R^2 = \frac{867}{4} = 216,75.$$

$$H^2 + \frac{3}{4} R^2 = 4\,185,75.$$

$$\log 4185,75 = 3,6247733$$

$$\frac{1}{2} = 1,8108866 +$$

$$\log 3 R = \log 51 = 1,7073702 +$$

$$\log A = 3,5184568$$

$$A = 3\,299,53.$$

La surface convexe de la pyramide serait donc équivalente à 3 299,53 millimètres carrés, ou, environ, à 33 centimètres carrés.

Nous avons trouvé $\frac{3}{4} R^2 = 216,75$; donc

$$\frac{1}{2} R \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \sqrt{216,75}.$$

$$\log 216,75 = 2,3359591$$

$$\frac{1}{2} = 1,1679793 +$$

$$\log R = \log 17 = 1,2304489 +$$

$$\log H = \log 63 = 1,7993406 +$$

$$\log V = 4,1977690$$

$$V = 15\,767,7.$$

Ainsi le volume demandé égale 15 767,7 millimètres cubes.

364. TROISIÈME PROBLÈME. — *Trouver, d'après les données suivantes, le volume d'un polyèdre ABCD'A'B'C'D' ayant pour faces deux rectangles ABCD, A'B'C'D', et quatre trapèzes, ABA'B', BCB'C', CDC'D', DAD'A' :*

$$AB = a = 2^m,50,$$

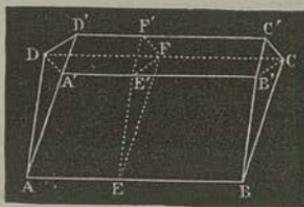
$$BC = b = 4^m,50,$$

$$A'B' = a' = 4^m,50,$$

$$B'C' = b' = 0^m,50,$$

$$\text{hauteur} = h = 0^m,50^2.$$

Si l'on imagine le plan mené par les deux arêtes opposées



A'B', CD, il décompose le polyèdre en deux prismes triangulaires tronqués B'CC'A'DD', BB'CAA'D. Pour mesurer chacun d'eux, menons un plan EEF' perpendiculaire à AB; son intersection E'F' avec A'B'CD déterminera les sections droites EE'F, E'F'F de nos deux troncs de prismes.

Cela posé, le théorème sur la mesure du prisme triangulaire tronqué** donne :

$$\begin{aligned} \text{vol. B'CC'A'DD'} &= E'FF' \cdot \frac{1}{3} (A'B' + C'D' + CD), \\ \text{vol. BB'CAA'D} &= EE'F \cdot \frac{1}{3} (AB + CD + AB'); \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{vol. B'CC'A'DD'} &= E'FF' \cdot \frac{1}{3} (2a' + a), \\ \text{vol. BB'CAA'D} &= EE'F \cdot \frac{1}{3} (2a + a'). \end{aligned}$$

Les deux triangles E'FF', EE'F, dans lesquels se décompose e trapèze EFE'F', ont évidemment pour hauteur h ; donc

$$E'FF' = \frac{1}{2} b' h, \quad EE'F = \frac{1}{2} b h;$$

puis

$$\begin{aligned} \text{vol. B'CC'A'DD'} &= \frac{1}{6} b' (2a' + a) h, \\ \text{vol. BB'CAA'D} &= \frac{1}{6} b (2a + a') h. \end{aligned}$$

* Cette forme et ces dimensions sont celles des tas de pierres que les cantonniers disposent le long des routes.

** *Éléments de Géométrie*, livre VII.

Ajoutant ces deux expressions, nous aurons la formule cherchée :

$$V = \frac{1}{6} [(2a + a')b + (2a' + a)b']h.$$

Dans l'exemple proposé,

$$V = \frac{1}{6} [6,5 \cdot 4,5 + 5,5 \cdot 0,5] 0,5 = 1^{\text{m}}, 041.$$

365. QUATRIÈME PROBLÈME. — On raconte que Sessa, l'inventeur du jeu des échecs, sollicita, comme récompense, 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la soixante-quatrième case. On demande quelles seraient les dimensions d'un tétraèdre régulier creux, capable de renfermer tous ces grains de blé, sachant que l'hectolitre de blé contient, moyennement, un million cinq cent quatre-vingt-sept mille grains.

Le nombre N des grains de blé demandés par Sessa est égal à la somme des termes de la progression

$$1, 2, 4, 8, \dots, 2^{63}.$$

D'après la formule connue (*Algèbre*, 464),

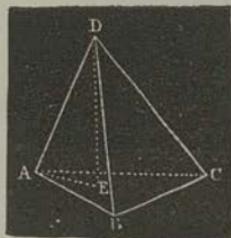
$$N = 2^{64} - 1.$$

En faisant le calcul, on trouve

$$N = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Un mètre cube équivaut à 10 hectolitres; si donc nous divisons N par 1 587 000 . 10, nous aurons, en mètres cubes, le volume V du tétraèdre; savoir :

$$V = \frac{18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615}{15\ 870\ 000}.$$



Soit actuellement c l'arête d'un tétraèdre régulier ABCD.

La hauteur DE passe par le centre du triangle équilatéral ABC, et la droite AE est le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle.

Or,

$$R = \frac{c}{\sqrt{3}};$$

donc

$$DE = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = c \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'un autre côté, l'apothème du triangle serait (188)

$$\frac{1}{2}R = \frac{c}{2\sqrt{3}}.$$

Il résulte, de ces diverses valeurs, que le volume du tétraèdre a pour expression

$$V = 3c \cdot \frac{c}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{3} \sqrt{\frac{2}{3}};$$

ou, plus simplement,

$$V = \frac{1}{12} c^3 \sqrt{2}.$$

Si nous égalons cette valeur de V à celle que nous avons obtenue ci-dessus, nous trouverons, en supprimant le facteur commun 12,

$$c = \sqrt[3]{\frac{48\ 446\dots}{1\ 322\ 500\sqrt{2}}},$$

ou, à fort peu près,

$$c = \sqrt[3]{\frac{2^{64}}{4\ 322\ 500\sqrt{2}}}.$$

Le calcul logarithmique donne ensuite :

$$\begin{array}{r} \log 2 = 0,30103000 \\ 64 \log 2 = 19,2659200 + \\ \log 4322500 = 6,1213957 - \\ \frac{1}{2} \log 2 = 0,1505150 - \\ \hline 12,9940093 \\ \frac{1}{3} = \log c = 4,3313364 \\ c = 21\ 445. \end{array}$$

Ainsi la pyramide triangulaire régulière capable de renfermer tout le blé demandé par l'inventeur du jeu des échecs, aurait pour arête 21 445 mètres !

366. CINQUIÈME PROBLÈME. — *L'une des arêtes d'un polyèdre égale 0^m,37. A quoi est égale l'arête homologue d'un polyèdre semblable au premier, et double de celui-ci ?*

x étant cette arête, exprimée en mètres, on a (360)

$$\left(\frac{x}{0,37}\right)^3 = 2;$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= 0,37\sqrt[3]{2}. \\ \log 2 &= 0,3010300 \\ \frac{1}{3} &= 0,1003433 + \\ \log 0,37 &= \overline{1},5682017 + \\ \log x &= \overline{1},6685450 \\ x &= 0,46647. \end{aligned}$$

L'arête du second polyèdre serait donc à peu près égale à 0^m,466.

367. SIXIÈME PROBLÈME. — *On donne une suite indéfinie de cubes dont les arêtes décroissent comme les termes de la progression*

$$1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots$$

L'arête du plus grand est égale à 1^m. A quoi serait égale l'arête d'un cube équivalent à la limite de leur somme ?

Si l'on prend le mètre pour unité, et que l'on représente par x la longueur cherchée, on a

$$x^3 = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots$$

La limite de

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} \text{ (Algebre, 169);}$$

donc

$$x^3 = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{27}{19};$$

puis

$$x = \sqrt[3]{\frac{27}{19}}$$

$$\log 27 = 4,4313638 +$$

$$\log 19 = 1,2787536 -$$

$$0,1526102$$

$$\frac{1}{3} = 0,0508701$$

$$x = 1,1241.$$

Le cube cherché a donc pour côté

$$1^m,1241.$$

368. SEPTIÈME PROBLÈME. — On donne un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur $H = 0^m,67$, et dans lequel les côtés homologues des bases sont comme 13 est à 17. On demande de partager ce corps en deux segments équivalents, au moyen d'un plan parallèle aux deux bases.

Prolongeons les faces latérales du tronc, de manière à reconstruire les pyramides dont il est la différence. Appelons h la hauteur inconnue de la plus petite des deux; alors $H + h$ sera la hauteur de la plus grande. En même temps, soient x, y les segments de H , déterminés par le plan sécant, et z le nombre proportionnel au côté de la section faite par ce plan, homologue aux côtés considérés dans les deux bases. Enfin, soient V, v et V' les volumes respectifs de la grande pyramide, de la petite pyramide et de la pyramide moyenne. Nous aurons d'abord

$$V - V' = V' - v,$$

ou

$$V' = \frac{V + v}{2}.$$

D'ailleurs, les trois pyramides sont semblables; donc

$$\frac{v}{13^3} = \frac{V'}{z^3} = \frac{V}{17^3}.$$

On conclut, de cette égalité de rapports, et de l'équation précédente,

$$z^3 = \frac{13^3 + 17^3}{2},$$

d'où

$$z = \sqrt{\frac{13^3 + 17^3}{2}} = \sqrt[3]{3\ 555}.$$

A cause de la similitude des trois pyramides, les hauteurs sont proportionnelles aux côtés homologues des bases ; ainsi

$$\frac{17}{H+h} = \frac{z}{H+h-x} = \frac{13}{h}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{17-z}{x} = \frac{z-13}{y},$$

ou

$$\frac{17 - \sqrt[3]{3\ 555}}{x} = \frac{\sqrt[3]{3\ 555} - 13}{y} = \frac{4}{H}.$$

Les deux segments de la hauteur sont donc enfin

$$x = \frac{0,67(17 - \sqrt[3]{3\ 555})}{4}, \quad y = \frac{0,67(\sqrt[3]{3\ 555} - 13)}{4}.$$

$$\log 3\ 555 = 3,550\ 8396$$

$$\frac{1}{3} = 1,483\ 6132$$

$$\sqrt[3]{3\ 555} = 15,262\ 0.$$

$$17 - \sqrt[3]{3\ 555} = 1,738\ 0, \quad \sqrt[3]{3\ 555} - 13 = 2,262\ 0.$$

$$\log 0,67 = \bar{1},8260748 +$$

$$\log 1,7380 = 0,2400498 +$$

$$\log 4 = 0,6020600 -$$

$$\log x = \bar{1},4640646$$

$$x = 0^m,291\ 11.$$

$$\log 0,67 = \bar{1},8260748 +$$

$$\log 2,2620 = 0,3544926 +$$

$$\log 4 = 0,6020600 -$$

$$\log y = \bar{1},5785074$$

$$y = 0^m,378\ 88.$$

Résumé.

Tout plan, parallèle à la base d'une pyramide, détermine une pyramide semblable à la première.

Deux tétraèdres sont semblables lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées.

Deux polyèdres semblables peuvent toujours être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

Deux polyèdres, semblables et semblablement placés, ont un centre de similitude.

Deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes de leurs arêtes homologues.

Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes de deux arêtes homologues quelconques.

Les surfaces de deux polyèdres semblables sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues quelconques.

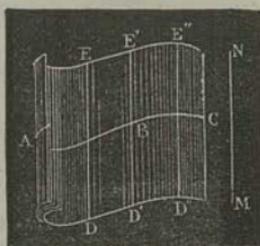
 CHAPITRE XVII.

Les corps ronds (369-414)*. — Cylindre droit à base circulaire (369, 370). — Mesure de la surface latérale et du volume (378-382). — Extension aux cylindres droits à base quelconque (379, 380). — Cône droit à base circulaire (371, 372). — Sections parallèles à la base (383). — Surface latérale du cône, du tronc de cône à bases parallèles (383-385). — Volume du cône, du tronc de cône à bases parallèles (386-389).

Génération des surfaces.

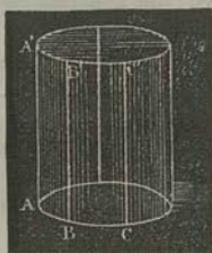
369. *Surfaces cylindriques.* — Si une droite DE se meut en s'appuyant constamment sur une ligne fixe ABC, et en restant parallèle à une droite donnée MN, le lieu de ses positions est une *surface cylindrique*.

* Il s'agit du cylindre, du cône et de la sphère, que l'on désignait, autrefois, sous le nom de *corps ronds*. (Note de l'auteur.)

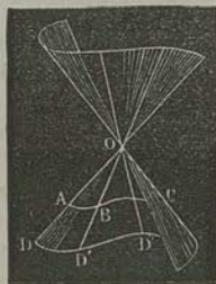


La droite mobile, qui engendre la surface cylindrique, se nomme *génératrice* : ainsi DE, D'E', D'E'',... sont différentes positions de la génératrice. La ligne fixe ABC, qui règle le mouvement de la génératrice, est appelée *directrice*.

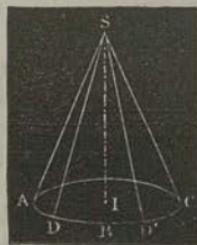
Si cette directrice est rectiligne, la surface cylindrique devient un plan.



370. Prenons pour directrice une circonférence de cercle ABC, et pour génératrice une perpendiculaire au plan de cette circonférence ; supposons aussi que la surface cylindrique soit terminée au plan ABC et à un plan A'B'C' parallèle au premier : le corps terminé par ces deux plans et par la surface cylindrique est un *cylindre droit, à base circulaire*.



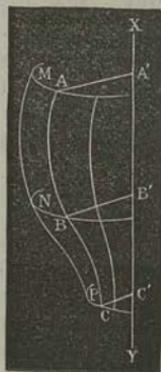
371. *Surfaces coniques*. — Une surface *conique* est engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur une ligne fixe ABC, et à passer par un point fixe O. Chaque génératrice DO, D'O',... pouvant être prolongée indéfiniment, de part et d'autre du point O, on voit que la surface est formée de deux parties ou *nappes*. Le *point directeur* O, où ces nappes se réunissent, est appelé *centre* de la surface.



372. Choisissons, pour directrice de la surface conique, une circonférence ABC ; plaçons le point directeur sur l'axe IS de la circonférence : le corps limité par le plan ABC et par la nappe inférieure de la surface conique, est un *cône droit, à base circulaire*.

Le point S est le *sommet*, et les droites SD, SD',... sont les *généralrices* ou les *arêtes* du cône.

373. *Surface de révolution.* — Soient une droite fixe XY , et une ligne quelconque ABC . Menons, de différents points A, B, C de cette ligne, des perpendiculaires AA', BB', CC', \dots sur XY . Si nous faisons tourner le système $AA'BB'CC' \dots$ autour de XY , chacun des points de la ligne ABC décrit une circonférence ayant son centre sur XY , et dont le plan est perpendiculaire à cette droite; et la ligne ABC engendre une *surface de révolution*.



Les circonférences décrites par les différents points de la génératrice ABC sont appelées *parallèles* de la surface, parce que leurs plans sont parallèles entre eux.

La section MNP , faite par un plan passant suivant l'axe de rotation XY , est un *méridien*.

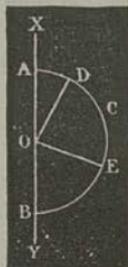
Il est facile de s'assurer que tous les méridiens sont égaux entre eux.

374. Supposons que le rectangle $ABCD$ tourne autour de son côté CD , supposé fixe. Les droites égales AD, BC engendreront des cercles égaux et parallèles. La droite AB engendrera une surface de révolution; mais comme cette droite est toujours parallèle à XY , il s'ensuit que la surface est cylindrique, et que le corps engendré par $ABCD$ est le cylindre droit, à base circulaire. De là, cette définition, adoptée dans les *Éléments*: *Le cylindre droit, à base circulaire, est le corps engendré par un rectangle tournant autour d'un de ses côtés, supposé fixe.*



375. De même, si nous prenons pour génératrice l'hypoténuse CB d'un triangle rectangle tournant autour de son côté CA , la surface de révolution deviendra la surface du cône droit, à base circulaire. Donc, *le cône droit, à base circulaire, est le corps engendré par un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit, supposé fixe.*

376. Enfin adoptons, pour génératrice de la surface de révolution, la demi-circonférence ACB, et supposons que l'axe de rotation soit le diamètre AB. Le lieu engendré par ACB est une *surface sphérique*, et le corps terminé à cette surface s'appelle *sphère*.



On donne aussi le nom de *sphère* à la surface sphérique.

Comme, dans le mouvement de la génératrice, les rayons OD, OE restent égaux entre eux, on peut adopter la définition suivante : *La sphère est une surface dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur, appelé centre.*

Aire d'une surface courbe. Volume du corps terminé
par cette surface.

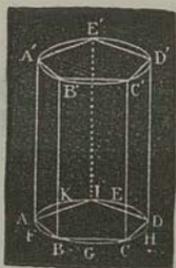
377. Soit une surface fermée S, convexe pour plus de simplicité. Inscrivons à cette surface un polyèdre convexe P, et soit A l'aire de ce polyèdre. Inscrivons ensuite un polyèdre convexe P', dont toutes les arêtes soient moindres que celles de P, et tel, en outre, que les sommets de P coïncident avec des sommets appartenant à P'. Continuons ainsi indéfiniment. Nous obtiendrons une suite de polyèdres P, P', P'', ..., dont les arêtes et les faces seront de plus en plus petites, et dont les aires A, A', A'', ..., augmenteront de plus en plus. On peut démontrer que ces aires tendent vers une certaine limite : cette limite est ce que nous nommons *aire* de la surface S.

De même, les volumes V, V', V'', ..., des polyèdres successifs, tendent vers une certaine limite, appelée *volume* du corps terminé par la surface S.

Mesure du cylindre.

378. THÉORÈME. — *La surface latérale d'un cylindre a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la hauteur.*

Inscrivons, à la base AD du cylindre, un polygone quelconque ABCDEF; puis prenons ce polygone pour base inférieure d'un prisme droit, dont la surface latérale rencontre celle du cylindre suivant les arêtes AA', BB', CC', ..., et dont la base supérieure est A'B'C'D'E'F'.



La surface latérale du prisme se compose d'une série de rectangles qui ont même hauteur que le prisme, et dont les bases sont les côtés de la base du prisme. Donc cette surface prismatique a pour mesure

$$(AB + BC + CD + \dots) \cdot AA';$$

c'est-à-dire le *périmètre de la base, multiplié par la hauteur.*

Cela étant, si nous doublons le nombre des côtés de la base du prisme, en prenant les points G, H, ..., intermédiaires entre A et B, entre B et C, etc., nous obtiendrons un second prisme, inscrit au cylindre, et dont la surface totale, en y comprenant les deux bases, sera plus grande que celle du premier prisme. En continuant de la sorte, nous verrons que les aires des prismes successifs ont une limite, laquelle, d'après le principe précédent, est l'aire de la surface *totale* du cylindre. Mais la limite de chaque base du prisme est la base correspondante du cylindre; donc

$$\begin{aligned} \text{Surface latérale du cylindre} &= \text{lim. périm. } ABCD, \dots \cdot AA', \\ &= \text{circonfér. } AD \cdot AA'. \end{aligned}$$

379. *Remarque.*—Dans cette démonstration, rien ne suppose que le cylindre soit à base circulaire : ainsi le théorème est vrai pour un cylindre droit à base quelconque; et, en général,

La surface latérale d'un cylindre droit a pour mesure le périmètre de la base, multiplié par la hauteur.

380. *Scolie.* — Le cylindre étant droit, à base circulaire, soient R le rayon de cette base, H la hauteur du cylindre, et A l'aire de sa surface latérale; on aura

$$A = 2\pi RH.$$

381. **THÉORÈME.** — *Tout cylindre droit a pour mesure l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur.*

En effet, le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes inscrits.

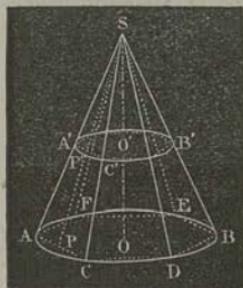
382. *Scolie.* — Le cylindre étant droit, à base circulaire, soient R le rayon de cette base, H la hauteur du cylindre, et V son volume; on aura

$$V = \pi R^2 H.$$

Mesure du cône.

383. THÉORÈME. — *La surface latérale d'un cône droit, à base circulaire, a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la moitié de la génératrice du cône.*

A la circonférence AB, inscrivons un polygone régulier ACDBEF, et prenons ce polygone pour base d'une pyramide régulière dont la surface latérale rencontre la surface du cône suivant les génératrices SA, SC,...



La surface latérale de la pyramide se compose d'une série de triangles isocèles égaux; donc, en abaissant l'apothème SP perpendiculaire sur AC, nous aurons, pour la mesure de cette surface,

$$(AC + CD + DB + \dots) \cdot \frac{1}{2} SP.$$

Ainsi, la surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le périmètre de la base, multiplié par la moitié de l'apothème de la pyramide.

Cela étant, si nous doublons le nombre des côtés du polygone, et si nous continuons indéfiniment cette opération, nous aurons pour limite des aires des pyramides, en y comprenant les bases, l'aire de la surface conique, augmentée de l'aire du cercle AB. Mais la limite des aires des polygones tels que ACDB... est l'aire du cercle; donc

$$\begin{aligned} \text{Surface latérale du cône} &= \text{lim. périm. ADB} \cdot \frac{1}{2} SP, \\ &= \text{circonfér. AB} \cdot \frac{1}{2} SA. \end{aligned}$$

384. *Scolie.* — Soient R le rayon de la base, G la génératrice, et A l'aire de la surface latérale d'un cône droit à base circulaire; on a

$$A = \pi R G.$$

385. *La surface latérale d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, a pour mesure la demi-somme des circonférences des bases, multipliée par le côté AA' du tronc.*

Si l'on inscrit au tronc de cône ABA'B' un tronc de pyramide régulière, la surface latérale de ce polyèdre sera composée d'une série de trapèzes égaux; donc la surface latérale du tronc de pyramide a pour mesure la demi-somme des périmètres des deux bases, multipliée par l'apothème PP'. *Passant à la limite*, comme dans les théorèmes précédents, on trouve la mesure indiquée.

386. THÉORÈME. — *Tout cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

On démontre ce théorème en partant de l'expression du volume de la pyramide, et en appliquant la méthode précédente.

387. *Scolie.* — Soient R le rayon de la base, H la hauteur, et V le volume d'un cône de révolution; on a

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

388. THÉORÈME. — *Un tronc de cône, à bases parallèles, est équivalent à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc, et ayant pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure et une moyenne proportionnelle entre les deux bases. (Voy. n° 339.)*

389. *Scolie.* — Soit H la hauteur d'un tronc de cône droit, à bases circulaires; soient R, r les rayons des bases, et V le volume :

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) H.$$

Résumé.

La surface latérale d'un cylindre a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la hauteur.

Tout cylindre droit a pour mesure l'aire de sa base, multipliée par sa hauteur.

La surface latérale d'un cône droit, à base circulaire, a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la moitié de la génératrice du cône.

La surface latérale d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, a pour mesure la demi-somme des circonférences des bases, multipliée par le côté du tronc.

Tout cône a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Un tronc de cône, à bases parallèles, est équivalent à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune celle du tronc, et ayant pour bases respectives la base inférieure du tronc, sa base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.

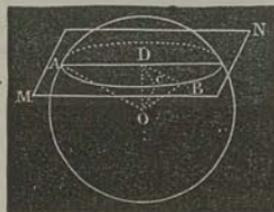
CHAPITRE XVIII.

Sphère (390-414). — Sections planes; grands cercles; petits cercles (391-395). — Pôles d'un cercle (396-399). — Étant donnée une sphère, trouver son rayon par une construction plane (400). — Plan tangent (401). — Angle de deux arcs de grands cercles (402-404). — Notions sur les triangles sphériques: leur analogie parfaite avec les angles trièdres (405-407).

Cercles de la sphère.

390. THÉORÈME. — *Toute section faite dans une sphère, par un plan, est un cercle.*

Soit ACB la courbe suivant laquelle le plan MN coupe la surface sphérique. Abaissons, du centre de la sphère, la perpendiculaire OD sur MN , et menons les rayons AO , BO , CO , dont les projections, sur le plan sécant, sont AD , BD , CD .



D'après la définition, les obliques AO , BO , CO sont égales; donc leurs projections AD , BD , CD ,... , sont égales; donc la courbe ABC est une circonférence.

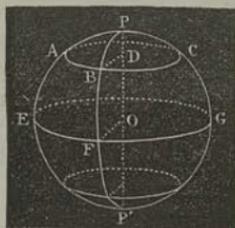
391. Remarque. — La projection AD du rayon AO devient égale à ce rayon lorsque le plan MN passe par le centre. Le cercle ABC est alors le plus grand possible. C'est pour cette raison que l'on appelle *grand cercle* de la sphère la section faite par un plan passant par le centre. Cela posé, on déduit, du théorème qui précède, les corollaires suivants :

392. 4^e Corollaire. — *Tous les grands cercles sont égaux entre eux.*

393. 2^e Corollaire. — *Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales.*

394. 3^e Corollaire. — *Tout grand cercle partage la sphère et sa surface, chacune en deux parties égales.*

395. 4^e Corollaire. — *Le centre d'un petit cercle, et celui de la sphère, sont sur un même diamètre perpendiculaire au plan du petit cercle.*



396. Remarque. — D'après le dernier corollaire, si l'on joint le centre de la sphère et le centre D d'un petit cercle ABC, par un diamètre POP', ce diamètre sera l'axe du petit cercle. Donc, chacune de ses extrémités P, P' est également éloignée de tous les points de la circonférence ABC. Cela étant, les points P, P' sont appelés *pôles* de cette circonférence. Ainsi,

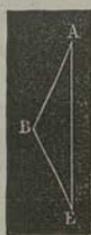
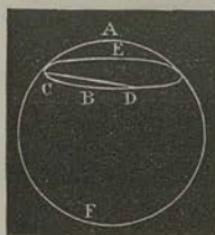
397. *Le pôle d'un cercle de la sphère est l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle. Tout cercle, tracé sur la sphère, a deux pôles.*

398. Si, par l'axe PP', nous faisons passer plusieurs circonférences PAP', PBP', PCP', ..., tous les arcs PA, PB, PC, ..., seront égaux entre eux, comme sous-tendus par des cordes égales. Il suit de là que si l'on place en P l'une des pointes d'un compas, et qu'avec une ouverture égale à la corde PA, on trace une courbe sur la sphère, cette ligne est une circonférence, ayant pour pôle le point P. On voit donc que sur la sphère, comme sur un plan, on peut facilement tracer des circonférences.

399. Si l'on veut, du point P comme pôle, décrire une circonférence de grand cercle EFG, on doit prendre une ouverture de compas égale à la diagonale du carré construit sur PO comme côté; ou, ce qui revient au même, il faut que l'arc PE, compté sur un grand cercle perpendiculaire à EFG, soit un quadrans.

400. PROBLÈME. — *Trouver le rayon d'une sphère solide donnée.*

D'un point A, comme pôle, décrivons une circonférence CDE; prenons sur cette ligne deux arcs BC, BD égaux entre eux; des points C, D, comme pôles, avec une même ouverture de compas, plus grande que BC, décrivons deux arcs qui se coupent en un point F. Les trois points A, B, F sont situés dans un plan



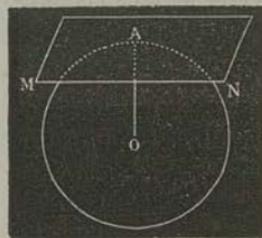
perpendiculaire au milieu de la corde CD (260); ils appartiennent donc à une circonférence de grand cercle.

Si donc, avec les distances rectilignes AB, BF, AF, nous construisons un triangle ABF, le rayon du cercle circonscrit à ce triangle sera le rayon de la sphère donnée.

Plan tangent.

401. THÉORÈME. — *Tout plan, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangent à la sphère.*

Soit le plan MN perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA; je dis que ce plan n'a que le point A de commun avec la sphère, c'est-à-dire qu'il y est tangent en A.



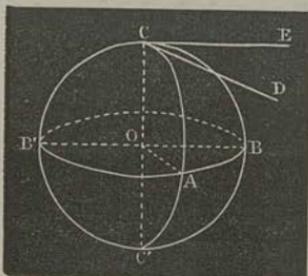
Menons, par OA, un plan quelconque; il coupe la sphère suivant une circonférence de grand cercle, et il coupe le plan suivant une droite perpendiculaire au rayon: cette droite est tangente, en A, à la circonférence; donc, etc.

Angle de deux arcs de grands cercles.

402. On appelle *angle* de deux arcs de grands cercles, l'angle formé par les tangentes à ces arcs, menées par leur point de rencontre. Ce point est le *sommet* de l'angle, et les arcs en sont les *côtés*.

403. THÉORÈME. — *L'angle de deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme pôle.*

Soient les arcs de grands cercles CAC' , CBC' , se coupant en C , C' ; aux extrémités du diamètre CC' . Menons les tangentes CD , CE ; menons aussi, par le centre de la sphère, un plan perpendiculaire à CC' , et soit BAB' la section faite dans la sphère par ce plan. L'angle ECD est égal à l'angle BOA des deux rayons (287); mais celui-ci a pour mesure l'arc AB , lequel peut être considéré comme décrit du point C ; donc, etc.

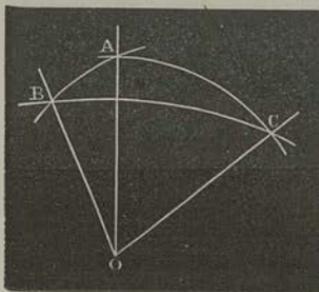


404. Remarque. — *L'angle dièdre formé par les plans des grands cercles CAC' , CBC' a pour mesure l'angle formé par les arcs de ces grands cercles.*

Triangles sphériques.

405. Un *triangle sphérique* est une partie de la surface de la sphère, terminée par trois arcs de grands cercles. De même, un *polygone sphérique* est la partie de cette surface comprise entre plusieurs arcs de grands cercles.

406. Soit un triangle sphérique ABC . Menons, du centre de la sphère, les droites OA , OB , OC . Elles déterminent un angle trièdre O ayant, avec le triangle sphérique, une relation



bien remarquable. En effet, la face AOB , par exemple, a pour mesure l'arc AB , c'est-à-dire le *côté* AB du triangle sphérique. De plus, ainsi qu'on vient de le voir, l'angle dièdre dont l'arête est OA a pour mesure l'angle A du triangle sphérique. Ainsi, à tout *triangle sphérique* correspond un *angle trièdre*, dont les faces ont pour mesures les côtés cor-

respondants du triangle, et dont les angles dièdres ont pour mesures les angles correspondants du triangle.

De même, à tout polygone sphérique correspond un angle polyèdre.

407. D'après cela, à tout théorème sur l'angle trièdre répond un théorème sur le triangle sphérique. Inversement, les problèmes relatifs à l'angle trièdre peuvent être résolus au moyen de la *Trigonométrie sphérique*.

Résumé.

Toute section faite dans une sphère, par un plan, est un cercle.

Tous les grands cercles sont égaux entre eux.

Deux grands cercles se coupent toujours en deux parties égales.

Tout grand cercle partage la sphère et sa surface, chacune en deux parties égales.

Le centre d'un petit cercle, et celui de la sphère, sont sur un même diamètre perpendiculaire au plan du petit cercle.

Le pôle d'un cercle de la sphère est l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout cercle, tracé sur la sphère, a deux pôles.

Tout plan, perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon, est tangent à la sphère.

L'angle de deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme pôle.

L'angle dièdre formé par les plans de deux grands cercles a pour mesure l'angle formé par les arcs de ces grands cercles.

A tout triangle sphérique correspond un angle trièdre, dont les faces ont pour mesures les côtés correspondants du triangle, et dont les angles dièdres ont pour mesures les angles correspondants du triangle.

CHAPITRE XIX.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre (408-410). — Aire de la zone, de la sphère entière (411-414). — Exercices (421-425). — Mesure du volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets (415). — Application au secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe mené dans son plan et par son centre (416). — Volume du secteur sphérique, de la sphère entière, du segment sphérique (417-420). — Exercices (421-425). — Volume approché d'un solide limité par une surface quelconque*.

Mesure de la surface engendrée par une ligne brisée régulière.

408. Lemme. — La surface engendrée par une droite AB, tournant autour d'un axe XY située dans un même plan avec AB, a pour mesure la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire CD, élevée au milieu de la génératrice et prolongée jusqu'à l'axe, multipliée par la projection A'B' de cette génératrice sur l'axe.



Cette proposition est évidente lorsque la droite génératrice est parallèle à l'axe, car alors la surface engendrée est cylindrique.

Supposons donc que AB prolongée rencontre XY, auquel cas la surface est celle d'un tronc de cône. Menons CE perpendiculaire à XY et AF parallèle à cette droite. Nous avons trouvé ci-dessus (385),

$$\text{surf. AB} = \pi (AA' + BB') \cdot AB = 2\pi CE \cdot AB.$$

Or, les triangles rectangles ABF, CDE, ayant les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont semblables et donnent

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AF}{CE},$$

ou

$$CD \cdot AF = CE \cdot AB;$$

* Cette question ne peut être résolue sans le secours du Calcul intégral. (Note de l'auteur.)

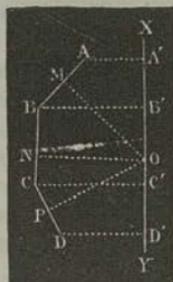
donc, à cause de $AF = A'B'$,

$$\text{surf. } AB = 2 \pi CD \cdot A'B'.$$

Il est clair que cette proposition est également vraie lorsque l'une des extrémités de AD se trouve sur l'axe.

409. THÉORÈME. — *La surface engendrée par une ligne brisée régulière ABCD, tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par la projection de la génératrice sur l'axe.*

On appelle *ligne brisée régulière* celle qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Il est évident qu'une pareille ligne est circonscriptible à une circonférence.



Cela posé, soit O le centre de la ligne brisée, c'est-à-dire le centre de la circonférence inscrite. Menons les apothèmes égaux OM, ON, OP, et projetons les sommets A, B, C, D en A', B', C', D' sur XY.

La surface engendrée par ABCD se compose des surfaces engendrées par AB, BC, CD; donc, par le lemme précédent,

$$\text{surf. } ABCD = 2 \pi OM \cdot A'B' + 2 \pi ON \cdot B'C' + 2 \pi OP \cdot C'D',$$

ou

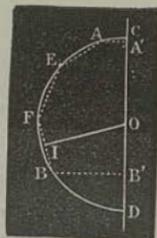
$$\text{surf. } ABCD = 2 \pi OM (A'B' + B'C' + C'D').$$

410. Corollaire. — *La surface engendrée par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un diamètre du cercle circonscrit, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.*

Aire de la sphère.

411. THÉORÈME. — *L'aire d'une zone ou d'une calotte sphérique est égale à la circonférence d'un grand cercle, multipliée par la hauteur de la zone ou de la calotte.*

Une *zone* est la partie de la surface de la sphère terminée à deux circonférences parallèles; une *calotte* est la partie de la surface sphérique terminée à une seule circonférence. Ainsi, lorsque la demi-circonférence CABD, tour-



nant autour du diamètre CD , engendre la sphère, l'arc AB engendre une zone, et les arcs AC , BD engendrent des calottes sphériques.

La hauteur $A'B'$ d'une zone est la distance comprise entre les plans de ces deux bases; la hauteur CA' d'une calotte est la distance comprise entre le plan du cercle qui lui sert de base et le pôle de ce cercle.

Cela posé, je dis que la zone engendrée par AB a pour mesure $2\pi OC \cdot A'B'$.

Inscrivons à l'arc AB une ligne brisée régulière $AEFB$; puis, à la surface conique engendrée par AE , inscrivons la surface d'un tronc de pyramide régulière, et opérons de même pour les surfaces engendrées par EF et FB . Nous formerons ainsi une surface polyédrale ouverte, ayant pour base inférieure un polygone régulier, inscrit à la circonférence décrite par le point B . Si nous faisons croître indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone, et si en même temps nous augmentons indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite à AB , nous obtiendrons une série de surfaces polyédrales dont les aires auront une limite, laquelle sera précisément l'aire de la zone sphérique.

D'abord, en augmentant indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier servant de base à la surface polyédrale, nous trouvons pour limite l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée $AEFB$; c'est-à-dire $2\pi OI \cdot A'B'$.

En second lieu, en faisant croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, nous obtenons, pour l'aire de la zone sphérique,

$$\lim. 2\pi OI \cdot A'B';$$

c'est-à-dire

$$2\pi OC \cdot A'B'.$$

La démonstration serait la même pour la mesure de la calotte engendrée par AC .

412. *Scolie.* — Soient R le rayon d'une sphère, H la hauteur d'une zone ou d'une calotte, et A l'aire de cette surface; on aura

$$A = 2\pi RH.$$

413. THÉORÈME. — *La surface de la sphère a pour mesure la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diamètre.*

En effet, la sphère peut être considérée comme une zone dont la hauteur égale le diamètre.

414. Scolie. — Soit A l'aire d'une sphère de rayon R; on a

$$A = 4\pi R^2.$$

Mesure du corps engendré par un triangle tournant autour d'un axe.

415. THÉORÈME. — *Si un triangle ABC tourne autour d'un axe XY situé dans son plan et passant par un de ses sommets C, le corps engendré a pour mesure la surface décrite par le côté AB opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur CD correspondant à ce même sommet.*

1° Supposons que l'un des sommets du triangle soit situé sur l'axe de rotation; abaissons AA' perpendiculaire sur XY; et soit V le volume du corps engendré; je dis que

$$V = \text{surf. AB} \cdot \frac{1}{3} \text{CD}.$$

En effet, le corps engendré par BAC se compose des cônes engendrés par BAA' et CAA'; donc (387)

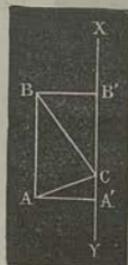
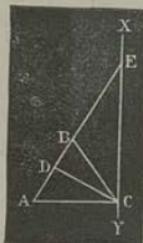
$$V = \frac{1}{3} \pi \overline{AA'}^2 \cdot \text{BC}.$$

Mais, dans un triangle, le produit de la base par la hauteur est constant, comme exprimant le double de l'aire du triangle; donc

$$\text{BC} \cdot \text{AA}' = \text{AB} \cdot \text{CD};$$

d'où

$$V = \frac{1}{3} \pi \text{AA}' \cdot \text{AB} \cdot \text{CD}.$$



D'un autre côté, $\pi AA'$. AB mesure la surface conique engendrée par AB (383) ; donc enfin

$$V = \text{surf. AB} \cdot \frac{1}{3} \text{CD.}$$

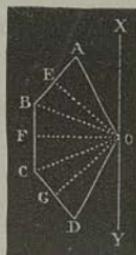
2° Si le côté AB prolongé rencontre l'axe nous aurons

$$\begin{aligned} \text{vol. ABC} &= \text{vol. ACE} - \text{vol. BCE} \\ &= \text{surf. AE} \cdot \frac{1}{3} \text{CD} - \text{surf. BE} \cdot \frac{1}{3} \text{CD} \\ &= \text{surf. AB} \cdot \frac{1}{3} \text{CD.} \end{aligned}$$

3° Enfin, si le côté AB était parallèle à l'axe, le volume engendré par ABC se composant du cylindre engendré par ABA'B', diminué des cônes engendrés par ACA' et par BCB', le théorème se vérifierait encore plus simplement.

Mesure du corps engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un axe.

446. THÉORÈME. — *Si un secteur polygonal régulier OABCD tourne autour d'un axe XY situé dans son plan et passant par son centre, le corps engendré a pour mesure la surface décrite par la ligne brisée régulière qui sert de base au secteur, multipliée par le tiers de l'apothème OE.*



En effet, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} \text{vol. ABO} &= \text{surf. AB} \cdot \frac{1}{3} \text{OE}, \\ \text{vol. BCO} &= \text{surf. BC} \cdot \frac{1}{3} \text{OF}, \\ \text{vol. CDO} &= \text{surf. CD} \cdot \frac{1}{3} \text{OG}. \end{aligned}$$

Mais les perpendiculaires OE, OF, OG sont égales entre elles; donc

$$\text{vol. ABCDO} = \text{surf. ABCD} \cdot \frac{1}{3} \text{OE.}$$

Volume de la sphère.

417. THÉORÈME. — *Un secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.*

On appelle *secteur sphérique* le corps engendré par un *secteur circulaire* ACB tournant autour d'un axe XY situé dans le plan ACB et passant par le centre C. Lorsque le secteur ACB engendre le secteur sphérique, l'arc AB engendre une zone qui est appelée *base* du secteur.



Cela posé, le théorème qui vient d'être énoncé se déduit du précédent, par le mode de démonstration employé au n° 411. Nous laissons au lecteur le soin de faire les développements nécessaires.

418. *Scolie.* — Soient V le volume d'un secteur sphérique, H la hauteur de la zone qui lui sert de base, et R le rayon de la sphère :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

419. THÉORÈME. — *La sphère a pour mesure sa surface, multipliée par le tiers du rayon.*

En effet, la sphère peut être considérée comme un secteur ayant pour base la surface sphérique.

420. *Scolie.* — L'expression du volume V d'une sphère de rayon R est

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Applications numériques.

421. PREMIER PROBLÈME. — *Le litre qui sert à mesurer les liquides est un cylindre dans lequel la hauteur est double du diamètre de la base, et dont la capacité est 1 décimètre cube. Quelles sont les dimensions de ce corps*

Prenons pour unité le décimètre, représentons par *h* la hauteur du cylindre ; nous aurons (381)

$$1 = \pi \left(\frac{h}{4}\right)^2 h;$$

d'où

$$h = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}.$$

$$\log 16 = 1,2041200 +$$

$$\log \pi = 0,4971499 -$$

$$\hline 0,7069701$$

$$\frac{1}{3} = 0,2356367 = \log h,$$

$$h = 1,720 \text{ 5.}$$

Ainsi, la hauteur du litre égale 172^{mm},05, et le rayon de la base égale 43^{mm},01.

422. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Quelle est la longueur d'un fil de platine ayant pour épaisseur $\frac{1}{200}$ de millimètre, et pesant 1 gramme?*

Le *poids spécifique** du platine, par rapport à l'eau, est à peu près égal à 20 ; si donc le *centimètre cube* est pris pour unité, le volume du fil sera représenté par $\frac{1}{20}$. Supposons le fil cylindrique ; nous aurons

$$\frac{1}{20} = \pi \left(\frac{1}{200}\right)^2 \cdot h,$$

h étant la hauteur du cylindre ou la longueur du fil.

Cette équation donne

$$h = \frac{120 \cdot 2 \ 400}{\pi}.$$

$$\log 120 = 2,0791812 +$$

$$\log 2 \ 400 = 3,3802112 +$$

$$\log \pi = 0,4971499 -$$

$$\log h = 4,9622425,$$

$$h = 91673,2...$$

Ainsi la longueur du fil serait d'environ 917 mètres.

* Voyez la *Physique*.

423. TROISIÈME PROBLÈME. — *Quel serait le rayon d'une sphère d'or valant 20 francs ?*

Le prix du kilogramme d'or est 3 444,45 ; donc le poids de la sphère sera, en grammes, $\frac{20}{3,444\ 45}$. D'ailleurs, le poids spécifique de l'or étant, à peu près, 19,26, le volume de la sphère sera, en centimètres cubes,

$$\frac{20}{3,444\ 45 \cdot 19,26}$$

Soit R le rayon inconnu ; nous aurons (444)

$$\frac{20}{3,444\ 45 \cdot 19,26} = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

d'où

$$R = \sqrt[3]{\frac{5}{3,444\ 45 \cdot 6,42 \cdot \pi}}$$

Les logarithmes donnent ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \log 5 & = & 0,6989700 \\ \log 3,444\ 45 & = & 0,5371199 \text{ —} \\ \log 6,42 & = & 0,8075350 \text{ —} \\ \log \pi & = & 0,4971499 \text{ —} \\ \hline & & 2,8571652 \\ \frac{1}{3} & = & 1,6190551 = \log R, \\ R & = & 0,415\ 95 \end{array}$$

Le rayon de la sphère serait donc, à peu près, 4^{mm},46.

424. QUATRIÈME PROBLÈME. — *Un physicien s'est assuré qu'une goutte d'eau de savon, formant un cylindre de 2 millimètres de rayon et de 2 millimètres de hauteur, peut se développer en une bulle de 54 millimètres de rayon. On demande quelle est l'épaisseur de l'enveloppe aqueuse de cette bulle.*

Soient r le rayon de la goutte, et h sa hauteur : son volume sera $\pi r^2 h$ (382).

Soient ensuite R le rayon de toute la bulle et x l'épaisseur de l'enveloppe : le volume de la partie aqueuse sera (444)

$$\frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (R - x)^3.$$

On a donc

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi (R - x)^3 ;$$

d'où

$$x = R - \frac{1}{2} \sqrt{8 R^3 - 6 r^2 h}.$$

Mettant pour R , r , h leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= 54 - \frac{1}{2} \sqrt{108^3 - 48} \\ &= 0,0007. \end{aligned}$$

L'épaisseur cherchée est donc $\frac{7}{10000}$ de millimètre*.

425. CINQUIÈME PROBLÈME. — Évaluer le volume V de la Terre (supposée sphérique).

D'après la définition du mètre, la longueur du méridien de Paris est, en prenant le myriamètre pour unité,

$$2\pi R = 4000 ;$$

d'où

$$R = \frac{2000}{\pi},$$

R étant le rayon de la terre.

Cette valeur, substituée dans la formule

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

donne

$$V = \frac{4}{3} \frac{(2000)^3}{\pi^2} = \frac{32\,000\,000\,000}{3\pi^2}.$$

Opérant par logarithmes, on trouve :

$$\begin{aligned} \log 32\,000\,000\,000 &= 10,505\,149\,98 + \\ \log \pi &= 0,497\,149\,87 + \\ 2 \log \pi &= 0,994\,299\,74 - \\ \log 3 &= 0,477\,121\,25 - \\ \hline \log V &= 9,033\,728\,99 \end{aligned}$$

$$V = 1\,080\,759\,000 \text{ myriamètres cubes.}$$

* Ce problème est tiré de la *Géométrie élémentaire* de M. Vincent.

Résumé.

La surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe situé dans un même plan avec la génératrice, a pour mesure la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire élevée au milieu de la génératrice et prolongée jusqu'à l'axe, multipliée par la projection de cette génératrice sur l'axe.

La surface engendrée par une ligne brisée régulière, tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par la projection de la génératrice sur l'axe.

La surface engendrée par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un diamètre du cercle circonscrit, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.

La surface d'une zone ou d'une calotte sphérique a pour mesure la circonférence d'un grand cercle, multipliée par la hauteur de la zone ou de la calotte.

La surface de la sphère a pour mesure la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diamètre.

Si un triangle tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par un de ses sommets, le corps engendré a pour mesure la surface décrite par le côté opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur correspondant à ce même sommet.

Si un secteur polygonal régulier tourne autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre, le corps engendré a pour mesure la surface décrite par la ligne brisée régulière qui sert de base au secteur, multipliée par le tiers de l'apothème.

Un secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.

La sphère a pour mesure sa surface, multipliée par le tiers du rayon.

NOTIONS

SUR QUELQUES COURBES.

Définition de l'ellipse par la propriété des foyers (426). — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu (430). — Axes (427, 428). — Sommets (429). — Rayons vecteurs (429). — Définition générale de la tangente à une courbe (432). — Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point et d'un même côté de cette ligne, des angles égaux (433). — Mener la tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe; par un point extérieur (434). — Normale à l'ellipse (436). — Définition de la parabole par la propriété du foyer et de la directrice (438). — Tracé de la courbe par points et d'un mouvement continu (439). — Axe (441). — Sommet (441). — Rayon vecteur (441). — La tangente fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur, menés par le point de contact (441). — Mener la tangente à la parabole par un point pris sur la courbe; par un point extérieur (441). — Normale (442). — Sous-normale (442). — Relation entre le carré d'une ordonnée perpendiculaire à l'axe et la distance de cette ordonnée au sommet (443). — Définition de l'hélice, considérée comme résultant de l'enroulement du plan d'un triangle rectangle sur un cylindre droit à base circulaire (445). — Pas de l'hélice (448). — La tangente à l'hélice fait avec l'arête du cylindre un angle constant (446). — Construire la projection de l'hélice et de la tangente sur un plan perpendiculaire à la base du cylindre*.

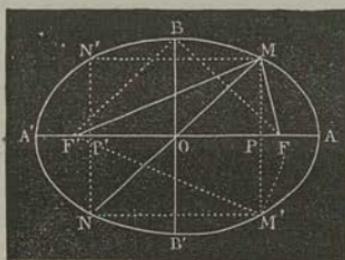
De l'ellipse.

426. Définition. — *L'ellipse est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.*

De cette définition résulte immédiatement le tracé de l'ellipse. Soient en effet F' , F les deux points fixes donnés, que l'on appelle *foyers***.

* Pour ce problème, nous renverrons le lecteur aux *Notions de Géométrie descriptive*.

** On verra, dans le volume de Physique, la raison de cette dénomination.



Si une corde, de longueur donnée l , a ses extrémités attachées en ces deux points, et qu'on fasse glisser un *style* le long de la corde, en la tenant toujours tendue, l'extrémité M du style décrira une ellipse $ABA'B'$; car on aura, à chaque instant,

$$FM + MF' = l.$$

En faisant varier la longueur l et la *distance focale* $F'F$, on pourra tracer toutes sortes d'ellipses.

Ce procédé, connu depuis fort longtemps, a fait donner à l'ellipse le nom d'*ovale des jardiniers*.

427. *Axes de l'ellipse*. — Si, d'un point quelconque M de l'ellipse, on abaisse une perpendiculaire MP sur la droite FF' , et qu'on la prolonge d'une longueur PM' égale à MP , le point M' appartient à la courbe; car $F'F$ étant perpendiculaire au milieu de MM' , on a

$$F'M' = F'M, \quad FM' = FM;$$

d'où

$$F'M' + FM' = l.$$

Il résulte, de là, que $F'F$ est un *axe de symétrie* de l'ellipse: on l'appelle *axe focal* ou *grand axe*.

On voit, avec la même facilité, que la perpendiculaire BB' au milieu O de FF' est aussi un *axe de symétrie*. Cette droite est le *petit axe*.

428. *Remarque*. — Il est facile de justifier les dénominations de *grand axe* et de *petit axe*. En effet, par la définition de l'ellipse,

$$F'A + FA = F'B + FB = l.$$

Mais, à cause de la symétrie,

$$FA = A'F', \quad F'B = FB;$$

donc

$$A'A = 2FB,$$

ou, en divisant par 2,

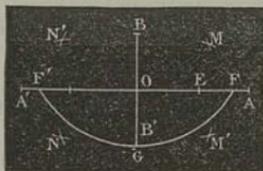
$$OA = FB.$$

D'ailleurs, l'oblique FB est plus grande que la perpendiculaire OB; donc enfin

$$OA > OB.$$

429. *Sommets, centre, etc.* — Les extrémités A, A', B, B' des deux axes sont appelées *sommets*. Le *centre* de l'ellipse est le point O où se coupent les deux axes. Toute *corde* MN qui passe par le centre est un *diamètre*. Enfin, les droites MF, MF', menées d'un point quelconque de l'ellipse aux deux foyers, portent le nom de *rayons vecteurs*.

430. PROBLÈME. — *Construire une ellipse, connaissant ses axes AA', BB'.*



Pour déterminer les foyers F, F', il suffit de décrire, de l'extrémité B du petit axe comme centre, avec OA pour rayon, un arc F'GF. On peut alors tracer la courbe comme nous l'avons indiqué en commençant.

On peut aussi la tracer *par points*.

Pour cela, prenons, sur le grand axe, un point quelconque E. Du foyer F', avec A'E pour rayon, traçons un arc de cercle; du foyer F, avec AE pour rayon, traçons un second arc qui coupe le premier en M: le point M, ainsi déterminé, appartient évidemment à l'ellipse.

Cherchons dans quel cas les circonférences ayant les foyers pour centres se couperont.

Comme la somme des rayons A'E, AE surpasse F'F, il suffit que l'on ait

$$A'E - AE < F'F.$$

Or,

$$\begin{aligned} A'E &= A'F' + F'E, \\ AE &= AF \pm FE, \end{aligned}$$

selon que le point E est à gauche ou à droite du foyer F. La condition est donc

$$F'E \pm FE < FF'.$$

Elle exige, évidemment, que le point E soit pris *entre les deux foyers*.

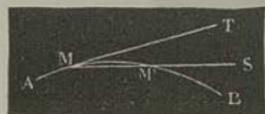
431. THÉORÈME. — *Le centre de l'ellipse est le milieu de tous les diamètres.*

Prenons le point M' symétrique de M , par rapport au grand axe, puis le point N symétrique de M' relativement au petit axe. Enfin, abaissons NP' perpendiculaire à FF' .

Les deux triangles rectangles MPO , $NP'O$ sont égaux, comme ayant les côtés de l'angle droit égaux, chacun à chacun; donc

$$OM = ON, \text{ angle } POM = \text{angle } P'ON, \text{ etc.}$$

432. Définition générale de la tangente. — Si, par un point M pris sur une courbe quelconque AMB , on fait passer une sécante $MM'S$; puis que l'on fasse tourner cette droite autour du point M , de manière que l'arc MM' , intercepté sur la courbe, diminue indéfiniment, la sécante tend vers une certaine position-limite MT , qu'elle atteint quand le point M' se confond avec M . Cette position-limite est ce qu'on appelle la tangente en M . Ainsi,



La tangente à une courbe AB est la limite MT des positions d'une sécante qui tourne autour de l'un M de ses deux points d'intersection avec la courbe, ce point étant supposé fixe, jusqu'à ce que l'autre point M' vienne se confondre avec le premier.

433. THÉORÈME. — *Les rayons vecteurs menés des foyers a un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point, et d'un même côté de cette droite, des angles égaux entre eux.*

Menons une sécante quelconque $SMM'S'$; prenons le point G symétrique du foyer F' par rapport à cette droite; nous aurons

$$M'G = M'F', \text{ } MG = MF'.$$

Actuellement, faisons tourner la sécante, de manière que le point variable M' se rapproche indéfiniment du point fixe M . Pendant ce mouvement, à cause de $MG = MF'$, le point G décrit la circonférence ayant le point M pour centre, et MF' pour rayon. En outre, tant que M' n'est pas confondu avec M , les quatre points F , M , G , M' sont les sommets d'un quadrilatère ayant pour diagonales FG et MM' . Cette dernière droite s'annule quand FG vient coïncider avec FMI . Conséquemment, pour déterminer la position-limite de SMS' , ou la tangente MT .

il faut joindre le point de *contact* M avec le milieu Q de FI. A cause de

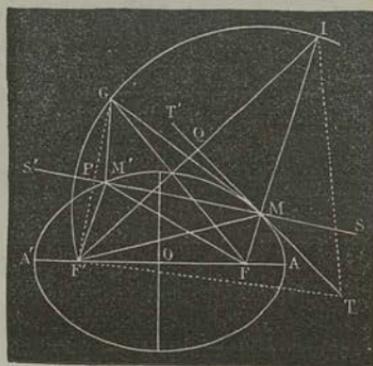
$$MI = MF', \quad QI = QF',$$

les angles QMI, QMF' sont égaux; et comme

$$\text{angle } QMI = \text{angle } TMF,$$

on a, finalement,

$$\text{angle } T'MF' = \text{angle } TMF.$$



434. PROBLÈME. — *Mener, par un point donné, une tangente à l'ellipse.*

Si le point donné est sur la courbe, il suffit, d'après la démonstration précédente, de diviser en deux parties égales l'angle $F'MI$ formé par l'un des rayons vecteurs menés au point de contact, et par le prolongement de l'autre. Supposons donc que le point donné T soit extérieur à l'ellipse.

Le problème se réduit, évidemment, à la détermination du point I.

Or, à cause de $MI = MF'$, ce point est situé sur la circonférence décrite du foyer F comme centre, avec le grand axe pour rayon. En second lieu, comme la tangente inconnue est perpendiculaire au milieu de IF' , $TI = TF'$; donc le même point I est situé sur une circonférence ayant pour centre le point donné, et passant par le foyer F'.

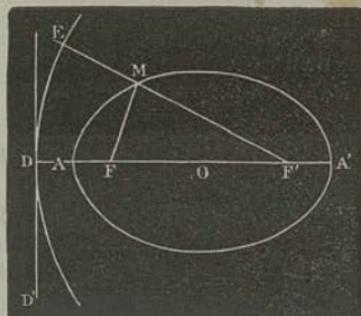
Le point I, où se coupent ces deux circonférences, étant connu, on abaisse TT' perpendiculaire sur IF' : cette droite est la tangente.

435. *Remarques.* — I. Le point de contact M est situé sur FI ; donc, l'on peut obtenir la tangente et le point de contact sans que l'ellipse soit tracée.

II. Si l'on a égard aux conditions du contact et de l'intersection des circonférences, on trouve que : 1° d'un point extérieur à l'ellipse, on peut mener deux tangentes à cette courbe ; 2° par un point pris sur la courbe, on ne peut mener qu'une seule tangente ; 3° par un point intérieur à l'ellipse, on ne peut faire passer aucune tangente.

436. *Normale à l'ellipse.* — La normale en un point d'une courbe est la perpendiculaire à la tangente, en ce point. Conséquemment, la normale en un point de l'ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs menés à ce point.

437. *Cercle directeur de l'ellipse.* — M étant un point quelconque de la courbe, prolongeons le rayon vecteur $F'M$ d'une



longueur ME égale à l'autre rayon vecteur MF . Nous aurons $F'E = AA'$. Ainsi, le point E est situé sur une circonférence décrite du foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe de l'ellipse. Cette courbe est donc le lieu des points également distants d'un point fixe F et d'une circonférence DE .

De la parabole.

438. *Définition.* — La parabole est une courbe plane CAB , lieu des points également distants d'un point fixe F et d'une droite fixe DE .

439. *Construction de la parabole.* — Pour construire cette courbe par points, on mène une parallèle quelconque MM' à la directrice DE . Du foyer F comme centre, avec un rayon égal à la distance DP des deux parallèles, on décrit deux arcs qui coupent, en M et M' , la droite MM' : les points M , M' , ainsi déterminés, appartiennent à la courbe.

1° La parabole a un seul axe et un seul sommet ;

2° La tangente à la parabole est également inclinée sur le rayon vecteur mené au point de contact, et sur la parallèle à l'axe, menée par ce point ;

3° Pour mener, d'un point T, une tangente à une parabole donnée, on décrit, de ce point comme centre, un arc passant par le foyer et coupant en E la directrice : la bissectrice de l'angle ETF est la tangente ;

Etc.

442. THÉORÈME. — Dans la parabole, la sous-normale est égale à la distance du foyer à la directrice.

La sous-normale PN est la partie de la normale comprise entre le point N, où cette droite coupe l'axe, et le pied de l'ordonnée MP, perpendiculaire à l'axe.

Cela posé, pour démontrer le théorème, remarquons d'abord que la tangente MT étant bissectrice de l'angle EMF, la normale MN sera bissectrice de l'angle supplémentaire FMI. Par suite,

$$\text{angle FMN} = \text{angle FNM},$$

ou

$$\text{FN} = \text{FM}.$$

Mais

$$\text{FN} = \text{FP} + \text{PN},$$

et

$$\text{MF} = \text{ME} = \text{FP} + \text{FD};$$

donc

$$\text{PN} = \text{FD}.$$

443. THÉORÈME. — Dans la parabole, chaque ordonnée perpendiculaire à l'axe est moyenne proportionnelle entre sa distance au sommet, et le double de la distance du foyer à la directrice.

Le triangle rectangle MFP donne

$$\overline{\text{MP}}^2 = \overline{\text{MF}}^2 - \overline{\text{FP}}^2 = \overline{\text{DF}}^2 - \overline{\text{FP}}^2 = (\text{DF} + \text{FP}) \cdot (\text{DF} - \text{FP}).$$

Or,

$$\text{DF} + \text{FP} = \text{DF} + 2\text{FP} = 2\text{AF} + 2\text{FP} = 2\text{AP},$$

et

$$\text{DF} - \text{FP} = \text{DF}.$$

Donc

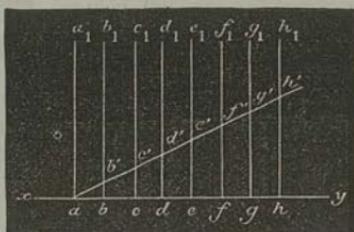
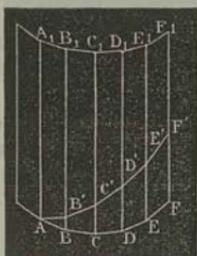
$$\text{MP} = \sqrt{\text{AP} \cdot 2\text{DF}}.$$

444. *Remarque.* — Il résulte, de ce théorème, que : dans la parabole, les carrés des ordonnées sont proportionnels aux abscisses correspondantes.

Cette propriété caractéristique est souvent prise pour définition de la parabole.

De l'hélice.

445. *Définition de l'hélice.* — Considérons une surface prismatique droite, ayant pour base une ligne brisée ABCDE, ..., dont tous les côtés soient égaux entre eux.



Prenons, sur une droite indéfinie xy , les divisions ab, bc, \dots égales à AB, BC, \dots , et, par les points ainsi obtenus, élevons les perpendiculaires indéfinies, aa_1, bb_1, cc_1, \dots , à xy . Enfin, dans le plan de cette dernière figure, traçons une droite quelconque $ab'c'd' \dots$. Si nous imaginons que le plan aa_1f_1 soit plié suivant les droites aa_1, bb_1, cc_1, \dots , nous pourrions l'enrouler sur la surface donnée, de manière que toutes ces lignes coïncident, respectivement, avec les arêtes AA_1, BB_1, \dots . Après cette transformation, la droite $ab'c'd' \dots$, tracée sur le plan, sera remplacée par une ligne brisée $AB'C'D' \dots$, tracée sur le prisme. Cette ligne brisée porte le nom d'hélice.

Si l'on suppose que les côtés AB, BC, \dots , diminuent indéfiniment de longueur, la surface du prisme tendra vers la surface d'un cylindre, et l'hélice polygonale $AB'C'D' \dots$ tendra vers une hélice curviligne. Nous dirons donc que :

L'hélice est la courbe suivant laquelle se transforme une droite tracée sur un plan, lorsque celui-ci roule, sans glisser, sur la surface d'un cylindre quelconque.*

* Ordinairement, on suit une marche inverse, et l'on définit l'hélice : une ligne qui se transforme en ligne droite dans le développement du cylindre sur lequel elle est tracée. On peut voir, à ce sujet, le *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*, seconde partie.

446. THÉORÈME. — *La tangente à l'hélice fait, avec la génératrice passant par le point de contact, un angle constant.*

La droite $ab'c'd'...$ est également inclinée sur les parallèles $bb_1, cc_1, etc.$; donc les angles $AB'B, B'C'C, C'D'D, ...$, sont tous égaux entre eux. Or, la limite de la sécante $B'C'$, par exemple, est la tangente en B' à l'hélice cylindrique; donc, etc.

447. THÉORÈME. — *Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne.*

Dans la première figure du n° 445, supposons le côté $D'E'$ de l'hélice prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre, en un point R , le côté DE de la base du prisme. Les triangles rectangles $D'DR, d'da$ sont égaux, comme ayant l'angle $RD'D$ égal à $ad'd$, et le côté $D'D$ égal à $d'd$. Donc $RD = ad$. Mais cette dernière droite est égale, en longueur, à la ligne brisée $ABCD$. Donc $DR = ABCD$.

Cette conclusion subsiste quand les côtés $AB, BC, ...$, diminuent indéfiniment; donc

$$\lim. DR = \lim. ABCD.$$

La première limite est la distance comprise entre le pied de la tangente et la projection du point de contact: c'est la *sous-tangente*; l'autre limite est ce qu'on appelle l'*abscisse curviligne* du point de contact. Le théorème est donc démontré.

448. On appelle *pas de l'hélice* la distance comprise entre deux intersections consécutives de la courbe avec une même génératrice.

Le segment de l'hélice, correspondant à ce segment de génératrice, est une *spire*.

Il résulte, de la définition de l'hélice, que *deux spires quelconques sont égales*.

Résumé.

L'ellipse est une courbe plane telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.

Le centre de l'ellipse est le milieu de tous les diamètres.

La tangente à une courbe est la limite des positions d'une sécante qui tourne autour de l'un de ses deux points d'intersection avec la courbe, ce point étant supposé fixe, jusqu'à ce que l'autre point vienne se confondre avec le premier.

Les rayons vecteurs menés des foyers à un point de l'ellipse font, avec la tangente en ce point, et d'un même côté de cette droite, des angles égaux entre eux.

La normale en un point d'une courbe est la perpendiculaire à la tangente en ce point.

La normale en un point de l'ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs menés à ce point.

L'ellipse est le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une circonférence.

La parabole est une courbe plane, lieu des points également distants d'un point fixe et d'une droite fixe.

La parabole est la limite d'une série d'ellipses ayant même sommet et même foyer.

La parabole a un seul axe et un seul sommet ; la tangente à la parabole est également inclinée sur le rayon vecteur mené au point de contact, et sur la parallèle à l'axe, menée par ce point.

Dans la parabole, la sous-normale est égale à la distance du foyer à la directrice.

Dans la parabole, chaque ordonnée perpendiculaire à l'axe est moyenne proportionnelle entre sa distance au sommet, et le double de la distance du foyer à la directrice.

L'hélice est la courbe suivant laquelle se transforme une droite tracée sur un plan, lorsque celui-ci roule, sans glisser, sur la surface d'un cylindre quelconque.

La tangente à l'hélice fait, avec la génératrice passant par le point de contact, un angle constant.

Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne.

APPENDICE.

LEVÉ DES PLANS ET ARPENTAGE.

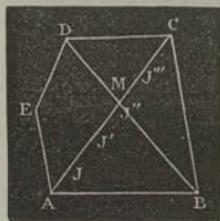
Notions sur le levé des plans et l'arpentage (1-41). — Levé au mètre (9, 10). — Levé au graphomètre (14-20). — Levé à l'équerre d'arpenteur (11-13). — Levé à la planchette (25-27).

Du levé des plans.

1. Les ingénieurs, les architectes et les arpenteurs appellent *plan* une figure semblable à la *projection horizontale* d'une *machine*, d'un *bâtiment*, d'un *terrain*, etc. La mesure directe des *longueurs* et des *angles* qui déterminent cette projection, constitue le *levé du plan*. On inscrit ces longueurs et ces angles, sur un *croquis*; après quoi il ne reste plus qu'à construire le plan : c'est ce qu'on appelle le *rappor*ter.

De la chaîne d'arpenteur.

2. Pour lever le plan d'un terrain polygonal ABCDE dont la surface est sensiblement plane et horizontale, et sur lequel la vue n'est gênée par aucun obstacle, on commence par mesurer, avec la *chaîne d'arpenteur* ou le *mètre*^{**}, les côtés du terrain. Puis, comme un polygone n'est pas déterminé par ses côtés, on mesure un nombre suffisant de diagonales, telles que AC. Cette opération exige, préalablement, le *tracé*, sur le terrain, de la droite qui joindrait les sommets A, C^{***}. Pour effectuer ce tracé, on emploie des *jalons*, c'est-à-dire des



* Cet Appendice contient les solutions des questions suivantes, insérées au Programme officiel : *Aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque*; *Notions sur le levé des plans et l'arpentage*. Ces diverses questions, appartenant à ce que l'on appelle ordinairement la *Géométrie pratique*, nous n'avons pas cru devoir les placer dans la *Géométrie* proprement dite.

** Voir plus loin, n° 5.

*** Ou plus exactement, le tracé de la ligne qui suivrait les ondulations du terrain, et dont la projection passerait par les projections des points A, C.

tiges de bois, sensiblement droites, longues d'environ 1^m,3, que l'on fiche verticalement en terre, en différents points de l'alignement AC. A cet effet, chaque jalon est terminé en *fer de lance*. De plus, afin de le rendre visible à une grande distance, on le surmonte habituellement d'un petit carré de papier blanc, que l'on fixe dans une fente longitudinale.

3. Les jalons étant préparés, l'*arpenteur* se place à l'une des extrémités de la ligne AC qu'il veut *jalonner*, en A par exemple, et son aide marche vers l'autre extrémité C. Quand celui-ci est à une distance convenable du point A, il *plante* un jalon *j*, de manière que l'*arpenteur* aperçoive, dans une même direction, le point *j*, et le voyant* placé en C; après quelques tâtonnements, dans lesquels il est guidé par les signes que lui fait l'*arpenteur*, l'aide parvient à amener le jalon dans la position convenable. On opère de même pour placer un deuxième jalon, puis un troisième, etc.

4. Pour marquer, sur le terrain, le point de rencontre M de deux droites *jalonnées* AC, BD, l'*arpenteur* se place en A et *vise* le point C; puis l'aide marche dans la direction BD, jusqu'à ce que son jalon soit dans le premier alignement.

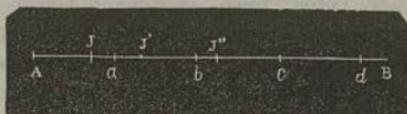
5. La chaîne d'*arpenteur*, qui sert à mesurer les distances un peu considérables, est ordinairement composée de 50 *chainons* ou tiges en gros fil de fer, bouclés à leurs deux extrémités, et réunis par des anneaux. La distance comprise entre les centres de deux anneaux consécutifs est égale à 2 décimètres, de sorte que la longueur totale de la chaîne, en y comprenant les deux poignées de fer qui la terminent, est de 40 mètres**. Les anneaux sont en fer, excepté ceux qui indiquent les mètres, que l'on fait en laiton. L'anneau du milieu est un peu plus fort que les autres.

6. A chaque opération, on exerce sur la chaîne un effort qui doit bientôt l'allonger : il est donc nécessaire de la comparer souvent à un décimètre étalon.

* On appelle *voyant* un rectangle de fer-blanc, dont les deux moitiés sont de couleurs différentes, et qui peut glisser le long d'une règle plantée verticalement. Les voyants sont employés à défaut de *signaux* naturels.

** On donne à la chaîne quelques millimètres de plus, afin de compenser l'erreur produite par le défaut de tension.

7. Pour mesurer une droite AB, on commence, comme nous l'avons dit (2), par la jalonner.



Cette opération préliminaire étant faite, l'arpenteur appuie a poignée de la chaîne, *extérieurement*, contre l'extrémité A de la droite. L'aide, muni d'un paquet de dix *fiches* ou pointes en fer, et tenant en main l'autre poignée de la chaîne, marche vers le point B; il tend la chaîne sur le terrain, dans la direction déterminée par les jalons; puis il plante en terre une première fiche *a*, en l'appuyant *intérieurement* contre la poignée. L'arpenteur et l'aide vont en avant, en soulevant la chaîne, jusqu'à ce que le premier soit arrivé à la fiche plantée par le second; il applique sa poignée contre cette fiche, pendant que l'aide place une deuxième fiche *b*; et ainsi de suite. A chaque fois, l'arpenteur enlève la fiche qui vient de lui servir de point d'arrêt: quand il a les dix fiches en main, il les remet à l'aide, et il fait, sur son carnet, un trait indiquant une *portée*. Il est clair que chaque portée équivaut à 100 mètres*.

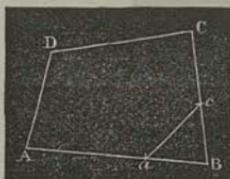
8. Ordinairement la distance AB se compose d'un certain nombre de longueurs de chaîne, plus une fraction *dB* de chaîne. Pour l'évaluer, on emploie les chainons, et ensuite un mètre divisé.

Levé au mètre.

9. Quand on veut lever le plan d'une maison, d'un appartement, etc., on emploie, avec avantage, le *mètre de poche*: c'est un ruban d'une longueur de 5 ou 10 mètres, divisé en centimètres, et qui s'enroule sur l'axe d'une boîte en cuir bouilli, de forme cylindrique. Cet instrument sert à mesurer les longueurs des murs, les largeurs des portes, etc.

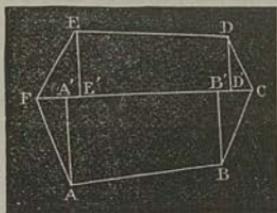
* Cependant, comme l'arpenteur appuie sa poignée *extérieurement*, tandis que l'aide appuie la sienne *intérieurement*, il y aurait sur chaque décamètre une erreur, *en moins*, égale à l'épaisseur du fil de fer. C'est principalement pour détruire cette cause d'erreur que l'on donne à la longueur de la chaîne quelques millimètres de plus que les 10 mètres.

40. Supposons que l'on veuille, par son moyen, lever le plan d'une cour ABCD, de forme irrégulière. On mesure d'abord les quatre côtés; puis, comme il serait incommode d'avoir à tracer une diagonale, on marque, sur deux côtés contigus BA, BC, à partir du sommet commun B, deux distances arbitraires Ba , Bc ; après quoi il ne reste plus, pour déterminer l'angle B du quadrilatère, qu'à mesurer la longueur ac . Ces diverses cotes doivent être inscrites sur le croquis.



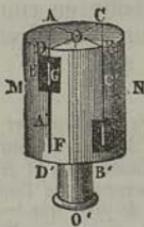
De l'équerre d'arpenteur.

41. On a vu (223) que pour mesurer un terrain ABCDEF de forme irrégulière, on le partage en trapèzes ayant leurs bases perpendiculaires à une même direction FC. Les pieds A' , B' , ... de ces perpendiculaires se construisent aisément avec l'équerre d'arpenteur.



Cet instrument est composé d'un cylindre creux en laiton MN, terminé, à sa partie inférieure, par une douille O' , également en laiton, dans laquelle peut entrer l'extrémité supérieure d'une canne terminée en fer de lance.

La surface du cylindre présente quatre fentes verticales, déterminées par deux plans $A'ABB'$, $C'DDD'$ passant par l'axe, et perpendiculaires entre eux. Chaque fente est disposée en pinnule, c'est-à-dire que la moitié de sa longueur est très-étroite, tandis que l'autre moitié, plus large, est munie d'un cheveu tendu suivant l'axe de la pinnule : la partie étroite porte le nom d'*œilleton*; l'autre est une *croisée*. On comprend que si les pinnules DD' , CC' sont inversement disposées, on pourra, en regardant par l'œilleton F, voir le cheveu tendu suivant CC' couvrir un signal placé dans la campagne. De même pour les pinnules AA' et BB' .



12. Supposons que l'on veuille trouver, au moyen de l'équerre, le pied de la perpendiculaire EE' abaissée sur la droite jalonnée FC . On plante, à peu près en E' , la canne qui supporte l'instrument; puis on fait tourner la douille jusqu'à ce que plaçant l'œil, successivement, devant les deux pinnules opposées DD' , CC' , on aperçoive l'extrémité C , puis l'extrémité F de la droite. Si l'équerre est disposée convenablement, on verra le sommet E par la pinnule BB' : dans ce cas, la pointe du support sera précisément le point cherché E' . Dans le cas contraire, on fera avancer ou reculer l'équerre le long de FC .

13. On peut faire servir l'équerre au levé des plans. Il est clair, en effet, que les distances FA' et $A'A$, FB' et $B'B$, etc., déterminent complètement le polygone $FABC\dots$. De plus, si l'on diminue toutes ces distances dans un même rapport, on pourra construire des triangles et des trapèzes semblables à $FA'A$, $AA'B'B$, et obtenir une figure qui sera le *plan* du terrain*.

Du graphomètre.

14. Le *graphomètre* est destiné à mesurer les angles que forment entre eux les rayons visuels dirigés, de l'œil de l'observateur, vers des signaux éloignés. Il se compose, essentiellement, d'un *limbe* demi-circulaire en laiton, divisé, comme le rapporteur, en degrés ou demi-degrés. Ce limbe porte deux *alidades*, ou *alidades*, munies de pinnules à leurs extrémités. L'une des alidades est fixe, et son axe, ou sa *ligne de foi*, coïncide avec le diamètre du limbe, c'est-à-dire qu'elle va de 0° à 180° . L'autre alidade peut tourner autour d'un axe passant par le centre du limbe, perpendiculairement à son plan. Dans la position habituelle du graphomètre, le limbe est horizontal, et les pinnules des deux alidades se relèvent verticalement.

15. Le centre du limbe est fixé à une tige terminée par une *noix* ou *sphère* en laiton, d'environ $0^m,02$ de diamètre. Celle-ci est embrassée par deux coquilles: l'une fait corps avec la douille dans laquelle pénètre le pied du graphomètre, et l'autre, qui est mobile, peut être rapprochée de la première par une *vis de pression*. L'ensemble de la noix et des co-

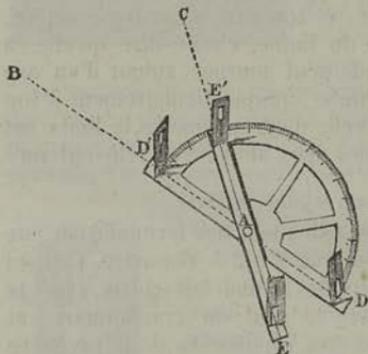
* Il est à peu près indispensable d'employer cette méthode, quand on veut calculer l'aire du terrain (*Géométrie*, 223).

quilles constitue le mode d'articulation connu sous le nom de *genou*. Par son moyen on peut, après avoir fixé le pied du graphomètre, donner au limbe les positions horizontales, verticales ou obliques, nécessaires à l'observation que l'on se propose de faire.

16. Le pied du graphomètre se compose de trois branches en bois, terminées en fer de lance et s'appliquant, au moyen de vis de pression, contre les trois faces d'un prisme vertical également en bois. L'extrémité de ce prisme est cylindrique ou conique : elle s'engage, comme nous venons de le dire, dans la douille placée au-dessous du genou.

17. *Mesure des angles.* — Supposons qu'un observateur, placé en A, veuille déterminer, à l'aide du graphomètre, l'angle formé par les rayons visuels AB, AC, dirigés vers deux points éloignés B, C. Il commencera par assujettir, à *frottement doux*, le genou de l'instrument ; puis, il disposera le *pied* de manière que l'axe de la tige prismatique dont nous avons parlé passe par le point A. Pour satisfaire à cette condition, on emploie ordinairement une bille d'agate, ou une petite pierre, qu'on place au-dessous de cette tige, et qu'on laisse tomber. Le pied étant convenablement placé, on serre les trois vis de pression, puis on assujettit la noix du limbe entre les deux coquilles. On fait

ensuite tourner le limbe, au moyen du genou et de la douille, jusqu'à ce que la ligne de foi DD' soit dirigée vers le signal B. On serre les vis de pression, de telle sorte que tout le graphomètre soit fixe. Faisant enfin tourner l'alidade mobile EE' jusqu'à ce que la *ligne de visée* passe par le signal C, on lit sur le limbe l'arc D'E', mesure de l'angle BAC.



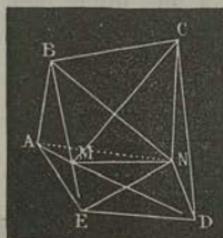
18. Souvent le graphomètre porte une *boussole* qui sert à orienter le plan, et un *vernier* destiné à évaluer les fractions

de degré. Souvent aussi, les alidades sont remplacées par des *lunettes*.

Levé au graphomètre.

19. La mesure *directe* des longueurs, même quand il s'agit d'un levé peu important, présente presque toujours de grandes difficultés; il peut même arriver qu'elle soit impraticable, à cause des accidents du terrain. L'emploi du graphomètre est ordinairement plus rapide, plus commode, et il donne des résultats plus exacts.

Soit ABCDE le terrain dont on veut lever le plan. On commence par mesurer, au moyen de la chaîne, avec beaucoup de soin, une droite MN, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir les signaux A, B, C, D, E : cette droite est ce qu'on appelle une *base*. On place le graphomètre en M, et on mesure les angles AMN, BMN.... On le transporte en N, et l'on mesure de même les angles ANM, BNM.... Après ces deux séries d'opérations, le plan est *levé*, et il ne reste plus qu'à le *rapporter*, puisque les triangles AMN, BMN,...., sont déterminés.



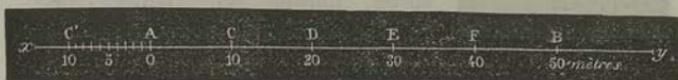
20. Le procédé précédent porte le nom de *méthode par intersection*; il n'est guère applicable quand il s'agit de lever le plan d'un bois ou de tout autre terrain gêné par des obstacles nombreux. Dans ce cas, on a recours à la *méthode par cheminement*; c'est-à-dire que, cheminant le long du contour ABCDE, on mesure successivement les côtés et les angles du terrain. On ne doit pas oublier, comme moyen de vérification, d'appliquer le théorème sur la somme des angles de tout polygone convexe (*Géom.*, 82)*.

* Il existe une autre vérification, fondée sur ce que la *somme algébrique des projections des côtés d'un polygone fermé, sur une droite quelconque, est égale à zéro*. La démonstration de ce théorème sort des limites assignées par le Programme.

Des échelles.

21. On appelle *échelle de réduction*, ou simplement *échelle*, le rapport de similitude entre le plan et le terrain. Si une distance de 400 mètres est représentée par 4 décimètres, on dira que le plan est à l'échelle de $\frac{1}{100}$. Il est avantageux de pouvoir évaluer facilement les véritables distances des points représentés sur le plan; aussi on adopte presque toujours, pour échelle de réduction, une fraction aliquote, dont le dénominateur renferme seulement les facteurs premiers 2 et 5. Par exemple, la grande carte de France, du dépôt de la Guerre, est à l'échelle de $\frac{1}{80000}$; les plans que dressent les architectes sont, suivant les circonstances, au $\frac{1}{50}$, au $\frac{1}{100}$, etc..

22. On donne aussi le nom d'échelle à une droite dont tout plan rapporté doit être accompagné, et qui est divisée en parties représentant des décamètres, des mètres, des centimètres, etc. Supposons, pour donner une idée de la construction de ces échelles, que l'on veuille rapporter, au $\frac{1}{100}$, le plan d'un terrain dont la plus grande dimension ne dépasse pas 50^m.



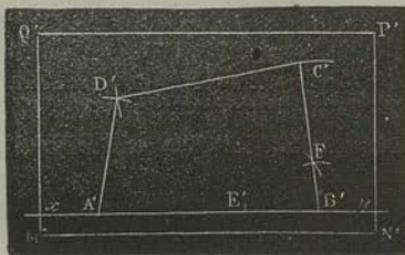
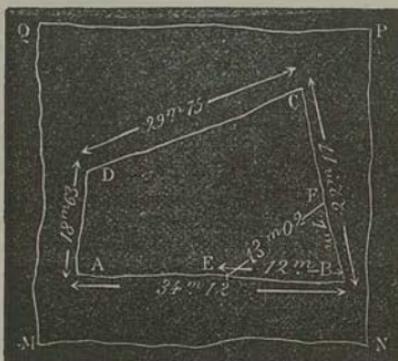
On prendra, sur une droite indéfinie xy , une longueur AB égale à 0^m,1, que l'on partagera en 5 parties égales. D'après les hypothèses, une droite égale à AB , sur le plan, représente 50^m, sur le terrain; donc chacune des divisions de AB représente 10^m. Si l'on veut représenter des mètres, on prend, sur le prolongement de AB , $AC' = AC$, et l'on partage cette distance en 10 parties égales, comptées à partir du point A .

23. Au moyen de cette échelle, on pourra trouver la longueur d'une droite quelconque du plan, homologue d'une droite mesurée sur le terrain; ou, inversement, on pourra savoir quelle est, sur le terrain, la distance de deux points représentés sur le plan. Par exemple, si un côté du terrain a été trouvé égal à 43^m, il sera figuré, sur le plan, par une droite dont on obtiendra la longueur en plaçant l'une des pointes du compas en F et en plaçant l'autre sur le troisième point de division de AC' .

Construction du plan.

24. Les notions précédentes indiquent suffisamment comment on doit s'y prendre pour rapporter un plan levé au mètre ou au graphomètre.

Supposons, pour prendre un exemple simple, qu'on veuille faire, à l'échelle de 0,001, le plan d'un terrain quadrangulaire, d'après les mesures cotées sur le croquis MNPQ. Après avoir tendu une feuille de papier M'N'P'Q', on tracera, sur cette feuille, une droite indéfinie xy , sur laquelle on prendra, au moyen de l'échelle construite plus haut, une longueur A'B' proportionnelle à $34^m,12$. La direction du côté B'C' sera déterminée par le triangle B'E'F', homologue au triangle BEF, dont les deux côtés BE, BF ont été pris arbitrairement (10). Prenant ensuite, sur l'échelle, des longueurs proportionnelles à BC, CD, AE, on construira, sans difficulté, les sommets C' et D'.



Levé à la planchette.

25. Quand on n'a pas besoin d'une grande précision, et que l'on veut opérer rapidement, on emploie un instrument appelé *planchette*, avec lequel on peut, tout à la fois, lever et rapporter le plan.

La planchette, comme son nom l'indique, est une petite planche à dessiner, sur laquelle on tend une ou plusieurs feuilles de papier, au moyen de deux petits cylindres parallèles mobiles sur leurs axes, et disposés sur les bords de la planchette. Celle-ci est supportée, de même que le graphomètre, par un genou et par un pied à trois branches. Un petit *niveau à bulle d'air*, que l'on pose sur la planchette, dans différentes situations, permet de rendre l'instrument horizontal.

La partie mobile de la planchette est une règle ou alidade, munie de deux pinnules verticales. Elle est *évidée* de façon que son bord soit dans le plan vertical passant par les axes des deux pinnules.

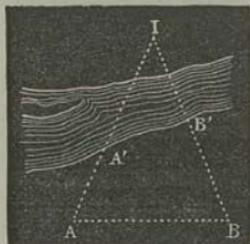
26. Supposons que l'on veuille lever, à la planchette, le terrain polygonal ABCDE (19). On commence, comme pour le levé au graphomètre, par mesurer une base MN. On se transporte en M, et, après avoir marqué arbitrairement, sur la feuille de papier, le point *m* homologue de M, on dispose l'instrument de manière que ces deux points M, *m* soient dans une même verticale : un fil à plomb, ou même un petit caillou qu'on laisse tomber de dessous *m*, sert à cette opération préliminaire. On enfonce ensuite en *m* une aiguille très-fine ; puis, appuyant le bord de la règle contre l'aiguille, on vise successivement les points N, A, B, ... ; et, à chaque fois, on trace, avec un crayon très-fin, que l'on fait glisser le long de la règle, les *lignes de visée* *mN*, *mA*, *mB*, ... : elles coïncident, évidemment, avec MN, MA, MB. L'échelle adoptée donne ensuite la position du point *n*, homologue de N. Enfin, si l'on se transporte en ce dernier point, et que l'on opère comme à la première *station*, les droites *nA*, *nB*, *nC*, ... donnent, par leurs intersections avec les premières, les points *a*, *b*, *c*, ..., homologues de A, B, C...

27. Dans le levé à la planchette, on peut, comme dans le levé au graphomètre, substituer la *méthode par cheminement* à la *méthode par intersection* : cette dernière méthode est celle qui vient d'être expliquée.

Problèmes.

28. PROBLÈME I. — Déterminer la distance d'un point accessible A à un point inaccessible I.

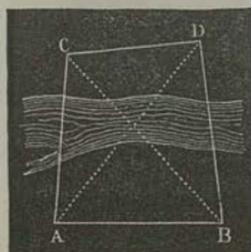
Si l'on chaîne, à partir du point A, une base AB, et que l'on mesure ensuite, avec le graphomètre, les angles A et B, le triangle AIB sera déterminé. On pourra donc, soit au moyen d'une échelle, soit par le calcul (*Trigonom.*, 59), déterminer la distance AI.



Quand on n'a pas de graphomètre, on jalonne les droites AA', BB', et l'on détermine les angles A et B par des triangles auxiliaires, comme dans le levé au mètre.

29. PROBLÈME II. — Déterminer la distance de deux points inaccessibles C, D.

On mesure encore une base AB; puis, avec la planchette ou le graphomètre, on évalue les angles CAB, DAB, CBA, DBA. — Ces cinq éléments déterminent le quadrilatère ABCD (*Trigonométrie*, 59).

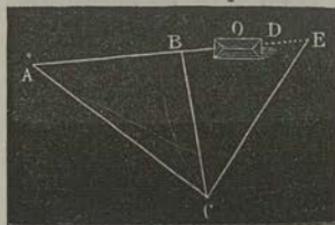


30. PROBLÈME III. — Prolonger une droite AB au delà d'un obstacle O.

On établit une station en un point C d'où l'on puisse apercevoir la droite AB, l'obstacle O et la partie du terrain sur laquelle doit se trouver le prolongement DE cherché. Après avoir chaîné AB, AC, BC, on jalonne la direction arbitraire CE, et l'on mesure avec le graphomètre l'angle BCE.

Au moyen des trois côtés du triangle ABC, on connaît l'angle EBC; en sorte que le triangle BCE est déterminé.

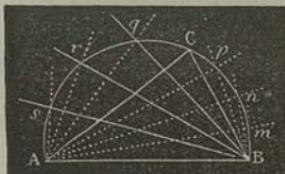
On peut donc calculer, dans ce triangle, le côté CE et l'angle E (*Trigon.*, 62). Connaissant ces deux éléments, il est facile de marquer, sur le terrain, le point E et la direction ED.



31. PROBLÈME IV. — Par trois points A, B, C, donnés sur un terrain, faire passer une circonférence.

Ce problème peut être résolu de bien des manières : voici l'une des plus simples.

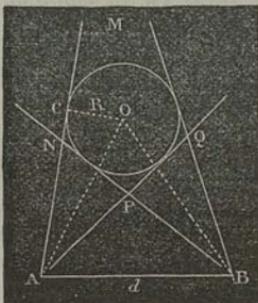
Après avoir mesuré, avec le graphomètre, les angles CAB, CBA, on jalonne les droites Am, An, Ap, qui divisent A en n parties égales (en 4 par exemple), et les droites Bs, Br, Bq, qui divisent pareillement B en n parties égales. On ajoute ensuite à l'angle A, $n-1$ angles égaux à ABs, et l'on ajoute de même, à l'angle B, $n-1$ angles égaux à BAm. Enfin, on cherche : 1^o le point de rencontre m des directions Am, Bm; 2^o le point de rencontre n des alignements An, Bn, etc. Les points m, n, p, q, \dots , ainsi déterminés, appartiennent à la circonférence cherchée.



En effet, d'après la construction, la somme des angles à la base, dans les triangles AmB, AnB, ..., est égale à $A+B$; donc le lieu des points m, n, \dots , est l'arc capable de ACB, décrit sur AB.

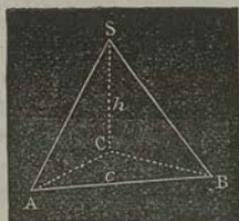
32. PROBLÈME V. — Déterminer le rayon d'une tour inaccessible.

On mesure une base AB puis, plaçant le graphomètre en A, on dirige l'alidade fixe vers le point B, et l'alidade mobile tangentielllement à la surface de la tour, successivement dans les directions AN, AQ, de manière à déterminer les angles BAN, BAQ. On mesure, de la même manière, les angles ABN, ABQ; et l'on a plus d'éléments qu'il n'en faut pour calculer le rayon OC du quadrilatère circonscrit MNPQ (Trigonométrie, 63).



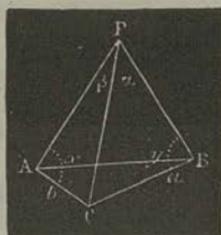
33. PROBLÈME VI. — Déterminer la hauteur d'une montagne ou la hauteur d'une tour inaccessible.

On mesure, dans la plaine, une base horizontale AB, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir le sommet S de la



montagne ou de la tour. A la station A, on mesure d'abord l'angle SAB, puis l'angle CAS formé par le rayon visuel AS avec sa *projection horizontale* AC: il suffit, pour cela, de placer le limbe du graphomètre dans le plan vertical CAS. De même, à la station B, on mesure les angles ABS, CBS. Ces cinq éléments déterminent la hauteur cherchée SC (*Trigonom.*, 67).

34. PROBLÈME VII. — *Trois points A, B, C, situés sur un terrain uni, étant rapportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point P d'où les distances AC et AB ont été vues sous des angles connus β , α .*



Graphiquement, on obtient le point P par l'intersection d'un arc capable de l'angle β , décrit sur AC, avec un arc capable de l'angle α , décrit sur BC*.

De l'arpentage.

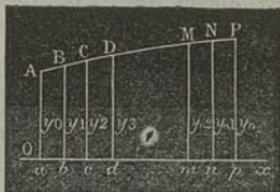
35. *L'arpentage* a pour objet la mesure de la surface des terrains. Les instruments que l'on emploie pour arriver à cette mesure sont la chaîne et l'équerre, dont la description a été donnée ci-dessus. Nous avons indiqué, dans la *Géométrie* (223), une formule commode, qui exprime l'aire d'un polygone en fonction des *abscisses* et des *ordonnées* de ses sommets. Cette formule s'applique, évidemment, au cas d'un terrain terminé par des lignes droites.

36. *Mesure d'un terrain terminé par une ligne courbe**.* — On pourra toujours, en opérant comme on vient de le rappeler,

* Nous renvoyons à la *Trigonométrie* (chap. V) pour une autre solution de ce problème.

** Ce paragraphe répond à la question : *Aire approchée d'une figure plane limitée par une courbe quelconque* (chap. X).

partager ce terrain en plusieurs *trapezes mixtilignes* tels que $APpa$. La question est donc ramenée à la détermination de l'aire d'un trapèze limité par une courbe AP , par un axe Ox , et par deux ordonnées Aa, Pp , perpendiculaires à cet axe. La solution exacte de ce problème exige évidemment que la courbe AP soit parfaitement définie; de plus, les méthodes



sur lesquelles cette solution repose ne sont pas de nature à être indiquées ici; mais il existe différentes *formules de quadratures* qui donnent, avec une approximation plus ou moins grande, l'aire cherchée, et qui ne supposent pas que l'on connaisse la nature de la courbe.

Nous allons démontrer la plus simple de ces formules.

37. *Méthode des trapèzes.* — Partageons l'intervalle ap en un certain nombre n de parties égales; et, par les points de division, élevons les ordonnées bB, cC, dD, \dots, nN . Si la distance comprise entre deux ordonnées consécutives est assez petite, nous pourrons, sans grande erreur, supposer que les arcs AB, BC, \dots , déterminés par ces ordonnées, sont confondus avec leurs cordes. Nous aurons donc, à fort peu près, en appelant A l'aire cherchée,

$$A = \frac{1}{2} \delta (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} \delta (y_1 + y_2) + \frac{1}{2} \delta (y_2 + y_3) + \dots \\ + \frac{1}{2} \delta (y_{n-1} + y_n),$$

ou

$$A = \delta \left(\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right),$$

ou encore, en représentant par S la somme de toutes les ordonnées,

$$A = \delta \left(S - \frac{y_0 + y_n}{2} \right).$$

Ainsi, l'aire A a pour valeur approchée le produit de la distance comprise entre deux ordonnées consécutives, par la somme de toutes les ordonnées, diminuée de la demi-somme des ordonnées extrêmes.

38. Pour appliquer la formule précédente, nous supposons qu'en chaînant les ordonnées aA, Bb, \dots , menées à 1^m de distance les unes des autres, on ait trouvé :

$$\begin{array}{ll} y_0 = 25^m, 750, & y_7 = 24, 616, \\ y_1 = 25, 672, & y_8 = 24, 454, \\ y_2 = 25, 546, & y_9 = 24, 328, \\ y_3 = 35, 384, & y_{10} = 24, 250, \\ y_4 = 25, 498, & y_{11} = 24, 232, \\ y_5 = 25, & y_{12} = 24, 286, \\ y_6 = 24, 802, & \end{array}$$

Ces valeurs donnent

$$S = 323,518, \quad y_0 + y_{12} = 50,036;$$

donc

$$A = 323,518 - 25,018 = 298^m, 5^*.$$

* La courbe prise pour exemple a pour équation

$$y = \frac{x^3}{500} - \frac{x}{5} + 25;$$

l'arc considéré est compris entre $x = -5$ et $x = +7$. La méthode générale des quadratures donne

$$A = \left(\frac{7^4}{2\,000} - \frac{7^2}{10} + 25 \cdot 7 \right) - \left(\frac{5^4}{2\,000} - \frac{5^2}{10} - 25 \cdot 5 \right) = 298,488.$$

L'erreur provenant de la formule ci-dessus est donc moindre que 12 décimètres carrés.

The first step in the process of...
 is to determine the...
 of the...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

The second step in the process...
 is to...
 of the...

The third step in the process...
 is to...
 of the...

The fourth step in the process...
 is to...
 of the...

The fifth step in the process...
 is to...
 of the...

The sixth step in the process...
 is to...
 of the...

The seventh step in the process...
 is to...
 of the...

I. 38. 10

