

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

EUGÈNE CATALAN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
ET DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LILLE
ET DE LA SOCIÉTÉ D'AGRICULTURE DE LA MARNE.



NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

—

TEXTE



PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
SUCESSEUR DE VICTOR DALMONT,
Précédemment Carilian-Geury et V^o Dalmont,
LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 49.

—

1868

BRIOT (Ch.), professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, maître de conférences à l'école Normale supérieure. **LEÇONS D'ALGÈBRE conformes aux programmes officiels** arrêtés pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 2 vol. in-8° avec figures. 7 fr. 50

On vend séparément :

LA 1^{re} PARTIE, à l'usage des élèves des classes de troisième et de seconde, des candidats au baccalauréat ès sciences, aux Ecoles de la marine et de Saint-Cyr, précédée d'une *Introduction* à l'usage des élèves de la classe de troisième, 6^e édit. 1 vol. in-8°, avec fig. 3 fr. 50 c.

LA 2^e PARTIE (Classe de spéciales et candidature aux écoles Polytechnique et Normale supérieure) 6^e édit. in-8°, av. fig. 1867. 4 fr. 50 c.

— Cours de COSMOGRAPHIE, ou ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE, comprenant les matières du nouveau programme arrêté pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 1 beau vol. in-8°, avec 94 fig. dans le texte, et 3 pl. dont deux gravées à l'aqua-tinta. 4^e édit., revue et augmentée. Paris, 1867. 6 fr.

— COMPLÉMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE de MM. BRIOT et BOUQUET, leçons faites par M. BRIOT aux élèves de l'École normale et rédigées par eux. Prix. 5 fr.

— LEÇONS DE MÉCANIQUE conformes aux programmes officiels à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales et des candidats à l'École polytechnique et à l'École normale. In-8°, avec fig. Prix. 5 fr.

BOUTAN, prof. au lycée St-Louis, et d'ALMEIDA, prof. au lyc. Napoléon. COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, suivi de problèmes, 3^e édit., entièrement revue et considérablement augmentée. 2 beaux vol. gr. in-8, avec 800 fig. et un spectre solaire intercalés dans le texte. Prix broché. 12 fr. Relié. 15 fr.

BRAHY, docteur ès sciences, profess. à l'Athénée royal de Bruges. EXERCICES MÉTHODIQUES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL. In-8. 5 fr.

CATALAN, doct. ès sciences, agrégé de l'Université, etc. THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. *Nouv. édit.*, revue et augmentée. 1 beau vol. in-8. avec 15 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

— Traité élémentaire de GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, renfermant toutes les matières exigées pour l'admission à l'École Polytechnique, *nouv. édit.*, 2 parties. In-8°, avec atlas de 28 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

On vend séparément :

1^{re} PARTIE. *La ligne droite et le plan*, *nouv. édition*, in-8° avec 11 pl. 4 fr.

2^e PARTIE. *Problèmes sur les surfaces*, in-8°, et atlas de 17 pl. 4 fr.

DEBRAY, examinateur d'admission à l'École polytechnique. COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE, suivi de problèmes, 2^e édit., revue et augmentée, 1 beau vol. gr. in-8, avec nombreuses figures dans le texte. Prix broché. 7 fr. Relié. 9 fr.

EUDES (A.), prof. au lycée Napoléon. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, comprenant la géométrie pure et appliquée, ouvrage conforme au nouveau programme et aux instructions ministérielles de 1854. 2 parties in-8°, avec 442 fig. dans le texte et 3 pl. gravées. Paris. 6 fr. 25

On vend séparément :

LA GÉOMÉTRIE PURE. 1 vol. in-8°, avec 344 fig. 4 fr.

LA GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE 1. vol. in-8°, avec 98 fig. et 3 pl. gravées. 2 fr. 25

LENGLIER (Ch.), ancien élève de l'École polytechnique, professeur au lycée de Versailles. COURS D'ARITHMÉTIQUE, suivi de notions élémentaires d'algèbre. Ouvrage rédigé d'après l'instruction générale sur l'exécution du plan d'étude des lycées impériaux, et contenant les énoncés de 560 problèmes dont les données ont été prises pour la plupart dans des publications officielles. 1 vol in-12. 2 fr. 50

NAVIER, de l'Institut, profes. à l'École Polytechnique, etc. Résumé des leçons d'ANALYSE données à l'École Polytechnique. 2^e éd. revue et annotée par M. LIOUVILLE, de l'Institut, profes. à l'École Polytechnique, etc. 2 vol. in-8°, pl. Paris. 10 fr.

OLIVIER (Th.), doct. ès sciences, profes.-direct. du Conservatoire des arts et métiers, profes.-fondat. de l'École centrale des arts et manufactures, etc. TRAITÉ COMPLET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, ouvrage divisé en plusieurs parties, qui se vendent chacune séparément.

1^o COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE; 2^o édit. 2 parties in-4°, accompagnées d'un atlas de 97 pl. 22 fr.

On vend séparément :

LA 2^e PARTIE, COURBES ET SURFACES COURBES. Prix. 12 fr. 50.

2^o DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2 vol. in-4°, dont un de pl. 18 fr.

3^o COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. 2 vol. in-4°, dont un de pl. 18 fr.

4^o MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, théorique et appliquée. 2 vol. in-4°, dont un de planches. 18 fr.

5^o APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages. 2 vol. in-4°, dont un de 58 pl. doubles, dont plusieurs coloriées ou à l'aqua-tinta. 25 fr.

ROGUET (Ch.), profes. de mathém. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE à deux et à trois dimensions, avec une introduction renfermant les premières notions sur les courbes usuelles, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École normale et au baccalauréat ès sciences; ouvrage entièrement conforme aux programmes officiels de l'enseignement scientifique des lycées. 2^e édition. In-8°, fig. dans le texte. 7 fr. 50

— LEÇONS DE TRIGONOMÉTRIE rectiligne et sphérique, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales du gouvernement. 3^e édit., entièrement refondue, et rédigée conformément au programme officiel de l'enseignement scientifique des lycées. In-8°, avec fig. dans le texte. Paris, 2 fr. 25

SIMON, doct. ès sciences, profes. au lycée Louis-le-Grand. LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE. Gr. in-8, avec figures. Prix. 3 fr. 50

STERN (le docteur M. A.), profes. à l'Université de Göttingue. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES. Ouvrage couronné par la Société des sciences de Danemark; traduit et annoté par E. LÉVY, agrégé des sciences. In-8° avec fig. dans le texte. Paris. 1 fr. 75

CONSTRUCTEURS

SPECIALITÉ DE L'INGÉNIEUR

	fr.	c.
Annales des ponts et chaussées, 1861 à 1872.	240	»
BELGRAND. — Les travaux souterrains de Paris :		
1° Hydrologie de la Seine , gr. in-8° et atlas.	40	»
BONNIN. — Digue de Cherbourg , in-4° et atlas.	20	»
COLLIGNON. — Chemins de fer russes , in-4° et atlas.	45	»
COUCHE. — Traité des Chemins de fer , tome 1 ^{er} et tome II, <i>Voie, matériel de transport et traction</i> , 2 in-8° et 2 atlas contenant 144 planches.	110	»
DARCY-BAZIN. — Recherches hydrauliques , 2 in-4° et 2 atlas.	55	»
DEBAUVE. — Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées : 1° Algèbre descriptive et application; 2° Phy- sique et chimie; 3° Géologie et minéralogie; 4° Exécution des travaux; 5° Géodésie, nivellement; 6°, 7° et 8° Mécani- que et machines; 9° Routes; 10° et 11° Ponts en maçonnerie, charpente et métal; 12° et 13° Tunnels et chemins de fer; 14° Constructions civiles et Code du bâtiment; 15° Hydraul- que; 16° Distribution d'eau; 17° Hydrologie, météorologi- e; 18° Usages agricoles de l'eau; 19° Rivières, canaux, ports de mer; 20° Administration. 16 fascicules sont parus. Prix pour les souscripteurs.	201	»
DE LAGRENÉ. — Navigation intérieure , 3 vol. in-4° et 3 atlas.	75	»
DUMONT. — Les eaux de Lyon, de Paris, de Nîmes et de Londres , 2 vol. in-4° et 2 atlas.	50	»
DUPUIT. — Distribution des eaux , in-4° et atlas.	45	»
» Mouvement des eaux , in-4°.	20	»
» Traité des ponts en maçonnerie , in-4° et atlas.	60	»
GRAEFF. — Ponts bials , in-4° et atlas.	12	50
GRAEFF. — Chemins de fer et Canaux des Vosges , in-8° et atlas.	15	»
MALÉZIEUX. — Chemins de fer d'Angleterre en 1873.	16	»
OPPERMANN. — Chemins de fer économiques , grand in-8° et atlas de 40 pl.	35	»
REGNAULD. — Ponts et viaducs métalliques , in-4° et atlas.	25	»
REYNAUD. — Phares , in-4° et atlas.	70	»
SURELL-CÉZANNE. — Torrents des Hautes-Alpes , 2 in-8° avec planches, vues et cartes géologiques.	33	»
VILLEVERT. — Travaux d'art des Chemins de fer , in-4°, relié.	25	»
DE PASSY. — Service hydraulique , in-8°.	9	»
AUCOC. — Cours de droit administratif , les tomes I et II.	17	»
CROIZETTE-DESNOYERS. — Travaux publics de Hol- lande , in-4° et atlas.	40	»
MORANDIÈRE. — Traité de la construction des ponts , les deux premières parties, 2 in-4° et atlas.	80	»
LEDOUX. — Chemins de fer à voie étroite , in-8°, relié.	12	50
LEVEL. — Chemins de fer d'intérêt local , in-8°, relié.	10	»

BIBLIOTHÈQUE SPÉCIALE DU MINEUR ET DU MÉTALLURGISTE

Portefeuille des machines, de l'outillage et du matériel, 1856 à 1875, 20 vol. reliés avec la table. . . .	fr. c 352 50
Annales des mines, 1862 à 1876, 15 années à 20 fr. . . .	300 »
Bulletin de Saint-Étienne, t. I à IV et XII à XV, et t. I^{er}, II^e série (les tomes V à XI sont en réimpression), 9 tomes à 25 francs.	225 »
ANSIAUX et MASON. — Fabrication du fer et de l'acier puddlé, 1 vol. in-8° et atlas.	15 »
CALLON. — Cours d'exploitation des Mines, professé à l'École des Mines, tomes I^{er} et II, 2 in-8° et atlas.	60 »
CORNWALL-THOULET. — Essais au chalumeau, 1 fort vol. grand in-8° avec vignettes, relié.	23 »
DEBAUVE. — Cours de physique, de chimie, de géologie et de minéralogie, 2 in-8° avec vign. et planch. (Extrait du Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.)	26 »
DES CLOIZEAUX. — Minéralogie, t. I^{er} et I^{er} fascicule du tome II, 2 vol. in-8° et atlas.	30 »
D'HURCOURT. — Éclairage au gaz, in-8° et atlas. . . .	15 »
GRUNER. — Cours de l'École des mines. — Principes généraux, Combustibles, Fonte, Fer et Acier, tome I^{er}, in-8° et atlas.	30 »
HÉRON DE VILLEFOSSE. — Atlas de la richesse minérale, avec texte.	50 »
KNAPP-MÉRIJOT. — Chimie industrielle, les tomes I et II, gr. in-8° avec vignettes.	50 »
LAMPADIUS. — Métallurgie générale, 2 vol. in-8°. . .	12 50
LANDRIN. — Traité du fer et de la fonte, in-8°, relié.	10 »
MEUNIER (St.-). — Géologie appliquée, in-8° avec vignettes.	8 »
RIVOT. — Traité d'analyse minérale, 4 grands vol. in-8°.	35 »
RIVOT. — Métallurgie du cuivre et du plomb, 3 vol. grand in-8° et atlas de 40 planches.	55 »
SARRAN. — Tables des Sinus, grand in-8°, relié. . . .	6 »
SARRAN. — Géométrie souterraine, 1 vol. in-8° et atlas.	9 »
WARINGTON-MAURICE. — Traité de la houille, in-8°, relié.	15 »
MOISSENET. — Parties riches des filons, in-8° et atlas.	15 »
MICHEL LÉVY. — Structure des roches éruptives, pétrographie, in-8° et 5 planches.	5 »

DUNOD, ÉDITEUR,

LIBRAIRIE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
49, Quai des Grands-Augustins.

BIBLIOTHÈQUE SPÉCIALE DU MÉCANICIEN

		fr.	c.
Portefeuille des Machines, de l'outillage et du matériel 1866 à 1875 , 10 vol., reliés, franco, à 17 fr.	170		»
— 1856 à 1865 rares, dix années, reliées, franco.	200		»
Annales des Mines , 1862 à 1872, 11 années à 20 fr.	220		»
Bulletin de l'Industrie minière , t. I à IV, XII à XV, et tome I, 2 ^e série, 9 tomes à 25 fr. (les tomes V à XI sont en réimpression).	225		»
CALLON. — Cours de machines à l'École des Mines , tome I ^{er} , in-8° avec atlas de 34 pl. Machines hydrauliques.	25		»
Machines à vapeur.	30		»
Les deux ensemble.	50		»
CLAUDEL. — Aide-Mémoire de l'ingénieur , partie théorique, in-8°.	17	50	
— Partie pratique, 2 volumes.	22	50	
COLLIGNON , professeur à l'École des ponts et chaussées. — Cours de résistance des matériaux	9		»
COLLIGNON. — Cours d'hydraulique	11		»
CORJOLIS. — Calcul de l'effet des machines , in-4°.	15		»
COUCHE. — Traité des chemins de fer , t. I ^{er} et t. II.	110		»
DEBAUVE. — Cours de mécanique, de machines et machines à vapeur , extrait du <i>Manuel de l'Ingénieur des ponts et chaussées</i> , 1 très-fort vol. in-8° avec 438 vignettes et 16 planches.	37	50	
GAUDRY. — Traité des machines à vapeur , 3 vol. in-8°.	18		»
KNAPP-MÉRIJOT. — Chimie industrielle , tomes I ^{er} et II.	50		»
On vend séparément : tome I ^{er}	24		»
— tome II.	30		»
LEDIEU. — Appareils à vapeur de navigation , 3 vol. in-8° et atlas.	45		»
— Les nouvelles machines marines , tome I ^{er}	30		»
LEDIEU. — Stabilité des machines. — Rotative Behrens	7	50	
MANGON. — Traité de génie rural . I ^{er} fascicule.	»		»
— Mécanique agricole , 1 beau vol. in-8° avec atlas.	45		»
NAVIER-SAINT-VENANT. — Application de la mécanique à la construction et aux machines , t. I et II, in-8°.	25		»
ROLLET. — Meunerie et boulangerie , in-4° et atlas.	90		»
ZEUNER. — Distribution par tiroirs , in-8° et pl., relié.	9		»
BONTEMPS. — Les Systèmes télégraphiques , broché, 8 fr.; relié.	10		»
RANKINE-VIALAY. — Manuel de Mécanique appliquée	»		»
CLEBSCH-SAINT-VENANT-FLAMANT. — Traité de l'élasticité des corps solides	»		»
Revue industrielle , journal hebdomadaire illustré par MM. FONTAINE et BUQUET. Prix de l'abonnement annuel.	25		»
MOINET-DEBIZE. — Traité général d'Horlogerie , 2 grands in-8°.	45		»

BIBLIOTHÈQUE DES

SPÉCIALITÉ DE L'ARCHITECTE

Album de l'art industriel (1857 à 1866), environ 300 pl. avec texte (il nous reste un petit nombre d'exemplaires), 2 vol. in-folio, reliés.	fr. e. 150 »
Annales de la Construction (1855 à 1875), 21 années, reliées, avec la table.	370 »
BERAIN. — Compositions décoratives , in-folio, relié.	50 »
BIET. — Souvenirs du musée des monuments français , in-folio avec 40 planches.	30 »
BOUCHET. — La Villa Pia des Jardins du Vatican , in-fol.	35 »
BRUNE , professeur de construction à l'École des beaux-arts. — Cours autographié par l'auteur lui-même (sous presse).	
CLAUDEL. — Art de construire	40 »
CORDIER. — Équilibre des charpentes métalliques , un magnifique vol. grand in-4°, relié.	50 »
COULON. — Menuiserie , 3 vol. in-4°.	35 »
DE DARTEIN. — Architecture lombarde , in-4° et atlas (15 livraisons parues sur 25).	75 »
DELESPINE. — Marché des Blancs-Manteaux , in-folio avec planches.	10 »
DOULIOT-CLAUDEL. — Coupe des pierres , in-4° et atlas.	30 »
ECK. — Construction en poterie et en métal , 1 vol. in-fol. avec texte in-4°.	40 »
ÉMY-BARRÉ. — Traité de Charpente , 3 vol. in-4° et atlas.	125 »
<i>(On vend séparément.)</i>	
BARRÉ. — Charpenterie métallique , 2° éd., in-4° et atlas.	35 »
FRISSARD. — Théâtre de Dieppe , in-folio avec planches.	15 »
OLIVIER-ROUCHÉ. — Cours de géométrie descriptive , in-4° et atlas.	22 »
PATTE. — Mémoire sur l'architecture , in-4°, relié.	20 »
REYNAUD. — Traité d'Architecture , 2 volumes in-4° et 2 atlas.	160 »
RUPRICH-ROBERT. — Flore ornementale , in-folio.	125 »
THÉNOT. — Perspective , nouvelle édition, grand in-8°, relié.	15 »
THOLLET. — Leçons d'architecture , in-4° avec 136 pl.	48 »
TOSI et BECCHIO. — Monuments sépulcraux, hôtels, tabernacles , relié.	60 »

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PREMIÈRE PARTIE

TEXTE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

CHEZ LE MÊME LIBRAIRE :

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, 2^e édition (1866).

MANUEL DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

MANUEL D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

MANUEL DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

MANUEL DE COSMOGRAPHIE.

MANUEL DE MÉCANIQUE.

Paris. — Imprimerie Arnous de Rivière et C^e, 26, rue Racine.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

EUGÈNE CATALAN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
ET DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LILLE
ET DE LA SOCIÉTÉ D'AGRICULTURE DE LA MARNE.



PREMIÈRE PARTIE

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN

—

TEXTE .

—

QUATRIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE



PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

SUCCESSION DE VICTOR DALMONT

Précédemment Carilian-Geury et V^o Dalmont

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

Quai des Augustins, 49

—

1873

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

INTRODUCTION.

1. La partie des Mathématiques appliquées à laquelle l'illustre Monge a donné le nom de *Géométrie descriptive* a pour objets principaux : 1° la *représentation exacte des corps, au moyen de dessins tracés sur un seul plan*; 2° la *solution graphique des problèmes dont la Géométrie de l'Espace donne la solution théorique.*

Entrons dans quelques explications.

En premier lieu, le dessin ordinaire représente les objets, non tels qu'ils sont réellement, mais tels que les a vus l'artiste, c'est-à-dire avec toutes les déformations dues à la perspective. Par exemple, un cube est ordinairement figuré par la réunion de *trois quadrilatères irréguliers*. Quand on veut que le dessin puisse faire retrouver, au besoin, la *position*, la *forme* et les *dimensions* des diverses parties d'un corps, on le construit d'après des règles données par la Géométrie descriptive.

D'un autre côté, si, après avoir résolu un problème relatif à la Géométrie de l'Espace, on se propose de déterminer, en grandeur et en position, les lignes qu'on avait prises pour inconnues, les procédés ordinaires deviennent complètement impuissants, et l'on est obligé de les remplacer par des méthodes appartenant à la Géométrie de Monge.

Pour prendre un exemple très-simple, supposons qu'il s'agisse de *trouver la distance d'un point donné à un plan donné*. On sait que cette distance est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Mais comment indiquer la direction de cette droite? Comment déterminer le point où elle perce le plan? Comment en obtenir la longueur? Comment, en un mot, résoudre *graphiquement* le problème? La réponse à ces questions et à toutes celles qui seraient amenées par des problèmes plus compliqués résulte, ainsi qu'on le verra bientôt, d'un petit nombre de conventions et de théorèmes sur lesquels la Géométrie descriptive est fondée.

DES PROJECTIONS.

2. On appelle *projection d'un point, sur un plan*, le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

FIG. 1. Ainsi, concevez que du point A, on abaisse, sur le plan MN, la perpendiculaire Aa : le pied a de cette droite sera la projection du point A sur le plan MN, nommé *plan de projection*. Il est clair que le point a est la projection commune de tous les points de la droite indéfinie Aa.

3. La *projection d'une ligne* est le lieu géométrique des projections de tous ses points.

FIG. 8. Par exemple, la ligne abc, qui contient les projections

de tous les points de la ligne ABC , est la projection de ABC .

4. Les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, \dots parallèles entre elles, ont pour lieu géométrique une surface cylindrique, ordinairement désignée sous le nom de *cylindre projetant*.

La projection abc pouvant être considérée comme la section de ce cylindre par le plan MN , il est évident que toute courbe $A'B'C'$, tracée sur la surface du cylindre, a pour projection, sur le plan MN , la même ligne abc .

5. *Remarques.* I. *Quand la courbe ABC est dans un plan perpendiculaire au plan de projection MN , sa projection est une ligne droite.* En effet, le cylindre projetant se réduit au plan même de la courbe.

II. *Si la courbe est dans un plan parallèle au plan de projection, elle se projette suivant une courbe égale.*

6. THÉORÈME. *La projection d'une ligne droite ABC est une ligne droite abc .*

La droite ABC est nécessairement contenue dans un plan perpendiculaire à MN : donc (5) sa projection est une ligne droite.

FIG. 3.

7. *Remarques.* I. Deux points déterminent une droite. Conséquemment, pour projeter la droite ABC sur le plan MN , il suffit de joindre, par une droite, les projections a, b de deux points A, B pris arbitrairement sur ABC .

II. On peut encore, pour obtenir la projection de ABC , construire le plan projetant $ACac$ (5).

III. *Si la droite est perpendiculaire au plan de projection, sa projection est le point où elle perce le plan.*

DÉTERMINATION DU POINT.

8. D'après la remarque faite dans le n° 2, un point n'est pas déterminé par sa projection sur un seul plan.

Au contraire, ainsi que nous allons le faire voir, *un point est complètement déterminé de position, si l'on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent*. Mais d'abord, cherchons la relation qui existe en ces deux projections.

9. THÉORÈME. *Les perpendiculaires abaissées des deux projections d'un point, sur l'intersection des deux plans de projection, la rencontrent en un même point.*

FIG. 4.

Pour démontrer cette proposition fondamentale, concevons deux plans xyz , xyt , qui se coupent suivant la droite xy . Si, d'un point A extérieur aux deux plans, on mène les perpendiculaires Aa , Aa' , le plan aAa' , conduit par ces droites, est perpendiculaire aux deux plans de projection; par suite, il est perpendiculaire à l'intersection xy ; donc cette droite xy est perpendiculaire aux intersections ax , $a'a$ du plan aAa' avec les plans de projection. Les perpendiculaires abaissées sur xy , par les projections du point A , rencontrent donc cette droite xy en un même point.

10. RÉCIPROQUE. *Lorsque deux points, situés dans les deux plans de projection, sont tels que les perpendiculaires abaissées de ces points, sur l'intersection des deux plans, la rencontrent en un même point, ces deux points sont les projections d'un point déterminé de l'espace.*

Les droites ax , $a'a$ étant perpendiculaires à l'intersection xy , en un même point α , le plan de ces droites est perpendiculaire à xy ; donc il est perpendiculaire à chacun des plans xyz , xyt . Les droites menées par les points a , a' , perpendiculairement aux plans xyz , xyt , sont donc situées dans le plan axa' ; et, comme elles sont perpendiculaires à deux droites qui se coupent, elles se

coupent elles-mêmes en un point A, dont les projections sont a, a' : ce qui démontre la proposition.

11. D'après les principes précédents, *pour que deux points, respectivement situés dans les deux plans de projection, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées de ces points, sur l'intersection des deux plans, la rencontrent en un même point.*

DÉTERMINATION DE LA LIGNE.

12. *Une droite est déterminée quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.*

Faisons passer, par chaque projection, un plan perpendiculaire au plan de projection correspondant : la droite cherchée, devant se trouver dans chacun des plans ainsi conduits, en est l'intersection.

Par exemple, si $ab, a'b'$ sont les projections d'une droite inconnue, les plans $abBA, a'b'BA$ menés par ces projections, perpendiculairement aux plans xyz, xyt , contiendront la droite cherchée : cette droite est donc l'intersection AB des deux plans.

FIG. 5.

13. Deux droites, respectivement situées dans les plans de projection, ne peuvent être considérées comme les projections d'une même droite, que si les plans menés par ces droites, perpendiculairement aux plans de projection correspondants, se coupent. C'est ce qui arrive toujours lorsque ces droites ne sont pas perpendiculaires, en deux points différents, à l'intersection des plans de projection.

14. Si les projections $ab, a'b'$, perpendiculaires à xy , rencontrent cette droite en un même point α , alors

FIG. 6.

le plan $\alpha\alpha'$ de ces droites est perpendiculaire, à la fois, aux plans xyz , xyt ; de sorte que toutes les droites situées dans ce plan ont pour projection ab , $a'b'$. Dans ce cas, pour achever de déterminer la droite de l'espace, il faut donner les projections a , a' et b , b' de deux de ses points.

15. *Une courbe quelconque est déterminée, quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.*

FIG. 7.

Par exemple, abc , $a'b'c'$ étant les projections d'une même ligne ABC , sur les plans xyz , xyt ; si l'on conçoit deux surfaces cylindriques $abcABC$, $a'b'c'ABC$, ayant pour bases $a'b'c'$, abc , et dont les génératrices soient respectivement perpendiculaires aux plans xyz , xyt , l'intersection de ces surfaces sera la courbe ABC .

16. *Remarque.* Pour que deux courbes, respectivement situées dans les deux plans de projection, puissent être considérées comme les projections d'une même ligne de l'espace, *il faut qu'à chaque point de la première corresponde un point de la seconde* : nous nommons ici points *correspondants* ceux qui satisfont à la condition énoncée ci-dessus (11).

DÉTERMINATION DU PLAN.

17. On détermine la position d'un plan P au moyen de ses intersections $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, avec les plans de projection xyz , xyt . Ces intersections sont les *traces* du plan.

FIG. 8.

En général, le plan P et les plans de projection forment un angle trièdre, ayant pour arêtes les deux traces et l'intersection des plans fixes. Ainsi, *les deux traces d'un même plan doivent couper, en un seul point, l'intersection des plans de projection.*

18. *Remarques.* I. Si le plan est parallèle à l'un des plans de projection, il n'a pas de trace sur ce dernier plan. Sa trace sur l'autre plan de projection est parallèle à l'intersection des plans de projection.

II. Si le plan coupe les deux plans de projection, mais qu'il soit parallèle à leur intersection, ses deux traces sont parallèles à cette droite.

III. Si le plan est perpendiculaire à l'intersection des deux plans de projection, ses deux traces sont perpendiculaires à cette droite.

IV. Enfin, si le plan passe par l'intersection des deux plans de projection, sa position n'est plus déterminée: pour qu'elle le soit, on devra se donner les projections d'un point du plan, non situé sur l'intersection.

PROJECTIONS HORIZONTALES OU VERTICALES.

19. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur l'angle des deux plans de projection. Mais, pour rendre les constructions plus simples, nous supposerons, dorénavant, que cet angle est droit. Afin d'abrégier le discours, nous regarderons l'un des plans de projection comme *horizontal* et l'autre comme *vertical*, quoiqu'ils puissent avoir des positions quelconques dans l'espace. L'intersection de ces plans sera nommée *ligne de terre*.

20. Lorsque nous dirons qu'un point est donné, ou qu'une ligne est donnée, nous entendrons que les projections de ce point ou de cette ligne sont données. Un plan sera donné, lorsque ses traces seront supposées connues. Quand nous proposerons de déterminer un point, ou une

droite, ou un plan, il s'agira de construire les projections du point ou de la droite, ou les traces du plan.

21. Les projections et les traces prennent le nom du plan de projection dans lequel elles se trouvent. Ainsi, les projections et les traces situées dans le plan vertical sont les *projections* et les *traces verticales*. Suivant qu'une droite est parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection, nous dirons que cette ligne est *horizontale* ou qu'elle est *verticale*. On dit, semblablement, qu'un *plan* est *horizontal* ou qu'il est *vertical*, suivant qu'il est parallèle ou perpendiculaire au plan horizontal de projection.

22. Les plans de projection étant supposés rectangulaires :

1° *Si une figure est dans l'un des deux plans de projection, sa projection sur l'autre plan appartient à la ligne de terre.*

En effet, le premier plan de projection est le plan projetant de la figure (5).

2° *Si une figure est dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur l'autre plan est une droite parallèle à la ligne de terre.*

Le plan de la figure, qui coupe le second plan de projection suivant une parallèle à la ligne de terre, se confond en effet avec le plan projetant.

3° *Si un plan est perpendiculaire à l'un des deux plans de projection, sa trace sur l'autre plan est perpendiculaire à la ligne de terre.*

Par exemple, un plan perpendiculaire au plan horizontal a pour trace verticale une perpendiculaire à la ligne de terre.

Cette trace, étant l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal, est perpendiculaire à ce plan; donc elle est perpendiculaire à la ligne de terre.

4° *La distance d'un point de l'espace à l'un des plans de projection est égale à la distance, à la ligne de terre, de sa projection sur l'autre plan.*

Soit A un point dont les projections sont a , a' . Par Aa et Aa' faisons passer un plan qui coupe en α la ligne de terre : nous obtiendrons ainsi un rectangle Aa α a'. En effet, les angles Aa α , Aa' α sont droits parce que Aa, Aa' sont perpendiculaires sur les plans de projection; et l'angle a α a' est droit parce qu'il mesure l'inclinaison des deux plans de projection. Par suite,

$$Aa = a'\alpha, \quad Aa' = a\alpha.$$

FIG. 4.

RABATTEMENT DU PLAN VERTICAL.

23. Les explications précédentes suffisent pour faire pressentir la possibilité de résoudre les problèmes qui se rapportent à la Géométrie de l'Espace, par des constructions effectuées sur deux plans rectangulaires. Mais, afin de simplifier ces constructions autant que possible et de réunir les deux projections sur un seul dessin, on fait tourner le plan vertical xyt autour de la ligne de terre xy , jusqu'à ce qu'il vienne en xyt' , sur le prolongement du plan horizontal xyz . De cette manière, toutes les constructions sont réellement effectuées sur le plan horizontal; mais on doit constamment supposer les projections verticales remises à leur place, au moyen d'un quart de révolution autour de la ligne de terre. Quant aux points situés hors des plans de projection, ils ne paraissent pas

FIG. 9.

dans les figures ; mais il est facile de se représenter leur véritable position, au moyen des projections.

FIG. 10. Par exemple, a et a' étant les projections d'un point de l'espace, non indiqué dans la figure, on concevra que le plan vertical, actuellement rabattu sur le plan horizontal, fasse un quart de révolution autour de xy . Les plans de projection devenant alors perpendiculaires l'un à l'autre ; si, par les points a , a' , on conçoit des perpendiculaires à ces plans, l'intersection de ces droites sera le point A de l'espace, dont les projections sont a , a' .

RELATION ENTRE LES PROJECTIONS D'UN MÊME POINT.

24. Après le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, *les deux projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

FIG. 9. En effet, supposons que, les plans de projection xyz , xzt ayant leurs positions primitives, les projections d'un point A de l'espace soient a , a' ; les perpendiculaires ax , $a'a$ à la ligne de terre rencontrent cette droite en un même point (g) ; si donc le plan vertical tourne autour de xz pour venir s'appliquer sur le plan horizontal, la droite $a'a$ ne cesse pas d'être perpendiculaire à xy ; et, quand le plan vertical xyt coïncide avec le plan horizontal, le point a' vient en a'' , sur le prolongement de ax , à une distance du point a égale à $a'a$,

25. D'après cela, *pour que deux lignes se coupent dans l'espace, il faut et il suffit que le point de rencontre de leurs projections verticales et le point de rencontre de leurs projections horizontales se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

PLANS ET DROITES PARALLÈLES OU PERPENDICULAIRES.

26. THÉORÈME. *Si deux plans sont parallèles, leurs traces sont respectivement parallèles.*

En effet, les intersections de deux plans parallèles, par un plan quelconque, sont des droites parallèles.

27. RÉCIPROQUE. *Deux plans sont parallèles, quand leurs traces, supposées obliques ou perpendiculaires à la ligne de terre, sont respectivement parallèles.*

Les quatre traces forment deux angles ayant leurs côtés parallèles deux à deux; donc, en vertu d'un théorème connu, les plans de ces angles sont parallèles (*).

28. THÉORÈME. *Lorsque deux droites AB, CD sont parallèles, leurs projections sur un même plan sont parallèles.*

En effet, les plans projetants ABb , CDd , sont parallèles Fig. 11. entre eux, comme perpendiculaires au même plan MN, et passant par deux droites parallèles; donc leurs traces ab , cd sont parallèles entre elles (26).

29. RÉCIPROQUE. *Si les projections de deux droites sont respectivement parallèles, les deux droites sont parallèles.*

Effectivement, ces droites sont les intersections de deux plans projetants, parallèles entre eux, avec deux autres plans projetants, parallèles entre eux.

30. THÉORÈME. *Lorsque deux droites sont perpendiculaires, leurs projections, sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont perpendiculaires.*

(*) Quand les deux plans ont leurs traces parallèles à la ligne de terre, ils se coupent suivant une parallèle à cette ligne, ou bien ils sont parallèles.

D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer

FIG. 12. que deux droites AB, CD étant perpendiculaires, la projection de AB , sur un plan MN passant par CD , est perpendiculaire à CD .

Les droites Aa, Bb, \dots qui projettent les points de AB , sont perpendiculaires à la droite CD située dans le plan MN . Et comme cette droite CD est supposée perpendiculaire à AB , elle est perpendiculaire au plan projetant $ABab$; donc elle est perpendiculaire à ab .

31. RÉCIPROQUE. Lorsque les projections de deux droites AB, CD sont perpendiculaires, et que l'une d'elles, CD , est parallèle au plan MN de projection, les deux droites sont perpendiculaires.

Supposons encore, pour plus de simplicité, que la droite CD soit située dans le plan MN . Par hypothèse, CD est perpendiculaire à la projection ab de AB . De plus, cette même droite CD , située dans le plan MN , est perpendiculaire aux droites Aa, Ab ; donc elle est perpendiculaire au plan $AaBb$, etc.

32. THÉOREME. Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, les projections de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces du plan.

FIG. 13. Par la droite AB , perpendiculaire au plan PCD , faisons passer le plan $ABza$, perpendiculaire au plan de projection MN : il coupe ce dernier plan suivant une droite az perpendiculaire à la trace CD du plan PCD (g). Or, az est la projection de AB sur le plan MN .

33. RÉCIPROQUE. Si les projections d'une droite AB sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan P , la droite est perpendiculaire au plan.

FIG. 13. La trace horizontale CD est perpendiculaire à la pro-

jetante Aa d'un point quelconque de la droite AB . Si donc, comme on le suppose, CD est perpendiculaire aussi à la *projection horizontale* aa , cette même trace est perpendiculaire au plan projetant, $AB\alpha a$. Le même raisonnement est applicable à la *trace verticale* et à la *projection verticale*. Par conséquent, le plan P est perpendiculaire aux deux plans projetants et, par suite, perpendiculaire à leur intersection, laquelle est la droite AB .

34. *Remarque.* Cette réciproque est en défaut dans le cas où les deux projections de la droite seraient perpendiculaires à la ligne de terre.

En effet, dans ce cas, la droite est indéterminée (14).

NOTATION ET PONCTUATION.

35. Avant d'exposer les solutions des problèmes relatifs à la ligne droite et au plan, nous établirons quelques conventions relatives au mode de représentation des différentes parties qui constituent les figures.

1° Nous supposerons que l'œil de l'observateur est placé au-dessus du plan horizontal, en avant du plan vertical, et à une distance infinie du plan sur lequel se fait la projection.

2° Les plans de projection partageant l'espace indéfini en quatre angles dièdres égaux entre eux, nous donnerons le nom de premier angle dièdre, ou de *première région*, à l'angle dans lequel est supposé le spectateur. La *deuxième* région est située derrière le plan vertical et au-dessus du plan horizontal. Enfin, la *troisième* et la *quatrième* région sont opposées, respectivement, à la deuxième et à la première.

3° Les grandes lettres A, B, C , etc., indiqueront des

points de l'espace; ces lettres ne paraîtront point dans les figures; les petites lettres correspondantes, a, b, c , etc., employées sans accent, serviront à désigner les projections horizontales des points A, B, C , etc.; ces petites lettres, affectées d'un accent, c'est-à-dire a', b', c' , etc., indiqueront les projections verticales des mêmes points A, B, C , etc.

4° Nous désignerons souvent un point de l'espace par ses deux projections; ainsi, lorsque nous parlerons d'un point (a, a') , il s'agira du point A dont les projections sont a, a' .

5° La ligne de terre sera ordinairement désignée par xy .

36. On nomme *épure* la feuille qui contient le tracé de toutes les constructions d'un problème.

On distingue, dans une épure :

1° Les *lignes principales*; qui représentent les données et les résultats d'un problème. Elles seront marquées par un trait plein et continu, lorsqu'elles seront visibles; elles seront *punctuées*, c'est-à-dire tracées en *points ronds*, si elles sont invisibles.

2° Les *lignes auxiliaires*, c'est-à-dire toutes celles qui ne seront employées que comme des moyens d'arriver à la solution du problème. Ces lignes seront toujours *poin-tillées*, ou composées de petits traits d'égale longueur, qu'elles soient visibles ou invisibles.

Lorsque, parmi ces lignes auxiliaires, il s'en trouvera quelqu'une qui offrira plus d'importance que les autres, et sur laquelle on voudra appeler l'attention, on pourra la représenter par une *ligne mixte*, composée de petits traits, séparés par un ou plusieurs points ronds.

CHAPITRE II.

INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS. — DROITES
ET PLANS DÉTERMINÉS PAR DIVERSES CONDITIONS.**Problème I.**

Trouver les traces d'une droite dont les projections sont données.

37. Supposons que les projections ab , $a'b'$ de la droite donnée coupent la ligne de terre aux points b , a' . Fig. 14.

Pour trouver la *trace horizontale* de la droite, c'est-à-dire le point où elle perce le plan horizontal, on observe que ce point, appartenant au plan horizontal, doit avoir sa projection verticale sur la ligne de terre xy (22); cette projection doit aussi se trouver sur $a'b'$, projection verticale de la droite; donc le point a' , où $a'b'$ rencontre xy , est la projection verticale de la trace horizontale de la droite. Si donc on élève $a'a$ perpendiculaire sur xy , l'intersection a des droites $a'a$, ab sera la trace horizontale de la droite donnée. De même, si par le point b , où la projection horizontale ab rencontre la ligne de terre, on élève bb' perpendiculaire à xy , son intersection b' avec la projection verticale $a'b'$, est la trace verticale de la droite.

De ce qui précède, on tire cette règle générale : *pour déterminer la trace horizontale d'une droite, on prolonge la projection verticale jusqu'à la ligne de terre; par le point de rencontre on mène, dans le plan horizontal, une perpendiculaire à la ligne de terre; cette perpendiculaire va couper la projection horizontale de la droite au point*

cherché. Pareillement, pour trouver la trace verticale de la droite, on prolonge la projection horizontale jusqu'à sa rencontre avec la ligne de terre; par le point ainsi obtenu on élève, dans le plan vertical, une perpendiculaire à la ligne de terre: cette perpendiculaire coupe, au point demandé, la projection verticale de la droite.

38. *Remarque.* D'après la position des traces d'une droite, on peut juger dans quelle région de l'espace (35, 2°) est située la partie de cette ligne comprise entre les plans de projection. Ainsi, dans la figure 14, la droite rencontrant le plan horizontal en avant du plan vertical, et le plan vertical au-dessus du plan horizontal, la partie AB de la droite appartient à la première région. On voit, avec la même facilité, que les figures 15, 16 et 17 représentent des droites AB situées, respectivement, dans la deuxième région, dans la troisième et dans la quatrième.

39. *Cas particuliers.* 1° La droite est contenue dans l'un des plans de projection, dans le plan horizontal, par exemple.

FIG. 18. Dans ce cas, la droite ab est à elle-même sa projection horizontale; sa projection verticale est la ligne de terre; et elle a pour trace verticale le point b , où elle rencontre cette ligne.

2° La droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

FIG. 19. D'après cette position de la droite, sa projection horizontale se réduit à la trace horizontale a ; sa projection verticale est $a'b'$ perpendiculaire à la ligne de terre. D'ailleurs, la droite n'a pas de trace verticale.

3° La droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Pour qu'une pareille droite soit déterminée, il faut que l'on donne les projections de deux de ses points (14). Supposons donc que m, m' et n, n' soient ces projections. Faisons tourner le plan $\alpha\alpha'b$, qui contient la droite MN, autour de sa trace horizontale $\alpha\alpha$, jusqu'à ce qu'il soit rabattu sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, chaque point de MN décrit, dans l'espace, une circonférence dont le plan est perpendiculaire à $\alpha\alpha$, dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur $\alpha\alpha$, et dont le rayon est cette perpendiculaire. Il est facile de voir, d'après cela, qu'en décrivant, du point α comme centre, l'arc $m'm''$, menant $m''M_1$ perpendiculaire à la ligne de terre et mM_1 parallèle à cette ligne, on aura, en M_1 , le rabattement du point M. De même, N vient se rabattre en N_1 . Par conséquent, M_1N_1 est le rabattement de la droite MN. Les points α, b_1 , où M_1N_1 rencontre la trace horizontale $\alpha\alpha$ et la ligne de terre, sont les rabattements des deux traces de MN.

Pour avoir ces traces elles-mêmes, il faut ramener le plan $\alpha\alpha'b'$ à sa position primitive, en le faisant tourner de nouveau autour de $\alpha\alpha$: le point b_1 se porte alors en b' ; et le point α , qui appartient à l'axe $\alpha\alpha$, reste immobile.

Nous obtenons ainsi, en a et en b' , la trace horizontale et la trace verticale de la droite donnée.

Problème II.

Trouver les projections d'une droite dont les traces sont données.

40. Soient a, b' les deux traces de la droite. La trace horizontale a est à elle-même sa projection horizontale, et sa projection verticale est le pied a' de la perpendicu-

laire aa abaissée du point a sur la ligne de terre. Semblablement, la trace verticale b' de la droite est à elle-même sa projection verticale, et sa projection horizontale est le point b , intersection de xy avec la perpendiculaire $b'b$. Les deux projections cherchées sont donc ab , $a'b'$.

Problème III.

Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.

FIG. 21. 41. Soient c , c' les projections du point donné, et ab , $a'b'$ les projections de la droite donnée. La droite cherchée passant par le point C , les projections de cette ligne doivent passer par les projections c , c' de C ; d'ailleurs, les projections de deux droites parallèles sont respectivement parallèles (28). On construira donc les projections de la droite demandée en menant, par les projections c , c' du point donné, des parallèles cd , $c'd'$ aux projections ab , $a'b'$ de la droite donnée.

Problème IV.

Faire passer un plan par trois points donnés.

FIG. 22. 42. Soient a , b , c , les projections horizontales des points donnés, et a' , b' , c' leurs projections verticales. Les droites AB , AC , BC qui, dans l'espace, joignent deux à deux les points donnés, ont pour projections horizontales ab , ac , bc , et pour projections verticales $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$. Ces droites percent le plan horizontal aux points m , n , p , et le plan vertical aux points q , r , s (Prob. I). Par conséquent, la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan passe par les points m , n , p ; la trace verticale $\beta\gamma$ passe par les points q , r , s ; et, si la construction a été faite avec exac-

titude, ces deux traces coupent la ligne de terre en un même point β .

43. *Remarque.* Ordinairement, on se borne à construire les projections de deux des trois droites, et à déterminer la trace horizontale ou la trace verticale de l'une de ces deux droites et les deux traces de l'autre.

44. *Cas particuliers.* 1° Si une des droites AB, BC, AC est parallèle au plan horizontal, le plan cherché coupe le plan horizontal suivant une parallèle à cette même droite; c'est-à-dire que la trace horizontale du plan est parallèle à la projection horizontale de la droite.

2° Quand une des droites AB, BC, AC est parallèle à la ligne de terre, le plan cherché est parallèle à cette ligne; par conséquent, ses deux traces sont parallèles à la ligne de terre. D'ailleurs, elles doivent contenir les traces des deux autres droites.

Problème V.

Faire passer un plan par deux droites qui se coupent, ou par deux droites parallèles.

45. Ce problème rentre dans celui que nous venons de traiter; car si l'on cherche les traces des deux droites, qu'on joigne les traces horizontales par une droite, et qu'on opère de même pour les traces verticales, on aura les traces du plan demandé. Comme vérification, il faut que ces traces se coupent en un même point de la ligne de terre.

46. *Cas particuliers.* 1° Les droites données AB, CD sont parallèles à la ligne de terre.

Dans ce cas, la construction générale est en défaut; **FIG. 23.** mais alors le plan cherché a ses traces parallèles à la

ligne de terre (44, 2°). Il suffit donc de trouver un point de chacune d'elles. A cet effet, on prend un point M sur l'une des droites données, un point N sur l'autre, et l'on cherche les traces R, S de la droite MN.

FIG. 24. 2° Les deux droites données se coupent en un point α , situé sur la ligne de terre.

La construction générale est encore en défaut; mais le plan cherché devant passer par le point α , il suffit de trouver un autre point de chacune de ses traces: c'est à quoi l'on parvient en opérant comme dans le cas précédent.

Problème VI.

Faire passer un plan par un point donné et par une droite donnée.

FIG. 25. 47. Si, par le point donné O, on mène une parallèle CD à la droite donnée AB, cette parallèle est située dans le plan cherché. On sera donc ramené à faire passer un plan par deux droites parallèles.

Au lieu de mener, par le point O, une parallèle à AB, on pourrait faire passer, par ce point, une droite quelconque, coupant AB. On retomberait ainsi sur le premier cas du Problème V.

Problème VII.

Par une droite donnée, faire passer un plan parallèle à une droite donnée.

FIG. 26. 48. Si l'on prend un point O sur la première droite donnée CD, et que par ce point on mène une parallèle PQ à la seconde droite donnée AB, le plan $\alpha\beta\gamma$, passant par PQ et CD, sera le plan demandé.

49. *Cas particulier.* La première droite est quelconque, la seconde est parallèle à la ligne de terre.

Le plan cherché a ses traces parallèles à la ligne de terre ($46^\circ, 1^\circ$); et comme ces droites passent par les traces de la droite donnée, elles sont complètement déterminées.

Problème VIII.

Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.

50. Si, par le point donné, on mène des parallèles aux droites données, on aura deux droites qui sont tout entières dans le plan cherché, et dont les traces déterminent les traces du plan.

L'épure est la même que celle du Problème VII.

Problème IX.

Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.

51. Prenons, dans le plan donné $\alpha\beta\gamma$, une droite quelconque MN, et menons, par le point donné O, une parallèle AB à MN. Cette parallèle est contenue dans le plan cherché; par suite, ses traces appartiennent aux traces du plan; et, comme ces dernières traces doivent être parallèles à celles du plan donné, elles sont complètement déterminées. FIG. 27.

52. La construction précédente peut être simplifiée, quand le plan $\alpha\beta\gamma$ n'est pas parallèle à la ligne de terre. En effet, menons, par le point O, une parallèle à la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan donné, c'est-à-dire une *horizontale* du plan. La projection horizontale de cette parallèle est la droite oa parallèle à $\alpha\beta$, et sa projection verticale est $o'a'$ parallèle à xy . La trace verticale a' de la droite OA appartenant à la trace verticale du plan cherché, on ob- FIG. 28.

tient les deux traces de ce plan en menant $\nu\alpha'\mu$ parallèle à $\gamma\beta$, et $\mu\lambda$ parallèle à $\beta\alpha$.

53. *Cas particuliers à examiner.* 1° Le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

2° Le plan est parallèle à la ligne de terre.

3° Le plan a ses traces en ligne droite.

4° Le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

Problème X.

Construire les projections de l'intersection de deux plans donnés.

FIG. 29. 54. Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ les traces du premier plan, et $\lambda\mu$, $\mu\nu$ les traces du second. Il est clair que le point a , où se coupent les traces horizontales, est la *trace horizontale* de l'intersection cherchée. Semblablement, cette intersection a pour *trace verticale* le point de rencontre des traces verticales. Donc cette droite est déterminée. Elle a pour projections ab , $a'b'$.

55. *Cas particuliers.* 1° L'un des plans donnés est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple; l'autre plan est quelconque.

FIG. 30. Le premier plan a sa trace verticale $\beta\gamma$ perpendiculaire à xy . L'intersection se projette donc suivant la trace horizontale $\alpha\beta$ et suivant la droite $a'b'$, qu'on obtient comme dans le cas général.

2° Les plans donnés sont perpendiculaires à un même plan de projection, au plan horizontal, par exemple.

FIG. 31. D'après un théorème connu, l'intersection est une perpendiculaire au plan horizontal, ayant pour projection

horizontale le point a , où se coupent les traces horizontales des deux plans.

3° L'un des plans est parallèle au plan horizontal, l'autre est parallèle à la ligne de terre.

Dans ce cas, la construction générale n'étant pas applicable, on cherche les intersections des deux plans donnés avec un plan auxiliaire, et l'on détermine le point de rencontre de ces deux droites. Ce point, situé sur l'intersection des deux plans donnés, la détermine complètement; car cette intersection est parallèle à la ligne de terre.

Ordinairement, on prend le plan auxiliaire perpendiculaire à la ligne de terre; on le considère alors comme un *nouveau plan de projection* (*), sur lequel on cherche les traces des plans donnés; et, de cette manière, on est ramené au cas général. Cette solution est celle que nous allons indiquer.

Coupons les plans donnés par le plan auxiliaire $\lambda\mu\nu$ perpendiculaire à xy , et rabattons, sur le plan horizontal, les intersections de ce plan auxiliaire avec les plans donnés. Le point r' , trace verticale de la première intersection, se rabat en r_1 ; et cette intersection a pour rabattement la droite r_1s_1 parallèle à $\lambda\mu$: r_1s_1 est donc, sur le plan auxiliaire de projection, la trace du plan $\varepsilon\varphi$. On détermine, semblablement, la trace mn_1 du plan $\alpha\beta\gamma\delta$ sur le plan auxiliaire. L'intersection o_1 des droites r_1s_1 , mn_1 est donc le rabattement d'un point de l'intersection des plans donnés. Les projections de ce point sont o et r' . Par conséquent, l'intersection des deux plans donnés, déjà

FIG. 32.

(*) Voir le chapitre suivant.

projetée verticalement en $\varepsilon\varphi$, a pour projection horizontale la parallèle aob à xy .

4° Les deux plans sont parallèles à la ligne de terre.

FIG. 33. Dans ce cas, comme dans celui qui précède, l'intersection est parallèle à la ligne de terre, et l'on est encore obligé de recourir à un plan auxiliaire.

5° Les plans donnés ont leurs traces horizontales parallèles, et leurs traces verticales non parallèles.

FIG. 34. Lorsque deux plans sont menés suivant deux droites parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites ; donc l'intersection AB des deux plans donnés $\alpha\beta\gamma$, $\lambda\mu\nu$, est parallèle aux traces horizontales $\alpha\beta$, $\lambda\mu$.

6° Les plans donnés rencontrent la ligne de terre en un même point.

FIG. 35. La construction générale étant en défaut, on y supplée, comme dans les cas 3° et 4°, en coupant les deux plans donnés par un plan auxiliaire $\lambda\mu\nu$, et cherchant les projections o , o' du point commun aux trois plans. On obtient ainsi les projections βo , $\beta o'$ de l'intersection demandée.

7° Chacun des plans donnés a ses deux traces en ligne droite.

FIG. 36. Soient $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les deux plans. Le point a' , où se rencontrent à la fois les traces verticales et les traces horizontales, représente la trace verticale et la trace horizontale de l'intersection cherchée. Considéré comme *trace verticale* de l'intersection, ce point a' se projette horizontalement en a , sur la ligne de terre. Au contraire, considéré comme *trace horizontale*, il a pour projection verticale le même point a . Conséquemment, l'intersection a ses deux projections confondues suivant la droite aa' perpendiculaire à xy . Cette intersection est donc contenue

dans le plan bab' perpendiculaire à la ligne de terre; elle perce les plans de projection, l'un en a' , l'autre au point *rabattu* en a' . Par suite, elle est inclinée à 45° sur chacun de ces plans (*).

56. *Cas particuliers à examiner.* 1° Chacun des plans donnés a ses deux traces en ligne droite; de plus, ces droites se coupent sur la ligne de terre.

2° L'un des plans est quelconque; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné hors de cette ligne.

3° L'un des plans est parallèle à la ligne de terre; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

4° L'un des plans est parallèle au plan horizontal; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

4° L'un des plans a ses deux traces en ligne droite; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Problème XI.

Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.

57. Les plans donnés, combinés deux à deux, déterminent, par leurs intersections, trois droites qui doivent passer par le point demandé. On cherche donc les projections de ces droites; et, quand les constructions sont faites exactement, les trois projections horizontales passent par un même point o , projection horizontale du point d'intersection O ; de même, les trois projections verticales se coupent en un même point o' ; enfin la droite oo' est perpendiculaire à la ligne de terre. FIG. 37.

(*) Il est facile de vérifier ces résultats, indépendamment de la théorie des projections.

58. *Cas particuliers à examiner.* 1° Le premier plan est quelconque ; le deuxième est parallèle à la ligne de terre ; le troisième est horizontal.

2° Le premier plan est horizontal ; le deuxième a ses traces en ligne droite ; le troisième passe par la ligne de terre et par un point donné.

3° Les trois plans ont leurs traces verticales parallèles entre elles.

Problème XII.

Trouver le point où une droite perce un plan.

59. Pour résoudre ce problème, on fait passer un plan quelconque par la droite ; on cherche l'intersection de ce plan avec le plan donné ; enfin on détermine le point de rencontre de cette intersection et de la droite donnée. Le point ainsi obtenu répond à la question.

Le plan auxiliaire peut avoir une position quelconque ; mais la construction étant plus simple quand il est perpendiculaire à l'un des plans de projection, nous commencerons par ce cas particulier.

FIG. 38. Soient $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ les traces du plan, et ab , $a'b'$ les projections de la droite. Prenons pour plan auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite : sa trace horizontale est ab , et sa trace verticale est qq' perpendiculaire à xy . L'intersection des deux plans est projetée en pq , $p'q'$; donc le point o' , où cette dernière droite rencontre $a'b'$, est la projection verticale du point cherché.

La projection verticale o' étant connue, on en conclut la projection horizontale o , que l'on pourrait, d'ailleurs, construire *directement*.

FIG. 39. 60. Quant on veut donner au plan auxiliaire une posi-

tion quelconque, on détermine d'abord les traces b , a' de la droite donnée; on les joint à un point δ pris à volonté sur xy : le plan $b\delta a'$ renferme la droite donnée. On cherche ensuite l'intersection PQ des plans $\alpha\beta\gamma$, $b\delta a'$: les points o , o' , où les projections de cette intersection coupent les projections de la droite donnée, sont les deux projections du point demandé.

Comme vérification, il faut que la droite oo' , qui joint ces projections, soit perpendiculaire à xy .

64. *Cas particuliers.* 1° Le plan est quelconque; la droite est parallèle à la ligne de terre.

En coupant le plan par l'un des deux plans projetants de la droite, ainsi que nous l'avons expliqué ci-dessus (59), on obtient la projection horizontale o ou la projection verticale o' du point cherché. FIG. 40.

2° Le plan donné est quelconque; la droite est horizontale.

L'épure, à quelques simplifications près, est encore celle qui répond au cas général. FIG. 41.

3° Le plan donné est quelconque; la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

La droite donnée étant verticale, sa projection horizontale se réduit à un point a , projection horizontale du point cherché; et sa projection verticale est $a'b'$, perpendiculaire à xy . Pour déterminer la projection verticale du point cherché, faisons passer un plan par la droite donnée: ce plan étant vertical, sa trace horizontale est une droite quelconque pq , assujettie seulement à passer par le point o ; sa trace verticale qq' est perpendiculaire à xy . L'épure s'achève comme dans le cas général. FIG. 42.

62. *Remarque.* Le dernier cas particulier peut servir à résoudre cette question : *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver l'autre projection.*

En effet, on peut considérer le point a comme la projection horizontale d'un point situé dans le plan $\alpha\beta\gamma$; et il est évident que ce dernier point est celui où la verticale élevée en a perce le plan.

63. *Cas particuliers à examiner.* 1° La droite est quelconque; le plan est horizontal.

2° La droite est quelconque; le plan est parallèle à la ligne de terre.

3° La droite est horizontale; le plan est parallèle au plan vertical de projection.

4° Le plan est quelconque; la droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

5° La droite est quelconque; le plan a ses traces en ligne droite.

6° La droite est parallèle à la ligne de terre; le plan a ses traces en ligne droite.

7° La droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre; le plan a ses traces en ligne droite.

8° La droite est quelconque; le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

9° La droite est horizontale; le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

Problème XIII.

Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée.

FIG. 43. 64. Soient o , o' les projections du point donné, et ab , $a'b'$ les projections de la droite donnée. D'un point quel-

conque β' de la ligne de terre, abaissons des perpendiculaires $\beta'\alpha'$, $\beta'\gamma'$ sur les projections de la droite : ces perpendiculaires sont les traces d'un plan $\alpha'\beta'\gamma'$ perpendiculaire à cette droite (32). Donc le plan $\alpha\beta\gamma$, passant par (o, o') , et parallèle au plan auxiliaire $\alpha'\beta'\gamma'$ (Prob. IX), est le plan demandé.

65. *Remarque.* Si l'on mène, par le point donné, une parallèle à la trace horizontale du plan cherché, c'est-à-dire une horizontale $(cd, c'd')$ perpendiculaire à la droite donnée, et que l'on détermine ensuite la trace verticale d' de cette parallèle, on n'aura pas besoin de construire le plan $\alpha'\beta'\gamma'$.

66. *Cas particuliers.* 1° La droite ab $a'b'$ est parallèle à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

La droite étant horizontale, le plan cherché est vertical ; donc sa trace horizontale passe par la projection horizontale o du point donné. D'ailleurs, les deux traces doivent être respectivement perpendiculaires aux projections de la droite ; elles sont donc complètement déterminées.

FIG. 44.

2° La droite donnée est perpendiculaire à l'un des plans de projection, au plan horizontal, par exemple.

Le plan horizontal de projection et le plan cherché sont parallèles, comme étant perpendiculaires à la droite donnée. On obtient donc la trace verticale inconnue, en menant, par la projection verticale o' du point donné, $\beta\gamma$ parallèle à xy .

FIG. 45.

67. *Cas particuliers à examiner.* 1° La droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

2° La droite donnée est perpendiculaire à la ligne de terre.

Problème XIV.

Mener, par un point donné O , une droite qui rencontre deux droites données AB, CD , non situées dans un même plan.

FIG. 46. 68. *Première solution.* Faisons passer deux plans, l'un par le point O et la droite AB , l'autre par le point O et la droite CD ; construisons ensuite l'intersection de ces deux plans. Cette intersection EF passe par le point donné; de plus, elle rencontre en général les droites données; donc EF est la droite demandée.

En effectuant les constructions indiquées, on trouve que le plan OAB a pour traces $\alpha\beta, \beta\gamma$; que le plan OCD a pour traces $\alpha'\beta', \beta'\gamma'$; et que l'intersection des deux plans est projetée en $ef, e'f'$. A cause des conditions données, l'épure comporte quatre vérifications.

FIG. 47. 69. *Seconde solution.* Au lieu d'employer les deux plans OAB, OCD , on peut se contenter de construire l'un d'eux, par exemple le plan OAB , et de déterminer le point H où ce plan est rencontré par la droite CD : la droite OH satisfait évidemment à la question.

Cette seconde solution donne lieu à une vérification.

Problème XV.

Trouver une droite parallèle à une droite donnée AB , et qui rencontre deux droites données CD, EF , non situées dans un même plan.

FIG. 48. 70. Par la droite CD , faisons passer un plan $\alpha\beta\gamma$ parallèle à AB ; cherchons le point P où la droite EF rencontre

ce plan ; enfin menons, par P, une parallèle MN à AB : MN est la droite demandée.

71. *Remarque.* Le problème est impossible quand la droite EF est parallèle au plan $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire *quand les trois droites sont parallèles à un même plan.*

CHAPITRE III.

DES PROJECTIONS AUXILIAIRES.

72. Très-souvent, la solution générale d'un problème de géométrie descriptive se simplifie lorsque les données ont une position remarquable par rapport aux plans de projection. Autrement dit, *les cas particuliers sont, presque toujours, plus simples que le cas général*. Par exemple, l'intersection de deux plans respectivement perpendiculaires aux plans de projection se projette suivant la trace horizontale de l'un des deux plans et suivant la trace verticale de l'autre.

On conçoit, d'après cela, qu'il peut quelquefois être utile de ramener un problème à l'un de ses cas particuliers, au moyen de *projections auxiliaires* faites sur des plans ayant, avec la figure donnée ou cherchée, certaines relations de position. On opère ces *transformations de projections*, analogues à la *transformation des coordonnées*, soit en effectuant un véritable *changement de plans de projection*, soit en faisant tourner la figure autour d'un axe convenablement choisi.

Ces deux procédés, qui ne diffèrent pas essentiellement l'un de l'autre (*), nécessitant l'emploi de *rabattements*,

(*) Soient H, V le plan horizontal et le plan vertical *primitifs*; soient H', V' le plan horizontal et le plan vertical *auxiliaires*; soient B, B' les plans bissecteurs des angles dièdres formés par ces deux couples de plans: en général, B et B' se coupent suivant une droite D . Cela posé, si l'on fait tourner le plan B autour de l'intersection D , de manière à le

nous commencerons par résoudre quelques problèmes relatifs à ce genre particulier de rotation (*).

Problème XVI.

Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan donné, trouver la position que prend ce point, lorsqu'on rabat, sur le plan horizontal, le plan donné.

73. Soit o la projection horizontale donnée. On en déduit aisément (62) la projection verticale correspondante o' . FIG. 49.

Le point O , en tournant autour de la trace horizontale $\alpha\beta$, décrit une circonférence dont le plan, perpendiculaire à $\alpha\beta$, est vertical. La trace horizontale de ce plan est donc (32) la perpendiculaire op à $\alpha\beta$. De plus le pied p de cette droite est le centre de la circonférence dont il s'agit. Enfin, le rayon Op est évidemment l'hypoténuse du triangle Oop , rectangle en o .

Rebattant ce triangle, dont la hauteur égale $\omega o'$ (22, 4°), autour de sa base op , et prenant, sur le prolongement de op , $pO_2 = pO_1$, nous aurons, en O_2 , le rabattement cherché.

74. *Remarque.* La projection horizontale o d'un point O situé dans un plan $\alpha\beta\gamma$, et le rabattement O_2 de O sur le plan horizontal, sont toujours sur une même perpendiculaire oO_2 à la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan.

rabattre sur le plan B' , les plans primitifs deviendront parallèles, respectivement, aux plans auxiliaires. Un changement de plans équivaut donc à une rotation.

(*) On a déjà vu, ci-dessus (39, 3°), l'un de ces problèmes.

Problème XVII.

Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les projections du point.

FIG. 50. 75. On suppose que O_2 soit le rabattement, sur le plan horizontal, d'un point O situé dans le plan donné; et l'on demande les deux projections de ce point O .

D'après le problème précédent, la projection horizontale o est située sur la perpendiculaire O_2p à la trace horizontale $\alpha\beta$; et sa distance à cette trace est la base du triangle rectangle poO_1 , dont l'hypoténuse égale pO_2 .

Pour déterminer cette hypoténuse *en direction*, il suffit de chercher le rabattement d'un de ses points; par exemple, le rabattement Q_1 de sa trace verticale (q, q') .

La direction pQ_1 étant connue, on obtient, avec la plus grande facilité, le rabattement Q , et les projections o, o' du point O .

Problème XVIII.

Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver le rabattement de la droite.

FIG. 51. 76. Soit ab la projection horizontale de la droite donnée, située dans le plan $\alpha\beta\gamma$. Il est évident qu'on obtiendra le rabattement de cette droite, sur le plan horizontal, en cherchant les rabattements de deux de ses points, et en les joignant par une ligne droite. Afin de simplifier les constructions, on choisit pour ces points les traces de la droite: la trace horizontale a , appartenant à l'axe de rotation, est à elle-même son rabattement; et l'on n'a

plus qu'à déterminer le rabattement B_2 de la trace verticale b' . On obtient ainsi aB_2 pour le rabattement cherché.

Problème XIX.

Connaissant le rabattement d'une droite située dans un plan donné, construire les deux projections de la droite.

77. Si l'on cherche les projections de deux points quelconques de la droite rabattue (Probl. XVII), on obtiendra les projections de cette ligne. Afin de simplifier les constructions, on prend, pour l'un des deux points, la trace horizontale a de la droite.

FIG. 52.

Problème XX.

Un point A étant donné, trouver sa projection sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.

78. Soit x_1y_1 la trace horizontale du *nouveau plan vertical de projection*, ou la nouvelle *ligne de terre*. La projection horizontale a du point A , et sa nouvelle projection verticale a'_1 , doivent être situées sur une même perpendiculaire $ax_1a'_1$ à x_1y_1 ; de plus,

FIG. 53.

$$a'_1x_1 = Aa = a'a.$$

Par conséquent, pour résoudre le problème :

Abaissez, de la projection horizontale donnée a , une perpendiculaire ax_1 sur la nouvelle ligne de terre x_1y_1 ; portez ensuite, sur le prolongement de cette perpendiculaire, à partir de x_1y_1 , une distance $x_1a'_1$ égale à la distance aa' comprise entre l'ancienne ligne de terre et l'ancienne projection verticale a' : le point a'_1 sera la nouvelle projection verticale cherchée.

79. *Remarques.* I. Pour indiquer clairement la construction précédente, on élève, par le point de rencontre o des deux lignes de terre, des perpendiculaires oz , oz_1 à ces deux droites; on mène la parallèle $a'b'$ à xy ; on décrit, du point o comme centre, l'arc $b'b'_1$, etc.

II. Les droites $a'b'$, $a'_1b'_1$, au lieu d'être regardées comme de simples *lignes de rappel* (*), peuvent être considérées aussi comme les rabattements de parallèles aux deux lignes de terre, menées par les *deux projections verticales* du point A. Ces parallèles, respectivement situées dans les deux plans verticaux de projection, se coupent en un point projeté horizontalement en o , et dont les deux projections verticales sont b' , b'_1 , etc.

III. Sur la figure, nous avons supposé la partie supérieure du nouveau plan vertical rabattue sur la partie $x_1z_1y_1$ du plan horizontal. Si le rabattement avait lieu dans un sens contraire à celui-là, la nouvelle projection verticale du point serait située du côté opposé à a'_1 . Dans chaque cas particulier, l'ordre des lettres x_1 , y_1 peut servir à reconnaître de quel côté le plan vertical a été rabattu.

Problème XXI.

Une droite étant donnée, trouver sa projection sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.

80. Il suffit, pour résoudre le problème, d'appliquer à deux points quelconques de la droite la construction précédente.

81. *Remarque.* Cette construction se simplifie quand

(*) On donne ce nom aux lignes qui servent à *rappeler* que deux longueurs sont égales.

on l'applique à la trace horizontale de la droite et à sa nouvelle trace verticale.

Problème XXII.

Un plan étant donné, trouver sa trace sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.

82. Prenons, sur la nouvelle ligne de terre x_1y_1 , un point quelconque a , et regardons-le comme la projection horizontale d'un point A situé dans le plan donné. En construisant (62, 78) les deux projections verticales a' , a'' , du point A, et joignant la nouvelle projection verticale a'' , au point de concours des droites $\alpha\beta$, x_1y_1 , nous aurons, en $\beta_1a''\gamma_1$, la nouvelle trace verticale demandée.

FIG. 54.

En effet, cette trace est le rabattement, sur le plan horizontal, de la droite suivant laquelle le nouveau plan vertical de projection coupe le plan donné.

83. *Remarque.* Le tracé se simplifie quand on prend, au lieu du point quelconque A, la trace verticale (b , b') de la droite dont il vient d'être question.

Problème XXIII.

Un point A étant donné, trouver ses projections sur un plan quelconque P, et sur un plan P' perpendiculaire à P.

84. Afin d'abrégier, nous dirons que le plan P, dont les traces sont $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, est le *nouveau plan horizontal* : en réalité, ce plan peut avoir, par rapport à l'horizon, une position quelconque.

FIG. 55.

Quant au *nouveau plan vertical* P', qui ne peut pas être

pris arbitrairement, nous le choisirons, pour plus de simplicité, perpendiculaire à la trace horizontale du plan P : sa trace horizontale x_1y_1 , perpendiculaire à $\alpha\beta$, sera une *ligne de terre auxiliaire*.

Cela posé, conservons d'abord l'ancien plan horizontal, et cherchons la nouvelle projection verticale a'_1 du point A (Probl. XX).

En second lieu, rabattons autour de x_1y_1 l'intersection BC des plans P, P' ; c'est-à-dire changeons de plan horizontal, en conservant le même plan vertical P' : le rabattement x_2y_2 de BC sera la nouvelle ligne de terre.

Ces constructions préliminaires étant effectuées, il ne restera plus qu'à déterminer, au moyen des projections a, a'_1 du point A , la nouvelle projection horizontale a_1 de ce point (Probl. XX).

85. Les problèmes dont nous venons de donner les solutions sont des cas particuliers de celui-ci : *Un point étant donné, trouver ses projections sur un plan donné P et sur un plan P' , perpendiculaire à P , et dont l'intersection avec celui-ci est donnée*. Nous engageons le lecteur à chercher la solution de cette question générale.

Problème XXIV.

Faire tourner un point A autour d'un axe vertical OZ , et construire les nouvelles projections du point.

FIG. 56. 86. La circonférence décrite autour de OZ , par le point A , se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal (5) ; sa projection verticale est une parallèle à la ligne de terre, passant par la projection verticale a' du point donné. Par conséquent, si l'on construit un angle aoa_1 , égal à

l'angle θ dont on suppose qu'a tourné le point A, a_1 sera la projection horizontale de la nouvelle position de A, ou la *nouvelle projection horizontale* de ce point, etc.

Problème XXV.

Faire tourner une droite AB autour d'un axe vertical OZ, et construire les nouvelles projections de la droite.

87. Il suffit évidemment, pour résoudre ce problème, d'appliquer la construction précédente à deux points A, B de la droite. On obtient ainsi l'épure 57.

88. *Remarques.* I. On simplifie le tracé en prenant les points A et B à égale distance de l'axe OZ : en effet, les *parallèles* qu'ils décrivent ont alors même projection horizontale.

II. On peut encore choisir, au lieu d'un point quelconque A, la trace horizontale de la droite donnée.

III. Enfin, si l'on cherche les nouvelles projections c_1 , c'_1 du point C qui décrit le *parallèle minimum*, évidemment projeté suivant une circonférence tangente à ab , et que l'on mène la tangente c_1a_1 égale à ca , la construction acquiert le dernier degré de simplicité (*).

FIG. 57.

Problème XXVI.

Faire tourner une droite AB autour d'un axe vertical OZ, de manière à la rendre parallèle au plan vertical.

89. Quand la droite AB, après avoir tourné autour de l'axe, sera devenue parallèle au plan vertical, sa nouvelle

FIG. 58.

() La droite $(oc, c'_1c'_1)$ est la *commune perpendiculaire* à la droite AB et à l'axe Oz. (Voyez Prob. XXXIII.)

projection horizontale a_1b_1 sera parallèle à la ligne de terre. Conséquemment, le point C de cette ligne, situé sur le parallèle minimum, aura sa nouvelle projection horizontale en c'_1 , sur le prolongement de $o'z'$, etc.

Problème XXVII.

Faire tourner un plan P autour d'un axe vertical, et construire les nouvelles traces du plan.

90. Pour résoudre ce problème, on prend deux droites dans le plan P, on les fait tourner autour de l'axe OZ, et l'on conduit un plan par les nouvelles positions de ces lignes. Afin de simplifier les constructions, nous avons choisi, au lieu de deux droites quelconques, la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan P et l'horizontale $(ob, o''b')$. Après la rotation, la première droite vient en $\alpha_1\beta_1$; la trace verticale de la seconde est (c_1, c'_1) ; donc les nouvelles traces du plan sont $\alpha_1\beta_1$ et $\beta_1c'_1\gamma_1$.

FIG. 59.

Problème XXVIII.

Faire tourner un plan P autour d'un axe vertical OZ, de manière à le rendre perpendiculaire au plan vertical.

91. Après la rotation, la trace horizontale $\alpha\beta$ vient en $\alpha_1\beta_1$, perpendiculairement à la ligne de terre, et l'horizontale $(ob, o''b')$ perce le plan vertical en (o', o'') . Par conséquent, $\beta_1o''\gamma_1$ est la nouvelle trace verticale du plan P.

FIG. 60.

92. *Remarques sur les rotations.* Si l'axe OZ, au lieu d'être vertical, est perpendiculaire au plan vertical, les

explications précédentes subsisteront, sauf quelques modifications évidentes. Et si cet axe a une position arbitraire, on commencera par rendre l'un des plans de projection perpendiculaire à OZ (Prob. XXIII), après quoi l'on n'aura plus qu'à faire l'application des derniers problèmes.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES DISTANCES.

Problème XXIX.

Déterminer la distance de deux points donnés, A, B.

FIG. 61. 93. Pour avoir la véritable grandeur de la droite AB projetée suivant ab , $a'b'$, rabattons, autour de sa trace horizontale ab , le plan vertical qui la contient (Prob. XVIII) : le rabattement de la distance AB sera A_1B_1 .

Cette construction peut être simplifiée ; car si l'on imagine par le point b , projection de B, une parallèle bC à BA, terminée à la verticale aA , on formera ainsi un triangle rectangle ayant pour base ab , pour hauteur la différence des deux verticales aA , bB , et dont l'hypoténuse est égale et parallèle à AB. Il suit de là que si, par le point a , on mène aC_1 perpendiculaire à ab et égale à la différence entre $\alpha a'$ et $\beta b'$, et qu'ensuite on tire C_1b , cette droite sera égale à AB.

Cette seconde construction peut, à son tour, être notablement simplifiée. En effet, menons $b'q'$ parallèle à xy ; prenons, sur cette droite, $q'b'_1 = ab$, et tirons $a'b'_1$. Cette dernière droite sera encore égale à AB ; car le triangle $a'q'b'$ est égal à C_1ab .

94. *Remarques.* I. Cette dernière solution revient à supposer que l'on fait tourner la droite AB autour de l'axe vertical projeté en a , de manière à la rendre parallèle au plan vertical. (Prob. XXVI.)

II. Si l'on raisonne, par rapport au plan vertical, comme on l'a fait relativement au plan horizontal, on obtiendra trois autres solutions du problème. Cela fait donc, en tout, six constructions différentes, qui doivent toutes donner le même résultat.

Problème XXX.

Trouver, sur une droite donnée CB, un point B qui soit à une distance donnée d'un point A de cette droite.

95. Faisons tourner le plan $cc'd'$ autour de sa trace horizontale cc' , puis construisons le rabattement cD_1 de la droite donnée et le rabattement A_1 du point donné (Prob. XVII, XVIII). Prenons maintenant sur cD_1 , à partir de A_1 , une distance A_1B_1 égale à la longueur donnée : B_1 sera le rabattement du point cherché ; etc. FIG. 62.

96. *Remarque.* Le problème admet deux solutions ; car la distance donnée peut être portée de part ou d'autre du point A_1 .

Problème XXXI.

Construire la distance d'un point donné à un plan donné.

97. *Première solution.* Cette distance est la perpendiculaire abaissée, du point donné A, sur le plan donné $\alpha\beta\gamma$. FIG. 63.
On en obtient les projections en menant, par les points a, a' , des perpendiculaires $ap, a'p'$ aux traces du plan (32). On cherche ensuite les projections p, p' du pied P de la perpendiculaire OP. Enfin, on trouve facilement (37) la vraie grandeur $a'p'$ de cette droite.

98. *Seconde solution.* Si l'on prend, pour plan vertical

Fig. 64. de projection (Prob. XX), le plan vertical passant par la perpendiculaire AP, on aura immédiatement, en $a'_1 p'_1$, la distance cherchée. On pourra se servir ensuite de la projection auxiliaire p'_1 pour déterminer les projections p, p' du point inconnu P. Comme vérification, $a'p'$ doit être perpendiculaire à $\beta\gamma$.

99. *Remarque.* Le problème précédent est l'un des exemples, très-rares, dans lesquels l'emploi du *changement de plans de projection*, ou plutôt l'emploi des rabattements, simplifie les constructions. La même remarque est applicable au problème suivant.

100. *Cas particuliers à examiner.* 1° Le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection.

2° Le plan est parallèle à la ligne de terre.

3° Le plan est perpendiculaire à la ligne de terre.

4° Le plan a ses traces en ligne droite.

5° Le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

Problème XXXII.

Construire la plus courte distance d'un point donné A à une droite donnée BC.

Fig. 65. 101. *Première solution.* Par le point A, menons un plan $\alpha\beta\gamma$ perpendiculaire à BC. Construisons les projections du point P où la droite perce le plan : la droite AP, évidemment perpendiculaire à BC, sera la plus courte distance cherchée. Pour plus de clarté dans l'épure, on n'a pas construit le rabattement de cette droite.

Fig. 66. 102. *Seconde solution.* Si l'on fait tourner la droite BC autour d'un axe vertical passant par le point A, de manière à la rendre parallèle au plan vertical, la plus courte dis-

tance cherchée se projette suivant une perpendiculaire $a'p'_1$ à la nouvelle projection verticale $b'_1c'_1$ (51). Il ne reste donc plus, pour obtenir les projections cherchées ap , $a'p'$, qu'à faire revenir la figure à sa position primitive.

103. *Cas particulier à examiner.* 1° La droite donnée est parallèle à la ligne de terre.

2° La droite est dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

3° La droite est perpendiculaire à la ligne de terre.

Problème XXXIII.

Construire la plus courte distance de deux droites données, non situées dans un même plan.

104. *Première solution.* On sait que, pour déterminer la plus courte distance entre deux droites AB, CD, non situées dans un même plan, il faut : 1° mener par AB un plan parallèle à CD; 2° abaisser, d'un point quelconque C de CD, une perpendiculaire CP sur ce plan; 3° mener, par le pied P de la perpendiculaire, une parallèle PQ à CD; 4° par le point Q, où cette parallèle rencontre AB, mener une droite QS, parallèle à CP. Cette ligne QS, qui rencontre CD en un point S, est la plus courte distance demandée.

Appliquons la méthode des projections à la solution que nous venons de rappeler.

Soient ab , $a'b'$ et cd , $c'd'$ les projections des droites données. Afin de faire passer par AB un plan parallèle à CD, prenons sur AB un point (o, o') quelconque; et, par ce point, menons $(oh, o'h')$ parallèle à CD. Les traces γ , h de cette parallèle, et les traces a , b' de la droite AB, dé-

FIG. 67.

terminent le plan cherché $\alpha\beta\gamma$. Nous devons maintenant, d'un point quelconque de CD , abaisser une perpendiculaire sur ce plan; mais, afin de rendre les constructions plus simples, menons cette droite par le point (c, c') où CD perce le plan horizontal. Elle a pour projections les droites $cp, c'p'$, respectivement perpendiculaires aux traces $\alpha\beta, \beta\gamma$ du plan auxiliaire; et elle rencontre ce plan au point P , projeté en p, p' . Actuellement, faisons passer par ce point, une parallèle $(pq, p'q')$ à la droite CD , et construisons le point (q, q') , où cette parallèle rencontre la ligne AB . Enfin, tirons qs parallèle à pc , et $q's'$ parallèle à $p'c'$: les droites $qs, q's'$ sont les projections de la plus courte distance demandée, laquelle a pour vraie grandeur $s'r'$.

Quand les constructions ont été faites avec exactitude, les droites pp', qq' et ss' sont perpendiculaires à xy .

105. *Remarque.* La recherche de la plus courte distance entre deux droites AB, CD , ou de la *commune perpendiculaire* à ces lignes, peut être réduite à ces deux parties principales: 1° *trouver un plan P , parallèle à AB et à CD* ; 2° *mener une droite perpendiculaire à P , et qui rencontre AB et CD .*

Cette remarque peut, ainsi qu'on va le voir, servir à simplifier la construction précédente.

106. *Cas particuliers.* 1° Les deux droites sont horizontales.

FIG. 68. Soient ab, cd les projections horizontales des deux droites, et soient $a'b', c'd'$ leurs projections verticales, parallèles à la ligne de terre. Puisque les droites AB, CD sont parallèles au plan horizontal de projection, leur plus courte distance sera, d'après la remarque précédente, une droite verticale. Il ne s'agit donc plus que de mener une

verticale qui rencontre les deux droites données. Les projections de cette ligne sont le point e , où se coupent les projections horizontales des droites données, et la perpendiculaire $e'f'$ à la ligne de terre. De plus $e'f'$ est la distance des deux droites.

2° L'une des droites est verticale; l'autre est quelconque.

La droite AB étant verticale, le plan P sera vertical, et aura sa trace horizontale parallèle à cd . Par suite, la projection horizontale de la plus courte distance est ap perpendiculaire à cd , et sa projection verticale est $p'q'$ parallèle à la ligne de terre.

FIG. 69.

3° L'une des droites est quelconque; l'autre est la ligne de terre.

On ramène ce cas particulier à celui qui précède, en prenant, pour nouveau plan vertical, un plan x_1y_1 perpendiculaire à la ligne de terre xy . En effet, sur ce nouveau plan de projection, la droite $(ab, a'b')$ est projetée en $a'_1b'_1$, et la plus courte distance est projetée, en vraie grandeur, suivant op'_1 , perpendiculaire à $a'_1b'_1$. Il ne reste plus qu'à revenir du rabattement aux positions primitives, et l'on trouve $pq, p'q'$ pour projections de la plus courte distance.

FIG. 70.

107. *Seconde solution.* M. Abel Transon a fait remarquer (*) que le problème de la plus courte distance peut être ramené à celui-ci : *Trouver une droite parallèle à une droite donnée, qui rencontre deux droites données* (Prob. XV).

En effet, la commune perpendiculaire EF aux deux droites données AB, CD, évidemment contenue dans un plan perpendiculaire à AB et dans un plan perpendicu-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XI, p. 176.

laire à CD, est parallèle à l'intersection GH de deux plans P, Q, assujettis seulement à la condition d'être respectivement perpendiculaires à AB et CD.

Par conséquent : *menez arbitrairement un plan P, perpendiculaire à AB, et un plan Q, perpendiculaire à CD; construisez l'intersection GH de ces deux plans; enfin, déterminez une droite parallèle à GH et rencontrant AB et CD: cette parallèle sera la plus courte distance cherchée.*

Nous engageons le lecteur à construire l'épure et à la comparer à celles que nous avons expliquées ci-dessus.

CHAPITRE V.

ANGLES FORMÉS PAR DES DROITES ET DES PLANS.

Problème XXXIV.

Construire l'angle de deux droites données.

108. Si les droites ne se coupent pas, et que, par un point O pris à volonté, on y mène des parallèles OA , OB , l'angle AOB formé par ces parallèles sera ce qu'on appelle l'angle des droites données. FIG. 71.

Pour construire l'angle AOB , cherchons la trace horizontale ab du plan AOB ; déterminons (Probl. XVI) le rabattement O_2 du point O ; joignons O_2 aux traces horizontales a , b des droites OA , OB : aO_2b sera l'angle cherché.

109. *Remarque.* Le point p , pied de la hauteur du triangle aob , est en même temps le pied de la hauteur du triangle aOb , situé dans l'espace et rabattu en aO_2b (30). De plus, la droite pO_1 est cette hauteur pO , rabattue autour de po (Probl. XXIX).

110. *Cas particulier.* L'une des droites est horizontale; l'autre est quelconque.

La trace horizontale du plan AOB est, évidemment, la parallèle bc à la projection horizontale oa de la première droite. Si l'on rabat ce plan sur le plan horizontal, le point O viendra se placer en O_2 , et le rabattement de OA sera la droite O_2A_2 parallèle à bc . Donc l'angle demandé est bO_2A_2 . FIG. 72.

111. *Cas particuliers à examiner.* 1° L'une des deux

droites données est perpendiculaire à l'un des plans de projection; l'autre droite est quelconque.

2° La première droite est parallèle à la ligne de terre; la seconde est quelconque.

3° Les deux droites ont même projection horizontale.

4° Les deux droites données sont dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Problème XXXV.

Construire la bissectrice de l'angle formé par deux droites OA, OB.

FIG. 73. 112. Soit, comme dans le problème précédent, aO_2b le rabattement de cet angle. Menons la bissectrice O_2d de aO_2b , et supposons que le plan AOB revienne à sa position primitive. Dans ce mouvement, le point d , *trace horizontale* de O_2d , ne change pas de position; donc od , $o'd'$ sont les deux projections demandées.

Problème XXXVI.

Construire les angles que fait une droite avec les plans de projection.

113. *L'inclinaison d'une droite sur un plan est mesurée par l'angle que fait la droite avec sa projection sur le plan*; par conséquent, le problème proposé est un cas particulier du Problème XXXIV. Par conséquent aussi, on obtiendra l'angle de la droite AB avec le plan horizontal,

FIG. 74. en construisant celui qu'elle fait avec sa projection horizontale ab . A cet effet, on rabat AB en aB_1 , autour de sa projection horizontale ab : l'angle cherché est baB'_1 .

On peut aussi faire tourner la droite AB autour de bb' , trace verticale du plan qui la contient, de manière à le rabattre sur le plan vertical. On obtient ainsi, pour l'angle cherché, bA_2b' .

L'inclinaison de la droite et du plan vertical se construit de même, soit par un rabattement sur le plan vertical, soit par un rabattement sur le plan horizontal. La première construction donne $a'B_1b'$ pour l'angle cherché; l'autre donne aA_2a' .

114. *Cas particuliers à examiner.* 1° La droite est parallèle à l'un des plans de projection.

2° La droite rencontre la ligne de terre.

3° La droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Problème XXXVII.

Construire l'angle formé par les traces d'un plan donné.

115. Cette question est encore un cas particulier du Problème XXXIV. Pour la résoudre, on emploie la méthode générale, c'est-à-dire que, faisant tourner le plan autour de sa trace horizontale $\alpha\beta$, on cherche le rabattement βB_2 de la trace verticale : $\alpha\beta B_2$ est l'angle demandé.

FIG. 75.

116. *Remarque.* Il est visible que $\beta B_2 = \beta b'$; donc, pour déterminer le rabattement B_2 du point (b, b') pris à volonté sur $\beta\gamma$, on peut se dispenser de construire le rabattement *auxiliaire* aB_1 .

Problème XXXVIII.

Construire l'angle d'une droite donnée et d'un plan donné.

117. D'après la définition rappelée ci-dessus (113), il faudrait, pour déterminer l'angle cherché, commencer par projeter la droite sur le plan, après quoi l'on construirait l'angle formé par cette projection et la droite donnée. On simplifie la solution en observant que cet angle est le complément de celui que forment la droite et une perpendiculaire au plan. Le problème qui nous occupe est donc, comme les précédents, ramené à la recherche de l'angle formé par deux droites.

FIG. 76.

Soient ab , $a'b'$ les projections de la droite donnée. D'un point quelconque (o , o') de cette ligne, abaissons une perpendiculaire oc , $o'c'$ sur le plan (32). Si nous construisons l'angle aO_2D_2 formé par cette perpendiculaire et par la droite AB , et si nous menons O_2E_2 perpendiculaire à O_2D_2 , $D_2O_2E_2$ sera l'angle demandé.

118. *Cas particuliers à examiner.* 1° La droite est quelconque; le plan est parallèle à la ligne de terre.

2° La droite est quelconque; le plan passe par la ligne de terre et par un point donné.

3° La droite est parallèle à la ligne de terre; le plan donné est quelconque.

Problème XXXIX.

Construire l'angle de deux plans donnés.

FIG. 77. 119. Soient $\alpha\gamma\beta$, $\lambda\mu\nu$ les plans donnés. Concevons qu'en un point quelconque O de leur intersection on mène un plan P perpendiculaire à cette droite; ce plan coupera

les plans donnés suivant deux droites partant du point O , et faisant entre elles l'angle demandé. Si l'on mène une droite quelconque cd perpendiculaire à la projection horizontale ab de l'intersection, on pourra regarder cd comme étant la trace horizontale du plan P . Par suite, les intersections de ce plan avec les plans donnés, c'est-à-dire les côtés de l'angle cherché, sont les deux droites qui, partant des points c, d , vont se couper au point O . L'angle cherché est donc l'angle au sommet du triangle cOd , dont cd est la base. Il suffit, pour construire ce triangle, de déterminer sa hauteur et le pied de cette droite.

Le point O , appartenant à l'intersection des plans donnés, doit se projeter sur la projection horizontale de cette droite. Donc la hauteur du triangle cOd est projetée suivant ab , et le point p en est le pied. D'ailleurs, cette droite est contenue dans le plan P , perpendiculaire à l'intersection des plans donnés; d'où il résulte qu'elle est perpendiculaire à cette intersection. Pour l'avoir en vraie grandeur, on rabat le plan abb' sur le plan horizontal : la perpendiculaire pO_1 au rabattement aB_1 de AB est la longueur cherchée, qu'il suffit de porter de p en O_2 . L'angle des deux plans est donc cO_2d .

120. *Remarques.* I. La perpendiculaire pO_1 est plus petite que l'oblique pa ; donc le sommet O_2 doit toujours se trouver entre les points a, p .

II. On peut ramener la recherche de l'angle de deux plans à la recherche de l'angle de deux droites; car, si d'un point quelconque, pris dans l'angle des plans, on leur mène des perpendiculaires, l'angle de ces droites sera le supplément de l'angle des plans.

III. La construction précédente peut être expliquée au moyen des *projections auxiliaires* (Ch. III). En effet, si l'on prend abb' pour plan vertical de projection, et ba pour nouvelle ligne de terre, B_1a sera la nouvelle projection verticale de l'intersection AB ; O_1p et pc seront les deux traces du plan P , perpendiculaire à cette droite; en sorte que les deux côtés de l'angle cherché auront O_1 pour trace verticale commune, et c , d pour traces horizontales; etc.

214. *Cas particuliers à examiner.* 1° Les plans donnés ont leurs traces horizontales parallèles, ou leurs traces verticales parallèles.

2° Le premier plan est perpendiculaire à la ligne de terre; le second est quelconque.

3° Le premier plan est parallèle à la ligne de terre; le second est quelconque.

4° Les deux plans sont parallèles à la ligne de terre.

5° Les deux plans ont même trace horizontale.

6° Le premier plan est quelconque; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

7° L'un des plans est parallèle à la ligne de terre; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

8° Le premier plan a ses deux traces en ligne droite; l'autre passe par la ligne de terre et par un point donné.

Problème XL.

Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans donnés.

FIG. 78. 122. Si, après avoir construit le rabattement $cO'd$ de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre formé par les

plans donnés, on mène (Probl. XXXV) la bissectrice O_3e de cO_2d_2 , on a, en e , un point de la trace horizontale du plan bissecteur. Ce plan $a\delta b'$ est donc déterminé.

Problème XXI.

Construire les angles que forme un plan avec les plans de projection.

123. Pour construire l'angle du plan $\alpha\beta\gamma$ et du plan horizontal, il suffit, d'après le Problème XXXIX, de mener un plan vertical abb' ayant sa trace horizontale perpendiculaire à $\alpha\beta$, et de construire l'angle que forme, avec sa projection horizontale ab , la droite qui joint dans l'espace les points a et b' . FIG. 79.

Nous retombons donc sur le Problème XXXVIII, et nous trouvons baB_1 pour l'angle cherché.

Pour construire l'angle formé par le plan donné avec le plan vertical, on procéderait de la même manière.

124. *Cas particuliers à examiner.* 1° Le plan est parallèle à la ligne de terre.

2° Le plan a ses deux traces en ligne droite.



CHAPITRE VI.

RÉSOLUTION DE L'ANGLE TRIÈDRE. — RÉDUCTION A L'HORIZON.

— SPHÈRE INSCRITE. — SPHÈRE CIRCONSCRITE.

125. Les *éléments* d'un angle trièdre quelconque sont les trois *faces* et les trois *angles dièdres*. Si l'on se donne trois de ces *six* éléments, on peut se proposer de trouver les trois autres : c'est là ce qu'on appelle *résoudre un angle trièdre*.

126. Le problème comporte six cas distincts. En effet, représentons par A, B, C les trois angles dièdres du trièdre, par *a*, *b*, *c* les faces opposées à ces angles, et nous aurons six manières, *essentiellement différentes*, de choisir les données, savoir :

1°	<i>a</i> , <i>b</i> , <i>c</i> ;	4°	A, B, C;
2°	<i>b</i> , <i>c</i> , A;	5°	B, C, <i>a</i> ;
3°	<i>b</i> , <i>c</i> , B;	6°	A, B, <i>c</i> .

Par la considération de l'angle *trièdre supplémentaire*, les trois derniers cas peuvent être ramenés aux trois premiers. Car si l'on donne, par exemple, les trois angles dièdres A, B, C; comme les suppléments de ces angles sont égaux aux faces du trièdre supplémentaire, il ne s'agira plus que de construire un angle trièdre, connaissant ses trois faces.

Nous pouvons donc supposer que les données sont : les

trois faces, ou deux faces et l'angle dièdre compris, ou deux faces et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles.

Problème XLII.

Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, trouver les trois angles dièdres.

127. Supposons qu'on ouvre l'angle trièdre $SABC$ suivant l'arête SC , et qu'on fasse tourner les plans CSA , CSB autour des arêtes SA , SB , pour les rabattre sur le plan de la face ASB , supposé horizontal. On obtiendra ainsi les angles ASC_1 , BSC_2 , respectivement égaux à b , a .

FIG. 80.

Si l'on prend sur les droites SC_1 , SC_2 deux points quelconques M_1 , M_2 , également éloignés du sommet S , on pourra regarder ces deux points comme les rabattements, sur le plan horizontal, d'un même point M de l'arête SC . Conséquemment (74), ce point M a pour projection horizontale le point de concours m des droites M_1g , M_2h , perpendiculaires à SA , SB ; et la droite Sm est la projection horizontale de l'arête SC .

Joignant le point M , projeté en m , aux points m , g , h , on forme deux triangles rectangles, dans lesquels les angles Mmg , Mmh mesurent les angles dièdres inconnus A et B , et dont les hypoténuses Mg , Mh sont, respectivement, égales à M_1g , M_2h .

Les rabattements m_1mg , m_2mh de ces triangles font donc connaître les angles dièdres A et B .

Quant au troisième angle dièdre C , qui a pour arête SC , on l'obtient en menant, par le point M , un plan perpendiculaire à cette arête, et en construisant (119) le rabattement du triangle qu'il détermine par son intersection avec le plan horizontal et les plans SCA , SCB .

Ces dernières droites, évidemment perpendiculaires à SC , se rabattent, autour de SA et de SB , suivant M_1e perpendiculaire à SC_1 , et suivant M_2f perpendiculaire à SC_2 . La base du triangle cherché est donc ef .

Il ne reste plus qu'à rabattre en eM_3f ce triangle. Par conséquent, l'angle eM_3f est égal à l'angle dièdre C .

128. *Remarque.* La construction précédente comporte plusieurs vérifications.

1° Les droites mm_1 , mm_2 doivent être égales, car chacune d'elles représente la vraie grandeur de la verticale mM .

2° L'arête SC , perpendiculaire au plan eMf , doit avoir sa projection horizontale Sm perpendiculaire à la trace horizontale ef de ce plan.

3° Le point M_3 , rabattement du sommet M , doit se trouver sur la droite Sm .

129. *Discussion.* On peut toujours supposer que ASB est la plus grande des trois faces données. Alors, pour que le trièdre soit possible, les circonférences décrites autour des droites SB, SA , par les points M_1, M_2 , doivent se rencontrer. La première circonférence est projetée toute entière sur son diamètre M_1gn , corde de l'arc M_1in . De même, la seconde circonférence est projetée suivant la corde M_2p de l'arc M_2kp . Ces deux circonférences se couperont dans le cas seulement où les cordes M_1gn, M_2p se coupent. Ceci exige que la somme des arcs in, kp surpasse l'arc ki , ou que la plus grande face soit moindre que la somme des deux autres. On retombe donc sur la condition connue.

Problème XLIII.

Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

130. Soient $ASB = c$, $ASC = b$ les faces données, et soit A l'angle dièdre donné, compris entre ces faces.

Prenons, comme dans le problème précédent, le plan de la face ASB pour plan horizontal, et soit ASC_1 le rabattement de la face ASC : le rabattement BSC_2 de la troisième face serait connu, si nous connaissions le rabattement M_2 d'un point M de l'arête SC (Probl. XLII). Ce point M_2 se trouve sur la circonférence M_1M_2 et sur la perpendiculaire mM_2 à SB , menée par la projection horizontale m du point M . Or, pour déterminer m , il suffit, d'après le problème précédent, de construire le triangle rectangle m_1mg , au moyen de l'hypoténuse $gm_1 = gM_1$ et de l'angle $mgm_1 = A$.

Les trois faces étant connues, on trouvera les deux angles dièdres B , C par le problème précédent.

Problème XLIV.

Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.

131. Soient $BSA = c$, $C_1SA = b$ les faces données, et soit B l'angle dièdre donné, opposé à la face b . Prenons encore pour plan horizontal le plan de la face BSA ; et, par un point g , pris à volonté sur l'arête SA , menons un plan perpendiculaire à cette droite. Ce plan, dont la trace horizontale gp est perpendiculaire à SA , rencontre l'arête SC en un point M ; la section que fait ce plan dans

FIG. 81.

FIG. 82.

l'angle dièdre est donc un triangle pMg qu'il s'agit de construire.

En premier lieu, et d'après les deux problèmes précédents, le rabattement m_1 du sommet M , effectué autour de gp , doit se trouver sur la circonférence décrite du point g comme centre, avec M_1g pour rayon.

D'un autre côté, le point M est sur la section faite, dans la face inconnue BSC , par le plan vertical gp . Le point p appartient au rabattement de cette section, et il est très-facile d'avoir un second point de ce rabattement.

En effet, si par le point g nous imaginons un plan gg perpendiculaire à SB , ce plan coupera les deux faces BSA , BSC suivant deux droites qg , qO faisant entre elles un angle égal à l'angle dièdre B , et il coupera le plan vertical mgp suivant une droite gO projetée en g . Si donc, après avoir fait l'angle gqO_1 égal à l'angle dièdre B , nous menons gO_2 perpendiculaire à qg et égale à gO_1 , le point O_2 sera le rabattement du point O , et pO_2 sera le rabattement de l'intersection de la face BSC avec le plan vertical Mgp (*).

Le rabattement m_1 de M étant trouvé, l'épure s'achève sans difficulté.

132. *Discussion.* Quand la droite pO_2 rencontre la demi-circonférence M_1g en deux points m_1 , m'_1 , comme cela a lieu sur la figure, le problème a, en général, deux solutions. La troisième face de l'angle trièdre déterminé par le point m_1 est C_2SB ; celle qui correspond au point m'_1 est C'_2SB .

(*) La dernière construction résout ce problème : *Trouver la trace verticale pO_2 d'un plan, connaissant sa trace horizontale Sp , et l'angle B qu'il forme avec le plan horizontal.*

Le problème n'a cependant deux solutions que si les points m, m'_1 sont tous deux à la droite de l'arête SB : si le point m'_1 est à gauche de SB, c'est-à-dire *au-dessous* de pg , il ne donne pas de solution, parce qu'alors l'angle dièdre suivant SB, au lieu d'être égal à B, en est le *supplément*. Quand la demi-circonférence M_1g est tangente à la droite pO_2 , les deux solutions se réduisent à une seule. Enfin, lorsque ces lignes ne se rencontrent pas, le problème est impossible.

Problème XLV.

Réduire à l'horizon l'angle de deux droites.

133. Supposons que l'on connaisse l'angle AOB formé par deux droites OA, OB, et que l'on connaisse aussi les inclinaisons de ces droites sur la verticale OC passant par leur point de concours O. Si l'on projette OA, OB sur un plan horizontal quelconque, l'angle A'O'B', formé par les projections, est ce qu'on appelle l'angle AOB, *réduit à l'horizon*. Il est clair que l'angle A'O'B' mesure l'inclinaison des plans verticaux COA, COB ; ainsi la réduction à l'horizon n'est qu'un cas particulier de la résolution d'un angle trièdre. Cependant, à cause de la disposition particulière des données, on le résout directement comme il suit.

Prenons, pour plan vertical de projection, le plan de la face AOC ; et supposons que la face BOC ait tourné autour de la verticale OC jusqu'à ce qu'elle soit venue se rabattre sur le plan vertical. Soient alors o, o' les deux projections du sommet de l'angle trièdre, $c'o'a$ la face COA, $c'o'b'$ le rabattement de l'autre face, $ao'b''$ un angle égal à l'angle AOB des deux droites.

D'après ces données, le côté AO de l'angle AOB a pour projection horizontale la partie oa de xy ; par conséquent, il ne s'agit plus que de trouver la projection horizontale du second côté OB , ou seulement sa trace horizontale b .

Pour déterminer ce point b , considérons le triangle aOb , ayant pour sommets le point O et les traces horizontales a, b des côtés OA, OB . Nous connaissons, dans ce triangle, le côté $Oa = o'a$, l'angle $AOB = ao'b''$, et le côté $Ob = o'b'$; nous pouvons donc construire le rabattement $ao'b''$ de aOb . Par suite, la trace horizontale b sera l'intersection de la circonférence décrite du point a comme centre, avec ab'' pour rayon, et de la circonférence décrite du point o comme centre, avec ob pour rayon. L'angle cherché est donc aob .

134. *Cas particulier à examiner.* L'une des droites données est horizontale.

Problème XLVI.

Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.

135. Le centre de la sphère doit être également distant des quatre sommets de la pyramide; conséquemment, ce centre est le point d'intersection des trois plans élevés perpendiculairement sur les milieux des trois arêtes (*). On doit, bien entendu, choisir trois arêtes non situées dans une même face de la pyramide, sans quoi les trois plans se couperaient suivant une même droite.

Afin de simplifier les constructions, on prend pour plan horizontal de projection le plan ABC d'une des faces, et pour plan vertical de projection un plan parallèle à l'a-

Fig. 85.

(*) *Éléments de géométrie* (2^e édition, p. 288).

rête SA. Alors, cette arête a pour projection horizontale une droite sa parallèle à xy , et les projections verticales des sommets A, B, C sont les points a' , b' , c' de la ligne de terre; de sorte que si l'on joint les projections s et s' du sommet S, respectivement aux projections a , b , c et a' , b' , c' des sommets de la base, on obtiendra les projections des arêtes qui partent du sommet S. Cela posé, par les milieux M, N des arêtes AB, AC, menons des plans perpendiculaires à ces droites : ces plans sont verticaux, et leur intersection est une verticale ayant pour trace le point o de rencontre des perpendiculaires mo , no . On sait que cette droite est le lieu géométrique de tous les points à égale distance des sommets A, B, C; donc elle passe par le centre de la sphère demandée; par suite, ce centre a pour projection horizontale le point o , et il a sa projection verticale située sur $o'o''$, perpendiculaire à la ligne de terre.

Pour déterminer cette projection verticale, on observe que le plan mené par le milieu de SA, perpendiculairement à cette arête, contient le centre. D'ailleurs, ce plan est perpendiculaire au plan vertical de projection; donc, sa trace verticale $p'o'$, perpendiculaire au milieu p' de $s'a'$, passe par la projection verticale o' du centre, etc. Les droites oa , $o'a'$ sont les projections d'un rayon, dont on construira aisément la vraie grandeur $o'r'$.

136. *Remarque.* Les projections de tous les points situés à l'intérieur de la sphère circonscrite sont comprises dans les cercles décrits des points o et o' comme centres avec le rayon $o'r'$; par conséquent, ces cercles peuvent être regardés comme les projections des contours apparents de la sphère, relatifs à chacun des plans de projection.

Problème XLVII.

Inscrire une sphère à une pyramide triangulaire.

137. Le centre de la sphère inscrite est le point également distant des quatre faces de la pyramide; par conséquent, ce centre est à l'intersection des plans qui divisent en deux parties égales chacun des six angles dièdres. Pour le déterminer, il faut construire trois de ces six plans bissecteurs, pourvu toutefois qu'ils ne passent pas par le même sommet de la pyramide (car, dans ce cas, ils se couperaient suivant une droite), et chercher leur point d'intersection.

FIG. 86. Afin de simplifier les constructions, on prend, comme dans le problème précédent, la base ABC de la pyramide pour plan horizontal de projection.

Si l'on considère les trois plans bissecteurs des angles dièdres ayant pour arêtes les côtés de cette base, on reconnaît que ces plans forment, par leurs intersections, un tétraèdre $OABC$, ayant même base que la pyramide donnée, et dont le sommet O , intérieur à la pyramide, est le centre de la sphère demandée. Il suit de là que la section de ce tétraèdre par un plan horizontal quelconque x_1y_1 est un triangle ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de la base ABC ; donc les projections horizontales de ces côtés sont des parallèles a_1b_1 , b_1c_1 , c_1a_1 , à ab , bc , ca . Si ces projections étaient connues, le problème serait résolu. En effet, les prolongements des droites aa_1 , bb_1 , cc_1 étant les projections horizontales des arêtes OA , OB , OC de la pyramide $OABC$, doivent se couper en un point a , projection horizontale du centre O de

la sphère inscrite ; et les projections verticales correspondantes $a' a'_1$, $b' b'_1$, $c' c'_1$ doivent pareillement concourir en un point o' , projection verticale de ce centre.

Il suffit donc, pour résoudre la question, de construire la projection horizontale $a_1 b_1 c_1$ de la section faite dans la pyramide OABC par le plan horizontal $x_1 y_1$.

Pour déterminer le côté $b_1 c_1$, on fait tourner le plan SBC autour de la verticale passant en s , de manière à le rendre parallèle au plan vertical (90). On obtient ainsi, en $s' p'_1 x$, l'inclinaison de la face SBC sur le plan horizontal. Menant la bissectrice $p'_1 m'_1$ de cet angle $s' p'_1 x$, et faisant revenir le point (m_1, m'_1) à sa position primitive, on a, en m , un point de la droite $b_1 c_1$. La même construction, appliquée aux plans SAB, SAC, donne les deux derniers côtés du triangle $a_1 b_1 c_1$. Ce triangle étant construit, on obtient, comme nous l'avons expliqué, les projections o , o' du centre O de la sphère inscrite.

La sphère est tangente au plan horizontal ; donc son rayon est égal à $o' \omega$, élévation du centre au-dessus de ce plan.

Problème XLVIII.

Construire une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre.

138. Ce problème est la généralisation du précédent. Si l'on suppose, en effet, que les quatre plans qui composent les faces d'un tétraèdre soient indéfiniment prolongés, on peut se proposer de chercher toutes les sphères qui touchent à la fois ces quatre plans.

Afin de déterminer, en premier lieu, quel peut être le nombre de ces sphères, observons que le plan de la base ABC du tétraèdre, prolongé indéfiniment, forme avec les

trois autres faces, six angles dièdres, dont trois sont *intérieurs*, et dont les trois autres sont *extérieurs*.

Pour qu'un point soit également distant des quatre faces du tétraèdre, il doit être situé sur trois des plans bissecteurs de ces six angles dièdres. Si donc P, Q, R sont les plans bissecteurs des angles *intérieurs*, et que P', Q', R' soient les plans bissecteurs des angles *extérieurs*, il y aura autant de sphères satisfaisant à la question, que de points déterminés par les combinaisons suivantes des plans bissecteurs :

$$\begin{array}{llll} P, Q, R; & P, Q, R'; & P, Q', R'; & P', Q', R'. \\ & Q, R, P'; & Q, R', P'; & \\ & R, P, Q'; & R, P', Q'. & \end{array}$$

Le nombre de ces points, et par conséquent le nombre des sphères cherchées, est donc au plus égal à huit.

139. La sphère déterminée par les plans P, Q, R, c'est-à-dire la sphère *inscrite* au tétraèdre, existe toujours.

Il en est de même pour les *quatre* sphères déterminées par les plans

$$\begin{array}{l} P, Q, R'; \\ Q, R, P'; \\ R, P, Q'; \\ P', Q', R'; \end{array}$$

que l'on appelle *sphères ex-inscrites*, et qui sont telles, que chacune touche une des faces du tétraèdre et les prolongements des trois autres faces.

Soient, par exemple, les plans bissecteurs P', Q', R'. Il est évident que chacun de ces plans fait, avec le *prolongement* de la face ABC, un *angle dièdre aigu*; conséquemment, ces trois plans ne peuvent se couper

deux à deux suivant des droites parallèles, de manière à former les faces d'un prisme triangulaire ; donc *ils se coupent en un seul point, centre de la sphère ex-inscrite suivant la face ABC*. La même démonstration s'appliquerait aux sphères ex-inscrites suivant les trois autres faces, et il est facile de reconnaître que leurs centres seraient donnés par les combinaisons

$$\begin{aligned} & P, Q, R'; \\ & Q, R, P'; \\ & R, P, Q'; \end{aligned}$$

des six plans bissecteurs.

140. Considérons maintenant le tétraèdre ABCD, et FIG. 87. supposons ses différentes faces prolongées ainsi que l'indique la figure : nous obtiendrons ainsi deux espaces indéfinis BCEFGH, ADIKLM, terminés chacun par quatre plans et s'appuyant sur les deux arêtes opposées BC, AD. Ces espaces, dont la forme est assez bien indiquée par celle d'un *comble à quatre pentes*, ont été désignés sous les noms d'*angles prismatiques* et de *bi-angles*. On conçoit que, dans certains cas, une sphère puisse être inscrite à un angle prismatique. Il semblerait donc, d'après cela, que les sphères inscrites aux *six* angles prismatiques obtenus en considérant ces trois couples d'arêtes opposées, peuvent être au nombre de six ; mais il est aisé de démontrer que, si l'on peut inscrire une sphère à l'angle prismatique BCEFGH, il n'est pas possible d'en inscrire une à l'angle prismatique opposé, et réciproquement.

En effet, quelle que soit la position de la sphère cherchée, son centre doit se trouver sur les plans bissecteurs

des angles dièdres *intérieurs* dont les arêtes sont AD, BC. Le premier plan bissecteur rencontre l'arête BC en un point U *situé entre* B et C. De même, le second plan bissecteur rencontre AD en un point V, *situé entre* A et D. Le centre cherché doit donc se trouver sur la droite UV, *intersection des deux plans bissecteurs*. Ce centre doit aussi se trouver sur le plan R', bissecteur de l'angle dièdre *extérieur* ayant pour arête AB; d'ailleurs une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point; donc, etc.

On peut observer encore que le plan R' est extérieur au tétraèdre, dans lequel est située la droite UV; donc le centre de la sphère dont il s'agit sera *sur le prolongement* de UV, soit en O', dans l'angle prismatique BCEFGH, soit en O'', dans l'angle prismatique ADIKLM.

S'il arrive que le plan R' soit parallèle à la droite UV, le centre de la sphère est transporté à l'infini, ou plutôt cette sphère n'existe pas.

Au lieu de déterminer le centre O' ou le centre O'' par l'intersection du plan P passant suivant BC, du plan R' passant suivant AB et du plan bissecteur ADU, on pourrait l'obtenir au moyen de la combinaison des plans P, R' et Q'; en supposant que Q' soit le plan bissecteur de l'angle dièdre extérieur dont l'arête est AC. Nous retombons ainsi sur la combinaison P, R', Q', indiquée plus haut.

Nous voyons donc que les sphères déterminées par les combinaisons

P, R', Q';
 Q, P', R';
 R, Q', P';

peuvent, en tout ou en partie, ne pas exister; c'est-à-dire que le nombre des solutions du problème peut être réduit à *cinq*. Mais peut-il s'élever à *huit*, à *sept* ou même à *six*? C'est ce qu'il convient d'examiner; car, dans les développements précédents, rien ne prouve qu'en général la droite UV rencontrera le plan R', ou, ce qui est la même chose, que les plans P, R', Q' se couperont en un point unique.

141. Afin d'éclaircir cette partie de la question, nous commencerons par démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.*

Considérons, par exemple, le plan AUD, qui divise en deux parties égales l'angle dièdre intérieur ayant pour arête AD. Il s'agit de démontrer que

$$\frac{BU}{C\bar{U}} = \frac{C}{\bar{B}}$$

en représentant l'aire d'une face par la lettre qui indique le sommet opposé à cette face.

Projetons la figure sur un plan quelconque perpendiculaire à AD. Cette droite aura pour projection un point I; et les plans ABD, AUD, ACD, étant perpendiculaires au plan de projection, auront pour traces des droites IB', IU', IC' telles, que IU' sera la bissectrice de l'angle formé par IB' et IC'. Enfin la droite BUC se projettera suivant une droite B'U'C'.

Cela posé, un théorème de Géométrie élémentaire donne

$$\frac{B'U'}{C'U'} = \frac{B'I}{C'I}$$

FIG. 88.

Mais il est clair que $B'U'$, $C'U'$ sont des droites proportionnelles à BU , CU , et que $B'I$, $C'I$ sont égales, respectivement, aux perpendiculaires abaissées des points B , C sur la base AD des triangles ABD , ACD . La proportion précédente revient donc à celle qu'il s'agissait de démontrer.

FIG. 89. 142. Supposons qu'après avoir mené la droite UV , déterminée par les proportions

$$\frac{BU}{CU} = \frac{C}{B}, \quad \frac{AV}{DV} = \frac{D}{A},$$

on mène, semblablement, la droite ST satisfaisant aux conditions

$$\frac{AS}{SB} = \frac{B}{A}, \quad \frac{DT}{CT} = \frac{C}{D}.$$

D'après ce qui précède, *chacune des droites doit contenir le centre de la sphère inscrite au tétraèdre*; donc, comme ce centre existe, les deux droites se coupent. De là, ce théorème :

THÉORÈME II. *Les droites qui partagent les arêtes opposées d'un tétraèdre, chacune en deux segments additifs proportionnels aux faces adjacentes à ses deux extrémités, se coupent toutes les trois en un même point, centre de la sphère inscrite au tétraèdre.*

143. Du reste, on peut démontrer directement que les droites UV , ST se coupent, en observant que les proportions précédentes donnent

$$AS \cdot DT \cdot CU \cdot BS = AS \cdot BU \cdot CT \cdot DV.$$

144. Au lieu de partager les arêtes en segments additifs, supposons qu'on les partage en segments soustractifs, de manière à satisfaire aux proportions

$$\frac{AX'}{CX'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{DY'}{BY'} = \frac{B}{D}, \quad \frac{DT'}{CT'} = \frac{C}{D}, \quad \frac{AS'}{BS'} = \frac{B}{A}.$$

Comme ces proportions donnent

$$AS'.BY'.CX'.DT' = AX'.BS'.CT'.DY',$$

on conclut encore que les droites $S'T'$, $X'Y'$ sont dans un même plan. Donc, *en général*, elles se couperont en un même point O' , situé aussi sur la droite VU . Ce point sera le centre de l'une des sphères situées dans les angles prismatiques.

145. Pour que cette sphère n'existe pas, il faut que les droites UV , $X'Y'$, *toujours situées dans un même plan*, soient parallèles entre elles. Cherchons dans quel cas aura lieu ce parallélisme.

Les proportions

$$\frac{AX'}{CX'} = \frac{C}{A}, \quad \frac{CT}{DT} = \frac{D}{C}, \quad \frac{DV}{AV} = \frac{A}{D}$$

donnent

$$AX'.CT.DV = CX'.DT.AV;$$

ainsi, les points X' , T , V sont en ligne droite, et AVX' est un triangle. A cause de la transversale DTC , nous aurons donc

$$AC.TX'.DV = AD.VT.CX'.$$

De même, UTY' est une droite; et le triangle BUY' , coupé par la transversale DTC , donne

$$BC.UT.DY' = BD.TY'.CU.$$

Maintenant, les deux droites VU , $X'V'$ étant supposées parallèles, on a

$$\frac{VT}{UT} = \frac{TX'}{TY'}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les deux premières égalités, et qu'on ait égard à la dernière, on obtient

$$AC \cdot BC \cdot DV \cdot DY' = AD \cdot BD \cdot CU \cdot CX',$$

ou

$$\frac{AC}{CX'} \cdot \frac{DC}{CU} = \frac{AD}{DV} \cdot \frac{BD}{DY'}.$$

Mais, ainsi qu'il est aisé de le reconnaître,

$$\frac{CA}{CX'} = \frac{C-A}{A}, \quad \frac{BC}{CU} = \frac{B+C}{B}, \quad \frac{AD}{DV} = \frac{A+D}{A}, \quad \frac{BD}{DY'} = \frac{D-B}{B};$$

donc

$$(C-A)(B+C) = (A+D)(D-B),$$

ou

$$\frac{C-A}{D-B} = \frac{A+D}{B+C} = \frac{C+D}{C+D}.$$

Cette proportion exige que $A + D = B + C$.

Ainsi, pour que la sphère O' disparaisse, *il faut et il suffit que la somme des faces qui ont AD pour arête commune soit équivalente à la somme des deux autres faces.*

146. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'on n'a pas, à la fois, $C = A$, $D = B$. Si ces deux conditions étaient vérifiées, les points X' , Y' seraient transportés à l'infini, aussi bien que la sphère O' . En même temps, comme les sommes $A + B$, $C + D$ seraient égales, la sphère inscrite à l'un des angles prismatiques ayant pour arête AD ou CD, aurait un rayon infini; c'est-à-dire que le nombre des sphères tangentes aux quatre plans serait réduit à six.

147. En résumé :

1° *Quand la somme des aires de deux des faces du té-*

traèdre est égale à la somme des aires des deux autres faces, les sphères de la troisième espèce se réduisent à deux ;

2° Si les faces du tétraèdre sont équivalentes deux à deux, il n'y a plus qu'une sphère de la troisième espèce ;

3° Enfin, si les quatre faces du tétraèdre sont équivalentes entre elles, les sphères inscrites aux angles prismatiques se transportent toutes les trois à l'infini.

On vérifie ces conclusions en cherchant les relations qui existent entre les rayons des trois sphères, les aires des faces et le volume V du tétraèdre : ces relations sont

$$\pm V = \frac{1}{3} R_1 (A + B - C - D);$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_2 (A + C - B - D);$$

$$\pm V = \frac{1}{3} R_3 (A + D - B - C) (*).$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI, p. 253.

CHAPITRE VII.

EXERCICES.

Problème XLIX.

Mener un plan parallèle à un plan donné, et qui en soit distant d'une longueur donnée.

148. Si l'on prend, pour nouveau plan vertical de projection, un plan x_1y_1 perpendiculaire au plan donné $\alpha\beta\gamma$ et au plan cherché $\alpha'\beta'\gamma'$, la distance entre les traces verticales auxiliaires $\beta_1\gamma_1, \beta'_1\gamma'_1$ sera égale à la distance donnée. De cette remarque résulte la construction indiquée sur la figure 90.

Il est clair que le problème admet une seconde solution.

Problème L.

Par un point donné A, mener une droite qui fasse, avec la ligne de terre, un angle donné.

Fig. 92. 149. Supposons le problème résolu, et faisons tourner autour de la ligne de terre la droite cherchée AB, jusqu'à ce qu'elle se rabatte sur le plan horizontal. Dans ce mouvement, le point B, où cette droite rencontre xy , ne varie pas. Si donc, par le rabattement A, du point A, nous menons une droite A_1b qui coupe xy sous l'angle donné, nous obtiendrons le point inconnu b .

Problème LI.

Par un point donné O , mener une droite qui coupe, sous un angle donné, une droite donnée AB .

150. Ce problème est la généralisation du précédent. Pour le résoudre, on fait passer un plan par le point O et par la droite AB ; on rabat ce plan sur l'un des plans de projection; par le rabattement du point O on mène une droite qui coupe, sous l'angle donné, le rabattement de AB : la droite ainsi tracée est le rabattement de celle que l'on cherche. Il ne reste plus qu'à revenir du rabattement aux projections. FIG. 93.

Le problème admet évidemment deux solutions.

Problème LII.

Connaissant la projection verticale d'une droite, un de ses points et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire la projection horizontale.

151. Soit $a'b'$ la projection verticale de la droite, et o, o' soient les projections de l'un de ses points. Il est clair que la droite sera déterminée quand on connaîtra sa trace horizontale α . FIG. 94.

Or, si la droite inconnue tourne autour de la verticale passant par le point O , de manière à devenir parallèle au plan vertical, l'angle θ qu'elle forme avec le plan horizontal se projette en vraie grandeur. Donc, pour déterminer cette seconde position de la droite, on mène $o'a'_1$, coupant la ligne de terre sous l'angle θ , etc.

152. *Remarque.* Le problème admet généralement deux solutions; il peut n'en admettre qu'une; il peut être impossible.

Problème LIII.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec un plan donné, un angle donné, et qui rencontre une droite donnée.

FIG. 95. 153. Par le point donné O et la droite donnée AB , faisons passer un plan; soit CD l'intersection de ce plan avec le plan donné P . En second lieu, abaissons du point O une perpendiculaire au plan P , et soit I le pied de cette droite. Enfin, supposons que la droite cherchée rencontre CD en un point M . Dans le triangle OIM , rectangle en I , l'angle OMI égale angle donné θ , et le côté OI , distance d'un point donné à un plan donné, peut être facilement déterminé. Nous pouvons donc construire un triangle $O'I_1M_1$ égal à OIM , et trouver la grandeur du côté égal à IM . Il suffira ensuite, pour obtenir le point M , de chercher l'intersection de la droite CD avec une circonférence de rayon IM , décrite du point I comme centre. C'est ce qui se fait aisément au moyen d'un rabattement.

Problème LIV.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés.

FIG. 96. 154. 1° Supposons que le point donné (a, a') appartienne au plan vertical, et qu'on veuille mener, de ce point, une droite AB qui fasse un angle α avec le plan horizontal et un angle β avec le plan vertical. Cette droite, sa projection horizontale et la verticale aa' forment un triangle rectangle dans lequel on connaît le côté aa' et l'angle opposé α . Pour rabattre ce triangle en vraie gran-

deur sur le plan vertical, il suffit de faire l'angle $aa'b_1$ égal au complément de α : $a'b_1$ sera le rabattement de AB.

Cette même droite AB forme, avec sa projection verticale et avec bb' , un autre triangle rectangle dans lequel l'angle aigu adjacent au sommet a' est égal à β . En décrivant, sur ba' comme diamètre, une demi-circonférence, et construisant l'angle $b_1a'c$ égal à β , on obtient le triangle rectangle b_1ca' égal au triangle dont il vient d'être question. Il ne s'agit donc plus que de tracer les projections $a'b'$ et ab égales, respectivement, à $a'c$ et ab_1 ; ce qui ne présente aucune difficulté.

2° Si le point donné, au lieu d'être situé sur le plan vertical, avait une position quelconque (p, p') , il suffirait, pour résoudre la question, de mener les droites $pq, p'q'$ respectivement parallèles à $ab, a'b'$.

Problème LV.

Connaissant les projections horizontales, les traces horizontales et l'angle de deux droites situées dans un même plan, trouver les projections verticales de ces droites.

155. Si le plan des deux droites tourne autour de sa trace horizontale bd , le triangle Obd , projeté horizontalement suivant obd , se rabat suivant un triangle égal O_2bd , dont il s'agit de déterminer le sommet O_2 . Or, ce sommet est l'intersection de op perpendiculaire à bd (109), et de l'arc bO_2d capable de l'angle donné. Connaissant le rabattement O_2 et la projection horizontale du point O , on obtient aisément la projection verticale o' de ce point.

FIG. 97.

Problème LVI.

Par une droite donnée, faire passer un plan qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.

FIG. 98. 156. En premier lieu, les traces du plan cherché doivent passer par les traces a, b' de la droite donnée. D'un autre côté, si l'on imagine la perpendiculaire bp à la trace horizontale inconnue $\alpha\beta$, l'angle p du triangle rectangle déterminé par bp et par bb' est égal à l'angle donné θ (123). On peut rabattre ce triangle sur le plan vertical, en $b'bg$; et l'on détermine ainsi la distance du point b à la trace horizontale inconnue $\alpha\beta$. On obtiendra donc cette trace horizontale en décrivant, du point b comme centre, avec bq pour rayon, un arc de cercle, et en menant à cet arc, par le point a , une tangente ap .

157. *Discussion.* Lorsque la trace horizontale a de la droite donnée est située hors de la circonférence décrite du point b comme centre, avec bq pour rayon, il y a deux plans, $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, qui répondent à la question. Quand le point a est situé sur la circonférence, il n'y a qu'une solution. Enfin le problème est impossible lorsque le point a est intérieur à la circonférence.

Problème LVII.

Par un point donné, faire passer un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, des angles donnés.

FIG. 99. 158. Supposons d'abord que le point donné (o, o') appartienne au plan horizontal; et soit $\alpha\beta\gamma$ le plan cherché, qui doit faire, avec les plans de projection, les angles donnés α, β .

Du point o , menons une droite oa faisant, avec la ligne de terre, un angle égal à β : le triangle $oa'o'$ pourra être considéré comme étant le rabattement de la section faite, dans le plan cherché, par un plan $oo'b$ perpendiculaire à la trace verticale inconnue $\beta\gamma$. Conséquemment, cette trace verticale sera tangente à la circonférence décrite du point o' comme centre, avec $o'a$ pour rayon.

D'un autre côté, si nous imaginons, par le point o' , une verticale $o'c$ et une perpendiculaire au plan cherché, l'angle de ces deux droites sera égal à α . Or, la perpendiculaire dont il s'agit est située dans le plan $oo'b$; donc son rabattement autour de oo' est $o'm$ perpendiculaire à oa . Il suit de là que si l'on construit l'angle $mo'n = \alpha$, on aura $o'n = o'c$. Le point c est donc déterminé, etc.

Si le point donné, au lieu d'être situé sur le plan horizontal, occupe dans l'espace une position quelconque (p, p') , il suffit, pour résoudre la question, de mener par (p, p') un plan $\alpha'\beta'\gamma'$ parallèle à $\alpha\beta\gamma$.

Problème LVIII.

Par un point donné, faire passer un plan qui soit perpendiculaire à un plan donné, et qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.

159. Du point donné, on abaisse une perpendiculaire sur le plan donné, puis l'on fait passer, par cette perpendiculaire, un plan faisant, avec le plan horizontal de projection, l'angle donné θ (Probl. LVI). Il est clair que ce plan satisfait à la question.

Problème LIX.

Étant donnée la projection horizontale d'une droite perpendiculaire en un point donné à une droite donnée, trouver la projection verticale.

160. Supposons que AB soit une droite donnée, que l'on connaisse la projection horizontale d'une droite AP perpendiculaire à AB au point donné A , et qu'on demande la projection verticale de AP . Pour résoudre ce problème, on mène, par le point A , un plan perpendiculaire à la droite donnée AB : ce plan contiendra nécessairement la droite cherchée AP . Par conséquent, on est conduit à chercher la projection verticale d'une droite située dans un plan donné, connaissant la projection horizontale de cette ligne. (Probl. IX.)

Problème LX.

Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs traces horizontales et par les angles qu'ils font avec le plan horizontal de projection.

FIG. 100.

161. Soient $\alpha\beta$, $\lambda\mu$ les traces horizontales des plans P , Q , et soient θ , ω les angles de ces plans avec le plan horizontal. Par le point c , où se coupent les traces horizontales, faisons passer deux plans, l'un perpendiculaire à $\alpha\beta$, l'autre perpendiculaire à $\lambda\mu$. Si l'on rabat, autour de sa trace horizontale, chacun de ces plans verticaux, leurs intersections avec les plans P , Q deviendront des droites ef , cg , faisant avec cd , ce , des angles égaux à θ , ω . Actuellement, coupons les plans P , Q par un plan horizontal quelconque y_1y_1 : les projections horizontales pm , qm des deux intersections se construisent aisément si cd , ce sont prises comme *ligne de terre* auxiliaires (72).

Par suite, cm sera la projection horizontale de l'intersection des plans P, Q ; et, si nous menons cc', mm' , perpendiculaires à la ligne de terre, nous obtiendrons cm' pour la projection verticale de cette même intersection.

162. *Remarque.* Par la construction très-simple indiquée sur l'épure, on trouve les traces verticales $\alpha\beta', b\beta$ des plans P, Q ; et comme on peut employer ces traces verticales pour déterminer l'intersection des deux plans, le problème comporte plusieurs vérifications.

Problème LXI.

Trouver la projection verticale d'un angle trièdre tri-rectangle dont la projection horizontale est donnée.

163. Soit s la projection horizontale du sommet de l'angle trièdre, et soient sa, sb, sc les projections horizontales des trois arêtes. Si nous coupons les trois faces par un plan horizontal quelconque, les trois intersections seront projetées horizontalement suivant des droites perpendiculaires aux projections des arêtes correspondantes. Conséquemment, nous mènerons une droite quelconque bc perpendiculaire à sa ; puis, des points b, c , nous abaisserons sur sc, cb , les perpendiculaires ba, ca , lesquelles se couperont sur as (*); et ces trois droites bc, ba, ca pourront être regardées comme les traces horizontales des trois faces de l'angle trièdre.

FIG. 101.

Actuellement, supposons que l'une quelconque des faces de l'angle trièdre, la face Sab , par exemple, tourne

(*) Cette proposition, réciproque de ce théorème : *les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point*, se démontre très-aisément au moyen de la réduction à l'absurde.

autour de sa trace horizontale ab , pour se rabattre sur le plan du triangle abc .

Le rabattement du sommet S doit se trouver sur le prolongement de la droite es , perpendiculaire à ba . D'ailleurs, l'angle aSb est droit : donc ce même rabattement doit être situé sur la circonférence décrite sur ab comme diamètre ; c'est-à-dire qu'il sera en s' .

Connaissant le rabattement du sommet S et sa projection horizontale s , il nous sera bien facile d'obtenir la projection verticale s'' . Le problème peut donc être regardé comme résolu.

Problème LXII.

Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec deux droites données, des angles donnés.

164. Par le point donné O , menons des parallèles OA , OB aux deux droites données, et soit OC une droite inconnue qui fasse, avec OA , OB , des angles respectivement égaux aux angles donnés : il est clair que cette droite OC satisfait à la question.

Or, les droites OA , OB , OC , forment un angle trièdre dans lequel les arêtes OA , OB sont données, et dans lequel on connaît, en outre, les deux faces COA , COB . Si les droites OA , OB étaient situées dans l'un des plans de projection, la question se réduirait au Problème XLII ; mais, comme ces droites ont des positions quelconques, construisons l'épure ainsi qu'il suit :

Faisons tourner les droites OA , OB autour de la verticale passant par le point O , jusqu'à ce que chacune d'elles

devienne parallèle au plan vertical : nous obtiendrons, pour leurs rabattements, $o'a''$ et $o'b''$. Menons les droites $o'c_1$, $o'c_2$, égales entre elles, et faisant, avec $o'a''$, $o'b''$, des angles égaux aux angles donnés. Les points c_1 , c_2 pourront être regardés comme les rabattements d'un même point C de l'arête cherchée OC, l'un des rabattements étant effectué autour de OA, l'autre autour de OB.

FIG. 102.

Par ce point inconnu C, imaginons deux plans, respectivement perpendiculaires à OA, OB. Si nous pouvons déterminer ces deux plans, leur intersection contiendra le point C; et comme ce point est distant du point O d'une longueur égale à $o'c_1$, nous serons ramenés au Problème XXX.

Si l'arête OA était parallèle à son rabattement $o'a''$, le premier des deux plans cherchés aurait pour traces $c_1\alpha$ perpendiculaire à $o'a''$, et $\alpha\beta$ perpendiculaire à la ligne de terre. Mais, si nous supposons que la droite OA tourne autour de la verticale passant en O, de manière à reprendre sa position verticale, le plan perpendiculaire à cette droite se mouvra de telle sorte que sa trace horizontale restera à une distance constante de l'axe (Pr. XXVII). Si donc, sur oa , nous prenons $o\beta' = o\beta$, et que nous menions $\beta'\alpha'$ perpendiculaire à oa , puis $\alpha'\nu'$ perpendiculaire à $o'a'$, le plan $\beta'\alpha'\nu'$ sera l'un des deux plans passant par le point inconnu C.

Une construction analogue donnera, pour le second plan, $\delta'\gamma'\mu'$. L'intersection de ces deux plans est projetée suivant ef , $e'f'$.

Actuellement, par le point O et la droite EF, faisons passer un plan $\lambda\varepsilon\varphi$, puis rabattons-le sur le plan vertical de projection. Nous trouverons, pour rabattement du point

O, le point o'' , et $e'f'$ pour rabattement de la droite EF (*). Si nous décrivons, du point o'' comme centre, avec un rayon égal à $o'c$, l'arc $c''d''$, il coupera le point $e'f''$ en deux points c'' , d'' , rabattements respectifs du point cherché C et d'un autre point D, qui satisfait également à la question.

En revenant des rabattements aux projections, nous trouvons que le point C se projette en c , c' , et que le point D a pour projections d , d' . La droite cherchée OC est donc, finalement, représentée par oc , $o'c'$; et il y a une seconde droite (od , $o'd'$) qui satisfait aussi au problème proposé.

Problème LXIII.

Mener une droite qui s'appuie sur deux droites données, non situées dans un même plan, et qui fasse, avec ces droites, des angles respectivement égaux à des angles donnés.

165. Par un point quelconque O, menons des parallèles OA, OB aux droites données, et cherchons une droite OC qui fasse, avec OA, OB, des angles respectivement égaux aux angles donnés (Prob. LXII) : il est clair que OC sera parallèle à la droite cherchée. Il suffit donc, pour résoudre le problème proposé, de mener une droite parallèle à OC, et qui rencontre les droites données (Prob. XV).

Problème LXIV.

Projeter, sur un plan quelconque P, un dodécaèdre régulier.

166. Le *dodécaèdre régulier* est un polyèdre ayant pour faces douze pentagones réguliers, égaux entre eux. On con-

(*) Sur l'épure, on a supprimé les constructions qui donnent ces deux rabattements.

clut aisément, de cette définition, que les *trente* angles dièdres de ce corps sont égaux, et qu'il en est de même pour les *vingt* angles trièdres (*).

Pour trouver la projection du dodécaèdre sur un plan quelconque, nous commencerons par projeter ce corps sur un plan parallèle à deux faces opposées : ces deux plans, perpendiculaires entre eux, seront regardés, l'un comme horizontal, l'autre comme vertical.

167. Soit *abcde* un pentagone régulier égal à chacune des faces du dodécaèdre. Nous supposerons que ce pentagone est la projection de la face inférieure ABCDE : cette face se projette verticalement suivant la parallèle *a'éd'* à la ligne de terre *xy*. De plus les arêtes *obliques* qui partent des sommets A, B, C, D, E, ont leurs projections horizontales égales entre elles, et dirigées suivant les prolongements des rayons *oa, ob, oc, od, oe*. Conséquemment, la projection horizontale du polyèdre serait déterminée, si l'on connaissait, *en grandeur*, la projection d'une seule de ces arêtes.

Le plan vertical étant supposé perpendiculaire à l'arête AB, soit ABHGF la face *oblique* adjacente à cette arête. On peut regarder ABCDE comme un *rabattement* de ABHGF, effectué autour de AB. Par conséquent, la projection horizontale *f*, déjà située sur le prolongement de *oa*, se trouve aussi sur la parallèle *ef* à la ligne de terre : cette projection *f* est donc connue. Quant à la projection verticale correspondante *f'*, elle appartient à l'arc *e'f'*, décrit du point *a'* comme centre.

Par suite, si l'on décrit une circonférence passant en *f*

PL. XI.

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 303.

et concentrique avec $abcde$, le décagone régulier $fgh\dots q$ sera la projection horizontale du contour polygonal formé par les arêtes FG, GH, ... QF du dodécaèdre. D'ailleurs, les sommets F, H, K, M, P sont dans un plan horizontal, et les sommets G, I, L, N, O, dans un autre plan horizontal ; etc. (*).

168. Supposons maintenant que le plan P soit donné par sa trace horizontale $\alpha\beta$ et par son inclinaison à l'égard du plan horizontal. Prenons, pour plan vertical auxiliaire, un plan perpendiculaire à $\alpha\beta$. Au moyen de la projection horizontale H et de la projection verticale V, on construit, sans aucune difficulté, la nouvelle projection verticale auxiliaire V_1 (Prob. XX). D'ailleurs, le plan P étant perpendiculaire au plan vertical auxiliaire, sa trace verticale $\beta\gamma$ fait, avec la nouvelle ligne de terre x_1y_1 , un angle égal à l'angle donné. Il ne s'agit donc plus que d'abaisser, des points (a, a_1) , (b, b_1) , ... des perpendiculaires sur le plan $\alpha\beta\gamma_1$, et de rabattre, autour de $\alpha\beta$, les pieds de ces arêtes. On obtient ainsi la figure V_2 , projection du dodécaèdre sur le plan P.

(*) Au lieu de déterminer le point f par l'intersection des droites af , ef , ce qui pourrait conduire à des résultats peu exacts, il vaut mieux construire l'angle $g'a'd'$. Or, par la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, ou par d'autres considérations plus élémentaires, on trouve que la tangente de cet angle est égale à (-2) ; autrement dit, la droite $a'g'$ est l'hypoténuse d'un triangle dans lequel le côté vertical est double du côté horizontal.

Problème LXV.

Trouver les projections d'une circonférence passant par trois points donnés (*).

169. Soient (a, a') , (b, b') , (c, c') les points donnés. FIG. 91.
On fait passer un plan $\alpha\beta\gamma$ par ces points; on le fait tourner autour de sa trace horizontale; et l'on détermine les rabattements A_1, B_1, C_1 des points donnés. On décrit ensuite la circonférence qui passe par les points A_1, B_1, C_1 ; et il ne s'agit plus que de revenir du rabattement aux deux projections.

Or, si l'on prend, sur la circonférence O_1 , un certain nombre de points M_1, N_1, P_1, \dots ; qu'on en cherche les projections (75); enfin, qu'on unisse les deux séries de points ainsi obtenus, par deux *traits continus* $mnp, \dots, m'n'p', \dots$; les deux *ellipses* $mnp, \dots, m'n'p', \dots$ seront les projections cherchées.

Pour compléter l'épure, on construit les projections o, o' du centre de la circonférence. Ces points sont les *centres* des ellipses correspondantes.

Problème LXVI.

Trouver, sur un plan perpendiculaire à une droite donnée, le lieu des pieds de toutes les droites qui, partant d'un des points de la perpendiculaire, font avec cette droite un angle donné.

170. AB étant la droite donnée et O le point pris sur cette droite, cherchons le point C où la droite perce le plan donné P. Soit ensuite M un quelconque des points

(*) Suivant l'usage, nous faisons suivre ces *Exercices sur la ligne droite et le plan*, de quelques problèmes très-simples, relatifs au cercle et à la sphère.

satisfaisant à la question. Si nous considérons le triangle MCO, évidemment rectangle en C, nous verrons que le côté OC est constant, et que l'angle aigu O est égal à l'angle donné θ . Par suite, le lieu géométrique cherché est une circonférence ayant pour centre le point C.

Il faudra donc, pour construire l'épure :

1° Chercher les deux projections et le rabattement du point C, situé dans le plan donné P ; 2° construire la droite OC en véritable grandeur ; 3° construire un triangle rectangle OCM, connaissant le côté OC de l'angle droit, et l'angle aigu C, égal à l'angle donné θ ; 4° chercher les deux projections d'une circonférence située dans le plan P, connaissant le rayon CM et le rabattement du centre.

Problème LXVII.

Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une sphère données.

FIG. 103. 171. Soient $ab, a'b'$ les projections de la droite, et o, o' les projections du centre de la sphère. Si, de ces deux points pris comme centres, nous décrivons des circonférences ayant pour rayon le rayon de la sphère, ces deux lignes seront les projections des contours apparents de la surface, soit par rapport au plan horizontal, soit par rapport au plan vertical. Autrement dit, les circonférences $oc, o'c'$ pourront être regardées comme étant les deux projections de la sphère.

Cela posé, pour déterminer les points où la droite AB perce la sphère, menons, suivant cette droite, un plan qui rencontre la sphère ; et pour plus de simplicité dans les constructions, choisissons l'un des plans projetants

de la droite, par exemple, le plan vertical ab . L'intersection de ce plan auxiliaire et de la sphère est une circonférence ayant pour diamètre le cercle ef . Si donc nous pouvons construire les projections des points où cette circonférence est rencontrée par la droite AB , nous aurons résolu le problème proposé.

Afin de n'avoir pas à construire la projection verticale de la circonférence ef , projection qui serait une *ellipse*, faisons tourner le plan vertical ef autour de la verticale projetée en o , jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical de projection. Dans cette nouvelle position, la circonférence gh se projette en vraie grandeur sur le plan vertical, suivant une circonférence ayant pour centre le point o . Quant à la droite AB , on en détermine facilement la nouvelle projection verticale $a''b''$ (Probl. XXVI).

Actuellement, la droite $a''b''$ coupe la circonférence $g'h'$ en deux points m'' , n'' , lesquels sont évidemment les *nouvelles* projections verticales des points cherchés. En remettant la droite AB dans sa position primitive, on obtient les projections m , m' et n , n' de ces points.

Problème LXVIII.

Trouver le lieu des points de contact de toutes les tangentes menées, par un point donné, à une sphère donnée.

172. On démontre facilement que ce lieu est une circonférence de petit cercle, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui joint le point donné au centre de la sphère donnée. Si donc on peut construire un seul de ces points de contact, on déterminera facilement le plan

de la circonférence cherchée, puis le rabattement de cette ligne, et enfin ses deux projections (Probl. LXV).

FIG. 104.

Parmi tous les plans passant par le point donné O et par le centre C de la sphère, considérons celui qui est vertical. Nous pouvons le faire tourner autour de la verticale passant en C , jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan vertical de projection. Soit alors O_1 la nouvelle position du point O . Si, de ce point O_1 , nous menons des tangentes O_1A_1 , O_1B_1 à la projection verticale de la sphère, la corde de contact A_1B_1 représentera le petit cercle cherché, après son mouvement de rotation. Il sera facile maintenant, en revenant aux positions primitives, de trouver les projections des points dont A_1 et B_1 étaient les rabattements, puis les traces du plan du petit cercle, etc.

Problème LXIX.

Trouver l'intersection de deux sphères données.

173. Si le plan vertical passant par les centres des sphères était parallèle au plan vertical de projection, la circonférence suivant laquelle les sphères se coupent aurait pour projection verticale la corde commune aux *projections verticales* des deux sphères. Pour réduire le cas général du problème à ce cas particulier, on opérera comme ci-dessus, c'est-à-dire que, par exemple, on fera tourner la première sphère autour de la verticale passant par le centre de la seconde. Il sera facile alors de déterminer le plan de la ligne d'intersection cherchée, de sorte que l'on sera ramené au problème qui précède.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

	Pages
Introduction.	1
Des projections.	2
Détermination du point.	3
Détermination de la ligne.	5
Détermination du plan.	6
Projections horizontales ou verticales.	7
Rabattement du plan vertical.	9
Relation entre les projections d'un même point.	10
Plans et droites parallèles ou perpendiculaires.	11
Notation et ponctuation.	13

CHAPITRE II.

INTERSECTION DES DROITES ET DES PLANS. — DROITES ET PLANS DÉTERMINÉS PAR DIVERSES CONDITIONS.

PROBLÈME I.	Trouver les traces d'une droite dont les projections sont données.	15
II.	Trouver les projections d'une droite dont les traces sont données.	17
III.	Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.	18
IV.	Faire passer un plan par trois points donnés.	<i>Ib.</i>
V.	Faire passer un plan par deux droites qui se coupent ou par deux droites parallèles.	19
VI.	Faire passer un plan par un point donné et par une droite donnée.	20
VII.	Par une droite donnée, faire passer un plan parallèle à une droite donnée.	<i>Ib.</i>
VIII.	Par un point donné, mener un plan parallèle à deux droites données.	21
IX.	Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.	<i>Ib.</i>

		Pages
PROBLÈME X.	Construire les projections de l'intersection de deux plans donnés.	22
XI.	Déterminer le point d'intersection de trois plans donnés.	25
XII.	Trouver le point où une droite perce un plan.	26
XIII.	Mener, par un point donné, un plan perpendiculaire à une droite donnée.	28
XIV.	Mener, par un point donné, une droite qui rencontre deux droites données, non situées dans un même plan.	30
XV.	Trouver une droite parallèle à une droite donnée, et qui rencontre deux droites données, non situées dans un même plan.	<i>Id.</i>

CHAPITRE III.

DES PROJECTIONS AUXILIAIRES.

PROBLÈME XVI.	Connaissant l'une des projections d'un point, situé dans un plan donné, trouver la position que prend ce point, lorsqu'on rabat, sur le plan horizontal, le plan donné.	33
XVII.	Connaissant le rabattement d'un point situé dans un plan donné, construire les projections du point.	34
XVIII.	Connaissant l'une des projections d'une droite située dans un plan donné, trouver le rabattement de la droite.	<i>Id.</i>
XIX.	Connaissant le rabattement d'une droite située dans un plan donné, construire les deux projections de la droite.	35
XX.	Un point étant donné, trouver sa projection sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.	<i>Id.</i>
XXI.	Une droite étant donnée, trouver sa projection sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.	36
XXII.	Un plan étant donné, trouver sa trace sur un nouveau plan vertical, le plan horizontal ne changeant pas.	37
XXIII.	Un point étant donné, trouver ses projections sur un plan quelconque P, et sur un plan P' perpendiculaire à P.	<i>Id.</i>

PROBLÈME XXIV.	Faire tourner un point autour d'un axe vertical, et construire les nouvelles projections du point.	38.
XXV.	Faire tourner une droite autour d'un axe vertical, et construire les nouvelles projections de la droite.	39
XXVI.	Faire tourner une droite autour d'un axe vertical, de manière à la rendre parallèle au plan vertical.	<i>Ib.</i>
XXVII.	Faire tourner un plan autour d'un axe vertical, et construire les nouvelles traces du plan.	40
XXVIII.	Faire tourner un plan autour d'un axe vertical, de manière à le rendre perpendiculaire au plan vertical.	<i>Ib.</i>

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES DISTANCES.

PROBLÈME XXIX.	Déterminer la distance de deux points donnés.	42
XXX.	Trouver, sur une droite donnée, un point B qui soit à une distance donnée d'un point A de cette droite.	43
XXXI.	Construire la distance d'un point donné à un plan donné.	<i>Ib.</i>
XXXII.	Construire la plus courte distance d'un point donné à une droite donnée.	44
XXXIII.	Construire la plus courte distance de deux droites données, non situées dans un même plan.	45

CHAPITRE V.

ANGLES FORMÉS PAR DES DROITES ET DES PLANS.

PROBLÈME XXXIV.	Construire l'angle de deux droites données. . .	49
XXXV.	Construire la bissectrice de l'angle formé par deux droites.	50
XXXVI.	Construire les angles que fait une droite avec les plans de projection.	<i>Ib.</i>
XXXVII.	Construire l'angle formé par les traces d'un plan donné.	51

PROBLÈME XXXVIII.	Construire l'angle d'une droite donnée et d'un plan donné.	52
XXXIX.	Construire l'angle de deux plans donnés.	<i>Id.</i>
XL.	Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans donnés.	54
XLI.	Construire les angles que forme un plan avec les plans de projection.	55

CHAPITRE VI.

RÉSOLUTION DE L'ANGLE TRIÈDRE. — RÉDUCTION A L'HORIZON. —
SPHÈRE INSCRITE. — SPHÈRE CIRCONSCRITE.

PROBLÈME XLII.	Connaissant les trois faces d'un angle trièdre, trouver les trois angles dièdres.	57
XLIII.	Connaissant deux faces d'un angle dièdre, et l'angle dièdre compris, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.	59
XLIV.	Connaissant deux faces d'un angle trièdre, et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver la troisième face et les deux autres angles dièdres.	<i>Id.</i>
XLV.	Réduire à l'horizon l'angle de deux droites.	61
XLVI.	Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.	62
XLVII.	Inscrire une sphère à une pyramide triangulaire.	64
XLVIII.	Construire une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre.	65

CHAPITRE VII.

EXERCICES.

PROBLÈME XLIX.	Mener un plan parallèle à un plan donné, et qui en soit distant d'une longueur donnée.	74
L.	Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec la ligne de terre, un angle donné. <i>Id.</i>	
LI.	Par un point donné, mener une droite qui coupe, sous un angle donné, une droite donnée.	75

PROBLÈME LII.	Connaissant la projection verticale d'une droite, un de ses points, et l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal, construire la projection horizontale.	75
LIII.	Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec un plan donné, un angle donné, et qui rencontre une droite donnée.	76
LIV.	Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec les plans de projection, des angles donnés.	<i>Id.</i>
LV.	Connaissant les projections horizontales, les traces horizontales et l'angle de deux droites situées dans un même plan, trouver les projections verticales de ces droites.	77
LVI.	Par une droite donnée, faire passer un plan qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.	78
LVII.	Par un point donné, faire passer un plan qui fasse, avec les deux plans de projection, des angles donnés.	<i>Id.</i>
LVIII.	Par un point donné, faire passer un plan qui soit perpendiculaire à un plan donné, et qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.	79
LIX.	Étant donnée la projection horizontale d'une droite perpendiculaire, en un point donné, à une droite donnée, trouver la projection verticale.	80
LX.	Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs traces horizontales et par les angles qu'ils font avec le plan horizontal de projection.	81
LXI.	Trouver la projection verticale d'un angle trièdre tri-rectangle, dont la projection horizontale est donnée.	<i>Id.</i>
LXII.	Par un point donné, mener une droite qui fasse, avec deux droites données, des angles donnés.	82
LXIII.	Mener une droite qui s'appuie sur deux droites données, non situées dans un même plan, et qui fasse, avec ces droites, des angles respectivement égaux à des angles donnés.	84
LXIV.	Projeter, sur un plan quelconque, un dodécaèdre régulier.	<i>Id.</i>
LXV.	Trouver les projections d'une circonférence passant par trois points donnés.	87

	Pages
PROBLÈME LXVI. Trouver, sur un plan perpendiculaire à une droite donnée, le lieu des pieds de toutes les droites qui, partant d'un des points de la perpendiculaire, font avec cette droite un angle donné.	87
LXVII. Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une sphère données.	88
LXVIII. Trouver le lieu des points de contact de toutes les tangentes menées, par un point donné, à une sphère donnée.	89
LXIX. Trouver l'intersection de deux sphères données.	90

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

SECONDE PARTIE.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

QUI SE TROUVENT A LA MÊME LIBRAIRIE :

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, 2^e édition (1866).

MANUEL DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES SÉRIES.

THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

MANUEL D'ARITHMÉTIQUE ET D'ALGÈBRE.

MANUEL DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

MANUEL DE COSMOGRAPHIE.

MANUEL DE MÉCANIQUE.

MÉLANGES MATHÉMATIQUES.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et C^e, rue Racine, 26.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

EUGÈNE CATALAN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
ET DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LILLE
ET DE LA SOCIÉTÉ D'AGRICULTURE DE LA MARNE.



SECONDE PARTIE
DES SURFACES COURBES

—
TEXTE
—

QUATRIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.



PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
SUCESSEUR DE VICTOR DALMONT,
Précédemment Carilian-Gœury et V^or Dalmont,
LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 49.

—
1868

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE



SECONDE PARTIE.



CHAPITRE PREMIER.

Généralités sur les surfaces.



1. On sait que le plan peut être engendré, soit par une droite mobile rencontrant une droite donnée et restant parallèle à une autre droite donnée, soit par une droite assujettie à rester perpendiculaire à une même droite, en un même point.

De même, la sphère est le lieu des positions que prend une demi-circonférence tournant autour de son diamètre supposé fixe.

De même encore, lorsqu'une droite mobile tourne autour d'un axe fixe, situé dans un même plan avec elle, la surface décrite est celle d'un cylindre de révolution ou d'un cône de révolution.

Cette manière de considérer le plan, la sphère, le cy-

lindre et le cône, étendue à toutes les surfaces, conduit à la définition suivante :

Une surface est le lieu des positions que prend une ligne qui change de situation, et même de forme, d'après une loi déterminée et continue.

Pour éclaircir cette définition, nous prendrons quelques exemples.

FIG. 1. 2. Si une droite DE se meut en s'appuyant constamment sur une ligne fixe ABC, et en restant parallèle à une droite donnée MN, le lieu de ses positions est une *surface cylindrique*.

La droite mobile, qui engendre la surface, se nomme *génératrice*; ainsi DE, D'E', D''E'',... sont différentes positions de la génératrice. La ligne fixe ABC, qui règle le mouvement de la génératrice, est appelée *directrice*.

Si cette directrice est rectiligne, la surface cylindrique se réduit à un plan.

FIG. 2. 3. *Une surface conique* est engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur une ligne fixe ABC, et à passer par un point fixe O. Chacune des génératrices DO, D'O, D''O,... pouvant être prolongée indéfiniment de part et d'autre du point O, la surface est formée de deux parties ou *nappes*. Le *point directeur* O, où ces nappes se réunissent, est le *centre* de la surface conique.

FIG. 3. 4. Soient une droite fixe XY et une ligne quelconque ABC. Menons, de différents points A, B, C,... de cette ligne, des perpendiculaires AA', BB', CC',... à XY. Si nous faisons tourner le système ABCA'B'C',... autour de XY, chacun des points A, B, C,... décrit une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire correspondante, et dont le plan est perpendiculaire

à XY; et la ligne ABC engendre une *surface de révolution*.

Les circonférences décrites par les différents points de la génératrice ABC sont appelées *parallèles* de la surface, parce que leurs plans sont parallèles entre eux. La section MNP, faite par un plan passant suivant l'*axe de rotation* XY, est un *méridien*.

D'après la définition de la surface, *tous les méridiens sont égaux entre eux*.

5. Prenons pour directrice une ellipse ABA'B', et pour génératrice une ellipse CDC'D'. Si cette dernière courbe, supposée *toujours semblable à elle-même*, se meut de manière que son plan reste perpendiculaire à l'axe AA' de l'ellipse directrice, et que ses sommets C, C' parcourent celle-ci, la surface engendrée par cette génératrice *variable de grandeur*, surface évidemment fermée de toutes parts, sera un *ellipsoïde*. Cette dénomination est fondée sur ce que la section faite dans la surface, par un plan quelconque, est une ellipse.

FIG. 4.

6. *Remarque.* Si l'ellipse génératrice se change en cercle, la surface engendrée, au lieu d'être un *ellipsoïde à trois axes inégaux*, devient un *ellipsoïde de révolution*. Si, de plus, l'ellipse directrice se réduit aussi à une circonférence, la surface engendrée se réduit elle-même à une sphère.

7. Remplaçons l'ellipse directrice de l'exemple précédent par une hyperbole EBF'E'BF', et ne changeons rien aux autres conditions. La surface engendrée sera, évidemment, indéfinie, et *sans solution de continuité*. On la nomme *hyperboloïde à une nappe*.

FIG. 5.

8. *Remarque.* Lorsque l'ellipse génératrice se trans-

forme en circonférence, la surface devient l'*hyperboloïde de révolution, à une nappe*.

FIG. 6. 9. Adoptons encore, pour directrice, une hyperbole $EBF'E'F'$. Prenons ensuite, pour génératrice, une hyperbole $DCGD'C'G'$, toujours semblable à elle-même, ayant son plan perpendiculaire à l'axe non transverse de l'autre hyperbole, et dont les sommets C, C' parcourent celle-ci. La surface ainsi engendrée est composée de deux parties séparées et indéfinies. Pour la distinguer de la surface que nous venons de considérer, on lui a donné le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*.

10. *Remarque.* Si l'hyperbole génératrice est semblable à l'hyperbole directrice, la surface devient un *hyperboloïde de révolution, à deux nappes*.

FIG. 7. 11. Soient une parabole fixe ABC , et une parabole mobile DED' . Supposons que ces deux courbes aient leurs axes BG, EH parallèles et de *même sens*, et leurs plans perpendiculaires entre eux. Supposons, en outre, que la seconde courbe se meuve de manière que son sommet E parcoure la première. Nous obtiendrons ainsi une surface continue, indéfinie, et située tout entière d'un même côté du plan mené par le sommet de la parabole fixe, perpendiculairement à l'axe de celle-ci. On démontre facilement, par le calcul, que les sections planes de cette surface sont des paraboles ou des ellipses (*) : pour cette raison, on l'a nommée *paraboloïde elliptique*.

12. *Remarque.* La surface serait de révolution si les paraboles qui la déterminent étaient égales.

FIG. 8. 13. Si la parabole mobile a encore son axe EH paral-

(*) *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique, tome II.*

lèle à celui de la parabole fixe, mais que ces deux droites soient dirigées *en sens contraires*, la surface engendrée est bien différente du paraboloidé elliptique : elle se compose d'une seule nappe continue, qui s'étend indéfiniment de part et d'autre du plan mené par le sommet de la directrice, perpendiculairement à l'axe.

Cette surface, dont les sections sont des paraboles ou des hyperboles, est un *paraboloidé hyperbolique*.

14. Les cinq surfaces que nous venons de définir constituent, avec leurs variétés, les *surfaces du second ordre*. On les désigne sous ce nom, soit parce qu'elles n'admettent, pour sections planes, que des lignes du second ordre, soit parce qu'elles sont représentées par une équation du second degré.

15. Les cylindres et les cônes appartiennent à une classe de surfaces qui en renferme un très-grand nombre employées dans les arts, dans la Coupe des Pierres, par exemple. Ce sont les *surfaces réglées*, c'est-à-dire celles qui sont engendrées par le mouvement d'une *règle* ou d'une droite. Les surfaces réglées se partagent en deux familles, celle des *surfaces développables* et celle des *surfaces gauches*.

Les considérations suivantes vont nous permettre de préciser le sens qu'on doit attacher à ces dénominations.

16. Soit d'abord un polygone ABC... HI, dont trois côtés consécutifs quelconques ne soient pas dans un même plan. Si nous prolongeons ces côtés, indéfiniment et dans le même sens, nous obtiendrons une surface polyédrale dont les faces seront les angles B'BC', C'CD',... H'HI'.

Cela étant, faisons tourner l'angle H'HI' autour de HH', jusqu'à ce que son plan coïncide avec le prolongement

FIG. 9.

du plan $H'GG'$. Puis, après que cette coïncidence aura été établie, faisons tourner l'ensemble des deux angles $H'HI'$, $G'GH'$, autour de GG' , jusqu'à ce que la figure $G'GHI'$ soit venue se rabattre sur le prolongement du plan $G'FF'$. En continuant de la sorte, nous aurons enfin amené dans le plan $B'BC'$, et les unes à la suite des autres, les diverses parties de la surface polyédrale. De plus, la figure plane résultant de ces rabattements successifs ne présentera ni *déchirure* ni *duplication*; en sorte que si l'on *taillait un patron* sur cette figure, on pourrait, avec ce patron, reconstruire la surface primitive. Pour cette raison, la figure plane est dite le *développement* de la surface.

Fig. 10. 17. Soit actuellement une courbe MNP , dont aucun arc ne puisse être contenu dans un plan, c'est-à-dire une *courbe à double courbure*. Le lieu des tangentes Aa , Bb , Cc ,... à cette ligne, est une certaine surface réglée S . D'un autre côté, si nous imaginons les cordes AB , BC ,... indéfiniment prolongées, nous obtiendrons, comme tout à l'heure, une surface polyédrale S' ayant pour arêtes ces dernières droites. Or, plus ces cordes seront petites, et plus leurs prolongements tendront à se confondre avec les tangentes menées par leurs extrémités; en sorte que la *forme* de la surface polyédrale S' diffère, de moins en moins, de la forme de la surface S . Celle-ci est donc la *limite* avec laquelle l'autre surface tend à se confondre, lorsque les cordes AB , BC ,... diminuent indéfiniment.

D'un autre côté, on conçoit (et l'on peut démontrer rigoureusement) que les développements successifs D' des surfaces polyédrales telles que S' tendent eux-mêmes vers une certaine limite D .

A cause de ces propriétés, on dit que la surface réglée

S, limite des surfaces polyédrales développables S' , est *développable*, et que la figure plane D en est le *développement*.

18. Supposons maintenant qu'une droite se meuve suivant une loi continue, mais arbitraire, de manière à engendrer une surface réglée S. Soient AB, A'B', A''B'',... FIG. 11. des positions de la génératrice, aussi rapprochées que nous le voudrons. En général, les droites AB, A'B' ne sont pas situées dans un même plan; elles ont donc une perpendiculaire commune, laquelle est *unique*.

Si la droite A'B' se rapproche indéfiniment de AB, le point où cette dernière ligne est rencontrée par la perpendiculaire commune tend sans cesse vers une position limite P. De même, si la droite A''B'' se rapproche indéfiniment de A'B' (après que celle-ci a repris sa position primitive), le pied de la perpendiculaire commune à ces deux lignes tend vers une position limite P'. Il existe donc, sur les génératrices de la surface S, des points P, P', P'',..., dont le lieu géométrique est une certaine ligne L.

Cela posé, si la ligne L *touche* toutes les génératrices, la surface S, lieu des tangentes à cette ligne, est *développable* (17). Si, au contraire, le lieu des points P *coupe* les génératrices, on dit que la surface S est *gauche*.

19. En résumé, nous adopterons les définitions suivantes :

Une surface développable est le lieu des tangentes à une courbe à double courbure;

Une surface gauche est une surface réglée, non développable.

20. La première définition ne renferme ni les surfaces

cylindriques ni les surfaces coniques, lesquelles sont évidemment développables, comme étant les limites de surfaces prismatiques ou de surfaces pyramidales. Mais, pour les cylindres, le lieu des points P est indéterminé, et, pour les cônes, il se réduit à un point. On peut donc regarder ces deux sortes de surfaces comme des *cas singuliers* des surfaces développables (*).

21. Le lieu des points P, P', P'',... considéré ci-dessus, se nomme *arête de rebroussement*, ou *ligne de striction*, suivant qu'il s'agit d'une surface développable ou d'une surface gauche (**).

(*) D'après les meilleurs auteurs, *une surface développable est le lieu engendré par une droite qui se meut de telle sorte que toujours deux positions consécutives se trouvent dans un même plan.* (LEROY, *Traité de Géométrie descriptive*, p. 85.) Cette définition, qui fait image, et qui permet d'éviter des circonlocutions, n'est malheureusement pas exacte. Il est évident, en effet, que les tangentes menées aux extrémités d'un arc à double courbure ne sont généralement pas dans le même plan, et cela, quel que soit le degré de petitesse de cet arc.

En adoptant cette définition, les auteurs dont je parle se sont laissés guider, peut-être à leur insu, par la propriété caractéristique suivante : *la plus courte distance entre deux génératrices très-voisines d'une surface développable, peut être rendue aussi petite qu'on le veut, par rapport à l'angle de ces génératrices.* En d'autres termes, si δ est la plus courte distance entre deux génératrices d'une surface réglée S (non cylindrique), et que ϵ soit l'angle de ces deux droites, la surface S est développable si la quantité $\frac{\delta}{\epsilon}$ a pour limite zéro ; et si cette quantité a une limite différente de zéro, la surface est gauche. C'est là ce qu'exprime d'une manière abrégée, mais inexacte, l'énoncé que nous venons de citer.

Du reste, la définition employée dans le texte est la traduction, en langage géométrique, de celle que donne la considération de la quantité $\frac{\delta}{\epsilon}$.

(**) Pour les propriétés de la ligne de striction, le lecteur pourra consulter un Mémoire intitulé : *Recherches sur les surfaces gauches* (Académie de Belgique, collection in-8°, tome XVIII).

22. Avant de terminer ces généralités, observons qu'une surface admet toujours plusieurs modes de génération. Afin de rendre cette proposition plus évidente, vérifions-la d'abord sur les surfaces considérées précédemment.

1° En premier lieu, si l'on coupe un cylindre par des plans parallèles, on reconnaît aisément que les sections ainsi obtenues sont égales entre elles. Une surface cylindrique est donc le lieu des positions d'une courbe ABC qui se meut de manière que, trois de ses points décrivant des droites parallèles, chacune des cordes AB, BC, AC, qui joignent ces points deux à deux, reste toujours parallèle à elle-même.

FIG. 12.

2° Les sections faites dans une surface conique, par des plans parallèles, sont des courbes semblables, ayant pour centre de similitude le sommet du cône. D'après cette remarque, si une courbe ABC, de grandeur variable, mais de forme constante, se meut de manière que, trois de ses points décrivant des droites concourantes SA, SB, SC, chacune des cordes AB, BC, AC, qui joignent ces points deux à deux, reste toujours parallèle à elle-même, cette courbe engendre une surface conique.

FIG. 13.

3° Les parallèles d'une surface de révolution peuvent être regardés comme étant des positions différentes de l'un d'eux, supposé mobile et de grandeur variable. Si donc une circonférence, assujettie à s'appuyer sur une ligne donnée, se meut de manière que son centre décrive une droite donnée, et que son plan soit toujours perpendiculaire à cette droite, elle engendre une surface de révolution ayant pour axe la droite donnée.

4° Généralement, si une surface donnée S, engendrée d'une manière quelconque, est coupée suivant des lignes L,

L', L'', \dots , par une surface Σ , variant d'après une loi continue, on peut regarder la première surface S comme le lieu géométrique de ces lignes, lesquelles en sont des génératrices.

23. Les remarques précédentes s'appliquent, très-utilement, à la *représentation graphique* des surfaces. Au lieu de projeter des points pris sur la surface donnée, ou même des courbes tracées arbitrairement sur celle-ci, ce qui n'apprendrait presque rien quant à sa forme, on construit les projections d'un certain nombre de génératrices. Souvent même, si la surface admet deux modes de générations faciles à formuler géométriquement, on emploie, à la fois, des génératrices de chacun des deux systèmes. On conçoit, par exemple, qu'une surface de révolution serait clairement représentée si l'on pouvait *dessiner* les projections de quelques-uns de ses méridiens et de quelques-uns de ses parallèles.

24. La représentation graphique d'une surface serait cependant incomplète si, aux projections de génératrices convenablement choisies, on n'ajoutait les *traces* de la surface, c'est-à-dire ses intersections avec les plans de projection. Enfin, pour indiquer encore plus nettement la forme du corps que l'on peut représenter, on construit, lorsque cela est possible, les *projections des contours apparents*, c'est-à-dire les limites dans l'intérieur desquelles tombent les projections de tous les points du corps. Cette dernière recherche exigeant que l'on sache construire les *plans tangents* à une surface, perpendiculaires à l'un des deux plans de projection, nous ne pourrons la développer qu'à la fin du Chapitre III.

CHAPITRE II.

Généralités sur les plans tangents.

25. On sait que l'on appelle *tangente* à une courbe AB la limite MT des positions d'une sécante MS qui tourne autour de l'un M de ses deux points d'intersection avec la courbe, ce point étant supposé fixe, jusqu'à ce que l'autre point M' vienne se confondre avec le premier.

FIG. 14.

26. Pour étendre cette notion aux surfaces, supposons que, par un point M pris sur une face quelconque S, on fasse passer deux courbes MA, MB, tracées arbitrairement sur celle-ci. Par le point M et par deux points A, B pris sur ces deux courbes, et aussi voisins de M que nous le voudrions, faisons passer un plan P. Il coupe la surface suivant une ligne dont un arc MC passe par le point M, et dont un second arc passe, en général, par les points A, B.

FIG. 15.

Menons maintenant la tangente MT à l'arc MC, et faisons tourner le plan P autour de cette droite, de manière que les arcs A'B', A''B'',... des courbes suivant lesquelles il coupe la surface, s'approchent indéfiniment du point M. Il est clair que le plan P tend vers une certaine position limite P' qu'il atteint, soit quand la courbe MACB se réduit au point M, soit quand le second arc de cette courbe se confond avec celui qui passe en M (*).

(*) Afin de compléter notre démonstration, nous emprunterons à la belle théorie des *Indicatrices* les résultats suivants :

Si l'on prend, sur une surface S, trois points M, A, B, non en ligne

Le *plan limite* P' , ainsi obtenu, est dit *tangent* à la surface au point M .

Conséquemment, le *plan tangent à une surface* S , en un point M , est la limite des positions d'un plan sécant qui tourne autour de la tangente MT à la courbe suivant laquelle il coupe la surface, cette tangente étant supposée fixe, jusqu'à ce que les points où la courbe rencontre deux lignes fixes, menées du point M sur la surface, viennent se confondre avec ce même point M .

27. Le plan tangent, tel qu'il vient d'être défini, jouit d'une propriété fort importante, souvent prise comme définition. Cette propriété consiste en ce que les *tangentes en un point* M , à toutes les courbes menées par ce point sur la surface, sont situées dans le plan tangent en ce même point.

Pour démontrer ce théorème, il suffit, évidemment, de faire voir que les tangentes MR' , MS' aux courbes arbitraires MA , MB , sont, avec la tangente MT , dans un seul et même plan.

droite, et dont les distances mutuelles soient suffisamment petites, la section faite dans la surface, par le plan P de ces trois points, différera très-peu d'une *ellipse*, d'une *hyperbole*, ou d'une *parabole*, du moins dans la partie voisine des trois points.

Dans le premier cas, la surface est dite *convexe* autour de M , et la courbe $MCAB$ a pour limite ce point.

Dans le second, la surface est *non convexe*, ou à courbures opposées; et la limite de la courbe *hyperbolique* est une ligne passant en M .

Enfin, dans le troisième cas, qui est intermédiaire entre les deux autres, la surface est *développable*. En même temps, l'arc *parabolique* a pour limite une droite.

Voyez, sur ce sujet, les *Compléments de Géométrie de M. Dupin*, l'*Analyse de Leroy*, etc.

Or, quand le plan variable P tourne autour de la tangente MT , de manière à s'appliquer sur P' , les sécantes MAR , MBS tournent autour du point M , et tendent à se confondre avec les tangentes MR' , MS' . De plus, à l'instant où les plans P , P' coïncident, les points A , B ne diffèrent pas du point M ; donc, à ce même instant, les deux sécantes, qui n'ont pas cessé d'être situées dans le plan P , atteignent leurs positions limites MR' , MS' . Donc ces deux dernières droites sont dans le plan P' . C'est ce qu'il fallait démontrer.

28. La démonstration précédente suppose que le plan MAB coupe la surface suivant un arc *continu* joignant le point A au point B , et ne contenant pas le point M . Conséquemment, lorsque le contraire arrive, il est nécessaire d'examiner si les tangentes en M , à toutes les courbes tracées sur la surface, sont ou ne sont pas dans un même plan.

29. Considérons, par exemple, le sommet M d'un cône $MPQR$. Prenons, pour les lignes MA , MB , deux génératrices. Le plan P qui les contient n'a que ces droites en commun avec la surface. Par suite, la courbe MC se réduit au point M , et l'arc AB n'existe pas. Donc, quand nous ferons tourner le plan P autour de la droite MT menée arbitrairement par le sommet, dans le plan AMB , ce plan tendra vers une position limite TMD , qui ne contient pas, *à la fois*, les deux *tangentes* MA , MB . FIG. 16.

Il résulte de là que, par le sommet du cône, on peut mener une *infinité* de plans tangents à cette surface, et que les tangentes aux courbes menées de ce sommet, au lieu d'être situées dans un même plan, sont des génératrices. Le sommet d'un cône échappe donc au théorème

général énoncé ci-dessus. Mais on voit clairement à quoi tient cette exception.

30. Le même cas exceptionnel se rencontre dans la surface engendrée par une courbe tournant autour d'une tangente ou d'une corde : pour le point commun à la génératrice et à l'axe de rotation, les tangentes se confondent avec l'axe, ou bien elles forment un cône de révolution.

31. On peut citer encore, comme exemples de surfaces pour lesquelles le théorème général est en défaut, celles qui ont la forme d'une *pointe* ou d'une *corne*, et peut-être quelques autres. Mais, ainsi qu'on vient de le reconnaître dans la discussion relative au sommet d'un cône, ces exceptions n'empêchent pas que la démonstration donnée ci-dessus soit rigoureuse ; car si elles se présentent, c'est seulement lorsqu'on ne peut plus adopter l'hypothèse sur laquelle cette démonstration est fondée.

32. En revenant au cas le plus ordinaire, celui où les tangentes à toutes les courbes menées par le point donné sont contenues dans un même plan, il importe d'observer que celui-ci peut, de trois manières différentes, être tangent à la surface.

FIG. 15.

1° Si la courbe dont MC et AB sont deux arcs (26) se réduit au point M quand le plan sécant P atteint sa position limite P' , ce plan P' n'a, dans les environs du point M , que ce seul point en commun avec la surface : il ne fait donc que *toucher* celle-ci. En d'autres termes, la petite zone dont M est le centre est située tout entière d'un même côté de P' . On dit, dans ce cas, que la surface considérée est *convexe* tout autour du point M (26, Note).

2° Quelquefois la limite commune des arcs AB , MC est

une courbe telle, qu'en chacun de ses points, le plan tangent à la surface est précisément le plan P' . Alors celui-ci, au lieu de toucher la surface en un seul point, a une *ligne de contact* avec elle. On a un exemple de cette circonstance quand on considère un *tore*, c'est-à-dire un *anneau*, reposant sur un plan : les deux surfaces se touchent suivant une circonférence.

3° Enfin, la limite commune des arcs AB , MC étant encore une ligne, il se peut que, le long de celle-ci, la surface soit en partie d'un côté du plan P' , et en partie de l'autre côté. Dans ce cas, le plan P' est, tout à la fois, *tangent et sécant*. Les surfaces qui jouissent de la propriété d'être ainsi *coupées* par leurs plans tangents sont dites *non convexes*. On dit encore, pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, qu'elles sont à *courbures opposées* (26).

La *gorge d'une poulie* ou, ce qui est la même chose, la partie rentrante d'un *tore*, l'*hyperboloïde* à une nappe, le *paraboloïde hyperbolique*, etc., présentent cette particularité.

33. Puisque le plan tangent en un point d'une surface contient, en général, les tangentes à toutes les courbes passant en ce point ; puisque d'ailleurs deux droites qui se coupent déterminent un plan, il s'ensuit que *le plan tangent, en un point pris sur une surface, est déterminé par les tangentes à deux courbes quelconques tracées sur la surface, et passant en ce point.*

34. Une droite est une ligne qui se confond avec sa *tangente* ; conséquemment : 1° le *plan tangent en un point d'une surface réglée contient la génératrice rectiligne passant en ce point* ; 2° ce plan est déterminé par cette géné-

ratrice et par la tangente à une autre ligne quelconque menée, sur la surface, par le point de contact donné.

35. Après avoir établi les propriétés générales des plans tangents, occupons-nous des propriétés particulières dont ils jouissent, lorsque les surfaces qu'ils touchent sont celles qui ont été considérées ci-dessus.

CHAPITRE III.

Plans tangents aux cylindres, aux cônes, aux surfaces gauches, aux surfaces développables, et aux surfaces de révolution.

36. THÉORÈME. *Le plan tangent en un point d'une surface cylindrique est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.*

Par deux points M, M' , appartenant à une même génératrice, faisons passer deux courbes quelconques $MA, M'A'$, tracées sur la surface. Prenons ensuite une nouvelle génératrice AA' , assez voisine de la première pour qu'elle rencontre nos deux courbes. Menons enfin les deux sécantes $MAS, M'A'S'$, et les deux tangentes $MT, M'T'$.

Si le plan des deux génératrices tourne autour de MM' , de manière que la seconde génératrice AA' s'approche indéfiniment de la première, les deux sécantes, constamment situées dans le plan mobile, se confondent, en même temps, avec leurs limites $MT, M'T'$. Donc ces tangentes $MT, M'T'$ sont situées dans un même plan avec la génératrice fixe. Mais ce plan est tangent au cylindre, d'une part en M et d'autre part en M' (34); donc, etc.

37. THÉORÈME. *La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.*

Par une courbe quelconque MA et par sa tangente MT faisons passer un cylindre projetant et un plan projetant. Si nous coupons ces deux surfaces par le plan de projection, nous obtiendrons, pour sections respectives, la pro-

jection $M'A'$ de la courbe MA et la projection $M'T'$ de la tangente MT .

D'après le théorème précédent, le plan TMM' , tangent en M à la surface du cylindre, est également tangent en M' ; donc il contient la tangente à $M'A'$. D'ailleurs cette droite est située dans le plan de $M'A'$, c'est-à-dire dans le plan de projection; donc elle se confond avec $M'T'$.

38. Le dernier théorème est en défaut quand la tangente à la courbe donnée est perpendiculaire au plan de projection, car alors elle se projette suivant un point. Dans ce cas, la projection de la courbe présente habituellement, en ce point, un *arrêt* ou un *rebroussement*.

39. THÉOREME. *Le plan tangent en un point d'une surface conique est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle qui précède (36).

40. Nous avons vu, ci-dessus (20), que les cylindres et les cônes sont des cas *singuliers* des surfaces développables. Il y a donc lieu de se demander si la propriété remarquable que nous venons de démontrer, relativement aux plans tangents, appartient à toutes ces surfaces. Avant de vérifier qu'il en est ainsi, nous allons essayer de faire comprendre la différence de forme qui existe entre les sections faites dans une surface réglée, par un plan P mené suivant une génératrice, selon que cette surface est *gauche* ou qu'elle est *développable*.

FIG. 18. 41. Considérons d'abord le cas d'une surface gauche, et supposons que l'on ait fait passer le plan P par la génératrice AB et par un point M , pris arbitrairement sur

une génératrice CD, voisine de la première. Nous pouvons, pour fixer les idées, admettre que le plan P soit celui de la figure. Alors, comme la génératrice CD a toujours pu être choisie de manière à ne pas se trouver tout entière dans le plan P, sa partie *inférieure* MD sera, par exemple, en *avant* de ce plan, tandis que sa partie *supérieure* sera *derrière* celui-ci.

Soient maintenant C'D', C''D'',... des génératrices situées entre AB et CD, et soient EF, E'F', E''F'',... d'autres génératrices, qui *précèdent* AB. Comme la surface est engendrée d'après une loi *continue*, les droites CD, C'D', C''D''... sont, en général, de *moins en moins inclinées* sur le plan P, qu'elles percent en des points M, M', M'',... Quant aux droites EF, E'F', E''F'',... situées à la *gauche* de AC, elles devront ordinairement, à cause de cette même loi de continuité, être inclinées en sens contraire des premières, c'est-à-dire qu'elles auront leurs parties *supérieures* en *avant* du plan, et leurs parties *inférieures* en *arrière*. Les points N, N', N'',... où ces nouvelles génératrices percent le plan P, sont, avec les premiers points M, M', M'',... situés sur une courbe MRN qui, en général, rencontre la génératrice AC en un point R. En effet, si ce point était *transporté à l'infini*, le plan P serait *parallèle à une génératrice INFINIMENT VOISINE de AB* (*); ce que nous ne supposons pas (**).

(*) Quand nous disons, pour abrégé le discours: « *Le plan P serait parallèle à une génératrice INFINIMENT VOISINE de AB,* » nous entendons ceci: « *Le plan P est la limite vers laquelle tend un plan P' mené par AB, parallèlement à une génératrice voisine CD, lorsque celle-ci se rapproche indéfiniment de AB.* » Cette explication d'une dénomination empruntée à la *Théorie des infiniment petits* pourrait être répétée dans tous les cas analogues à celui qui nous occupe: nous la donnons une fois pour toutes.

(**) Si le plan P avait cette position particulière, il serait normal à la

42. Il est actuellement bien facile de voir que le plan P est tangent à la surface gauche, au point R. En effet, ce plan contient la génératrice AB et la tangente RT à la courbe MRN; car la tangente à une courbe plane est située dans le plan de celle-ci. Ainsi, *tout plan P, mené par une génératrice rectiligne d'une surface gauche, touche celle-ci au point où la génératrice rencontre la courbe d'intersection du plan et de la surface.*

43. Si le plan P tourne autour de AB, le point M, où il rencontre CD, se déplace; et, conséquemment, il en est de même pour la courbe MRN et pour le point R. Nous voyons donc que *le point unique où une surface gauche est touchée par un plan passant suivant une génératrice, se déplace sur celle-ci, quand le plan tourne autour de cette même génératrice.*

FIG. 19.

44. Soit à présent une surface développable, ayant pour arête de rebroussement la courbe à double courbure GHKL. Par la génératrice AHB et par un point C de l'arête de rebroussement, voisin du point de contact H, faisons passer un plan P. Admettons, en outre, pour fixer les idées, que l'arc CH soit en arrière de ce plan, pris pour celui de la figure, les arcs GH, CKL étant en avant.

Les tangentes nN , $n'N'$, $n''N''$, ... mM , $m'M'$, ... à ces derniers arcs, rencontrent le plan P en des points N, N', N'', ... M, M', ...; en sorte que l'intersection cherchée se compose d'abord des arcs HNR, CMS.

Remarquons maintenant que, parmi les génératrices

surface, au point où la génératrice AB rencontre la ligne de striction. Le lecteur pourra consulter, sur ce sujet, une très-intéressante Note de M. Chasles. (*Journal de Liouville*, t. II, p. 413.)

tangentes à l'arc CH, il y en a une au moins, telle que EF, *parallèle* au plan P : cette conclusion devient évidente si l'on fait mouvoir ce plan parallèlement à sa position primitive, jusqu'à ce que les deux points où il coupe CH se confondent en un seul point I.

Cela étant, les tangentes dont les points de contact sont situés sur l'arc IH donnent lieu, par leurs intersections avec le plan P, à un arc infini HU : car EF est la limite des génératrices qui rencontrent ce plan. De même, les tangentes à la partie IC de l'arête de rebroussement déterminent un autre arc infini CV.

Il est facile de reconnaître, en outre, que les deux arcs CV, CM ont une tangente commune, et que les deux autres arcs HU, HR ont pour tangente commune la génératrice AB. De plus, si le point C s'approche indéfiniment du point H, les arcs infinis CV, HU, et la tangente EF, se confondent, en même temps, avec la génératrice AB. Quant aux deux arcs HR, CS, ils formeront, *à la limite*, une seule courbe ayant AB pour tangente; mais alors le plan P sera, évidemment, tangent en H à la surface développable. On a donc ce théorème : *le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, coupe la surface suivant la génératrice passant par ce point, et suivant une courbe tangente, en ce même point, à l'arête de rebroussement.*

45. De cette discussion sur la forme générale de la section faite dans une surface développable par un plan P, contenant une génératrice, on conclut, sans difficulté, la propriété du plan tangent, indiquée ci-dessus (40).

En effet, traçons sur la surface une courbe quelconque XY, coupant aux points X, Y, la génératrice AB et l'arc

FIG. 19.

infini CV; menons la sécante XYZ; puis faisons tourner le plan P autour de AB, de façon que le point C, où il coupe l'arête de rebroussement, s'approche indéfiniment du point H, commun à cette courbe et à sa tangente AB. A l'instant où ces deux points sont confondus en un seul, les points Y, X coïncident, et la sécante XYZ se confond avec XT, tangente à la courbe XY. Cette tangente XT est donc contenue dans le plan limite P', tangent en H à la surface développable; donc celui-ci coïncide avec le plan BXT, tangent en X à cette surface. En d'autres termes : *le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, est tangent tout le long de la génératrice rectiligne qui passe en ce point.* C'est ce qu'il fallait démontrer.

46. *Remarque.* Le plan P', tangent à la surface développable le long de la génératrice rectiligne AB, est la limite des plans qui, passant par cette droite, coupent l'arête de rebroussement. Pour une raison que nous ne pouvons indiquer ici, il est appelé *plan osculateur* de cette courbe.

47. **THÉORÈME.** *Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien passant par le point de contact.*

FIG. 20.

Par un point quelconque M, pris sur une surface de révolution dont XY est l'axe, menons un *parallèle* AB et un *méridien* CD. Soient MT, MS, les tangentes à ces deux lignes : le plan TMS sera tangent, en M, à la surface (52). Par conséquent, pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir que la tangente MT, au parallèle, est perpendiculaire au plan méridien MXY. Or, la droite MT, perpendiculaire au rayon OM, est encore perpendiculaire à

l'axe XY , attendu qu'elle est située dans un plan perpendiculaire à XY ; donc, d'après un théorème connu, cette tangente MT est perpendiculaire au plan méridien.

48. THÉORÈME. 1° *La normale en un point d'une surface de révolution est contenue dans le plan méridien passant par ce point; 2° les normales à la surface, menées par différents points d'un même parallèle, rencontrent l'axe en un même point.*

La normale à une surface, en un point, est la perpendiculaire au plan tangent en ce point.

Cela posé, la première partie de la proposition est une conséquence du théorème précédent. Quant à la seconde partie, elle devient évidente si l'on observe que tous les méridiens de la surface sont des positions différentes de l'un quelconque d'entre eux, supposé mobile.

49. Nous pouvons maintenant compléter ce que nous avons indiqué ci-dessus (24), relativement à la manière d'obtenir des limites entre lesquelles tombent les projections des points appartenant à la surface que l'on veut représenter.

S'étant cette surface, supposée convexe pour plus de simplicité, soit O la position de l'œil du spectateur. Imaginons un plan quelconque P passant par le point O , et tangent à la surface S . Si ce plan roule sur la surface, en passant constamment par le point de vue O , le point de contact M décrit sur celle-ci une certaine courbe $ABCD$, telle, que la partie $ABCD$ du corps S sera visible pour le spectateur, tandis que l'autre partie $ABCDF$ sera invisible. Pour cette raison, la ligne $ABCD$ est appelée *contour apparent* du corps.

FIG. 21.

50. D'après cette considération, on devrait se donner,

dans chaque cas particulier, les projections du point de vue, et en conclure celles du contour apparent correspondant. Le problème, ainsi envisagé dans toute sa généralité, serait fort compliqué : on le simplifie en supposant (Première Partie, 35) *l'œil de l'observateur placé sur une perpendiculaire au plan de projection, et à une distance infinie de ce plan.*

En effet, si le point de vue O s'éloigne indéfiniment du plan de projection XY , en restant constamment sur la perpendiculaire GH , le plan tangent P , considéré ci-dessus, a pour limite un autre plan P' , également tangent à la surface S , mais perpendiculaire à XY . En même temps *le contour apparent $ABCD$ est, à la limite, le lieu des points de contact des plans tangents perpendiculaires au plan de projection.*

51. *Remarque.* La tangente MT à la courbe $ABCD$ est située dans le plan P . Conséquemment, si nous prenons $ABCD$ pour directrice d'un cône ayant pour sommet le point O , ce cône sera *circonscrit* à la surface S ; c'est-à-dire que le plan P , tangent en M à la surface, est tangent au cône, suivant la génératrice OM . La limite du cône, quand le sommet O se transporte à l'infini sur la droite GH , est, évidemment *un cylindre circonscrit à la surface S , dont les génératrices sont perpendiculaires à XY .* Par suite :

Pour obtenir la projection du contour apparent d'une surface donnée, il suffit de construire la trace d'un cylindre circonscrit à cette surface, et perpendiculaire au plan de projection.

CHAPITRE IV.

Problèmes relatifs aux plans tangents.

PROBLÈME I.

Mener un plan tangent à un cylindre donné, en un point donné.

52. Supposons, pour plus de simplicité, que la surface cylindrique soit donnée par sa trace horizontale $abcd$ et par une droite $(pq, p'q')$, parallèle aux génératrices; admettons, en outre, que le point de contact soit donné par sa projection horizontale m ; et proposons-nous, en premier lieu, de déterminer les projections des contours apparents de la surface. FIG. 22.

D'après ce qui précède (50), le contour apparent, relatif au plan horizontal, est le lieu des points de contact des plans verticaux, tangents au cylindre $abcd$. Or, chacun de ces plans touche la surface suivant une génératrice (36); donc sa trace horizontale, évidemment confondue avec la projection de cette droite, doit être tangente à la trace horizontale du cylindre.

Il suit de là que si l'on mène, à cette dernière courbe, des tangentes ce, df parallèles à pq , l'ensemble de ces tangentes forme la projection du contour apparent, relatif au plan horizontal de projection.

On verra, avec la même facilité, que si l'on construit des plans $aa'g', bb'h'$, parallèles à la droite $(pq, p'q')$, perpendiculaires au plan vertical, et ayant leurs traces horizontales tangentes à la courbe $abcd$, l'ensemble des

traces verticales $a'g'$, $b'h'$ de ces plans est la projection du contour apparent, relatif au plan vertical de projection.

53. Actuellement, cherchons la projection verticale du point de contact. Pour cela, menons, par la projection horizontale donnée m , une parallèle à pq : elle rencontre la courbe $abcd$ en des points r, s, \dots , traces horizontales d'autant de génératrices, sur lesquelles sont situés les points de la surface cylindrique, projetés en m . Sur notre épure, où la trace horizontale du cylindre est une courbe fermée, convexe, le nombre des points r, s, \dots se réduit à deux ; en sorte que la verticale projetée en m rencontre la surface du cylindre, seulement en deux points, dont les projections verticales m', m'' sont situées sur les projections $s'm', r'm''$ des génératrices ayant pour traces r, s .

Si la trace horizontale donnée était sinuëuse, les points $m', m'' \dots$ pourraient être plus nombreux ; mais la construction ne changerait pas.

54. Les projections verticales m', m'' , qui répondent à la projection horizontale m , étant déterminées, considérons, par exemple, le plan tangent en (m, m') . Ainsi que nous l'avons rappelé ci-dessus, ce plan se confond avec celui qui touche le cylindre au point (s, s') , où la génératrice $(ms, m's')$ perce le plan horizontal ; et celui-ci, devant contenir la tangente $\alpha\beta$ à la courbe $abcd$, a pour trace horizontale cette dernière droite. Quant à la trace verticale $\beta\gamma$ du même plan, on la détermine, soit en cherchant la trace verticale de la génératrice de contact, soit en construisant une horizontale du plan, telle que $(mi, m'i')$.

On trouve, de la même manière, les traces $\alpha'\beta', \beta'\gamma'$ du plan tangent en (m, m'') .

55. *Remarque.* Dans le problème précédent, nous avons

supposé que l'on sait toujours mener la tangente à une courbe plane, par un point pris dans son plan. Cette hypothèse, qui ne serait nullement admissible s'il s'agissait d'une construction rigoureuse, résultant des propriétés de la courbe, doit être acceptée quand il est seulement question de tracés. On conçoit, en effet, qu'il n'est pas difficile de placer la règle de manière qu'elle passe par le point donné, et qu'elle soit sensiblement tangente à la courbe donnée.

PROBLÈME III.

Connaissant la directrice d'un cylindre et la direction de ses génératrices, construire le plan tangent à la surface, en un point donné (*).

56. Soient abc , $a'b'c'$ les projections d'une courbe quelconque, directrice du cylindre; soit $(pq, p'q')$ la droite à laquelle les génératrices doivent être parallèles. Enfin, supposons que le point de contact M ait m pour projection horizontale.

FIG. 23.

Si, par le point M , on imagine une génératrice EF , elle rencontre la directrice en un point D , dont les projections d, d' se construisent aisément: il est donc facile d'obtenir la projection verticale $e'f'$ de EF , et la projection verticale m' de M .

Cela posé, comme le plan tangent en M se confond avec le plan tangent en D , et que ce dernier plan est déterminé par la génératrice EF et par la tangente en D à la directrice $abc, a'b'c'$ (34), le problème proposé se réduit à la construction de cette tangente.

(*) Ce problème est la généralisation de celui qui précède.

Or les projections de cette droite sont les tangentes dt , $d't'$ aux courbes abc , $a'b'c'$ (37); et, d'après la remarque précédente (55), ces tangentes peuvent être regardées comme connues. Le plan demandé est $\alpha\beta\gamma$.

PROBLÈME III.

Mener un plan tangent à un cylindre, par un point extérieur à la surface.

FIG. 24. 57. Après avoir construit, comme dans le Problème I, les projections des contours apparents du cylindre, menons, par le point donné (m, m') , une parallèle $(ms, m's')$, aux génératrices : le plan cherché contient, évidemment, cette parallèle. De plus, ce plan doit avoir sa trace horizontale tangente à la trace horizontale $abcd$ du cylindre. Si donc, par le point s , où la droite MS perce le plan horizontal, nous menons des tangentes $s\beta$, $s\beta'$ à la courbe $abcd$, chacune de ces droites est la trace horizontale d'un plan satisfaisant à la question.

Le reste s'achève facilement.

PROBLÈME IV.

Mener un plan tangent à un cylindre, parallèle à une droite donnée.

58. Si, par un point quelconque de l'espace, on mène une parallèle à la droite donnée, et une parallèle aux génératrices du cylindre, le plan de ces deux droites est parallèle au plan tangent cherché. Par conséquent, on trouve la trace horizontale de celui-ci en menant, à la trace horizontale de la surface, une tangente parallèle à la trace horizontale du plan auxiliaire,

Nous laissons aux lecteurs le soin de construire l'épure.

PROBLÈME V.

Mener un plan tangent à un cône donné, en un point donné.

59. Supposons que le cône soit donné par sa trace horizontale $abcd$ et par son sommet (s, s') ; supposons, de plus, que le point de contact soit donné par sa projection horizontale m . En raisonnant comme on l'a fait ci-dessus (52), on verra que, pour obtenir la projection du contour apparent relatif au plan horizontal, il faut, par la projection s du sommet, mener des tangentes sc, sd à la base du cône; et que, pour déterminer le contour apparent relatif au plan vertical, il suffit de construire les traces verticales $s'a', s'b'$ de deux plans ayant, pour traces horizontales, des tangentes à cette même base, perpendiculaires à la ligne de terre. Fig. 25.

On trouvera ensuite, comme dans le cas du cylindre, les projections verticales m', m'' des divers points qui, situés sur la surface du cône, ont m pour projection horizontale.

Les traces horizontales des différents plans qui satisfont à la question sont les tangentes $\alpha\beta, \alpha'\beta'$ à la base du cône, menées par les traces horizontales t, r , des *génératrices de contact*: les considérations qui viennent d'être rappelées démontrent encore cette partie de la construction.

Enfin, les traces verticales des plans tangents s'obtiennent, soit par une horizontale ($mi, m'i'$), soit au moyen de la génératrice de contact ($rs, r's'$).

60. Nous ne donnerons pas les solutions des questions sur le plan tangent au cône, analogues aux Problèmes II,

III et IV, parce qu'il nous faudrait presque absolument nous répéter ; mais nous engageons le lecteur à construire les épures que nous omettons, en variant les données de ces exercices.

PROBLÈME VI.

Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien est donné, connaissant le point de contact.

61. Nous admettrons toujours, dans les questions relatives aux surfaces de révolution, que l'on prend le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe, et que le plan vertical passe par l'axe. Les deux projections de cette droite sont alors le point o de la ligne de terre, et une droite oz' perpendiculaire à celle-ci.

62. Cela posé, supposons d'abord, pour plus de simplicité, que la surface de révolution soit donnée par son méridien *principal*, c'est-à-dire par celui qui est situé dans le plan vertical de projection ; et adoptons, pour ce méridien, une ellipse ayant son grand axe $c'd'$ confondu avec oz' : la surface à laquelle nous nous proposons de mener un plan tangent sera un *ellipsoïde de révolution* (6) ; mais nos raisonnements sont indépendants de cette hypothèse.

63. Le contour apparent, relatif au plan vertical, est la *méridienne principale* $a'b'c'd'$. En effet, en un point quelconque de cette courbe, le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan vertical, puisque celui-ci est confondu avec le méridien passant au point dont il s'agit.

Quant au second contour apparent, lieu des points de contact des plans tangents verticaux, il est évident qu'il se compose de parallèles tels que $a'b'$, déterminés par des

tangentes au méridien principal, menées parallèlement à l'axe. Dans le cas particulier représenté sur l'épure, ce parallèle (dont nous avons projeté seulement une moitié) partage l'ellipsoïde en deux parties symétriques : pour cette raison, on l'appelle ordinairement *équateur*.

64. Soit m la projection horizontale du point de contact M . Pour déterminer la projection verticale correspondante, il suffit d'observer que le point M est situé sur un parallèle dont la projection horizontale est la circonférence nmp , décrite du point o comme centre, et dont il est facile d'obtenir la projection verticale $n'm'p'$. Il est clair, en même temps, qu'à la projection horizontale m peuvent correspondre les projections verticales m', m'' d'autant de points situés sur la surface.

65. Ces constructions préliminaires étant effectuées, supposons qu'il s'agisse de mener le plan tangent en (m, m') . Pour résoudre ce problème, nous construirons d'abord la *normale* au même point. Or, la projection horizontale de cette droite est, évidemment, le rayon mo (48); et, quant à la projection verticale, rappelons-nous que cette normale, et la normale au point (n, n') , coupent l'axe en un même point (48). Si donc nous menons en n' la normale $n'i'$ à la *méridienne principale* (*), et si nous joignons le point i' , où cette droite rencontre oz' , avec m' , la normale en (m, m') sera déterminée.

Il ne s'agit plus, pour achever l'épure, que de mener, par le point (m, m') , un plan $\alpha\beta\gamma$ perpendiculaire à la droite $(m, m'i')$.

(*) Nous admettons, comme ci-dessus (55), que l'on sait toujours, rigoureusement ou approximativement, construire la tangente, et par suite la normale, à une courbe plane, en un point de cette ligne.

66. Dans l'exemple que nous avons choisi, le point (m, m') donne lieu à une seconde normale et à un second plan tangent $\alpha'\beta'\gamma'$, symétrique du premier par rapport au plan de l'équateur. A cause de cette symétrie, les deux plans tangents se coupent suivant une droite située dans ce dernier plan.

PROBLÈME VII.

Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien n'est pas donné, connaissant le point de contact.

FIG. 27. 67. Soient $ab, a'b'$ les deux projections d'une ligne quelconque, plane ou à double courbure, qui, en tournant autour de l'axe (o, oz') , engendre la surface. Soit m la projection horizontale du point de contact M. On obtiendra, comme dans le problème précédent, la projection verticale m' de M, en construisant le parallèle $(mn, m'n')$ qui passe en M.

On pourrait chercher ensuite la section faite dans la surface par le plan vertical de projection; puis, ayant obtenu ainsi la méridienne principale, on serait ramené au Problème VI. Mais il est plus simple d'opérer directement sur les données, comme il suit.

Par le point (n, n') , où le parallèle passant par le point de contact coupe la génératrice, menons la tangente $(nt, n't')$ à cette courbe; puis, en ce même point, imaginons un plan perpendiculaire à la tangente: il contient la normale en (n, n') à la surface. Or cette normale est projetée horizontalement suivant no ; donc le point où elle coupe l'axe est l'intersection de celui-ci avec la trace verticale du plan dont il vient d'être question.

Pour trouver cette trace verticale, menons nc perpen-

diculaire à nt , et $n'c'$ parallèle à xy : ces deux droites sont les projections d'une horizontale du plan, ayant pour trace verticale le point (c, c') ; de sorte que $c'r'$, perpendiculaire à $n't'$, est la trace verticale du *plan normal* à la génératrice, et que le point r' est celui où la normale $(no, n'r')$ coupe l'axe.

Il ne s'agit plus maintenant, pour achever l'épure, que de tracer les projections $(mo, m'r')$ de la normale au point donné, et de faire passer, par ce point, un plan $\alpha\beta\gamma$ perpendiculaire à cette droite.

68. Adoptons, pour génératrice de la surface de révolution, une droite $(ab, a'b')$. En appliquant à cet exemple particulier la méthode employée dans l'épure précédente, on rencontrerait d'assez grandes simplifications; mais il sera encore plus court d'opérer comme il suit.

FIG. 28.

m étant toujours la projection horizontale du point de contact M , soit (n, n') le point de la génératrice situé sur le parallèle qui passe en M ; et soit, par suite, m' la projection verticale de ce dernier point.

A cause de la symétrie de la surface autour de l'axe (o, oz') , si nous pouvons construire le plan tangent en (n, n') , il nous suffira de le faire tourner d'un angle égal à nom , pour obtenir le plan tangent en M . Or le premier de ces deux plans contient la génératrice $(ab, a'b')$ (34); et, d'un autre côté, il doit être perpendiculaire au plan méridien noz' . Conséquemment, la trace horizontale de ce plan est la perpendiculaire $\alpha'\beta'$ abaissée du point a sur on , et sa trace verticale $\beta'\gamma'$ passe par la trace verticale b' de la génératrice.

Supposons maintenant que le plan tourne autour de l'axe, jusqu'à ce que le point (n, n') se confonde avec

(m, m') . Alors la trace horizontale $\alpha'\beta'$ prendra la position $\alpha\beta$; et comme le point (o, d') , où l'axe rencontre le plan mobile, ne change pas, la trace verticale du plan cherché est $\beta d'\gamma$.

69. *Remarque.* Si le point de contact (n, n') se déplace sur la génératrice $(ab, a'b')$, la trace horizontale $\alpha'\beta'$ tourne autour du point a , puisqu'elle est perpendiculaire au rayon on . Il suit de là et des propriétés générales démontrées dans le Chapitre III (43), que la surface dont nous venons de nous occuper est *gauche*. On verra plus loin qu'elle est connue sous le nom de *surface gauche de révolution*. On verra aussi que cette surface ne diffère pas de l'*hyperboloïde de révolution, à une nappe*.

PROBLÈME VIII.

Par une droite donnée, faire passer un plan tangent à une sphère donnée.

FIG. 29. 70. Lorsque deux plans P, P' , non parallèles, touchent une sphère O , leur intersection AB est évidemment perpendiculaire au plan du grand cercle $EDFD'$ mené par les points de contact D, D' . Par suite, les tangentes CD, CD' , à la circonférence $EDFD'$, viennent concourir au point C où le plan de cette circonférence est rencontré par l'intersection des plans P, P' .

Si donc AB est la droite par laquelle on veut faire passer un plan tangent à la sphère O , on mènera, du centre de celle-ci, un plan perpendiculaire à AB ; on déterminera le point C et la circonférence $EDFD'$, intersections du plan avec la droite et avec la sphère; on construira les tangentes CD, CD' ; et les points D, D' seront ceux où la sphère touche les plans cherchés P, P' .

71. Pour effectuer les constructions qui viennent d'être indiquées, faisons passer la ligne de terre par le centre o de la sphère : les contours apparents de celle-ci, relatifs aux deux plans de projection, seront confondus suivant une circonférence de grand cercle $efgh$. Soient, en outre, $ab, a'b'$ les projections de la droite donnée AB (*). Les perpendiculaires $o\alpha, o\beta$, abaissées du centre o sur ces projections, sont les traces du plan $EDFD'$; et nous déterminerons, par la construction ordinaire, les projections c, c' du point C .

FIG. 30.

Actuellement, pour n'avoir pas à construire les projections de la circonférence $EDFD'$, rabattons le plan de cette ligne, c'est-à-dire le plan $\alpha o\beta$, sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de $o\alpha$. La circonférence $EDFD$ se rabat suivant $efgh$, et le point (c, c') vient se placer en un point C_1 , que nous obtenons par la construction connue (Première Partie, Problème XVI). Menons ensuite, de ce point C_1 , les tangentes $C_1 D_1, C_1 D_2$ à $efgh$; nous aurons en D_1, D_2 les rabattements des points de contact D, D' ; après quoi il ne s'agira plus, pour achever l'épure, que de revenir de ces rabattements aux projections. On trouve ainsi les deux plans $\lambda_1 \mu_1 \nu_1, \lambda_2 \mu_2 \nu_2$.

72. *Remarque.* L'épure dont nous venons d'indiquer la construction comporte trois *vérifications* :

1° Les traces de chacun des deux plans tangents doivent passer, respectivement, par les traces de la droite AB ;

(*) Si les deux projections $ab, a'b'$ coupaient la circonférence $efgh$, il serait nécessaire de s'assurer que la plus courte distance du centre o à la droite AB est plus grande que le rayon de la sphère. Pour éviter cette recherche préliminaire, on prend habituellement une, au moins, des deux projections, *extérieure* à $efgh$.

2° Elles doivent être perpendiculaires aux projections des rayons menés aux points de contact (d_1, d_1') , (d_2, d_2') ;

3° Enfin, les traces horizontales $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ doivent passer, respectivement, par les points R_1, R_2 , où les tangentes C_1D_1, C_1D_2 coupent la trace horizontale $\alpha\alpha$.

73. *Remarque.* Si les traces de la droite AB étaient fort éloignées du centre de la sphère, la construction qui a donné le point (c, c') serait incommode, et il vaudrait mieux en employer une autre, résultant de la solution du problème suivant : *Construire les projections du point où une droite rencontre un plan qui y est perpendiculaire, sans employer les traces de la droite.* Nous laissons au lecteur le soin de chercher cette solution.

PROBLÈME IX.

Mener à une surface de révolution S, dont le méridien est connu, une normale parallèle à une droite donnée D.

74. En supposant le problème résolu, soit P le *pied* de la normale cherchée N ; c'est-à-dire le point de la surface S, pour lequel la normale est parallèle à la droite D. Le plan méridien en P doit contenir N (48) ; donc il est parallèle à D. De plus, la section déterminée dans la surface par ce plan méridien a pour normale, au point P, la droite N : cette dernière proposition résulte de la propriété principale du plan tangent (27), et de la définition de la normale (48).

Il faut donc, pour résoudre le problème :

1° Mener un plan méridien M' parallèle à la droite D ;
 2° imaginer, par un point de l'axe, une parallèle D' à cette même droite ; 3° amener le méridien M' et la droite D' dans le méridien principal M, en les faisant tourner autour de

l'axe; 4° mener, à la courbe méridienne principale, une normale N' parallèle au rabattement de D' (*); 5° revenir du rabattement N' à la normale véritable N .

EXERCICES.

I. Déterminer les normales communes à deux cylindres donnés.

II. Mener un plan tangent à un cône donné, connaissant son inclinaison sur le plan horizontal.

III. Même question pour un cylindre.

IV. Par une droite donnée, mener un plan qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.

V. Mener, à un cylindre donné, un plan tangent qui fasse, avec le plan horizontal, un angle donné.

VI. Même question pour un cône.

VII. Par un point donné, mener un plan tangent à une surface de révolution, de manière que le point de contact soit sur un parallèle donné ou sur un méridien donné.

VIII. Parallèlement à une droite donnée, mener un plan tangent à une surface de révolution, de manière que le point de contact soit sur un parallèle donné ou sur un méridien donné.

IX. Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères données.

X. Mener un plan tangent à trois sphères données.

(*) Pour mener à une courbe plane une normale parallèle à une droite donnée, on trace d'abord une tangente perpendiculaire à cette droite; après quoi l'on mène, par le point de contact, une parallèle à la même droite: cette parallèle est la normale cherchée. Il faut remarquer, relativement à ce procédé, qu'il détermine assez rigoureusement la position de la tangente; mais qu'il n'en est de même, ni pour le point de contact, ni, par suite, pour la normale.

CHAPITRE V.

Sections planes des cylindres et des cônes.

75. Les problèmes dont nous allons développer les solutions ne sont que des cas très-particuliers de la question dans laquelle on se proposerait de trouver l'intersection de deux surfaces quelconques. Mais comme ces problèmes ont des applications continues, qu'ils sont beaucoup plus simples que le problème général, dont ils donnent, en quelque sorte, la *clef*, nous avons pensé, à l'exemple de plusieurs auteurs, qu'il est indispensable de les traiter à part.

PROBLÈME X.

Trouver : 1° l'intersection d'un cylindre vertical et d'un plan perpendiculaire au plan vertical; 2° la tangente en un point de l'intersection; 3° les rabattements de cette courbe et de sa tangente; 4° le développement du cylindre; 5° la transformée de l'intersection; 6° la tangente à la transformée; 7° le point d'inflexion de cette courbe.

FIG. 31. 76. *Projections de l'intersection.* Le cylindre étant vertical, tous les points de sa surface se projettent horizontalement sur la base $acdb$, que nous supposons située dans le plan horizontal de projection. Par conséquent, la projection horizontale de la section faite dans le cylindre, par le plan donné $\alpha\beta\gamma$, est cette courbe $acdb$. Quant à la projection verticale de la section, il est évident qu'elle se réduit à la partie a_1b_1 de la trace verticale du plan,

comprise entre les projections $a'a''$, $b'b''$ des génératrices-limites. Enfin, comme nous supposons le cylindre terminé, à la partie supérieure, par un plan horizontal $a''b''$, il s'ensuit que la première partie du problème est complètement résolue.

77. *Construction de la tangente.* La tangente en un point quelconque (m, m_1) de l'intersection est projetée, horizontalement, suivant la tangente tmr à la trace du cylindre, et, verticalement, suivant la trace $\beta\gamma$ du plan sécant. Ceci résulte de ce théorème général, qu'il suffit d'énoncer : *La tangente en un point de la courbe d'intersection d'une surface et d'un plan est l'intersection du plan tangent à la surface, en ce point, avec le plan de la courbe.*

78. *Rabattement de l'intersection.* Pour obtenir l'intersection en vraie grandeur, on pourrait rabattre, sur l'un ou sur l'autre des deux plans de projection, le plan sécant ; mais il est plus simple, à cause de la nature des données, de le faire tourner autour de la perpendiculaire au plan vertical, projetée en c_1 , jusqu'à ce qu'il devienne horizontal (Première Partie, p. 40). Dans ce mouvement, chacun des points de la courbe, le point (m, m_1) , par exemple, décrit, autour de l'axe de rotation, un arc de cercle dont la projection horizontale mM est parallèle à la ligne de terre, et qui se projette en vraie grandeur, sur le plan vertical, suivant l'arc m_1m_2 . Par conséquent, la *nouvelle projection verticale* du point considérée est m_2 , et sa *nouvelle projection horizontale* est M . Par conséquent aussi, après le mouvement de rotation, la courbe d'intersection est projetée, en vraie grandeur, suivant $AcBd$.

79. *Remarque.* Si la base $abcd$ du cylindre est une circonférence, la section $ABcd$ est une ellipse.

80. *Développement du cylindre.* Ce développement est la limite des développements des prismes inscrits au cylindre (20). Si donc, après avoir inscrit à la base $abcd$ un polygone dont les côtés soient assez petits pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les regarder comme confondus avec les arcs correspondants, on porte ces côtés, les uns à la suite des autres, sur une droite indéfinie XY , puis qu'on élève, par les points de division ainsi obtenus, des droites perpendiculaires à XY , et égales à la hauteur $c'c''$ du cylindre, l'ensemble des petits rectangles ainsi formés pourra être regardé comme étant, à fort peu près, le développement du cylindre.

FIG. 32.

Sur notre épure, nous avons supposé que le prisme qui remplace le cylindre est *ouvert* suivant la génératrice projetée en a , et nous avons placé la droite XY sur le prolongement de la ligne de terre: cette disposition est la plus commode de toutes, surtout quand on veut construire la *transformée* de la section.

81. *Remarque.* Quand le cylindre est à base circulaire, on peut, pour obtenir une approximation plus grande, modifier, comme il suit, le procédé qui vient d'être indiqué.

Ayant divisé la circonférence $abcd$ en *arcs égaux* suffisamment petits, on prend, sur la droite XY , une longueur égale aux $\frac{22}{7}$ du diamètre ab ; après quoi l'on divise cette longueur en autant de parties égales qu'il y a de divisions dans la base du cylindre. On achève ensuite comme il a été dit ci-dessus.

Cette méthode est, *graphiquement parlant*, très-approchée; car la différence entre le nombre $\frac{22}{7}$, donné par

Archimède, et le rapport de la circonférence au diamètre, est inférieure à 0,002.

82. *Transformée de la section.* Concevons, comme précédemment, qu'un prisme soit inscrit au cylindre. La section faite dans ce polyèdre, par le plan $\alpha\beta\gamma$, est un polygone dont les sommets $(a, a_1), (m, m_1), (c, c_1), \dots$, viendront, quand nous développerons la surface prismatique, se placer en A, M, C, ..., sur les *transformées* des arêtes. De plus, les distances Aa, Mm, Cc, \dots sont égales, respectivement, à $a'a_1, m'm_1, \dots c'c_1, \dots$. Enfin, le polygone dont les sommets sont les points A, M, C, ... ainsi obtenus, a ses côtés, ou ses *éléments*, égaux aux éléments correspondants du polygone tracé sur le prisme : on peut donc le désigner sous le nom de *transformé* de celui-ci. Cela posé, si le nombre des faces du prisme inscrit augmente indéfiniment, le développement du prisme tend sans cesse à se confondre avec le développement du cylindre ; et, en même temps, la *transformée* de la section prismatique s'approche de plus en plus d'une certaine courbe-limite AMCB..., laquelle est dite *transformée* de la section cylindrique (*).

On trouvera cette transformée avec toute l'approximation que la question comporte si, après avoir construit, comme il a été indiqué plus haut, le développement du cylindre, et après rapporté sur ce développement

(*) Pour ne pas compliquer l'épure, nous avons désigné par les mêmes lettres A, M, C, B, ..., les sommets d'un polygone obtenu en développant le prisme, et les limites de ces sommets, situées sur la courbe avec laquelle le polygone tend à se confondre. Mais il est bien entendu que, rigoureusement parlant, *les premiers points ne coïncident jamais avec les seconds.*

les points $(a, a_1), (m, m_1), (c, c_1), \dots$ on fait passer, par les points A, M, C, ..., un *trait continu* AMCB... (*).

83. *Remarque.* Nous avons vu, tout à l'heure, que la transformée de la section prismatique a ses éléments égaux, respectivement, à ceux de la section. Par suite, les périmètres de ces deux polygones sont égaux entre eux. Or deux grandeurs constamment égales ont des li-

(*) On peut se proposer de trouver l'équation de la transformée AMCB. Pour cela, supposons que l'on sache exprimer l'arc $am = s$ de la base du cylindre, en fonction de l'abscisse $aP = x$ du point m , et soit $s = \varphi(x)$ la relation entre ces deux variables. Soient, en outre, θ l'inclinaison du plan sécant sur le plan horizontal, et h la hauteur à laquelle ce plan vient couper la génératrice $a'a''$. On a, pour l'ordonnée du point (m, m_1) ,

$$z = h + x \operatorname{tg} \theta.$$

Or, sur le développement, $am = X = s$, et $Mm = Y = z$. L'équation cherchée est donc

$$X = \varphi \frac{Y - h}{\operatorname{tg} \theta}.$$

Si la base du cylindre est un cercle de rayon R,

$$s = R \operatorname{arc} \cos \frac{R - x}{R}.$$

Par conséquent, la transformée sera représentée par

$$X = R \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{Y - h}{R \operatorname{tg} \theta} \right),$$

ou par

$$1 - \frac{Y - h}{R \operatorname{tg} \theta} = \cos \frac{X}{R}.$$

Pour simplifier cette équation, transportons l'origine au point C, dont les coordonnées sont $\frac{1}{2} \pi R$ et $h + R \operatorname{tg} \theta$; et nous aurons enfin :

$$y = R \operatorname{tg} \theta \sin \frac{x}{R}.$$

On voit que la transformée de la section plane d'un cylindre de révolution est une variété de la SINUSOÏDE.

mites égales ; donc *la section plane d'un cylindre, et la transformée de cette section, sont deux lignes de même longueur.*

84. Le raisonnement qui précède s'applique, soit à *une ligne quelconque tracée sur un cylindre*, soit, plus généralement, à *toute ligne tracée sur une surface développable quelconque*. Nous énoncerons donc, dès à présent, ce théorème général :

Toute ligne, tracée sur une surface développable, est de même longueur que sa transformée.

85. Il existe, entre toute ligne tracée sur la surface d'un cylindre et la transformée de cette ligne, une autre relation remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

Si l'on considère, sur une surface cylindrique et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur les génératrices et sur les transformées de celle-ci ;

Ou, en termes plus courts, mais *moins exacts* :

L'angle que fait la tangente à une courbe tracée sur la surface d'un cylindre, avec la génératrice passant par le point de contact, reste invariable quand on développe la surface.

Pour démontrer cette proposition, substituons encore au cylindre un prisme qui y soit inscrit, et traçons, sur la surface prismatique, un polygone dont les sommets soient les points de rencontre des arêtes avec la courbe tracée sur le cylindre ; puis développons la surface. Dans cette opération, les trapèzes formés par les arêtes, par les côtés de la base du prisme et par les côtés du polygone, viendront se placer, les uns à la suite des autres, sur le

plan de développement. Conséquemment, *l'angle formé par un côté quelconque du polygone, avec les arêtes du prisme, reste invariable quand on développe celui-ci*. Or le prolongement d'un côté MN du polygone tracé sur la surface prismatique a pour limite la tangente en M à la courbe tracée sur le cylindre. De même, le prolongement de l'élément M'N', appartenant à la transformée du polygone, a pour limite la tangente en M' à la transformée de la courbe, etc.

86. Des raisonnements semblables prouvent que :

Si l'on considère, sur une surface développable et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur la génératrice passant par le premier point et sur la transformée de celle-ci.

87. *Construction de la tangente à la transformée de la section cylindrique.* Reportons-nous maintenant à la figure 31. La tangente au point M de l'espace, la projection horizontale rm de cette droite, et la partie Mm de la génératrice forment un triangle Mr , évidemment rectangle en m , et égal, par conséquent, au triangle Mm , (fig. 32) formé par la tangente Mr à la transformée de la section, la transformée Mm de la génératrice, et la transformée de la base du cylindre. En effet, ces deux triangles ont un angle aigu égal et un côté égal. Donc la base mr du second est égale à la base mr du premier. De là, cette règle :

Prenez sur le développement du cylindre, à partir du point où la transformée de la génératrice passant par le point de contact rencontre la transformée de la base, et dans le sens convenable, une distance égale à l'intervalle compris entre la trace horizontale de la tangente et la trace horizon-

tale de la génératrice; joignez le point ainsi obtenu avec le transformé () du point de contact; vous aurez la tangente à la transformée de la courbe tracée sur le cylindre.*

88. *Remarque.* Le point d'inflexion C correspond au maximum de l'angle M ρ m (fig. 32), lequel est égal à M ρ m (fig. 31). Mais, d'après une propriété connue, ce dernier angle devient maximum lorsque la tangente Mr est parallèle à la ligne de plus grande pente du plan, c'est-à-dire perpendiculaire à la trace horizontale de celui-ci.

DE L'HÉLICE.

89. Parmi les courbes, en nombre infini, que l'on peut supposer tracées sur la surface d'un cylindre quelconque, l'une des plus importantes est l'HÉLICE. On désigne, sous ce nom, toute ligne dont la transformée est une droite. D'après cette définition, les sections faites dans un cylindre, par des plans perpendiculaires aux génératrices, sont des hélices. Les génératrices elles-mêmes constituent un cas particulier de ces courbes : ce sont des *hélices rectilignes*.

90. La droite, transformée d'une hélice quelconque, peut être regardée comme une ligne dont la tangente a une direction constante; et il est clair qu'une courbe ne saurait jouir de cette propriété. Par conséquent, et d'après ce que nous avons expliqué ci-dessus (85) : *La tangente en un point quelconque d'une hélice fait, avec les génératrices, un angle constant.* Cette propriété est souvent prise pour définition.

(*) Puisque l'on dit : *la transformée d'une ligne*, pourquoi ne dirait-on pas : *le transformé d'un point*? Par les progrès des sciences et des arts, certains néologismes s'introduisent nécessairement dans le langage.

91. THÉORÈME. *Les hélices, tracées sur un cylindre quelconque, sont des courbes à double courbure.*

FIG. 33. Supposons, s'il est possible, qu'un arc ABC d'hélice soit situé dans un plan. Alors les tangentes AS, BR, CT à cette ligne feront, avec les génératrices passant par les points de contact, des angles égaux entre eux. En d'autres termes : si, par un point de l'espace, on menait des parallèles aux tangentes et une parallèle aux génératrices, la dernière droite serait également inclinée sur les trois autres. Cette conclusion, admissible si l'hélice est droite, ou si son plan est perpendiculaire aux génératrices, est absurde dans tout autre cas. Ainsi, *de toutes les hélices tracées sur un cylindre quelconque, les seules qui soient planes sont les génératrices, ou les sections perpendiculaires à ces droites.*

92. *Remarque.* La section obtenue en coupant un cylindre par un plan perpendiculaire aux génératrices, est appelée *section orthogonale* ou *section droite*.

93. THÉORÈME. *Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne.*

FIG. 34. Prenons pour *origine* de l'hélice AMB le point A où elle perce la *section droite* Amb du cylindre C. Soit ensuite MR la tangente en un point quelconque de la première courbe : cette droite a pour projection, sur le plan XY de la section droite, la tangente mR à Amb. La distance Rm, comprise entre la *trace* R de RM et la projection m de M, est ce qu'on appelle la *sous-tangente*; et l'arc Am est l'*abscisse curviligne* du point M.

Le théorème énoncé consiste donc en ce que

$$Rm = \text{arc } Am.$$

Or, si l'on développe le triangle *cylindrique* AmM , on obtient un triangle rectangle $A'm'M'$, dans lequel les côtés $M'm'$, $A'm'$ de l'angle droit sont égaux, respectivement, à Mm et à l'arc Am rectifié. D'un autre côté, l'hypoténuse $A'M'$ pouvant être considérée comme se confondant avec sa tangente en M' , il résulte, de la règle démontrée ci-dessus (87), que le côté $A'm'$ est égal à la sous-tangente Rm ; celle-ci est donc égale à l'abscisse curviligne Am .

94. THÉORÈME. *Le lieu du point où la tangente à l'hélice perce le plan d'une section droite du cylindre, est une développante de la section droite.*

D'après le théorème précédent, il faut, pour avoir ce lieu, mener une tangente quelconque mR à la section droite Amb , et prendre ensuite sur cette tangente, à partir du point de contact, une longueur mR , égale à l'arc Am rectifié. Cette construction est précisément celle qui sert à définir la *développante* d'une courbe quelconque Amb . Le théorème est donc démontré.

FIG. 34.

95. THÉORÈME. *Le plus court chemin entre deux points, sur la surface d'un cylindre, est le plus petit des arcs d'hélice terminés à deux points.*

Remarquons d'abord que, par deux points A, B , pris sur la surface d'un cylindre ayant pour base une courbe *fermée*, on peut faire passer une infinité d'hélices. En effet, imaginons un plan P , mené par le point A , perpendiculairement aux génératrices, et supposons, pour fixer les idées, que le point B soit *au-dessus* de ce plan P . Si, par le point A , nous menons une infinité d'hélices dont les inclinaisons avec les génératrices augmentent d'une manière continue, en commençant par une inclinaison nulle, il y aura

une de ces courbes qui passera par le point B, sans avoir rencontré toutes les génératrices; il y en aura une qui, après les avoir coupées toutes, rencontrera de nouveau une partie d'entre elles, et se terminera en B; et ainsi de suite (*).

Cela posé, considérons, avec la première de ces hélices, une courbe quelconque ACB, tracée sur la surface cylindrique, et terminée aux points A, B. Quand nous développons le cylindre, ces deux lignes conservent leurs longueurs (84). Or la droite, transformée de l'hélice, est plus courte que la transformée de ABC, etc.

PROBLÈME XI.

Trouver : 1° les projections de la section droite d'un cylindre quelconque; 2° le rabattement de cette courbe; 3° le développement du cylindre; 4° la transformée de la base; 5° les tangentes à la section droite et à la transformée de la base.

FIG. 35. 96. *Projections de la section droite.* Supposons, comme dans le Problème X, que le cylindre soit donné par sa

(*) Lorsqu'une hélice est tracée sur un cylindre à base fermée, elle se compose d'une infinité d'arcs, tous égaux entre eux, et déterminés par les rencontres successives de la courbe avec une même génératrice. Chacun de ces arcs est une *spire*. L'intervalle constant compris entre les extrémités d'une même spire est ce qu'on appelle *pas de l'hélice*, etc. Relativement aux hélices dont il est question dans le texte, si l'on désigne par l la longueur de la section faite par le plan P, par h la hauteur du point B au-dessus de ce plan, par s l'arc compris entre le point A et la projection du point B, enfin par i l'angle que fait, avec les génératrices, la tangente à une quelconque de ces courbes, on aura!

$$\operatorname{tg} i = \frac{s + nl}{h}.$$

Dans cette formule, n représente le nombre des spires contenues dans l'arc AB.

trace horizontale $abcd$ et par la direction de ses génératrices. Après avoir déterminé, comme à l'endroit cité, les projections des contours apparents, prenons un plan $\alpha\beta\gamma$, dont les traces soient, respectivement, perpendiculaires aux projections des génératrices : ce plan, par son intersection avec la surface du cylindre, donnera la section droite de celui-ci.

Pour trouver les projections de cette courbe, il suffit, évidemment, de chercher les points où un certain nombre de génératrices, convenablement choisies, percent le plan $\alpha\beta\gamma$. Nous avons indiqué sur l'épure la construction qui donne le point (m, m') , correspondant à la génératrice quelconque $(mp, m'p')$. En renvoyant, pour l'explication de ce tracé, au Problème XII de la Première Partie, nous mentionnerons cependant une circonstance particulière qui se présente dans cette épure et qui la simplifie considérablement.

Comme les plans auxiliaires, tel que $m\rho\delta\epsilon$, sont tous parallèles entre eux, les projections verticales de leurs intersections avec le plan $\alpha\beta\gamma$ sont toutes parallèles à l'une d'elles, par exemple, à $e'm'$. Il suffit donc, pour obtenir ces projections avec une grande exactitude, de construire les points où elles rencontrent la ligne de terre.

En faisant passer deux traits continus par les points déterminés comme il vient d'être dit, on aura les projections de la section droite. Mais, pour que ces courbes soient mieux construites, il convient d'y mener des tangentes, d'abord en des points quelconques, et ensuite en des *points remarquables*.

97. *Construction de la tangente.* Considérons d'abord un point quelconque M de la section, projeté en (m, m') .

La tangente en ce point est l'intersection du plan de la courbe et du plan tangent au cylindre, en ce même point M (77). Si donc nous construisons la trace horizontale pr de ce dernier plan, et que nous joignons le point r , où elle rencontre la trace horizontale $\alpha\beta$, à la projection horizontale m du point de contact, nous aurons la projection horizontale de la tangente en M . On obtiendra aisément la projection verticale $r'm'$ de la même droite, si l'on fait attention que le point (r, r') , où se coupent les traces horizontales des deux plans, est la trace horizontale de leur intersection.

98. Les *points remarquables* sont, dans l'épure qui nous occupe, les points (f, f') , (h, h') , (g, g') , (k, k') situés sur les *contours apparents*. Les considérations exposées ci-dessus (51), ou l'application de la règle précédente, prouvent que les tangentes en f, h , sont les projections horizontales df, bh des génératrices extrêmes, et que les tangentes en g', k' sont, semblablement, les projections du contour apparent, relatif au plan vertical.

99. Pour éviter la multiplicité des constructions, nous n'avons pas déterminé : 1° les points pour lesquels la tangente est *horizontale*; 2° les points pour lesquels la tangente est *parallèle au plan vertical*. Nous engageons le lecteur à effectuer cette recherche, qui ne présente aucune difficulté.

100. Tout ce qui précède subsisterait sans modification, si le plan $\alpha\beta\gamma$, au lieu d'être perpendiculaire aux génératrices du cylindre, avait une direction arbitraire. Ainsi, nous pouvons regarder comme résolu ce problème général : *Construire les projections de la section d'un cylindre par un plan quelconque.*

101. *Rabattement de la section droite.* On a vu, dans la Première Partie (Problèmes XVI et suivants), comment on peut construire le rabattement d'une figure plane dont les deux projections sont données. L'application du procédé général, aux différents points (m, m') , (g, g') , etc., donne les points M_1, G_1, \dots . En unissant ceux-ci par un trait continu, on aura, avec une approximation suffisante, non plus les projections de la section droite, mais cette section même, en *vraie grandeur*. Il ne sera pas plus difficile de construire le rabattement rM_1 de la tangente rM .

Nous n'aurions donc rien à dire sur cette partie de l'épure, si nous ne devions faire remarquer les simplifications suivantes, applicables à toutes les questions ayant pour objet les rabattements des figures planes.

102. 1° Considérons, pour fixer les idées, le point M de l'épure, projeté en m, m' , et rabattu en M_1 . Pour trouver ce dernier point, on doit (Première Partie, Problème XVI) construire l'hypoténuse du triangle Mme , rectangle en m , et dans lequel le côté vertical Mm est égal à $\mu m'$.

Au lieu de rabattre ce triangle autour de sa base me , et de répéter la même opération pour les triangles semblables à celui-là (*), et relatifs aux points G, F, \dots , ce qui introduirait de la confusion dans l'épure, transportons tous ces triangles *parallèlement à eux-mêmes*, jusqu'à ce que leurs bases viennent se placer sur une droite $x'y'$. Si maintenant le plan vertical qui les contient tous se rabat sur le plan horizontal, les diverses hypoténuses viendront

(*) Ces triangles rectangles sont semblables, parce que l'angle aigu Mem mesure l'inclinaison du plan $\alpha\beta\gamma$ sur le plan horizontal (Première Partie, Problème XLI).

se placer sur une même droite $e_1\lambda_1$ dont nous construirons un point m_1 en prenant sur $m\mu_1$, perpendiculaire à $x'y'$, la distance μ_1m_1 égale à $\mu m'$. Les perpendiculaires nn_1 , gg_1, \dots donneront ensuite les hypoténuses cherchées e_1n_1 , e_1g_1, \dots .

2° Il n'est pas nécessaire, pour construire les points m_1 , n_1 , g_1, \dots , de connaître les projections horizontales correspondantes m , n , g, \dots : on peut même, pour plus d'exactitude et de simplicité, déterminer celles-ci au moyen des rabattements m_1 , n_1 , g_1 .

En effet, l'angle aigu $x'e_1\lambda_1$ est le complément de l'angle aigu formé par une génératrice quelconque pM et par sa projection horizontale pm . D'après cela, prenons sur la génératrice pM un point quelconque, par exemple celui qui est projeté en e , e'' ; puis, après avoir abaissé $p\nu_1$ perpendiculaire à $x'y'$ et avoir pris e_1e_2 égal à $e'e''$, menons p_1e_2 : cette droite sera la position occupée par la génératrice quand, après l'avoir transportée parallèlement à elle-même, nous l'aurons fait tourner autour de $x'y'$.

Les autres génératrices viendront, semblablement, se rabattre suivant des parallèles à p_1e_2 . Nous trouverons un point de chacune d'elles en abaissant bb_1 , dd_1, \dots perpendiculaires à $x'y'$; et, en coupant tous ces rabattements par la perpendiculaire commune $e_1\lambda_1$, nous obtiendrons, tout d'un coup, les points m_1 , n_1 , g_1, \dots . Nous pourrions ensuite, comme nous venons de le dire, déterminer par leur moyen, non-seulement la projection horizontale de la section, mais encore sa projection verticale.

3° Les rabattements m_1 , n_1 , g_1, \dots ayant été construits, par l'un ou par l'autre des deux procédés qui

viennent d'être indiqués, la recherche du rabattement $M_1N_1G_1\dots$ de la section droite n'offrira plus de difficulté.

103. *Remarque.* Au lieu de regarder les droites p_1m_1, b_1h_1, \dots , comme ayant été obtenues par une *translation* et une *rotation* des génératrices, on peut supposer que ces dernières lignes ont été projetées sur le plan vertical ayant pour trace $x'y'$, et que ce plan vertical a été rabattu sur le plan horizontal de projection. Sous ce point de vue, le plan vertical dont il s'agit est un *nouveau plan vertical de projection*, la droite $x'y'$ est une *nouvelle ligne de terre*, et l'épure, modifiée comme nous venons de l'expliquer, est une application du procédé connu sous le nom de *Méthode des changements de plans de projection* (Première Partie, Chapitre III).

104. *Développement du cylindre.* Nous savons que la section droite d'un cylindre se transforme, quand on effectue le développement, en une perpendiculaire aux transformées des génératrices (92). Si donc, sur une droite indéfinie UV, nous prenons les distances HM, MG, GF, FN, NK, KH_1 , respectivement égales aux arcs H_1M_1, M_1G_1, \dots *rectifiés* (*), puis que, par les points H, M, G..., nous menons des perpendiculaires à UV, ces droites pourront être regardées comme les transformées des génératrices du cylindre, dont UV représentera la section droite.

FIG. 36.

FIG. 35.

105. *Transformée de la base.* Une ligne quelconque, tracée sur la surface du cylindre, est de même longueur

(*) Pour rectifier approximativement les arcs H_1M_1, M_1G_1, \dots , on inscrit, à chacun d'eux, des cordes égales entre elles, assez petites pour qu'on puisse, sans erreur sensible, les regarder comme se confondant avec les petits arcs qu'elles sous-tendent.

Fig. 36. que sa transformée (84). Par conséquent, pour construire un certain nombre de points appartenant à la transformée de la trace horizontale du cylindre, il suffit de prendre les longueurs Hb , Mp ,... respectivement égales aux vraies grandeurs h_1b_1 , m_1p_1 ,... des portions de génératrices, comprises entre le plan de la section droite et le plan horizontal. La courbe bpa ..., qui unit tous les points ainsi obtenus, est la transformée cherchée.

Quand à la partie de la surface située au-dessus de la section droite, on peut la terminer par un simple arrachement.

106. *Tangente à la transformée de la base.* Les explications données dans le n° 87 prouvent que, pour avoir la tangente au point p de la transformée, correspondant au point M de la section droite, il suffit de prendre, sur la droite indéfinie UV , la distance Mr égale à M_1r , et de joindre le point r au point p . On peut encore déterminer le point r par la condition que la distance pr soit égale à la partie pr de la tangente à la trace horizontale du cylindre.

107. Si l'on voulait construire les points de la transformée bpa ... pour lesquels la tangente est perpendiculaire aux transformées des génératrices, il suffirait d'observer qu'ils correspondent aux points de la base pour lesquels, pareillement, la tangente est perpendiculaire aux génératrices. Pour abrégé, nous n'avons pas indiqué ces points sur l'épure. Nous n'avons pas construit non plus les points d'inflexion de la transformée (88).

PROBLÈME XXI.

Trouver : 1° l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire au plan vertical; 2° la tangente en un point de l'intersection; 3° les rabattements de cette courbe et de sa tangente; 4° le développement du cône; 5° la transformée de l'intersection; 6° la tangente à cette transformée.

108. *Projection de l'intersection.* Prenons le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe du cône, et faisons passer le plan vertical par cet axe, perpendiculairement au plan donné. Alors les projections de l'axe sont le point s , situé sur la ligne de terre, et la perpendiculaire ss' à cette droite. En même temps, la section méridienne du cône, ou le contour apparent, relatif au plan vertical, est le triangle isocèle $as'c$. Il est évident qu'il n'y a pas de contour apparent, relatif au plan horizontal, et que la base du cône est la circonférence décrite sur ac comme diamètre. Pour plus de clarté dans l'épure, nous avons seulement tracé la partie de cette base, située en avant du plan vertical. Enfin, le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ a sa trace horizontale $\alpha\beta$, perpendiculaire à la ligne de terre.

FIG. 37.

109. Ces constructions préliminaires étant effectuées, on observe que la projection verticale de l'intersection est le segment $g'i'$ de la trace verticale $\beta\gamma$, compris entre les projections $s'a$, $s'c$ des génératrices extrêmes; en sorte que la projection horizontale seule est inconnue.

Pour la déterminer, on peut employer deux procédés principaux, qui se déduisent des deux modes de génération de la surface (22, 3°).

En effet, soit M un point quelconque de la courbe d'intersection, ayant m' pour projection verticale. Par ce point

M, on peut faire passer, soit un *méridien*, soit un *parallèle*.

Le méridien, c'est-à-dire la génératrice rectiligne passant en M, a pour projection verticale $s'm'd'$: sa projection horizontale s'obtient immédiatement, puisque cette génératrice a sa trace horizontale sur celle du cône. Quant au parallèle du point M, il a pour projection verticale la droite $k'l'$ parallèle à la ligne de terre ; et il se projette en vraie grandeur, sur le plan horizontal, suivant la circonférence ghl . Chacune des deux méthodes donne ainsi, très-aisément, la projection horizontale m d'un point quelconque M de l'intersection. Cette ligne se projette donc suivant une courbe $gmi\dots$, qui a pour *axe* la ligne de terre, et pour *sommets* les points g, i .

110. *Remarques*. I. Des deux procédés qui viennent d'être indiqués, le second, seul, est applicable à la détermination du point h , situé sur le méridien perpendiculaire au plan vertical de projection.

II. Afin de rendre l'épure plus régulière, et surtout en vue des constructions ultérieures, on divise la demi-circonférence abc en un certain nombre de parties égales ; et l'on emploie les génératrices passant par les points de division.

111. *Construction de la tangente*. Elle ne diffère pas de celle qui a été expliquée ci-dessus (97), et donne mr pour projection horizontale de cette ligne.

112. *Rabattement de l'intersection*. Pour cette partie de l'épure, que nous n'avons pas effectuée, nous renverrons le lecteur au Problème XI (101).

113. *Développement du cône*. Concevons que l'on ait inscrit à un cône une série de pyramides dont les faces latérales diminuent indéfiniment, et qu'on ait développé les surfaces ainsi obtenues : la limite de ces développe-

ments est ce qu'on appelle développement de la surface conique (20).

Dans le cas qui nous occupe, le cône est droit, à base circulaire; par conséquent, il se développe suivant un secteur circulaire ASA_1A , dont le rayon SA est la génératrice as' , et dont l'arc ABA_1 a même longueur que la circonférence abc (84). FIG. 38.

Pour trouver cet arc, on pourrait se contenter de porter, sur la circonférence à laquelle il appartient, à partir du point A , et les unes à la suite des autres, des cordes égales à celles qui sous-tendent les arcs $a_1, 1_2, 2_3...$ de la base du cône; mais il vaut mieux construire d'abord, au moyen d'un rapporteur, l'angle ASA_1 (*); après quoi l'on partage l'arc ABA_1 en autant de parties égales qu'il y en a dans la circonférence abc .

En joignant le centre aux points de division obtenus par l'une ou l'autre de ces deux méthodes, on aura les transformées des génératrices du cône.

(*) En désignant par R le rayon de la base du cône, par l le rayon du secteur, et par φ la mesure de l'angle ASA_1 , c'est-à-dire l'arc qui correspond à cet angle, dans le cercle dont le rayon est un , on a

$$2\pi R = \varphi \cdot l,$$

d'où

$$\varphi = 2\pi \frac{R}{l}.$$

D'un autre côté,

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{n}{360},$$

n étant le nombre de degrés de l'arc ABA_1 . Donc

$$n = 360 \cdot \frac{R}{l}.$$

Dans notre épure, $R = 46^{\text{mm}}$, $l = 79^{\text{mm}}$; en sorte que $n = 209,9$. L'angle ASA_1 est donc d'environ 210° .

114. *Transformée de l'intersection.* Les distances comprises entre le sommet du cône et les points où les génératrices sont rencontrées par le plan sécant restent invariables, quand on développe la surface (84). Conséquemment, pour trouver le transformé M du point (m, m') , il suffit de prendre, sur le rayon SD, la distance SM égale à celle qui sépare le point (m, m') du sommet (s, s') . Or cette dernière distance est, évidemment, représentée par $s'k'$.

FIG. 38.

FIG. 37.

En répétant la même construction, on obtient la courbe $GMHIG_1$, transformée de la section conique (*).

(*) On peut, de la manière suivante, trouver l'équation de la courbe $GMHIG_1$.

Désignons par α l'angle $s'g'i'$ que fait le plan sécant avec la génératrice (as, as') , par β l'angle $as's$ générateur du cône, par d la distance $g's'$. Faisons, en outre,

$$sm = u, \quad asm = \theta, \quad SM = \rho, \quad ASM = \omega.$$

Nous aurons d'abord, en exprimant que $AD = ad$, et à cause de $as = AS \sin \beta$:

$$\theta = \frac{\omega}{\sin \beta}. \quad (1)$$

Le rayon vecteur sm est la projection horizontale de SM ; donc

$$u = \rho \sin \beta. \quad (2)$$

Exprimons maintenant que les distances kp , $k'm'$ sont égales. Or $kp = u(1 - \cos \theta)$; et, dans le triangle $k'g'm'$,

$$\frac{k'm'}{\sin \alpha} = \frac{g'k'}{\sin m'} = \frac{d - \rho}{\cos(\alpha + \beta)};$$

d'où

$$k'm' = (d - \rho) \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Nous aurons donc, à cause de l'équation (2):

$$\rho(1 - \cos \theta) \sin \beta = (d - \rho) \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}; \quad (3)$$

115. *Tangente à la transformée de la section conique.*

Les considérations employées à propos du cylindre sont applicables ici, et l'on trouve, par leur moyen, que la tangente MR est l'hypoténuse du triangle RDM, dans lequel $DR = dr$.

116. *Nature de la section.* On peut démontrer, soit géométriquement, soit par le calcul, que la section faite par un plan P, dans un cône de révolution, est une courbe du second degré, c'est-à-dire une *ellipse*, une *hyperbole*, ou une *parabole*. Dans l'exemple traité ci-

puis

$$\rho = \frac{d \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \frac{\omega}{\sin \beta}}.$$

Pour simplifier le dénominateur, observons que $\cos(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin \alpha = \cos(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin(\alpha + \beta - \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta$; et nous aurons enfin

$$\rho = \frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \frac{\omega}{\sin \beta}}. \quad (4)$$

Telle est l'équation qui représente les transformées des sections coniques. Elle peut être mise sous la forme abrégée :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos m\omega}.$$

Ajoutons que la projection horizontale *img* est représentée par

$$u = \frac{p \sin \beta}{1 - e \cos \theta},$$

équation d'une conique rapportée à son foyer comme pôle. Conséquemment, si l'on coupe un cône de révolution par un plan, et que l'on projette la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, l'un des foyers de la projection est situé sur cette droite.

Cette remarque a été faite par M. Vieille.

dessus, le plan P coupait *toutes les génératrices*; et la courbe obtenue, située tout entière sur une seule nappe du cône, était une ellipse. Si, au contraire, le plan P rencontre les deux nappes de la surface, ou, ce qui est la même chose, s'il est *parallèle à deux génératrices*, la courbe d'intersection, évidemment composée de deux branches séparées et infinies, est une hyperbole. Enfin, s'il arrive que le plan sécant soit *parallèle à une seule génératrice*, cette courbe, ayant une seule branche infinie, est une parabole.

Il est intéressant de considérer à part le second cas, parce qu'il donne lieu à la construction des *asymptotes* de l'hyperbole.

FIG. 39. 117. *Cas où la section est une hyperbole.* Supposons, comme précédemment, que l'axe (o, oz') du cône soit situé dans le plan vertical de projection, perpendiculairement au plan horizontal; et, pour plus de régularité dans l'épure, limitons les deux nappes aux plans horizontaux $ab, a''b''$, symétriquement placés à l'égard du centre (o, o') . En même temps, prenons le plan P (toujours supposé perpendiculaire au plan vertical) de manière que les points (e, e') , (f, f') , où il rencontre les génératrices extrêmes $(ab, a''b'')$, $(ab, a''b)$, soient situés, l'un sur la nappe inférieure du cône, et l'autre sur la nappe supérieure.

Au moyen de ces données, et en opérant comme dans l'épure précédente, on trouve l'hyperbole eg, fh , projection horizontale de l'hyperbole H suivant laquelle le plan P coupe le cône.

118. *Construction des asymptotes.* Généralement, on peut considérer l'asymptote d'une courbe comme la limite des positions d'une tangente dont le point de contact s'éloi-

gne indéfiniment sur la courbe ()*. D'après cette remarque, pour qu'une courbe ait une asymptote, il faut : 1° que la courbe ait une branche infinie ; 2° que, le point de contact s'éloignant indéfiniment sur cette branche, la tangente s'approche sans cesse d'une position-limite.

Il est facile de reconnaître que la courbe dont nous venons de construire la projection horizontale satisfait à la première condition. En effet, menons, par le centre du cône, un plan $kk'l'$ parallèle à $\alpha\beta\gamma$: il coupe la surface suivant des génératrices $(ko, k'l')$, $(lo, l'l')$ parallèles au plan $\alpha\beta\gamma$. Remplaçons, par la pensée, la droite $(ko, k'l')$ par une autre génératrice G , qui fasse, avec la première, un très-petit angle : il est clair que le point M , où cette dernière ligne rencontre le plan $\alpha\beta\gamma$ de la courbe H , peut s'éloigner, autant que nous le voudrions, du point (e, e') , si l'angle dont il s'agit est rendu suffisamment petit. C'est ce qu'il fallait prouver.

On voit, en même temps, que *les génératrices parallèles au plan sécant sont les limites de celles qui rencontrent ce plan*. Les considérations générales sur les surfaces développables nous avaient déjà conduit à cette conclusion (44).

Remarquons maintenant que la tangente à la courbe H ,

(*) Soient M, M' deux points pris sur une branche infinie AB , ayant pour asymptote une droite CD . Abaissons $MP, M'P'$ perpendiculaires à CD ; puis supposons que les points M, M' s'éloignent indéfiniment sur AB , de manière que la projection PP' conserve une longueur constante : d'après la définition de l'asymptote, la corde MM' tend à se confondre avec CD . Ainsi *l'asymptote est la limite des positions d'une sécante quelconque, dont deux points consécutifs d'intersection avec la courbe s'éloignent indéfiniment sur celle-ci*.

Cette proposition comprend, comme cas particulier, celle du texte.

au point M , serait l'intersection du plan P avec le plan tangent au cône, suivant la génératrice G . Si donc cette intersection s'approche indéfiniment d'une droite fixe, quand la génératrice G tend vers sa position-limite $(ko, k'l')$, cette droite fixe sera l'asymptote. Or le plan tangent suivant la génératrice G a pour limite le plan tangent suivant $(ko, k'l')$; donc la tangente en M tend sans cesse à se confondre avec la droite suivant laquelle ce dernier plan coupe le plan P ; et l'arc infini projeté suivant eg a une asymptote. La même conclusion subsisterait pour l'arc projeté en fh , et pour les deux arcs symétriques des premiers par rapport au plan vertical. La courbe H est donc une hyperbole, ainsi que l'avait indiqué la position du plan P .

119. Le plan tangent au cône, suivant $(ko, k'l')$, a pour trace horizontale la tangente kp à la base du cône : le point p , où cette tangente rencontre la trace $\alpha\beta$ du plan P , est donc la trace horizontale de l'asymptote. Et comme la génératrice $(ko, k'l')$ est parallèle au plan P , l'asymptote, intersection du plan P et du plan tangent, est parallèle à la génératrice : *sa projection horizontale est donc pi , parallèle à la projection horizontale ko de la génératrice-limite.*

120. Il résulte, du Théorème général sur la projection d'une tangente, que *la projection pi de l'asymptote à l'hyperbole H est asymptote à la projection eg de cette hyperbole.*

121. Une construction semblable à la précédente donnerait l'asymptote qi à l'arc fh . *Il faut, comme vérification, que les deux asymptotes se coupent au centre (i, i') de l'hyperbole H .* Cette remarque donne un moyen de tracer les deux asymptotes, plus rapide et plus exact que celui que nous venons d'employer.

122. Si le plan P, toujours perpendiculaire au plan vertical, était parallèle à la génératrice extrême (ao , ao'), auquel cas la section serait une parabole, la génératrice (ko , $k'o'$) se confondrait avec (ao , ao'). Par suite, le plan tangent suivant cette dernière droite ne couperait plus le plan P; donc la parabole n'a pas d'asymptote.

123. *Développement du cône; transformée de l'hyperbole.* Les deux nappes du cône étant, par hypothèse, limitées aux plans ab , $a''b''$, équidistantes du centre, elles se développent suivant deux secteurs BAB_1O , $A''B''A''_1O$, égaux entre eux, et que nous pouvons prendre dans un même cercle ayant pour rayon le côté ao' du cône. Nous pouvons même les placer symétriquement à l'égard du centre O, ce qui revient à supposer que, la nappe inférieure du cône étant ouverte suivant la génératrice (bo , $o'b'$), la nappe supérieure soit ouverte suivant le prolongement de cette droite. De cette manière, la branche inférieure de l'hyperbole se transforme suivant GEG_1 , et la transformée de la branche supérieure se compose des deux arcs FH , F_1H_1 , symétriques par rapport à OB'' , et coupant orthogonalement les deux transformées OA'' , OA''_1 de la génératrice (oa , oa'').

FIG. 40.

FIG. 39.

Ces trois courbes GEG_1 , FH , F_1H_1 , se construisent par points, absolument comme la transformée de la section elliptique (114).

124. *Asymptote à la transformée de l'hyperbole.* On a vu ci-dessus (115) que, pour obtenir la tangente en un point M_1 de la transformée d'une section conique quelconque, il faut construire un triangle égal à celui dont les côtés sont : 1° la tangente T au point M correspondant à M_1 ; 2° la génératrice G passant en M ; 3° la trace hori-

- zontale du plan tangent le long de cette génératrice. Dans le cas qui nous occupe, les limites de ces trois droites
- FIG. 39. sont respectivement, l'asymptote $(\nu i, \beta i')$, la génératrice $(ko, k'o)$, et la tangente pk à la base du cône. Si donc,
- FIG. 40. après avoir construit la transformée KO de la génératrice $(ko, k'o)$, nous prenons la tangente KP au cercle O égale à kp , et que nous menions PI parallèle à KO, nous aurons l'asymptote à l'arc EG de la transformée. Une construction semblable donnerait les asymptotes des autres arcs.
- FIG. 40. 125. *Remarque.* Les asymptotes PI, R₁I des arcs EG, F₁H₁, forment une seule et même droite. En effet, la transformée OK de la génératrice $(ok, o'k')$, et la transformée OL₁ du prolongement de cette même génératrice, sont deux segments d'une même droite. De plus, les asymptotes PI, R₁I sont parallèles à cette ligne et elles en sont également distantes, attendu que le foyer o est à égales distances des asymptotes pi, qi ; donc, etc.
- On arrive à la même conclusion en supposant que l'on ait pris, pour *plan de développement*, celui qui touche le cône suivant la génératrice $(ok, o'k')$.

PROBLÈME XIII.

Trouver : 1° les projections de la section faite dans un cône, par un plan quelconque; 2° le développement du cône; 3° la transformée de la section; 4° les tangentes à la transformée de la base et à la transformée de la section.

- FIG. 41. 126. *Projections de la section.* Soient (s, s') le sommet du cône, $(abcd, a'c')$ la trace horizontale de cette surface, $\alpha\beta\gamma$ le plan donné.
- Nous déterminerons, comme dans les problèmes précédents, les projections $ehfg, e'h'f'g'$ de la courbe d'inter-

section, en construisant les points où le plan est rencontré par un certain nombre de génératrices du cône.

Soit, par exemple, la génératrice $(sp, s'p')$. Le plan qui la projette horizontalement coupe le plan $\alpha\beta\gamma$ suivant une droite dont la trace horizontale est (u, u') , et dont un autre point a s pour projection horizontale. La projection verticale i' de ce dernier point se construit au moyen de l'horizontale $(sl, l'i')$ du plan donné. Nous trouvons ainsi la projection verticale $i'u'm'$ de la droite dont il s'agit; et, par suite, (m, m') est le point où la génératrice $(sp, s'p')$ perce $\alpha\beta\gamma$.

127. *Remarque.* Les plans auxiliaires, menés par les génératrices, se coupent tous suivant la verticale passant par le sommet du cône; en sorte que leurs intersections avec le plan donné viennent toutes concourir au point (s, i') , où ce dernier plan est rencontré par la verticale dont il s'agit. Il nous a donc suffi, pour déterminer complètement chaque intersection, d'en construire la trace horizontale.

Cette importante simplification est tout à fait analogue à celle que nous avons rencontrée dans le Problème XI (95).

128. *Développement du cône.* La construction de cette partie de l'épure exige que l'on connaisse les vraies longueurs des génératrices projetées en s_1, s_2, sp, \dots . Nous obtiendrons commodément ces diverses droites si nous supposons que chacune d'elles tourne autour de la verticale $(s, s''s')$, de manière à se placer parallèlement au plan vertical.

Soit, par exemple, la génératrice $(sp, s'p')$. Si, sur la parallèle sv à xy , nous prenons $s\pi$ égale à sp ; si nous abaissons πp_1 , perpendiculaire à xy , et que nous menions

$s'p_1$, cette dernière droite sera, évidemment, la vraie longueur de la génératrice.

FIG. 42. Cela posé, pour trouver le développement du cône, nous supposons que cette surface est *ouverte* suivant la génératrice projetée en s_1 , et nous construirons les triangles $1S_2$, $2SP$, PS_4 , ..., égaux, respectivement, aux triangles composant les faces de la pyramide que nous substituons au cône. En faisant passer un trait continu par les points 1 , 2 , P , 4 , D , ..., nous aurons, pour le développement cherché, le *secteur* $S_12P4D...1$. En même temps, la courbe $12P4D...1$ sera la transformée de la base du cône (*).

FIG. 41. 129. *Transformée de la section*. Si nous prenons, sur la transformée SP de la génératrice $(sp, s'p')$ une longueur SM égale à la partie de cette droite comprise entre le sommet du cône et le plan sécant, nous aurons un point M de la transformée $HMFHG_1$. Or, les distances SP , SM sont proportionnelles aux projections verticales sp , $s'm'$; et, de plus, $SP = s'p_1$. Si donc, par le point m' , nous menons

(*) On conçoit que l'ensemble des triangles $1S_2$, $2SP$,... peut différer beaucoup du véritable développement, puisque celui-ci est la limite des développements des pyramides inscrites au cône. D'un autre côté, si l'on multiplie considérablement le nombre des points de division de la base $abef$, on jette de la confusion dans l'épure. Pour éviter cet inconvénient, et en même temps pour avoir une approximation suffisante, on peut opérer de cette manière:

Après avoir pris $S1$ (fig. 42) égal à $s'1$ (fig. 41), on décrit, du point S comme centre, avec $s'2$ (fig. 41) pour rayon, un arc $\lambda\mu$; puis on coupe cet arc par un autre arc, décrit du point 1 comme centre, et dont le rayon $\lambda'\mu''$, plus grand que la corde 13 (fig. 41), soit plus petit que l'arc sous-tendu par cette corde.

Quelle que soit, du reste, la construction qui donne le développement, elle laisse toujours à désirer sous le rapport de la rigueur.

$m m_1$ parallèle à la ligne de terre, cette droite $m'm_1$ coupera $s'p_1$ en un point m_1 , qui donnera $s'm_1 = SM$.

130. *Remarque.* Il est commode de faire passer une courbe par les points $e_1 g_1 m_1 h_1$, bien que cette ligne n'ait aucune signification géométrique. FIG. 41.

131. *Tangentes à la transformée de la base et à la transformée de la section.* Après avoir déterminé, par la construction ordinaire, la tangente $(mr, m'r')$ à la courbe d'intersection, au point quelconque (m, m') , proposons-nous d'obtenir la tangente MR à la transformée de cette courbe; et pour cela, cherchons d'abord la tangente en P, à la transformée de la base du cône. Or, si nous construisons le triangle SPR égal à celui dont les côtés seraient la génératrice $(sp, s'p')$, la tangente pr à la base, FIG. 41.

et la droite $(rs, r's')$, le côté PR de ce triangle touchera, en P, la transformée de la base. De plus, la droite RM est tangente, en M, à la transformée de la section conique. FIG. 42.

CHAPITRE VI.

Surfaces réglées.

132. Avant de discuter quelques surfaces particulières, engendrées par le mouvement d'une droite, nous compléterons, autant que le permet la nature de cet ouvrage, la théorie générale des surfaces réglées, commencée dans les chapitres précédents.

DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

133. On a vu (19) qu'une surface développable est le lieu des tangentes à une courbe à double courbure. Cette définition indique nettement la nature des surfaces dont nous nous occupons, mais elle ne nous donne pas, d'une manière complète, la loi du mouvement de la génératrice rectiligne. On conçoit, en effet, qu'une droite indéfinie EF, tangente à une courbe donnée ABC, pourrait glisser sur celle-ci, de manière que le point de contact, variable sur la droite, fût constant sur la courbe. Dans ce cas, il n'y aurait pas de surface engendrée. On pourrait encore attribuer à la tangente un mouvement oscillatoire; et alors le lieu qu'elle décrirait se composerait de petites zones superposées, etc. Pour que la surface développable existe, et pour qu'elle ne soit pas brusquement terminée, il faut donc que la tangente à la courbe donnée se meuve suivant une certaine loi, que nous allons indiquer.

FIG. 43.

134. Considérons d'abord, comme dans le Chapitre I^{er}

(16), un polygone ABC...FG dont trois côtés consécutifs quelconques ne soient pas dans un même plan. FIG. 44.

Prolongeons indéfiniment, *et dans les deux sens*, chacun des côtés de cette figure; nous aurons ainsi des droites qui pourront être regardées comme les arêtes de deux surfaces polyédrales, ou plutôt de deux nappes d'une même surface, s'appuyant sur le contour polygonal ABC...FG.

Pour engendrer cette surface par le moyen d'une droite mobile D, imaginons que B'B' soit une position de cette génératrice. Pour lui faire prendre la position C'C', nous la ferons tourner autour d'un axe B β mené par le point B, perpendiculairement au plan ABC : pendant le mouvement, les deux segments de la génératrice engendreront les angles B'BC'', B'BC'. De même, cette droite passera de la position C'C' à la position D'D' en tournant autour d'un axe C γ mené par le sommet C, perpendiculairement au plan BCD. Et ainsi de suite.

Nous voyons ainsi que les deux nappes de la surface polyédrale seront engendrées par les rotations successives d'une même droite, autour des axes B β , C γ , D δ ...

135. *Remarque. I.* Si nous prenons, sur B'B', les segments BC₁, C₁D₁, D₁E₁..., respectivement égaux aux côtés BC, CD, DE... du polygone, ces segments viendront, successivement, coïncider avec les côtés correspondants du polygone directeur. FIG. 44.

II. Un point M, pris sur B'B', entre C₁ et D₁, décrit d'abord un arc de cercle MM₁ autour de B, puis un arc M₁m autour de C, puis un autre arc mM₂ autour de D, etc. Ainsi, *chaque point de la génératrice décrit une ligne composée de deux séries d'arcs de cercles, auxquels elle est toujours normale.*

III. Les tangentes en m , aux arcs M_1m , mM_2 , seraient perpendiculaires à l'intersection $D''D'$ des plans BCD , CDE , dans lesquels ces arcs sont respectivement situés; elles ne se confondent donc pas, et leur angle mesure l'inclinaison des deux plans. Par suite, *la ligne décrite par un point quelconque de la génératrice D forme un angle au point où elle rencontre la directrice $ABCD\dots FG$.*

IV. Le segment MN , déterminé par deux points quelconques M , N de la génératrice, est égal, en longueur, à la partie $mDEn$ de la directrice, comprise entre les positions m , n des premiers points. C'est cette dernière propriété que nous exprimerons, d'une manière abrégée, en disant que *la génératrice roule sur la directrice.*

FIG. 45.

136. Revenons maintenant au cas de la surface engendrée par une droite EF , continuellement tangente à une courbe à double courbure ABC . Par le principe des limites, que nous avons appliqué plusieurs fois, nous pouvons établir immédiatement les propositions suivantes :

1° *Une surface développable est le lieu des positions d'une droite qui roule, sans glisser, sur une courbe à double courbure donnée;*

2° *Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrit une courbe à laquelle la génératrice est normale; en sorte que cette courbe est une TRAJECTOIRE ORTHOGONALE de toutes les génératrices;*

3° *Cette trajectoire orthogonale des génératrices présente un rebroussement au point où elle coupe la directrice.*

FIG. 44.

En effet, l'angle des tangentes en m , aux deux lignes Pm , Qm , a une limite nulle. C'est parce que la directrice est le lieu des points de rebroussement des courbes dé-

crites par les points de la génératrice, qu'elle est appelée *arête de rebroussement* de la surface.

4° La directrice donnée, ou l'arête de rebroussement de la surface développable, partage cette surface en deux nappes, tangentes l'une à l'autre le long de cette arête.

Les tangentes mT , ms , à Pm , mQ , déterminent les plans tangents aux deux nappes; donc, etc.

137. Si la surface polyédrale considérée ci-dessus est développée sur un plan, le polygone $ABC\dots EFG$ se transforme en un autre polygone dont les angles et les côtés sont, respectivement, égaux aux angles et aux côtés du premier (82). Il résulte de là que les circonférences qui passent, l'une par trois sommets consécutifs du premier polygone, l'autre par les trois sommets correspondants du second, sont égales entre elles. Or, si nous remplaçons les deux figures polygonales par les courbes qui en sont les limites, les deux circonférences seront *osculatrices* à ces deux courbes. Ainsi, l'arête de rebroussement d'une surface développable et la transformée de cette ligne ont, en deux points correspondants, leurs cercles osculateurs égaux.

FIG. 44.

138. Le plan du cercle osculateur, en un point M de l'arête de rebroussement, est, évidemment, la limite du plan conduit suivant les deux cordes Mm_1 , Mm_2 aboutissant en ce point. En d'autres termes, le plan osculateur en un point de l'arête de rebroussement se confond avec le plan tangent, en ce point, à la surface développable. C'est ce que nous avons annoncé précédemment (46).

FIG. 46.

139. Les axes de rotation $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, ..., que nous avons considérés plus haut, ont pour limites les normales à l'arête de rebroussement, perpendiculaires aux plans os-

culateurs de cette ligne (*). En général, le lieu de ces normales est une surface gauche.

140. Nous devrions maintenant, pour compléter ces généralités, indiquer les différents procédés au moyen desquels on peut engendrer une surface développable. Le lecteur pourra consulter, sur ce sujet, le *Traité de Géométrie descriptive* de Leroy, ou celui de M. de la Gournerie.

DES SURFACES GAUCHES.

141. Pour abréger, nous nous contenterons de donner deux théorèmes très-simples, qui permettent souvent de reconnaître si une surface *réglée* est *gauche*. Ces théorèmes sont fondés sur le lemme suivant.

142. LEMME. *Si toutes les tangentes à une ligne plane concourent en un même point, cette ligne est droite.*

FIG. 47. Si la ligne considérée est courbe, elle aura, au moins, un arc convexe, tel que AMB. Cet arc, compris dans l'*intérieur* du triangle ATB formé par la corde AB et par les tangentes AT, BT, sera *coupé* en un point M par une droite TC menée du sommet T à un point quelconque C de la base AB. Donc, contrairement à l'hypothèse, la tangente en M ne concourt pas en T.

143. THÉORÈME. *Toute surface réglée, qui admet une directrice rectiligne, est gauche.*

Admettons, pour un instant, que sur une surface développable S, ayant la courbe à double courbure ABC... pour arête de rebroussement, on puisse appliquer une

(*) M. de Saint-Venant a proposé, pour ces droites, la dénomination de *bi-normales* à l'arête de rebroussement.

droite MN, non tangente à cette courbe. Projetons toute la figure sur un plan P, perpendiculaire à MN.

L'arête de rebroussement se projette suivant une ligne $abc\dots$ ayant pour tangentes les projections aa' , bb' , cc' ,... des génératrices AA' , BB' , CC' ,... De plus, la droite MN se projette en un point m , par lequel viendront passer les tangentes aa' , bb' , cc' ,... Donc, d'après le lemme précédent, $abc\dots$ serait une ligne droite, et, contrairement à l'hypothèse, la courbe ABC serait plane.

144. Par le calcul, ou par la géométrie, on démontre que l'*hyperboloïde à une nappe* est une surface *doublement réglée*, ou admettant *deux systèmes* de génératrices rectilignes (*). Le *paraboloïde hyperbolique* jouit de la même propriété. D'après le théorème précédent, ces deux surfaces sont gauches. La même conclusion s'étend aux *conoïdes*, c'est-à-dire aux surfaces engendrées par une droite qui s'appuie sur une droite donnée, en restant parallèle à un *plan directeur* donné. A cause de cette dernière condition, les conoïdes peuvent être considérés comme appartenant aux *surfaces réglées, à plan directeur*. Ces dernières, quand elles ne sont pas cylindriques, sont nécessairement gauches, comme nous l'allons démontrer.

145. THÉORÈME. *Toute surface réglée, à plan directeur, est gauche.*

Supposons qu'une pareille surface soit développable. Si nous effectuons une projection sur un plan perpendiculaire au plan directeur, les génératrices se projettent suivant des droites parallèles, tangentes à la projection de l'arête de rebroussement. Or, d'après le lemme démon-

(*) *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome II, p. 60.

tré plus haut, il est impossible qu'une courbe plane ait toutes ses tangentes parallèles entre elles. Donc, etc.

146. *Remarque.* Cette démonstration suppose que l'arête de rebroussement n'est pas *transportée à l'infini*, ou, en d'autres termes, que la surface n'est pas cylindrique.

HÉLIÇOÏDE DÉVELOPPABLE.

147. L'hélicoïde développable est le lieu des tangentes à une hélice. Il résulte, de cette définition et des propriétés de l'hélice (n^o 93 et suivants), que *tout plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre sur lequel l'hélice est tracée, coupe l'hélicoïde suivant une développante de la section faite par ce plan dans le cylindre.*

148. On a vu que, dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne (93). Conséquemment l'hélice a même longueur que sa tangente. La propriété précédente peut donc être énoncée ainsi :

Lorsqu'une droite roule sur une hélice, de manière à engendrer un hélicoïde développable, chacun de ses points décrit une développante de la section droite du cylindre sur lequel l'hélice est tracée.

149. Au lieu de supposer que la tangente roule sur l'hélice, on peut admettre qu'elle glisse le long de celle-ci, mais de manière que le point de contact, invariable sur la tangente, parcourt la courbe. Dans ce second mode de génération, la tangente passera par toutes les positions qu'elle occupait dans le premier ; et, comme elle est indéfinie, les deux surfaces engendrées seront identiques. Cela posé, si l'hélice est tracée sur un cylindre de révolution,

tout point de la génératrice décrit une hélice dont le pas est égal à celui de l'hélice primitive.

Pour démontrer cette proposition, projetons l'hélice sur un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre. Partageons la circonférence O en un certain nombre de parties égales, par exemple en sept. Menons les cordes AB, BC, \dots : il est clair que ces droites sont les projections de cordes égales, ayant leurs extrémités sur l'hélice. Si nous prolongeons ces cordes de longueurs Aa, Bb, Cc, \dots , arbitraires, mais toutes égales entre elles, les points a, b, c, \dots seront les projections de points situés sur les prolongements des côtés du polygone inscrit à l'hélice, et équidistants des sommets projetés en A, B, C, \dots . Enfin, menons les droites ab, bc, \dots . Il est facile de voir que $ABC\dots$ étant, par hypothèse, un polygone régulier, il en est de même pour $abc\dots$. On reconnaît, en outre, que le polygone dont $abc\dots$ est la projection a ses côtés égaux entre eux et également inclinés sur le plan de projection ; si donc l'on développait le prisme dont $abcd\dots$ est la base, le polygone dont il s'agit aurait une *transformée rectiligne*. Cette conclusion est indépendante du nombre des divisions de la circonférence $ABC\dots$; donc, etc.

FIG. 48.

150. *Remarque.* Si le polygone $ABC\dots$ n'est pas, à la fois, *équiangle et équilatéral*, c'est-à-dire si l'hélice directrice n'est pas tracée sur un cylindre de révolution, le théorème ne subsiste plus, et chacun des points de la génératrice décrit une courbe différente de l'hélice. Cette proposition, comme le lecteur pourra s'en assurer, résulte de la démonstration précédente.

151. Après ce rapide examen de la surface qui nous occupe, nous pourrions faire voir comment on peut la

construire en *relief*, et comment on peut en effectuer le développement. Pour éviter un double emploi, nous traiterons ces deux questions dans le chapitre suivant.

HÉLIÇOÏDE GAUCHE.

152. On donne, en général, ce nom à toute *surface gauche à directrice hélicoïdale*. Mais on peut considérer plus particulièrement, à cause de leurs applications, les quatre hélicoïdes gauches suivantes :

1° Prenons, pour directrices, une hélice tracée sur un cylindre de révolution, et l'axe de ce cylindre. Si une droite mobile s'appuie sur ces deux lignes, en faisant avec l'axe un angle constant, la surface ainsi engendrée est l'*hélicoïde de la vis à filet triangulaire*.

2° Conservons les mêmes directrices, et supposons que la droite mobile coupe l'axe à angle droit, ou, ce qui est équivalent, qu'elle reste parallèle à un *plan directeur*, perpendiculaire à cet axe. La surface est appelée *hélicoïde à plan directeur*, ou *hélicoïde de la vis à filet carré* (*).

3° Prenons encore pour directrice une hélice tracée sur un cylindre de révolution, et supposons qu'une droite mobile s'appuie sur cette courbe, en touchant la surface du cylindre, et en faisant avec l'axe un angle constant, différent de celui que fait, avec cet axe, la tangente à l'hélice. Le mouvement de la génératrice sera complètement déterminé. De plus, la surface n'a *aucun point*

(*) Si, conservant l'hélice donnée et le plan donné, on prenait pour directrice rectiligne une génératrice du cylindre, la surface serait encore l'hélicoïde de la vis à filet carré; ce qui est assez remarquable.

dans l'intérieur du cylindre. On la désigne sous le nom d'*hélicoïde à noyau plein*.

4° Admettant toujours que la génératrice rectiligne rencontre l'hélice en demeurant tangente au cylindre sur lequel cette courbe est tracée, supposons, comme cas particulier, que la génératrice fasse un angle droit avec l'axe ; alors la surface engendrée sera un *hélicoïde à noyau plein, et à plan directeur*.

D'après les deux théorèmes généraux démontrés ci-dessus (143 et 145), les deux premiers hélicoïdes, et le quatrième, sont des surfaces gauches.

153. Une considération très-simple permet de reconnaître que l'*hélicoïde à noyau plein* appartient, pareillement, à cette catégorie. Projetons l'hélice et les génératrices sur un plan P, perpendiculaire à l'axe du cylindre. Nous obtiendrons, pour projection de la courbe, la circonférence C suivant laquelle le plan P coupe le cylindre, et, pour projections des génératrices, les tangentes à cette circonférence. Si la surface réglée dont il s'agit avait une arête de rebroussement, la projection de cette ligne serait l'enveloppe de toutes nos tangentes, c'est-à-dire la circonférence C. Par suite, les points de contact des génératrices avec l'arête de rebroussement se confondraient avec les points où les génératrices rencontrent l'hélice. En d'autres termes, si la surface était développable, son arête de rebroussement serait précisément l'hélice directrice. Cette conclusion est contraire à l'hypothèse ; donc l'*hélicoïde à noyau plein est une surface gauche*.

154. En général, si une droite se meut en coupant une courbe donnée, de manière que la projection de la génératrice, faite sur un certain plan, soit toujours tangente à

la projection de la directrice, la surface engendrée est gauche.

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION.

FIG. 49. 155. Supposons, comme dans le Problème VII, qu'une droite AB tourne autour d'un axe fixe OZ, non situé dans un même plan avec elle. Nous avons dit que *la surface gauche de révolution*, ainsi engendrée, est identique avec l'*hyperboloïde de révolution*, à une nappe, c'est-à-dire avec la surface qui serait décrite par une demi-hyperbole, tournant autour de son axe non transverse.

Pour démontrer cette identité, menons la commune perpendiculaire OC aux droites AB, OZ. Quand la génératrice AB tourne autour de OZ, le point C décrit un parallèle plus petit, évidemment, que les parallèles décrits par les autres points de AB. Pour cette raison, le cercle OCD est appelé *cercle de gorge* de la surface.

Soient ensuite ZOX un plan méridien quelconque et M le point où il est rencontré par la génératrice. Si nous abaissons la perpendiculaire MP sur OX, et que nous menions CP, cette dernière droite sera tangente en C au cercle de gorge : en effet, la droite AB étant perpendiculaire à OC, sa projection CP est pareillement perpendiculaire à OC. Ainsi, *les projections des génératrices, sur le plan du cercle de gorge, sont tangentes à ce cercle.*

Ces préliminaires étant entendus, faisons

$$OC = \delta, \quad MCP = \alpha, \quad OP = x, \quad MP = z.$$

Le triangle MPC, rectangle en P, donne $z = CP \operatorname{tg} \alpha$. D'ailleurs,

$$\overline{CP}^2 = x^2 - \delta^2;$$

donc l'équation du lieu des points M, ou de la section méridienne, est

$$z^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = -\delta^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Cette équation représente une hyperbole concentrique avec le cercle de gorge, dont les sommets réels sont les extrémités D, E d'un diamètre de ce cercle, et dont OZ est l'axe imaginaire.

156. L'équation (1) ne change pas quand α change de signe. Conséquemment, si l'on imagine une droite A'B', symétrique de AB relativement au plan du cercle de gorge, cette seconde génératrice A'B', tournant autour de OZ, reproduirait la surface engendrée par AB. Autrement dit : *l'hyperboloïde de révolution, à une nappe, admet deux systèmes de génératrices rectilignes. A chaque génératrice du premier système en correspond une du second, symétrique de la première par rapport au plan du cercle de gorge.*

157. L'hyperboloïde pouvant être engendré, indifféremment, par la droite AB ou par la droite A'B', il est clair que : *par tout point pris sur la surface, passent deux génératrices, l'une appartenant au premier système, l'autre appartenant au second.*

158. *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan.*

Soient AB, A'B' deux positions quelconques d'une même génératrice. En général, les tangentes CT, C'T, suivant lesquelles se projettent ces deux droites, se coupent en un point T. Si donc AB pouvait rencontrer A'B', ce ne pourrait être qu'en un point de la droite MTM', menée par le point T, perpendiculairement au plan du cercle de

FIG. 50.

gorge. Or, à l'inspection de la figure, on voit que cette perpendiculaire rencontre AB *au-dessus* du plan, et qu'elle rencontre A'B' *au-dessous* de ce même plan. Les deux génératrices sont donc dans des plans différents.

159. *Remarque.* Si les deux droites AB, A'B' avaient leurs projections parallèles, elles seraient *antiparallèles*.

160. *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan.*

FIG. 50. Soit AB une génératrice quelconque du premier système; je dis qu'elle rencontre la génératrice EF, prise arbitrairement dans le second système.

Soient CT, C'T les tangentes au cercle de gorge, suivant lesquelles se projettent ces droites. Par le point T, élevons une perpendiculaire TR au plan de ce cercle : il s'agit de démontrer qu'elle rencontre, en un même point, les deux génératrices. Or, les triangles rectangles formés par cette perpendiculaire, par les génératrices et par les projections CT, C'T, sont égaux; car les angles aigus C, C' sont égaux par hypothèse, et les tangentes CT, C'T, issues d'un même point T, sont égales entre elles. Les points où la perpendiculaire TR rencontre AB, EF sont donc confondus en un seul. C'est ce qu'il fallait démontrer.

161. *Remarque.* Si les deux droites AB, EF avaient leurs projections parallèles, elles seraient *parallèles*; ces deux droites ne se couperaient donc pas; mais elles seraient encore dans un même plan.

162. On reconnaît, sans difficulté, que le mouvement d'une génératrice rectiligne est complètement déterminé, lorsque cette droite est assujettie à s'appuyer sur trois directrices données. Conséquemment, si nous prenons, sur

l'hyperboloïde de révolution, trois droites A, A', A'' d'un même système, et si nous faisons mouvoir une droite G , de manière qu'elle rencontre constamment ces directrices, nous engendrerons une surface qui ne différera pas de l'hyperboloïde. En effet, la génératrice G , dans ses diverses positions, coïncide avec les droites B, B', B'', B''', \dots du second système, attendu que chacune de celles-ci rencontre A, A', A'' . Ainsi *l'hyperboloïde de révolution, à une nappe, peut être engendré par une droite mobile, assujettie à s'appuyer sur trois droites fixes* (*).

163. La construction du plan tangent à l'hyperboloïde de révolution a fait voir que cette surface est gauche (69). Les théorèmes des numéros 143 et 154 conduisent à la même conclusion.

164. On a vu plus haut (157) que, par tout point de la surface, passent deux génératrices. Conséquemment (34) :

1° *Le plan tangent en un point de l'hyperboloïde de révolution est déterminé par les deux génératrices passant en ce point; 2° quand le point de contact se déplace sur une génératrice, le plan tangent tourne autour de celle-ci.* Ce dernier résultat était déjà connu (43 et 69).

165. Reportons-nous à la figure 49, et menons, par le centre O de l'hyperboloïde, une parallèle OH à la génératrice AB . La droite OH , en tournant autour de l'axe OZ , engendre un cône de révolution identique avec celui que décrirait l'asymptote de l'hyperbole méridienne MDM' . En effet, pour obtenir la section méridienne du premier

(*) On verra, tout à l'heure, à quelles conditions doivent satisfaire les trois directrices, pour que la surface engendrée soit un hyperboloïde de révolution.

cône. il suffit de supposer, dans l'équation (1), $\delta = 0$. On trouve ainsi

$$z^2 - x^2 \operatorname{tg}^2 a = 0,$$

c'est-à-dire l'équation même des deux asymptotes.

166. La droite OH ayant été prise parallèle à AB, il est clair que *chacune des génératrices du cône est parallèle à deux génératrices de l'hyperboloïde; et réciproquement.*

De plus, d'après la remarque précédente, *la surface de l'hyperboloïde s'approche indéfiniment de celle du cône, sans jamais l'atteindre.* Pour cette raison, la dernière surface est dite *cône asymptotique de l'hyperboloïde.*

167. THÉORÈME I. *Les sections faites par un même plan, dans un hyperboloïde gauche de révolution et dans le cône asymptotique, sont deux courbes semblables et semblablement placées;*

II. *Si ces sections sont des ellipses ou des hyperboles, elles sont concentriques.*

Nous admettons ces deux théorèmes, que l'on peut démontrer géométriquement ou par le calcul.

168. *Représentation graphique de l'hyperboloïde.* Prenons le plan horizontal perpendiculaire à l'axe de révolution, et supposons, pour introduire plus de symétrie dans l'épure, que la surface soit limitée à deux plans horizontaux, également distants du centre (o, o'). Les projections horizontales des deux parallèles ainsi déterminés se réduisent à une seule circonférence, décrite du point o comme centre. De plus, il est visible que les génératrices doivent se projeter horizontalement suivant des cordes égales. Si donc l'on divise la circonférence en un certain nombre n de parties égales, et que l'on construise les *deux*

projections verticales répondant à chaque point de division, il sera facile d'obtenir ensuite les projections de 2*n* génératrices de la surface. Cette construction est effectuée dans la figure 64.

169. *Remarques.* I. Dans cette figure, *n* égale 24; en sorte que les génératrices représentées sont au nombre de 48.

II. *A chaque projection horizontale correspondent deux projections verticales.* Par exemple, la corde (1, 8), projection horizontale de la génératrice qui joint le point 1 de la base *inférieure* au point 8 de la base *supérieure*, est, en même temps, la projection de la génératrice passant par le point 1 de la base *supérieure* et par le point 8 de la base *inférieure*.

III. De même, à chaque projection verticale correspondent deux projections horizontales.

IV. Les projections horizontales des génératrices sont (155) tangentes à la projection du cercle de gorge (non représentée sur la figure). C'est ce qu'on exprime en disant que les cordes égales (1, 8), (2, 9), (3, 10), *enveloppent* la projection horizontale du cercle de gorge.

V. Si, par une génératrice quelconque, on fait passer un plan perpendiculaire au plan vertical de projection, il touche l'hyperboloïde au point où la génératrice perce le méridien principal (68). Par suite, *l'enveloppe des projections verticales des génératrices est égale à l'hyperbole méridienne.*

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

170. *L'hyperboloïde est une surface gauche.* Il est facile de vérifier, soit par le calcul (*), soit en modifiant légèrement la méthode employée dans le n° 155 (**), que *l'hyperboloïde à une nappe*, tel qu'il a été défini au commencement de ce volume (7), *est identique avec la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur trois droites A, B, C, non parallèles à un même plan et telles, en outre, que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan.* Pour abrégér, nous admettrons cette identité, d'où il résulte que *l'hyperboloïde est une surface gauche*; et nous nous contenterons de démontrer, géométriquement, quelques propriétés résultant de la seconde définition.

FIG. 62.

171. *Parallépipède directeur.* Si par chacune des trois directrices A, B, C, on fait passer deux plans respectivement parallèles aux deux autres droites, ces six plans, évidemment parallèles deux à deux, déterminent un parallépipède DEFGD'E'F'G', dont A, B, C sont trois arêtes, et que l'on peut, par abréviation, appeler *parallépipède directeur de l'hyperboloïde.*

FIG. 62.

172. *Construction des génératrices.* Par l'arête A, menons un plan quelconque. Il coupe la face FG' suivant FH, qui rencontre B en un point M; et il coupe la face D'F'

(*) *Manuel des Candidats de l'École polytechnique*, t. II, p. 63.

(**) Par exemple, on peut regarder *l'hyperboloïde à une nappe* comme un *hyperboloïde de révolution dont toutes les cordes, perpendiculaires à un certain méridien, ont été multipliées par un nombre constant.* Cette simple remarque suffit pour établir la plupart des propriétés de la première surface.

suivant HN, égale et parallèle à ED. Conséquemment, la droite MN rencontre A en un point L : cette droite est donc une position de la génératrice.

173. *Remarque.* Les distances DL, EL, D'M, FM, E'N, G'N satisfont à diverses relations simples, parmi lesquelles nous distinguerons celle-ci :

$$EL \cdot E'N = EF \cdot FG. \quad (1)$$

Pour la démontrer, il suffit d'observer que l'on a, d'une part,

$$\frac{D'H}{EF} = \frac{MH}{ME} = \frac{HN}{EL};$$

et, d'un autre côté,

$$D'H = E'N, \quad HN = FG.$$

174. *Double génération de l'hyperboloïde.* Si l'on remplace les directrices A, B, C par les arêtes respectivement opposées A', B', C', ces dernières droites, prises comme directrices, déterminent un nouvel hyperboloïde dont on obtient une génératrice quelconque, telle que L'M'N', au moyen de la construction précédente. Quant à la relation (1), elle devient

$$E'L \cdot EN' = EF \cdot FG. \quad (2)$$

Par suite

$$EL \cdot E'N = E'L' \cdot EN',$$

ou

$$\frac{EL}{E'L'} = \frac{EN'}{E'N}. \quad (3)$$

D'après cette proportion, et à cause de l'égalité des angles FED, F'E'D, les triangles LEN', L'E'N sont semblables; donc les droites LN', L'N, situées dans deux

faces opposées du parallépipède, sont parallèles; et les deux génératrices LMN, L'M'N' sont dans un même plan; en sorte que le second hyperboloïde coïncide avec le premier. Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes, qui ne diffèrent pas de celles que nous avons démontrées relativement à l'hyperboloïde de révolution :

175. THÉORÈMES. I. *L'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes ;*

II. *Par tout point de la surface passent deux génératrices ;*

III. *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan ;*

IV. *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan ;*

V. *Le plan tangent en un point de l'hyperboloïde est déterminé par les deux génératrices passant en ce point ;*

Etc.

FIG. 63. 176. PROBLÈME. *Reconnaître si un hyperboloïde à une nappe est de révolution.* Supposons qu'avec les directrices données (A), (B), (C), on construise le parallépipède directeur (171). Si l'hyperboloïde est de révolution, les droites PP', QQ', RR', menées par le centre O, perpendiculairement aux arêtes (A), (B), (C), sont des diamètres du cercle de gorge (155); c'est-à-dire que ces droites sont : 1° situées dans un même plan passant par le centre O; 2° égales entre elles. De plus, en admettant toujours la même hypothèse, la droite menée par le centre O, perpendiculairement au plan des trois perpendiculaires, est l'axe de rotation; donc 3° chacune des droites OP, OQ, OR est la plus courte distance entre cet axe et l'arête correspondante. Il est manifeste que l'hyperboloïde non de révolu-

tion (*) ne jouit pas de ces trois propriétés. Elles constituent donc un critérium qui, dans chaque cas particulier, permet de résoudre simplement la question (**).

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

177. *Le parabolôïde est une surface gauche.* En procédant comme nous l'avons fait pour l'hyperboloïde, nous admettrons que le parabolôïde hyperbolique, défini au n° 13, est identique avec la surface engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur deux droites A, A', non situées dans un même plan, en restant parallèle à un plan directeur P. Conséquemment, le parabolôïde hyperbolique est une surface gauche (145).

178. *Divers modes de génération de la surface.* En partant de la définition précédente, et en admettant les pro-

(*) J'emploie ce barbarisme pour éviter une périphrase.

(**) Si l'on représente par $2a$, $2b$, $2c$ les longueurs des arêtes directrices, et par α , β , γ leurs inclinaisons mutuelles, on trouve, en exprimant la première condition :

$$\begin{aligned} & bc(b \cos \gamma - c \cos \beta) \sin^2 \alpha \\ & + ca(c \cos \alpha - a \cos \gamma) \sin^2 \beta \\ & + ab(a \cos \beta - b \cos \alpha) \sin^2 \gamma = 0; \end{aligned} \quad (A)$$

et, en exprimant la seconde :

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 &= a^2 \sin^2 \beta + b^2 \sin^2 \alpha + 2ab(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma), \\ \delta^2 &= b^2 \sin^2 \gamma + c^2 \sin^2 \beta + 2bc(\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha), \\ \delta^2 &= c^2 \sin^2 \alpha + a^2 \sin^2 \gamma + 2ca(\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta); \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

δ étant le rayon du cercle de gorge.

Dans le cas du cube, les relations (A), (B) sont vérifiées, donc six arêtes d'un cube appartiennent toujours à un hyperboloïde de révolution. On peut ajouter que : les milieux de trois arêtes d'un parallépipède quelconque, et le centre du parallépipède, sont toujours dans un même plan.

priétés les plus simples du *quadrilatère gauche* (*), on conclut immédiatement les propositions suivantes :

1° *Le parabolôïde hyperbolique admet deux systèmes de génératrices rectilignes ;*

2° *Les génératrices d'un même système sont parallèles à un même plan (**);*

3° *Deux génératrices d'un même système ne sont pas dans un même plan ;*

4° *Deux génératrices de systèmes différents sont toujours dans un même plan ;*

5° *Par tout point de la surface passent deux génératrices ;*

6° *Le parabolôïde hyperbolique peut être engendré par une droite qui s'appuierait sur trois génératrices d'un même système, prises comme directrices.*

Etc.

179. *Représentation graphique du parabolôïde.* Si l'on prend le plan horizontal perpendiculaire aux deux plans directeurs, la projection horizontale du quadrilatère gauche $ABBD$ qui détermine le parabolôïde (177) se réduit à un parallélogramme $abcd$. La projection verticale est un quadrilatère quelconque $a'b'c'd'$. De ces données, on con-

(*) I. *Tout plan, parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, partage proportionnellement les deux autres côtés.*

II. *Si une première droite partage proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, et si une seconde droite partage proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère, ces deux droites sont dans un même plan.*

Pour la démonstration de ces deux théorèmes, qui renferment, pour ainsi dire, toute la théorie du parabolôïde hyperbolique, le lecteur pourra consulter l'ouvrage intitulé : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, quatrième édition.

(**) Relativement aux génératrices du premier système, cette propriété a été prise comme définition (177).

clut immédiatement les projections horizontales et verticales d'un certain nombre de génératrices, telles qu'elles sont représentées dans la figure 65 (*).

EXERCICES.

I. Représenter [la surface engendrée par une droite de longueur donnée, glissant sur deux directrices rectilignes, non situées dans un même plan.

II. Représenter la surface engendrée par une droite de longueur donnée, glissant sur une droite et sur une circonférence donnée (**).

III. Une droite, parallèle à un plan donné, s'appuie sur une circonférence et sur une droite donnée. Représenter le conoïde ainsi engendré.

IV. Représenter la surface engendrée par une droite horizontale, s'appuyant sur deux cônes de révolution dont les axes sont verticaux. Dans quel cas cette surface est-elle un conoïde ?

V. Une droite, tangente à une sphère donnée, rencontre constamment deux droites rectangulaires données, non situées dans un même plan. Représenter la surface engendrée par la droite mobile. Examiner ce que devient cette surface : 1° lorsque l'une des deux directrices passe par le centre de la sphère ; 2° lorsque le centre de la sphère est au milieu de la plus courte distance des directrices ; 3° lorsque la sphère touche celles-ci ; etc.

(*) On voit que le paraboloides hyperbolique, limité au quadrilatère ABCD, ressemble assez exactement à un mouchoir à carreaux, suspendu par deux coins opposés.

(**) En modifiant encore la nature ou la position des directrices, on obtient d'autres surfaces intéressantes.

CHAPITRE VII.

Sections planes des surfaces réglées.

Dans le chapitre suivant, nous considérerons les cas principaux de la section plane d'un hyperboloïde de révolution. Dans celui-ci, nous choisirons, comme exemples, les sections faites dans l'hélicoïde développable ou dans l'hélicoïde de la vis à filet triangulaire, par des plans tangents à ces surfaces.

PROBLÈME XIV.

1° Représenter graphiquement l'hélicoïde développable; 2° construire un plan tangent à cette surface; 3° déterminer la section faite par le plan; 4° développer l'hélicoïde; 5° construire la transformée de la section.

FIG. 51. 180. *Représentation graphique de l'hélicoïde.* Nous supposerons la surface terminée à deux plans horizontaux $xy, x'y'$, perpendiculaires à l'axe $(o, o' z')$ du cylindre sur lequel est tracée l'hélice directrice. La distance de ces plans sera, pour plus de simplicité, égale au *pas* de l'hélice. De plus, nous limiterons la courbe aux deux plans; de sorte qu'elle se composera d'une seule *spire*.

Cela posé, si $a\delta\theta\lambda$ est la trace horizontale du cylindre, et que a soit l'*origine* de l'hélice, la trace horizontale de l'hélicoïde sera la développante $abcd...gr$ du cercle o (94). Pour construire cette développante, on divise la circonférence en un certain nombre de parties égales, à partir

de l'origine a ; on mène des tangentes aux points de division ; puis on porte sur ces droites les longueurs βb , γc , δd ,... ar , respectivement égales aux arcs $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, ... $a\theta a$, rectifiés. Les points b , c , d ,... r , ainsi déterminés, appartiennent à la développante (*).

181. Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne ($g\beta$). Par conséquent, la tangente au point (a, r) , extrémité de la spire, est projetée suivant la droite ar , égale à la circonférence o rectifiée. Par conséquent aussi, pour trouver les projections horizontales des points où les diverses génératrices percent le plan supérieur $x'y'$, il nous suffit de porter la longueur ar sur les projections de ces génératrices, à partir des points a , b , c , d_1 ,... Nous obtiendrons ainsi de nouveaux points a_1 , b_1 , c_1 ,..., lesquels, évidemment, appartiennent à une seconde développante $a_1b_1c_1$... q_1a du cercle o . Les traces de l'hélicoïde, sur les plans horizontaux qui le limitent, sont donc une développante de la base inférieure du cylindre, et une développante de sa base supérieure ; ces deux courbes étant, d'ailleurs, dirigées en sens contraires.

182. Si l'hélice donnée, au lieu d'être terminée aux

(*) Pour déterminer rigoureusement les points b , c , d ,..., on prend la tangente ar égale aux $\frac{22}{7}$ du diamètre $a\theta$; on la divise en autant de parties égales qu'il y a de divisions dans la circonférence ; puis on prend, sur les tangentes, $\beta b = a1$, $\gamma c = a2$, $\delta d = a3$, etc.

Ajoutons que, pour avoir les points de division β , γ , δ ,..., et les tangentes en ces points, on décrit, du point o comme centre, une circonférence beaucoup plus grande que $a\theta\lambda$; on partage cette grande circonférence en parties égales ; on mène les rayons aux points de division, etc.

En général, quand on construit une épure, on doit, *par toutes sortes de procédés*, rechercher l'exactitude dans la détermination des droites et des points.

plans $x'y'$, xy , était prolongée au-dessous de xy , les tangentes à la spire qui suivrait celle que nous conservons viendraient percer le plan horizontal xy , en des points situés sur la développante $a_1q_1p_1\dots b_1a_1$. En effet, la nouvelle spire serait, à l'égard du plan xy , ce qu'est la première par rapport au plan $x'y'$.

De même, si celle-ci était continuée au-dessus de ce dernier plan, les tangentes à la nouvelle spire détermineraient, par leurs intersections avec $x'y'$, une développante projetée, en vraie grandeur, suivant $abc\dots qr$.

Si donc l'hélicoïde, au lieu d'être limité comme nous l'avons supposé, était indéfini, ses traces sur chacun des deux plans horizontaux xy , $x'y'$, se composeraient du système des deux développantes $abc\dots qr$ et $aq_1p_1\dots a_1$.

183. Remarquons maintenant qu'une *hélice, tracée sur un cylindre de révolution, est partout identique avec elle-même* (*). La conclusion à laquelle nous venons de parvenir, relativement aux sections faites dans l'hélicoïde par les plans horizontaux xy , $x'y'$, subsiste donc pour tout plan horizontal. Ainsi :

1° La section faite dans l'hélicoïde développable, par un plan quelconque, perpendiculaire à l'axe du cylindre sur lequel l'hélice directrice est tracée, se compose de deux développantes de la section circulaire faite dans le cylindre par ce même plan; 2° l'origine commune des deux développantes est située sur l'hélice; 3° cette origine est, par rapport au système des deux développantes, un point de rebroussement (**).

(*) Cette propriété appartient aussi à la ligne droite.

(**) On sait que la développante coupe, orthogonalement, les tangentes

184. Il est maintenant facile de se représenter la forme de l'hélicoïde développable.

Supposons, en effet, que la courbe $a_1b_1\dots qab\dots gr$, toujours située dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, tourne autour de cet axe, de manière que le point de rebroussement a parcoure l'hélice directrice. D'après les explications précédentes, la surface ainsi engendrée sera un hélicoïde développable. Cette surface est composée de deux nappes, respectivement engendrées par les deux développantes : en se réunissant, elles forment une sorte de *lame tranchante*, ayant pour *arête* l'hélice directrice. Cette dernière courbe, étant le lieu décrit par le point de rebroussement de la génératrice, est donc une *arête de rebroussement* (136).

185. Nous pouvons ajouter, pour rendre encore plus évidente la forme de l'hélicoïde développable, que, d'après le dernier mode de génération, ce corps est une véritable *vis*, ayant, pour section perpendiculaire à l'axe, le système des développantes $a_1b_1\dots q_1, ab\dots r$ (*).

186. Revenons à la représentation graphique de l'hélicoïde. Les points de la trace inférieure se projettent en $r', b', c', \dots q'$, sur la ligne de terre. De même, les points appartenant à la trace supérieure de l'hélicoïde ont pour projections verticales les points $a'_1, b'_1, c'_1, \dots q'_1$, situés sur $x'y'$. Par conséquent, en menant des droites par les

à la développée. Donc les tangentes en a , aux deux développantes, sont confondues suivant le prolongement du rayon oa ; c'est-à-dire que, par rapport au système de ces courbes, a est un point de rebroussement.

(*) Le *filet de la vis* serait la section faite par un plan $o\delta_1$, passant par l'axe.

points correspondants r et a' , b' et $b'_1, \dots q'$ et q'_1 , nous obtiendrons les projections verticales des génératrices. Quant aux projections verticales $\beta', \gamma', \delta', \dots$ des points où ces génératrices touchent l'hélice, elles sont données par les projections horizontales $\beta, \gamma, \delta, \dots$ des mêmes points. La *sinusoïde* $r(\beta'\gamma\delta' \dots a')$, est la projection verticale de cette hélice (*).

187. Afin d'abrégier, nous n'expliquerons pas ce qui est relatif aux parties visibles ou invisibles. Avec un peu d'attention, le lecteur qui aura notre épure sous les yeux comprendra pourquoi certaines lignes ou parties de lignes sont *en plein*, tandis que le reste est *en ponctué*.

188. Pour construire le *modèle en relief*, on pourra prendre deux feuilles de carton, assujetties par des montants verticaux, de manière à tenir lieu, approximativement, des plans horizontaux $xy, x'y'$. Après avoir évidé

(*) Rapportons l'hélice aux trois axes $o\xi, o\delta, (o, o'z')$. Désignons par R le rayon du cylindre, et par s l'arc $a\delta\varepsilon$, répendant à un point quelconque ($\varepsilon, \varepsilon'$), dont les coordonnées sont x, y, z . Nous aurons

$$x = -R \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{s}{R}.$$

Mais

$$\frac{z}{s} = \frac{z}{e\varepsilon} = \operatorname{tg} d'_1 d'' = \frac{h}{2\pi R}, \quad \text{,}$$

h étant le pas de l'hélice. Remplaçant $\frac{s}{R}$ par $2\pi \frac{z}{h}$, nous trouvons les équations :

$$x = -R \cos 2\pi \frac{z}{h}, \quad y = R \sin 2\pi \frac{z}{h}.$$

Chacune des projections de l'hélice est donc une *variété* de la sinusoïde.

ces deux feuilles, suivant deux cercles égaux à $a\delta\theta\lambda$, et ayant un axe commun $(o, o'o')$, on tracera, sur le carton inférieur, la développante $abc\dots r$, et, sur le second carton, l'autre développante, en ayant soin de placer dans une même verticale les origines de ces courbes. Réunissant ensuite, par des fils tendus, les points correspondants, on aura une représentation assez fidèle de l'hélicoïde développable, surtout si les points $a, b, c, \dots r$ sont suffisamment rapprochés. Ajoutons que, s'il en est ainsi, les génératrices représentées par les fils n'étant plus des droites mathématiques, elles pourront se couper deux à deux, et qu'alors l'arête de rebroussement résultera des *intersections successives* de ces droites.

189. *Plan tangent suivant une génératrice.* Proposons-nous de construire le plan tangent à l'hélicoïde, le long de la génératrice (u_1, u'_1) . Ce plan doit avoir, pour trace horizontale, la tangente en (l, l') à la développante $abc\dots r$, puisque cette courbe est la trace horizontale de la surface.

FIG. 51.

Or, cette tangente est perpendiculaire à u_1 (183, seconde Note) ; donc le plan tangent est déterminé.

Si, comme nous l'avons supposé sur l'épure, la génératrice de contact est parallèle au plan vertical, le plan tangent $u'u'_1$ sera perpendiculaire à ce dernier plan, et il aura pour trace verticale la projection $l'l'_1$ de la génératrice.

190. *Section de l'hélicoïde par le plan tangent.* Pour avoir des points de cette courbe, il suffit de chercher ceux où le plan $u'u'_1$ est rencontré par les génératrices projetées suivant aa_1, bb_1, cc_1, \dots . Les projections verticales de ces points sont, évidemment, situées sur $l'l'_1$; en sorte que l'on obtiendra, sans aucune difficulté, les pro-

jections horizontales a_2, b_2, c_2, \dots (*), lesquelles donneront la courbe $a_2 b_2 c_2 \dots \lambda \dots r_2$, projection horizontale de la section.

191. Il ne serait ni difficile ni intéressant de construire, soit le rabattement de la section, soit la tangente à cette ligne. Relativement au point (λ, λ') , la méthode générale serait en défaut, car le plan tangent à la surface, en ce point, se confond avec le plan de la courbe. Mais nous savons que celle-ci touche, au point dont il s'agit, l'arête de rebroussement (45) (**).

(*) Observons, cependant, que le procédé général ne s'appliquerait pas aux points a_2, g_2, r_2 , situés sur les droites aa_1, gg_1, ar , perpendiculaires à la ligne de terre. Mais il est facile de voir que la projection verticale g'_2 partage $g'g'_1$ en deux segments $g'_2 g'_1, g'g'_2$, proportionnels à $gg_2, g_2 g_1$. On pourra donc construire rigoureusement le point g_2 . De même pour a_2 et r_2 .

(**) Tous les résultats auxquels nous venons de parvenir peuvent être vérifiés par le calcul.

Soient, comme ci-dessus, les équations de l'hélice :

$$x = -R \cos 2\pi \frac{z}{h}, \quad y = R \sin 2\pi \frac{z}{h}.$$

La tangente en un point de cette courbe est représentée par

$$x + R \cos 2\pi \frac{\gamma}{h} = \frac{2\pi R}{h} (z - \gamma) \sin 2\pi \frac{\gamma}{h},$$

$$y - R \sin 2\pi \frac{\gamma}{h} = \frac{2\pi R}{h} (z - \gamma) \cos 2\pi \frac{\gamma}{h};$$

γ étant l'ordonnée du point de contact.

Pour simplifier, posons $\frac{h}{2\pi R} = m$: ce rapport est égal à la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec le plan horizontal, la tangente à l'hélice. Nous aurons ainsi, au lieu des équations précédentes :

$$x + R \cos \frac{Rm}{\gamma} = \frac{1}{m} (z - \gamma) \sin \frac{\gamma}{Rm}, \quad (1)$$

$$y - R \sin \frac{\gamma}{Rm} = \frac{1}{m} (z - \gamma) \cos \frac{\gamma}{Rm}. \quad (2)$$

192. *Développement de l'hélicoïde.* Du théorème démontré dans le n° 137, et de la remarque faite ci-dessus (183), on conclut que, dans le développement de l'héli-

Il ne reste plus, pour avoir l'équation de l'hélicoïde, qu'à éliminer γ entre les relations (1) et (2). Elles donnent, par des combinaisons simples,

$$x \cos \frac{\gamma}{Rm} - y \sin \frac{\gamma}{Rm} + R = 0, \quad (3) \quad x^2 + y^2 - R^2 = \left(\frac{z-\gamma}{m}\right)^2. \quad (4)$$

Alors, si l'on prend, dans l'équation (4), la valeur de γ , pour la substituer dans l'équation (3), on trouve

$$x \cos \left(\frac{z}{Rm} \mp \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}\right) - y \sin \left(\frac{z}{Rm} \mp \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}\right) + R = 0. \quad (5)$$

Telle est l'équation de l'hélicoïde développable. On la simplifierait beaucoup en remplaçant x et y par des coordonnées polaires.

En faisant $z=0$, on trouve

$$x \cos \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 - R^2} \pm y \sin \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2 - R^2} + R = 0, \quad (6)$$

équation qui représente les deux développantes situées dans le plan horizontal.

L'ordonnée verticale du point (λ, λ') est $\frac{3}{4}h$; donc, par ce qui précède, l'équation du plan tangent en ce point est

$$z - \frac{3}{4}h = -mx;$$

ou

$$z = m \left(\frac{3}{2}\pi R - x\right).$$

En substituant cette valeur dans l'équation (5), on obtient, après quelques réductions,

$$-x \sin \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} + y \cos \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} + R = 0. \quad (7)$$

Cette équation, qui est vérifiée par $y = -R$, représente donc la droite ll , et la courbe $a_2b_2\dots\lambda\dots r_2$.

çoïde, l'hélice directrice se transforme en une circonférence égale à celle de son *cercle osculateur*. Cherchons donc, d'abord, le rayon de ce cercle.

Fig. 52. Pour cela, soient, sur une hélice, trois points M, P, N, équidistants, P étant un point moyen. Faisons passer le plan horizontal de projection par le point M, et prenons le plan vertical, perpendiculaire à celui qui passerait par le point P et par l'axe du cylindre. Les cordes PM, PN sont projetées, horizontalement, suivant deux cordes égales de la section droite *o*, et, verticalement, suivant une seule droite *m'p'n'*.

Cela posé, si l'on considère la circonférence passant par M, N, P, on voit qu'elle a *p'm'n'* pour projection verticale, et que son diamètre projeté en *p'* est l'hypoténuse d'un triangle ayant PN pour côté de l'angle droit, et *ip* pour segment adjacent. Si donc D est ce diamètre, on a

$$D = \frac{\overline{PN}^2}{pi}$$

D'ailleurs le triangle rectangle *pnc* donne, semblablement,

$$cp = \frac{\overline{pn}^2}{pi}$$

Divisant membre à membre, et représentant par β l'angle de PN avec le plan horizontal, on trouve

$$\frac{D}{2R} = \frac{1}{\cos^2\beta}$$

Lorsque le point N s'approche indéfiniment de P, β tend à devenir égal à l'angle α que fait, avec le plan horizontal, la tangente à l'hélice. En même temps, le diamètre D dif-

fière, de moins en moins, du diamètre 2ρ du cercle osculateur o ; la formule cherchée est donc

$$\rho = \frac{R}{\cos^2 \alpha}.$$

193. Pour construire cette valeur, prenons, sur la ligne de terre, $l's = ao = R$; élevons st perpendiculaire à xy ; puis, par le point t , menons tu perpendiculaire à ll' : $l'u$ sera égal au rayon ρ . En effet, l'angle $d'll'$ est égal à α ; donc

FIG. 51.

$$l'l' = \frac{R}{\cos \alpha}, \quad l'u = \frac{R}{\cos^2 \alpha}.$$

194. Avec le rayon ρ , égal à $l'u$, décrivons une circonférence AO (fig. 53), sur laquelle nous prendrons, à partir du point A , un arc $A\delta_1\theta_1\lambda_1A_0$ égal, en longueur, à la génératrice $d'd'_1$ (*): cet arc sera, dans le développement

(*) On aura cet arc avec une grande approximation, si l'on calcule l'angle qui y correspond. Or, φ étant la mesure de cet angle (voyez la Note de la page 57), on a $\rho \cdot \varphi = d'd'_1$, ou

$$\rho \cdot \varphi = 2\pi R \cdot \frac{1}{\cos \alpha}.$$

A cause de

$$\rho = \frac{R}{\cos^2 \alpha},$$

cette équation se réduit à

$$\varphi = 2\pi \cdot \cos \alpha;$$

d'où, en représentant par n le nombre de degrés de l'angle cherché,

$$n = 360 \cdot \cos \alpha.$$

Le cosinus de l'angle α est $\frac{dd_1}{d'd'_1}$; donc

$$n = 360 \cdot \frac{dd_1}{d'd'_1}.$$

Dans notre épure, $dd_1 = 88^{\text{mm}}$, $d'd'_1 = 105^{\text{mm}}$; en sorte que l'angle AOA' égale, à fort peu près, 302° .

de la surface, la transformée de l'hélice directrice. En le divisant en autant de parties égales que l'indique le nombre des divisions de la circonférence oa , et en menant des tangentes par les points de division $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$, nous aurons les transformées des génératrices de l'hélicoïde.

Pour trouver la transformée de la développante $a_1 b_1 \dots q_1 a$ située sur le plan supérieur $x'y'$, prenons, sur la tangente en A , la distance AA_1 égale à $d'd'_1$; divisons AA_1 , comme l'arc AA_0 , en douze parties égales; puis enfin, sur les tangentes en $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \dots$, prenons les distances $\beta_1 B_1, \gamma_1 C_1, \delta_1 D_1, \dots$, respectivement égales à $1A_1, 2A_1, 3A_1, \dots$. La développante $A_1 B_1 C_1 \dots Q_1 A_0$ du cercle O sera la transformée cherchée. En même temps, la partie de plan $AA_1 B_1 \dots A_0 \chi_1 \pi_1 \dots \beta_1 A$ sera le développement de la nappe supérieure de l'hélicoïde.

195. Si, à partir des points B_1, \dots, Q_1, A_0 , on porte, sur les tangentes, les distances $B_1 B, C_1 C, \dots, Q_1 Q, A_0 R$, égales à $A_1 A$, la développante passant par A, B, C, \dots, Q, R , sera, semblablement, la transformée de la trace horizontale $abc \dots qr$, etc.

196. *Transformée de la section.* Nous avons trouvé, pour projection horizontale de la courbe d'intersection de l'hélicoïde par son plan tangent $l_1 l' l$, la ligne $a_2 b_2 \dots \lambda \dots r_2$. Si nous considérons les parties des génératrices projetées suivant $a_1 a_2, b_1 b_2, \dots$, elles sont proportionnelles à ces projections, attendu que les génératrices sont également inclinées sur le plan horizontal. Par suite, nous
- FIG. 51.
- FIG. 53.
- déterminerons les vraies longueurs $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, \dots$ de ces segments de génératrices, en cherchant les hypoténuses d'une série de triangles rectangles ayant un angle égal à $l_1 l' x$, et dans lesquels les côtés adjacents à cet

angle seraient égaux, respectivement, à $a_1 a_2$, $b_1 b_2$... Nous avons, dans l'épure, supprimé cette construction auxiliaire, laquelle donne $A_2 B_2$... λ_1 ... R_2 pour la transformée cherchée.

PROBLÈME XV.

1° Représenter graphiquement l'hélicoïde de la vis à filet triangulaire; 2° construire le plan tangent à cette surface, en un point; 3° déterminer la section faite par le plan.

197. *Représentation graphique de l'hélicoïde.* Après **FIG. 54.** avoir divisé en parties égales la circonférence ao , projection horizontale de l'hélice directrice, partageons, dans le même nombre de parties égales, le pas $o'o''$ de cette courbe; puis, par les points de division, menons des parallèles à la ligne de terre xy , et arrêtons-les aux perpendiculaires à cette ligne, menées par les points de division β , γ , δ ... : nous obtiendrons ainsi la sinusoïde (*) $a'\beta'\gamma'\delta'...a'$, projection verticale de l'hélice.

Cela posé, la génératrice rectiligne de l'hélicoïde, assujettie à s'appuyer sur l'hélice dont nous venons de construire les projections, doit couper, sous un angle constant, l'axe (o ; $o'o''$) du cylindre ao (152). D'après cette condition, on se représentera très-exactement la surface, si l'on imagine une *équerre* BAC, dont le côté BA de l'angle droit coïncide avec l'axe, et dont l'autre côté AC de l'angle droit, égal au rayon du cylindre, tourne autour de l'axe, de manière que le sommet C parcoure l'hélice. Dans ce mouvement, l'hypoténuse BC de l'équerre engendre la partie de surface hélicoïdale comprise entre les deux

(*) On a déjà vu que $a'\beta'\gamma'\delta'...a'$ n'est pas une sinusoïde proprement dite, mais seulement une variété de cette courbe.

directrices ; et, si cette hypoténuse est indéfiniment prolongée, elle engendre tout l'hélicoïde.

198. La même considération démontre que *deux points quelconques, pris sur l'hypoténuse de l'équerre, c'est-à-dire sur la génératrice, s'élèvent à la fois, de grandeurs égales*. En particulier, *la différence de niveau entre les points B, C est constante*. Enfin, comme les arcs parcourus, dans le même temps, par les projections horizontales de deux points quelconques de la génératrice, sont semblables, ces deux points décrivent, dans l'espace, deux hélices de même pas. En d'autres termes : *quand la génératrice rectiligne engendre l'hélicoïde, tout point de cette droite décrit une hélice dont le pas est égal à celui de l'hélice donnée*.

199. Pour construire les projections verticales des génératrices passant par les points de division choisis sur l'hélice, nous devons porter sur $o'o''$, à partir des points de division de cette droite, une longueur constante, égale au côté BA de l'équerre, et joindre ensuite les points $a_1, b_1, c_1, \dots, r_1$ ainsi obtenus, avec les points $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \alpha'$.

200. La trace horizontale de l'hélicoïde est la courbe $abc\dots r$, lieu des traces horizontales des génératrices. Il est facile de voir que cette courbe est une *spirale d'Archimède*. En effet, les différents *rayons vecteurs* oa, ob, oc, \dots sont proportionnels aux distances verticales $o'a_1, o'b_1, o'c_1, \dots$. Or celles-ci forment une progression par différence ; donc il en est de même des rayons. Et comme

(*) Si la démonstration de cette dernière proposition ne paraissait pas suffisamment claire, on la compléterait au moyen du lemme suivant : *une courbe est une hélice si, à des accroissements égaux de l'abscisse curviligne, correspondent des accroissements égaux de l'ordonnée*.

les angles aob , boc ... sont égaux, il s'ensuit que la courbe abc ,... r est telle, qu'à des accroissements égaux de l'amplitude, correspondent des accroissements égaux au rayon vecteur. C'est ce qu'il fallait démontrer.

201. *Construction du plan tangent.* Pour plus de simplicité, proposons-nous de mener le plan tangent en un point (x, x') pris sur l'hélice directrice. Ce plan doit contenir la génératrice (ok, k, k') , et la tangente à l'hélice, au point (x, x') . Pour déterminer cette dernière droite, rappelons-nous que la sous-tangente xt est égale à l'abscisse curviligne $\alpha\beta$... x . La trace horizontale t étant ainsi construite, le plan tangent $tksv$ sera connu, puisque sa trace horizontale est tk , et qu'il passe par le point (o, k_1) .

202. Si le point de contact, au lieu d'être situé sur l'hélice directrice, était quelconque, on remplacerait cette dernière courbe par l'hélice passant au point donné.

203. *Section de la surface par son plan tangent.* On obtiendra les deux projections de cette courbe d'intersection, en construisant les points ou les génératrices $(b\beta, b'\beta')$, $(c\gamma, c'\gamma')$,... percent le plan vst . Cette recherche ne présentant aucune difficulté, nous ne l'avons pas effectuée sur l'épure; mais nous engageons le lecteur à se proposer cet exercice graphique. Il reconnaîtra que *la courbe dont il s'agit a des asymptotes*, et que *la méthode générale des tangentes* (77) *n'est pas applicable au point* (x, x') (*).

(*) Si on voulait construire la tangente en ce point particulier, on devrait, préalablement, remplacer l'hélicoïde par un *paraboloïde de raccordement*. Pour la théorie des surfaces de raccordement, théorie que nous avons dû passer sous silence, le lecteur peut consulter la *Géométrie descriptive* de Leroy.

EXERCICES.

- I, II, III, IV, V. *Construire les sections planes des surfaces définies à la fin du Chapitre VI (p. 89).*
- VI. *Une droite, de longueur donnée, s'appuie, par ses deux extrémités, sur une droite fixe et sur un plan fixe, en restant parallèle à un plan donné. Construire les sections planes de la surface ainsi engendrée. Comment doit-on prendre le plan sécant pour que la courbe soit une ellipse?*
- VII. *Une droite mobile s'appuie sur une droite donnée et sur deux circonférences égales, situées dans des plans perpendiculaires à la directrice rectiligne. Construire les sections planes de la surface ainsi engendrée (*).*
- VIII. *Une circonférence, située dans le plan horizontal de projection, roule sur la ligne de terre, de manière qu'un de ses points, A, décrit une cycloïde. Une droite AB, inclinée à 45° sur le plan horizontal, et constamment normale à la circonférence mobile, est entraînée par celle-ci. Construire des sections horizontales et la trace verticale de la surface engendrée par AB. Cette surface est-elle développable? S'il en est ainsi, quelle en est l'arête de rebroussement?*

(*) Cette surface est connue sous le nom de *biais passé*.

CHAPITRE VIII.

Sections planes des surfaces de révolution.

Dans ce chapitre, nous choisirons, comme exemples de surfaces coupées par un plan, l'hyperboloïde de révolution, et le *tore*, c'est-à-dire *la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'un axe situé dans son plan*.

PROBLÈME XVI.

Construire la section faite, par un plan, dans un hyperboloïde de révolution, à une nappe.

204. Au lieu de nous donner la section méridienne de l'hyperboloïde, nous pouvons, pour plus de simplicité, déterminer cette surface par l'axe (o, oz'), et par une position particulière de la génératrice rectiligne : nous pouvons même prendre cette droite ($ab, a'o'$), parallèle au plan vertical de projection. En outre, nous supposons que ce plan est perpendiculaire au plan sécant $\alpha\beta\gamma$. De cette manière, la projection verticale de la courbe d'intersection sera confondue avec la trace verticale $\beta\gamma$; et il nous suffira de chercher la projection horizontale $unkmv$.

FIG. 55.

205. L'axe de l'hyperboloïde étant vertical, et la génératrice ($ab, a'o'$) étant parallèle au plan vertical, la plus courte distance de ces droites est, évidemment, perpendiculaire au plan vertical. Elle a donc pour pro-

jection verticale le point o' , où se coupent oz' et $a'o'$, et pour projection horizontale le prolongement ob de oo' . Par suite, le *cercle de gorge* se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal, suivant la circonférence dbe : et sa projection verticale est la parallèle $d'e'$ à la ligne de terre. Enfin, si nous prolongeons ab d'une longueur égale bc , la droite $(bc, o'c')$ sera la *seconde génératrice* passant en (b, o') . L'hyperboloïde est complètement déterminé.

206. Cela posé, soit m' la projection verticale d'un point quelconque M de la courbe cherchée. Ce point M est situé sur un parallèle de la surface, dont la projection verticale $m'p'$ est parallèle à la ligne de terre, et qui rencontre, en (p', p) , la génératrice $(bc, o'c')$ *supposée fixe*. Si donc, du point o comme centre, on décrit une circonférence passant en p , on trouvera la projection horizontale m correspondant à m' .

La même construction, répétée pour un certain nombre de points, convenablement choisis, donne, avec l'approximation désirable, la projection horizontale $unkmv$ de l'intersection des surfaces données.

207. *Nature de la section.* Le plan $\alpha\beta\gamma$ coupe l'hyperboloïde et le cône asymptotique suivant deux courbes semblables et concentriques (167). Or, si l'on imagine que la génératrice $(ab, a'o')$ soit transportée, parallèlement à elle-même, en (o, o') , sa projection verticale $a'o'$ n'aura pas changé, et sa projection horizontale sera devenue $a'o$. La trace horizontale du cône est donc la circonférence décrite sur $a'o$ comme diamètre; et son *méridien principal est formé par les projections verticales $a'o'$, $o'c'$ des deux génératrices principales*. A cause de cette dernière propriété, on peut, à l'inspection des données, prévoir quel est le

genre de la section. Dans notre épure, le plan $\alpha\beta\gamma$ coupe une seule nappe du cône : la section faite dans l'hyperboloïde est donc une ellipse.

208. *Détermination du centre et des sommets.* Le centre de la section faite dans le cône est le milieu (i, i') du segment $g'h'$ déterminé, sur la trace verticale $\beta\gamma$, par les génératrices extrêmes. Donc, d'après le théorème rappelé tout à l'heure, ce point (i, i') est aussi le centre de la section faite dans l'hyperboloïde. Et comme le plan vertical de projection partage la figure en deux parties symétriques, l'un des axes principaux de la courbe est $\beta\gamma$, l'autre étant la perpendiculaire au plan vertical, projetée en i' (*).

209. Si cette dernière droite est un *axe réel*, c'est-à-dire si la section a deux *sommets* projetés en i' , on obtiendra, par la construction générale indiquée ci-dessus les projections horizontales de ces points. Dans notre épure, l'une de ces projections est le point k .

La recherche des sommets situés sur la trace verticale du plan sécant est un peu plus longue : elle repose sur les considérations suivantes.

210. Supposons, pour un instant, que ces sommets aient été déterminés, et soit (u, u') l'un d'eux. Ce point appartient à l'hyperboloïde; donc il est situé sur l'une des positions que prend la génératrice principale ($ab, a'o'$) quand elle tourne autour de l'axe ($o, o'z'$). Appelons A cette position inconnue. Si le système des droites A et $\beta\gamma$ tourne autour de l'axe, jusqu'à ce que A vienne re-

(*) Nous supposons ici que la courbe d'intersection est une ellipse ou une hyperbole. Si elle dégénérait en parabole, le second axe disparaîtrait.

prendre sa position initiale ($ab, a'o'$), la droite $\beta\gamma$ engendre un cône de révolution ayant pour trace la circonférence $\beta\delta\epsilon$; et le point (u, u'), toujours situé sur la génératrice mobile, décrit un parallèle de ce cône. Par conséquent, nous trouverons le sommet cherché, si nous pouvons déterminer le point (s, s') où la génératrice principale ($ab, a'o'$) perce le cône engendré par $\beta\gamma$. Or, cette dernière recherche est facile.

En effet, par le sommet l' du cône auxiliaire, menons une parallèle $l'q'$ à $a'o'$, et tirons $q'a$: cette droite $q'a$ est la trace horizontale d'un plan passant par le sommet et par la génératrice principale. Ce plan coupe le cône suivant deux droites dont les traces horizontales sont les intersections des lignes $q'a'$ et $\beta\delta\epsilon$. Soit r l'une de ces intersections : la droite or est la projection horizontale d'une génératrice du cône, située dans le plan $l'q'a$. La rencontre (s, s') de cette génératrice et de la droite ($ab, a'o'$) donne enfin le sommet cherché (u, u').

L'autre sommet (v, v') s'obtiendrait de la même manière ; mais il est plus court de prendre $i'v'$ égal à $i'u'$.

211. Construction de la tangente. Pour trouver la tangente en un point quelconque M de la section, commençons par construire le plan tangent, en ce point, à l'hyperboloïde. Ce plan est déterminé par les deux génératrices rectilignes passant en M (164), lesquelles ont pour projections horizontales les tangentes $tm\theta, mt, \theta_1$ à la projection du cercle de gorge (155). De plus, les traces horizontales de ces droites sont situées sur la trace $dacf$ de l'hyperboloïde. Il est donc facile de trouver la trace horizontale $\theta\theta_1$ du plan tangent en M , et la projection horizontale Tm de la tangente cherchée.

212. *Remarque.* La droite $\theta\theta_1$ est, perpendiculaire à la trace horizontale du méridien passant en M. La construction du plan tangent, employée tout à l'heure, ne diffère donc pas de celle qui a été donnée au n° 68.

213. *Cas où la section est une hyperbole.* Il n'offre rien de particulier, si ce n'est la détermination des asymptotes. On pourrait effectuer directement cette recherche; mais on la simplifie beaucoup en observant que les sections faites par le plan donné, dans l'hyperboloïde et dans le cône asymptotique, ont les mêmes asymptotes: en effet, ces courbes sont semblables, semblablement placées et concentriques (167). On a vu d'ailleurs, précédemment, à quoi se réduit la construction des asymptotes de la section plane d'un cône de révolution (118).

PROBLÈME XVII.

Déterminer la courbe d'intersection d'un plan et d'un tore.

214. Comme d'habitude, faisons passer le plan vertical de projection par l'axe oz' de la surface de révolution, perpendiculairement au plan sécant. En outre, supposons le tore posé sur le plan horizontal: sa section méridienne se compose du système de deux cercles $i'l'$, $i'_1l'_1$, égaux entre eux, symétriquement placés par rapport à l'axe (*), et tangents à la ligne de terre. Le contour apparent, relatif au plan vertical, a pour projection, outre les deux circonférences méridiennes, les tangentes communes ii_1 , $l'l_1$. En effet, le plan tangent en un point quelconque

FIG. 56.

(*) En architecture, cette section méridienne serait appelée *coupe du tore*.

de la section méridienne principale est perpendiculaire à cette section, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical; et, d'un autre côté, le plan tangent en un point quelconque du *parallèle moyen* ($ief_1, l'l_1$) est horizontal, etc. Enfin, le contour apparent, relatif au plan horizontal, est formé par les parallèles extrêmes ($bhb_1, b'b'_1$) et ($aga_1, a'a'_1$) (63).

215. Suivant la position attribuée au plan sécant, on obtient des courbes de formes très-variées, dont la discussion nous entraînerait au delà des limites que nous nous sommes prescrites. Afin d'obtenir un résultat intéressant, nous prendrons, pour trace verticale du plan, la *tangente commune* $d'c'$, aux cercles $i'l, i_1l_1$. De cette manière, le plan sécant $\alpha\beta\gamma$ passe par le centre de la surface, et il touche celle-ci au point c', d' .

216. En opérant comme dans le Problème précédent, c'est-à-dire en construisant les points où le plan donné rencontre un certain nombre de parallèles du tore, on trouve, sans aucune difficulté, la projection horizontale de l'intersection cherchée. Cette projection, dont l'épure ne présente que la *moitié*, se compose de deux arcs $cehfd, cgd$, et de deux autres arcs, symétriques de ceux-ci, par rapport à la ligne de terre. L'arc $cehfd$ se *raccorde* avec le symétrique de cgd , et ce dernier arc cgd se raccorde avec le symétrique de $cehfd$; en sorte que la projection horizontale complète paraît composée de deux ellipses égales qui se couperaient aux points c, d , projections des points où le plan donné touche le tore.

217. *Rabattement de la section.* Pour ne pas jeter de confusion dans l'épure, faisons tourner le plan sécant autour de la perpendiculaire au plan vertical de projection,

passant par le centre (o, o') de la surface; puis, quand le plan mobile sera devenu horizontal, transportons la ligne de terre, parallèlement à elle-même, jusqu'en XY . La construction employée dans le Problème X (78) donne, pour le rabattement cherché, le système de deux courbes $CEHFDGC$, $CG_2 DF_1 E_2 V_1$, placées symétriquement par rapport à XY , et qui se coupent sur cette droite.

218. M. Yvon Villarceau a trouvé que *ces courbes sont deux circonférences, égales à celle qui est décrite par le centre (i, i') du cercle générateur, et dont les centres sont distants de l'axe d'une longueur égale au rayon de ce cercle* (*).

219. *Remarques. I. Le tore admet trois séries de sections planes, doublement circulaires.*

En effet, tout plan passant par l'axe, ou tout plan perpendiculaire à l'axe, ou enfin, tout plan tangent, passant par le centre, coupe le tore suivant deux circonférences.

II. *Le tore admet trois séries de sections sphériques, doublement circulaires.*

En effet : 1° si l'on coupe la section méridienne du tore par une circonférence ayant son centre sur l'axe, les points communs aux deux courbes décriront, lors de la

(*) On démontre facilement le Théorème de M. Villarceau en s'appuyant sur la propriété suivante, remarquée par M. Darboux.

Si l'on appelle *sphères inscrites opposées* les deux sphères déterminées par la section méridienne du tore, et *distance d'un point à une sphère* la longueur de la tangente menée du point à la sphère, on peut dire que :

Le rectangle des distances d'un point quelconque de la surface du tore, à deux sphères inscrites opposées, est proportionnel à la distance de ce point au plan méridien qu'il contient les centres des deux sphères (Nouvelles Annales de Mathématiques, avril 1864).

rotation, deux parallèles communs au tore et à la sphère engendrée par cette circonférence.

2° Par le cercle générateur du tore on peut faire passer une infinité de sphères. Par le centre de l'une d'elles, menons un plan méridien : il partage le système des deux corps en deux parties symétriques. Donc la sphère coupe le tore, de nouveau, suivant un cercle égal au premier.

3° De même, par le cercle EF, situé sur le tore, on peut faire passer une infinité de sphères. Par le centre de l'une d'elles, menons encore un plan méridien. Il partage le système des deux corps en deux parties symétriques. Donc, etc.

EXERCICES.

- I. *Une circonférence, dont le centre est fixe, s'appuie sur une droite fixe, passant par le centre donné, et sur une autre directrice donnée. On demande de représenter quelques-unes des surfaces ainsi engendrées (*).*
- II. *Représenter la surface engendrée par une droite qui rencontre trois circonférences données, parallèles à un même plan. Comment doit-on prendre les circonférences directrices, pour que la surface soit un hyperboloïde à une nappe?*

(*) Ces surfaces, qui jouissent de propriétés curieuses, renferment évidemment, comme cas particulier, les surfaces de révolution. M. de Saint-Venant, à qui j'avais demandé comment on pourrait les désigner, m'a proposé la dénomination de *surfaces cyclotomiques*, qui me paraît bien choisie.

- III. *Le centre d'une circonférence horizontale décrit une hélice donnée, située sur un cylindre vertical. On propose de représenter la surface ainsi définie, et de la couper par des plans verticaux (*)*.
- IV. *Représenter l'hyperboloïde à une nappe engendré par une circonférence située dans un plan horizontal mobile, rencontrant, aux extrémités d'un diamètre, deux droites données, non situées dans un même plan, et dont l'une est verticale. Trouver les lignes de plus grande pente de cette surface (**)*.
- V. *On donne un cube dont l'une des diagonales est verticale, et l'on propose : 1° de représenter l'hyperboloïde de révolution déterminé par trois des arêtes du cube ; 2° de construire les traces de cette surface ; 3° de trouver les projections du cercle de gorge.*

(*) L'aspect de cette surface est à peu près celui d'une colonne torse.

(**) En général, les *lignes de plus grande pente* d'une surface sont les trajectoires orthogonales de ses *lignes de niveau* (*Manuel du Baccalauréat ès sciences*, 3^e partie, p. 220). Dans le cas actuel, les *lignes de plus grande pente de l'hyperboloïde se projettent horizontalement suivant des circonférences*.

CHAPITRE IX.

Intersection de deux surfaces courbes.

220. Dans les Chapitres V, VII et VIII de cet ouvrage, nous avons indiqué les méthodes que l'on doit employer quand on veut construire la section plane d'une surface réglée ou d'une surface de révolution. Si le lecteur a saisi l'esprit de ces méthodes, il a dû reconnaître que, dans chaque cas, on coupe la surface et le plan donnés, par une série de plans auxiliaires tellement choisis, que chacun d'eux détermine, sur la surface une ligne facile à construire; par exemple, une droite ou une circonférence. La rencontre de cette ligne avec l'intersection du plan donné et du plan auxiliaire appartient à la courbe cherchée, dont on obtient ainsi un certain nombre de points. En unissant par un ou *plusieurs* traits continus les points déterminés par tous les plans auxiliaires, on a enfin cette courbe, avec une approximation plus ou moins grande (*).

221. En résumant ce procédé, on voit qu'il consiste véritablement à remplacer le problème proposé par une série de problèmes du même genre, mais plus simples. Par exemple, pour trouver l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un plan, on construit les sections de cette surface par des plans parallèles à l'axe, et l'on

(*) Dans ce paragraphe et dans ceux qui suivent, le mot *projection* est sous-entendu.

combine ces lignes avec les droites suivant lesquelles le plan donné coupe le plan auxiliaire.

222. Quand on veut construire l'intersection L de deux surfaces courbes quelconques S et S' , on ne fait que généraliser la méthode dont nous venons de rappeler la partie essentielle. Ainsi, après avoir examiné s'il existe une série de surfaces $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, qui coupent S et S' suivant des lignes faciles à déterminer, on construit les intersections l, l' de la surface auxiliaire Σ avec les surfaces données; puis les intersections l_1, l'_1 de Σ_1 , avec ces mêmes surfaces, etc. Ces deux séries de lignes étant trouvées, on cherche le point de rencontre m de l et de l' (*); puis le point de rencontre m_1 de l_1 et de l'_1 ; et ainsi de suite. Enfin, on construit le lieu des points m, m_1, m_2, \dots : ce lieu est la courbe cherchée L .

223. Les surfaces auxiliaires $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots$ seront, presque toujours, des plans, sans quoi, la recherche des courbes l, l', l_1, l'_1, \dots , pourrait être aussi difficile que celle de la courbe L ; et l'emploi de ces surfaces n'aurait pas simplifié le problème (**). En outre, sauf les cas, très-peu nombreux, dans lesquels les surfaces proposées admettent des sections rectilignes ou circulaires, cette détermination des courbes l, l', l_1, l'_1, \dots , nécessite encore un si grand nombre d'opérations graphiques, que l'on est en droit de regarder la solution générale du problème dont nous

(*) Les courbes l, l' se couperont si la surface auxiliaire Σ , à laquelle elles appartiennent, tombe entre certaines limites. — Voyez, pour les surfaces-limites, les Problèmes XVIII et suivants.

(**) Cependant, lorsque S, S' sont des surfaces de révolution, dont les axes se coupent, on adopte des sphères pour surfaces auxiliaires. — Voyez le Problème XX.

nous occupons, sinon comme illusoire, du moins comme fort peu satisfaisante (*).

224. Avant d'appliquer ces généralités à quelques exemples très-simples, nous ferons observer que *la tangente T, en un point quelconque M de la courbe L d'intersection de deux surfaces S, S', est, en général, l'intersection des plans P, P' respectivement tangents aux deux surfaces, en ce point M.*

En effet, d'après la propriété caractéristique du plan tangent (27), la droite T, tangente en M à la courbe L tracée sur la surface S, est située dans le plan P. De même, elle est dans le plan P'; donc, etc.

225. Quelquefois la construction de la tangente peut être simplifiée au moyen de la proposition suivante :

La tangente T, en un point quelconque M de la courbe L d'intersection de deux surfaces S, S', est perpendiculaire au plan des normales N, N', en ce point, aux deux surfaces.

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que la normale N étant, par définition, perpendiculaire au plan tangent P, est perpendiculaire à la tangente T. De même pour la normale N'. Or, une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à deux droites menées, par son pied, dans ce plan; etc.

226. *Remarque.* Le plan des normales N, N' est dit *normal* à la courbe L.

(*) Si l'on savait toujours éliminer une inconnue entre deux équations, la solution algébrique du problème l'emporterait de beaucoup sur la solution géométrique. En effet, les projections de la courbe cherchée seraient représentées par les équations obtenues en éliminant z , puis x , entre les équations des deux surfaces données.

PROBLÈME XVIII.

Intersection de deux cylindres.

227. *Recherche d'un point quelconque.* Après avoir construit les contours apparents des cylindres, que nous supposons, pour plus de régularité dans l'épure, limités à des plans horizontaux xy , $x'y'$, déterminons les surfaces auxiliaires qui donneront lieu aux intersections les plus simples. Ces surfaces sont des plans parallèles, à la fois, aux génératrices des deux cylindres. Il est clair, en outre, que ces plans sont parallèles entre eux.

FIG. 57.

Pour déterminer leur direction commune, menons, par un point arbitraire (i, i') , une parallèle $(ik, i'k')$ aux génératrices du cylindre C , et une parallèle $(il, i'l')$ aux génératrices du cylindre C' . La trace horizontale du plan de ces lignes est la droite lk , à laquelle les traces horizontales de tous les plans auxiliaires devront être parallèles. Si donc nous menons une sécante pq , parallèle à lk , cette droite pq est la trace horizontale d'un plan qui coupe les deux cylindres suivant des génératrices $(pm, p'm')$, $(qm, q'm')$ ayant les points p, q pour traces horizontales; et le point (m, m') , où ces lignes se rencontrent, appartient à la courbe cherchée. En répétant la même construction, on obtiendrait de nouveaux points, aussi nombreux qu'on le voudrait; mais, pour avoir une idée nette de la nature de l'intersection, il vaut mieux construire d'abord les points situés sur les plans-limites et ensuite les points appartenant aux contours apparents.

228. *Points situés sur les plans limites.* Menons, parallèlement à kl , une droite $\alpha\beta\gamma$ qui, tangente à l'une des

bases données, soit sécante à l'autre : cette droite est la trace horizontale d'un plan-limite, c'est-à-dire d'un plan au delà duquel il n'y aura aucun point appartenant à l'intersection des deux cylindres. De même, $\delta\epsilon\eta$ est la trace d'un autre plan-limite (*). Chacun de ces plans est tangent à l'un des cylindres et sécant à l'autre. De plus, tandis qu'un plan auxiliaire quelconque, le plan pq , par exemple, détermine quatre points de l'intersection, chacun des plans-limites en donne seulement deux. C'est ce que l'on reconnaît à l'inspection de l'épure.

229. On peut ajouter que, *en chacun des points situés sur un plan-limite, la tangente à l'intersection est la génératrice commune à ce plan et au cylindre qu'il coupe.*

En effet, la tangente au point (j, j') est l'intersection du plan $\alpha\beta\gamma$ avec le plan tangent au cylindre C, suivant la génératrice $(j\gamma, j'\gamma')$, laquelle est située dans le premier plan; donc la tangente ne diffère pas de cette génératrice.

230. *Remarque.* S'il arrivait que le plan-limite fût tangent aux deux cylindres, la méthode générale serait en défaut; et, pour déterminer la tangente au point (j, j') , il faudrait recourir à d'autres théories, que nous ne pouvons indiquer ici.

231. *Distinction entre l'arrachement et la pénétration.* Dans notre épure, le plan $\alpha\beta\gamma$ est tangent au cylindre C',

(*) Si les bases des cylindres étaient des courbes non convexes, on pourrait trouver plusieurs plans-limites P, P', P'', P''',..., partageant l'espace en régions telles que, de deux régions consécutives, l'une contiendrait des points communs aux deux cylindres, et l'autre n'en renfermerait pas. Au reste, les *plans-limites* sont des cas particuliers des *surfaces-limites* dont il a été question ci-dessus.

et le plan $\delta\epsilon\eta$ est tangent au cylindre C. Il résulte, de cette disposition, que chacune des surfaces est rencontrée par une partie seulement des génératrices appartenant à l'autre surface, et vice versa. Dans ce cas, l'intersection est composée d'une seule branche, et l'on dit qu'il y a arrachement des deux cylindres.

Si les plans-limites sont tangents à un même cylindre, comme l'indique la figure 58, il y a pénétration : le cylindre C' traverse le cylindre C de part en part ; et, par conséquent, l'intersection se compose de deux branches séparées, dont l'une est la courbe d'entrée, et l'autre la courbe de sortie.

232. *Points situés sur les contours apparents.* Il est avantageux de faire passer des plans auxiliaires par les génératrices qui déterminent les contours apparents ; parce que ces plans donnent des points pour lesquels les tangentes sont immédiatement connues. Considérons, par exemple, le plan $f\pi$, mené par la génératrice-limite $(ff_1, f'f'_1)$, et soient (r, r') , (s, s') les deux points où cette génératrice perce le cylindre C'. Le plan tangent en (r, r') , au cylindre C, est vertical ; donc la tangente à l'intersection, en ce point (r, r') , est projetée suivant ff_1 .

FIG. 57.

Semblablement, les tangentes aux points situés sur les génératrices qui ont b, d pour traces, sont projetées horizontalement suivant bb_1, dd_1 .

La même démonstration s'applique aux points situés sur les génératrices dont les traces sont a, c, e, g : les projections verticales des tangentes en ces points sont confondues avec les projections des génératrices.

En général, la tangente à l'intersection de deux surfaces, en un point situé sur le contour apparent de l'une d'elles,

se projette, sur le plan qui détermine ce contour apparent, suivant la tangente à la projection de ce même contour.

233. *Construction de la tangente.* La construction de la tangente ($mt, m't'$), en un point quelconque (m, m') de l'intersection, n'offre aucune difficulté, puisque cette droite est l'intersection des plans dont les traces horizontales sont les tangentes tp, tq aux bases des cylindres donnés.

234. Si l'on voulait déterminer les points pour lesquels la tangente est horizontale, c'est-à-dire *le point le plus haut et le point le plus bas* (*) de la courbe d'intersection, on remarquerait que, pour chacun d'eux, les plans tangents aux deux cylindres ont leurs traces horizontales parallèles à la tangente, et, par conséquent, parallèles entre elles. On devra donc, *par tâtonnement*, construire un plan auxiliaire tel, que les tangentes aux extrémités λ, ν de sa trace horizontale soient parallèles entre elles.

235. Nous n'avons pas encore indiqué comment on doit s'y prendre pour réunir, par un trait continu, les points obtenus *isolément*, et qui appartiennent, par exemple, à la projection horizontale de l'intersection. La considération suivante indique un procédé assez commode.

FIG. 59. Soient ABCD... la courbe d'intersection de deux cylindres dont les bases sont $abcdef$ et $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$. Soient $\alpha\alpha, \beta\epsilon, c\delta$ les traces horizontales des plans auxiliaires, et

(*) En général, si la tangente en un point M d'une courbe C est parallèle à un plan P, la distance du point M à ce plan est un maximum ou un minimum. On peut démontrer cette proposition par le moyen employé dans le n° 44. Cependant, si M est un point singulier, la propriété peut ne plus subsister.

$Aa, A\alpha, Bb, B\beta, \dots$, les génératrices qu'elles déterminent.

Nous pouvons regarder l'arc $abcde$ comme une *projection* de $ABC\dots$, faite parallèlement à Aa . De même l'arc $\gamma\beta\alpha\epsilon\delta$ est une seconde projection de cette ligne.

Cela posé, admettons qu'un mobile M décrive la courbe $ABC\dots$, tandis que ses projections m, μ se meuvent sur les bases des cylindres. Si, pour fixer les idées, on suppose que M , parti du point A , marche dans le sens indiqué par les flèches F , il est clair que la projection m décrira d'abord l'arc $abcd$, et que la projection μ décrira l'arc $\alpha\beta\gamma$. Quand le mobile M est arrivé en C , le mobile m continue à se mouvoir dans le même sens que précédemment, et il décrit l'arc cde ; mais le mobile μ *rebrousse chemin*, et il parcourt l'arc $\gamma\beta\alpha$, dans un sens contraire au sens primitif. La même discussion pourrait être continuée; elle est suffisamment indiquée par les flèches f, f', φ, φ' .

Supposons à présent que $ABCD\dots$, au lieu d'être l'intersection des deux cylindres, soit seulement la projection horizontale de cette ligne, projection dont on a obtenu des points, en combinant les projections horizontales aA, bB, \dots des génératrices du premier cylindre, avec les projections $\alpha A, \beta A, \dots$ des génératrices du second. Quand les mobiles m, μ décrivent les arcs $ab, \alpha\beta$, le mobile M se transporte de A en B ; donc ces deux points doivent être réunis par un arc continu; etc.

236. D'après les conventions adoptées, nous avons, dans notre épure, tracé en *plein* les projections des parties visibles, et en *points ronds* les projections des parties invisibles. Relativement à la courbe d'intersection, il importe d'observer qu'un point quelconque de cette ligne

étant toujours l'intersection des deux génératrices, il n'est visible que s'il est situé sur deux génératrices visibles.

PROBLÈME XIX.

Intersection de deux cônes.

FIG. 60. 237. Les *surfaces auxiliaires* qui déterminent, de la manière la plus simple, l'intersection NDMCP de deux cônes C, C' donnés, sont, évidemment, des plans menés par les sommets S, T . Leurs traces horizontales passent toutes par la trace horizontale R de cette droite. Sauf cette légère modification, la construction de l'épure est identique avec celle de l'épure précédente. Nous ne devrions donc entrer dans aucune explication sur le problème actuel, s'il ne donnait lieu à une recherche intéressante, celle des *branches infinies*.

238. Le raisonnement dont nous avons fait usage à propos de la section hyperbolique du cône (118) démontre que *l'intersection de deux surfaces coniques C, C' a des branches infinies, s'il existe, sur ces surfaces, deux génératrices $(sa, s'a'), (ta, t'a')$ parallèles entre elles.*

En effet, remplaçons le plan P de ces génératrices parallèles, par un autre plan auxiliaire P' faisant un très-petit angle avec le premier : il détermine, dans les cônes donnés, deux droites dont l'inclinaison mutuelle peut être rendue aussi petite que nous le voudrions. Leur point de rencontre peut donc s'éloigner des sommets S, T , au delà de toute limite. C'est ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) Si l'on appliquait ce mode de démonstration au cas de deux cônes ou de deux cylindres dont les bases seraient indéfinies, il pourrait con-

239. Afin de reconnaître si les cônes C , C' admettent des génératrices parallèles, transportons l'un d'eux, *parallèlement à lui-même*, jusqu'à ce que son sommet S vienne coïncider avec l'autre sommet T , c'est-à-dire, prenons ce dernier point pour sommet d'un cône c dont les génératrices soient parallèles à celles du cône C . Si les cônes donnés admettent deux génératrices parallèles (sa , $s'a'$), (ta , ta'), cette dernière droite sera commune au cône fixe C' et au cône *auxiliaire* c ; en sorte que les traces de ces dernières surfaces se couperont en un point α . Toute la question se réduit donc à la construction de la courbe $\alpha\lambda$, trace horizontale du cône c .

240. On reconnaît facilement que cette courbe est semblable à la trace du cône C , et que le *centre de similitude* des deux lignes est le point r , trace horizontale de la droite menée par les sommets S , T . En effet, soient sf , $t\varphi$ les projections horizontales de deux génératrices parallèles, respectivement situées sur les cônes C , c . Le plan de ces génératrices passe en (r, r') ; donc les traces horizontales f , φ , et le point r , sont sur une même droite; etc.

La trace $\alpha\lambda$ du cône *auxiliaire* étant semblable à celle du cône C , on peut, au moyen du centre de similitude r , et sans employer les projections verticales, construire par points cette courbe $\alpha\lambda$, et déterminer ses intersections $\alpha\lambda$, avec la trace du cône C' . On obtient ainsi, dans l'exem-

plaire à des conclusions fausses. Ainsi, avec une même directrice parabolique, on peut construire deux cylindres: leur intersection est indéfinie; et cependant les génératrices de l'un ne sont pas parallèles aux génératrices de l'autre; etc.

ple proposé, deux couples de génératrices parallèles, savoir : $(sa, s'a')$ et $(ta, t'a')$; puis $(ls, l's')$ et $(t\lambda, t'\lambda')$. L'intersection des nappes inférieures des cônes donnés est donc une courbe projetée horizontalement suivant $pcmdn$, et qui s'étend indéfiniment dans les deux sens, de c vers p , et de d vers n (*).

241. *Construction des asymptotes.* En remontant à la définition de ces droites (118) et à la construction générale de la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces, on conclut immédiatement que l'asymptote de l'arc indéfini $mcp\dots$ est l'intersection du plan tangent au cône C , suivant la génératrice $(ls, l's')$, avec le plan tangent au cône C' , le long de la génératrice $(t\lambda, t'\lambda')$.

Ces plans tangents ont pour traces horizontales les tangentes $lu, \lambda u$ aux bases des deux cônes; d'ailleurs, les génératrices de contact sont parallèles entre elles : la projection horizontale de l'asymptote, ou l'*asymptote à la projection horizontale de l'intersection*, est donc la droite uv , parallèle à ls et $t\lambda$.

On construirait, de la même manière, l'asymptote à l'arc indéfini mdn .

242. *Remarque.* Si les tangentes $lu, \lambda u$ étaient parallèles, l'asymptote uv serait *transportée à l'infini*; c'est-à-dire qu'elle n'existerait plus.

(*) Si les cônes étaient prolongés au delà de leurs sommets, ils se couperaient suivant une nouvelle branche infinie. Pour ne pas compliquer inutilement l'épure, nous avons supprimé cette seconde partie de l'intersection. Nous avons en même temps essayé de représenter, en projection verticale, les nappes inférieures, en les supposant interrompues à partir de leur intersection.

PROBLÈME XX.

Intersection de deux surfaces de révolution, dont les arcs se rencontrent.

243. Prenons le plan horizontal de projection, perpendiculaire à l'un des axes, et le plan vertical, passant par ces deux droites. Les surfaces de révolution seront déterminées si l'on donne leurs axes $(o, o'z')$, $(xy, e'g')$ et leurs sections méridiennes $a'b'c'd'$, $e'f'g'h'$. Nous pourrions construire, comme d'habitude, le cercle dnb , projection du contour apparent de la surface dont l'axe est vertical. Quant à la seconde surface, la construction du contour apparent, relatif au plan horizontal, exigerait l'emploi de méthodes que nous ne pouvons indiquer ici (*); nous la regarderons donc comme suffisamment déterminée par la section méridienne et l'axe. D'ailleurs ces deux éléments sont les seuls dont nous aurons besoin.

FIG. 61.

244. *Les surfaces auxiliaires* (222) par lesquelles il convient de couper les surfaces données, sont des sphères ayant pour centre commun le point (o, o') où se coupent les axes (**). L'emploi de ces sphères est justifié par les propriétés suivantes, qu'il suffit d'énoncer : 1° *quand deux surfaces de révolution ont même axe, elles se coupent suivant un parallèle commun* : 2° *la sphère est une surface de révolution qui a pour axe toute droite passant par le centre.*

(*) Si la section méridienne $e'f'g'h'$ est, comme dans notre épure, une ligne du second degré, la projection du contour apparent est une ligne du second degré, parce que *la courbe de contact d'un cylindre et d'une surface du second ordre est plane.*

(**) Dans le cas très-particulier où les deux axes seraient parallèles, on couperait les deux surfaces par des plans horizontaux, c'est-à-dire perpendiculaires à ces droites.

245. Soit donc $k'p'l'q'$ la section méridienne d'une sphère quelconque ayant pour centre le point (o, o') . Le parallèle commun à cette surface auxiliaire et à la première des surfaces données est engendré par le point (k, k') , où se coupent les sections méridiennes; de plus, il est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe commun $(o, o'z)$; donc ce parallèle est projeté *tout entier* suivant la corde commune $k'l'$. De même, le parallèle commun à la sphère auxiliaire et à la seconde surface de révolution est projeté verticalement suivant la corde $p'q'$, commune aux deux sections méridiennes. Si donc les deux cordes $k'l'$, $p'q'$ se coupent en un point m' , les circonférences dont ces cordes sont les diamètres se rencontrent, dans l'espace, *en deux points* symétriquement placés à l'égard du plan vertical, et dont m' est la projection verticale commune. Ces points appartiennent à l'intersection cherchée.

En répétant la construction, on obtient, pour projection verticale de cette intersection, la courbe $i'm'n'h'$, laquelle, évidemment, doit passer par les points i', h' communs aux sections méridiennes données.

246. La projection horizontale $imnh$ se construit sans difficulté. En effet, le point (m, m') , par exemple, appartient au parallèle projeté verticalement suivant $k'l'$. Ce parallèle, étant horizontal, se projette, en vraie grandeur, suivant la circonférence kml ; etc.

247. *Remarque.* Si les surfaces données sont du second ordre, la projection verticale de leur intersection appartient à une ligne du second degré (*).

(*) En effet, le plan vertical de projection est un plan *principal* par

248. D'après ce qui précède, si deux cordes, déterminées par une circonférence auxiliaire, concourent en un point *extérieur* à la circonférence, ce point n'appartient pas à la projection verticale de l'intersection des deux surfaces. Néanmoins, *il est situé sur la ligne dont cette projection est un arc* (*).

rapport à chacune des deux surfaces. Or, *l'intersection de deux surfaces du second ordre, qui ont un plan principal commun, se projette sur ce plan, suivant une ligne du second ordre; donc, etc.*

Le cas où les deux sections méridiennes du second degré auraient un foyer commun mérite d'être remarqué: *la projection verticale de l'intersection se réduit alors à une ligne droite, ou au système de deux droites.*

Pour démontrer cette propriété, rapportons les méridiennes à des axes rectangulaires passant par le foyer commun; nous pourrions représenter ces deux courbes par

$$x^2 + y^2 = (my + nx + p)^2, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = (m'y + n'x + p'). \quad (2)$$

L'équation de la circonférence variable sera

$$x^2 + y^2 = \rho^2. \quad (3)$$

Retranchons membre à membre les équations (1) et (2): la relation

$$(my + nx + p)^2 = \rho^2 \quad (4)$$

représente deux cordes telles que *k'l'*, communes à la courbe (1) et à la circonférence. De même, la corde *p'q'* est donnée par l'équation

$$(m'y + n'x + p')^2 = \rho^2. \quad (5)$$

Actuellement, éliminons ρ entre les relations (4) et (5), afin d'obtenir l'équation du lieu des points *m'*; nous trouvons

$$(my + nx + p)^2 = (m'y + n'x + p')^2, \quad (6)$$

équation qui représente deux droites.

(*) Si l'on cherchait l'équation du lieu des points dont il s'agit, on trouverait qu'elle ne diffère pas de celle qui représente la projection

249. *Construction de la tangente.* On pourrait, pour déterminer la tangente en un point quelconque (m, m') de la courbe d'intersection, construire les plans tangents, en ce point, aux deux surfaces. Mais il est plus simple de recourir à la *méthode du plan normal* (225). En effet, la trace verticale de la normale en (m, m') , pour la première surface, est le point (o, r') . Semblablement, la normale à la seconde surface rencontre le plan vertical en un point projeté en s' . La trace verticale du plan des deux normales est donc $r's'$. Par suite, la droite $m't'$, menée perpendiculairement à cette trace, est la projection verticale de la tangente demandée.

On trouve la projection horizontale de cette tangente en cherchant d'abord, au moyen de la normale $(mo, m'r')$, la trace horizontale $\alpha\beta$ du plan normal, et en abaissant ensuite une perpendiculaire mt sur cette trace.

verticale de l'intersection. Cette projection fait donc partie du premier lieu.

Il y a plus : ce même lieu peut se terminer brusquement, parce que les circonférences auxiliaires deviennent trop petites ou trop grandes. Dans ce cas, la courbe obtenue en construisant les points déterminés par les circonférences, courbe dont une partie constitue la projection verticale $i'n'h'$, n'est elle-même qu'une partie du lieu représenté par l'équation. C'est là un des nombreux exemples dans lesquels l'emploi de l'Algèbre conduit à un résultat plus général que ne paraissent le comporter les données du problème.

EXERCICES.

- I. *Construire les traces d'un cylindre de révolution tangent à deux plans donnés, connaissant le rayon de la section droite.*
- II. *Construire les projections de l'intersection d'une sphère et d'un cône.*
- III. *Un cylindre de révolution, dont l'axe est vertical, est coupé par une sphère qui a son centre sur la surface du cylindre. On demande : 1° la projection verticale de l'intersection des deux surfaces; 2° le développement du cylindre et la transformée de l'intersection.*
- IV. *Construire l'intersection de deux paraboloides hyperboliques engendrés chacun par une droite horizontale qui rencontre deux droites données.*
- V. *Intersection de deux cônes de révolution, dont les axes se rencontrent.*
- VI. *On donne un cône de révolution, dont l'axe est vertical. On donne ensuite deux droites, parallèles à deux génératrices opposées du cône, également éloignées de l'axe, et dont la plus courte distance passe par le sommet du cône. Une droite horizontale s'appuie sur ces deux directrices, de manière à engendrer un paraboloïde hyperbolique. On propose de construire l'intersection de cette surface et du cône.*

- VII. *Intersection de deux surfaces gauches de révolution, dont les axes se rencontrent.*
- VIII. *Une circonférence donnée tourne successivement autour de deux droites situées dans son plan. Construire l'intersection des deux tores ainsi engendrés.*
- IX. *Intersection de trois cylindres.*
- X. *Intersection de trois cylindres de révolution, égaux entre eux, et dont les axes soient des droites données, se coupant en un même point.*
- XI. *Une sphère, dont le rayon est connu, touche, en un point donné, un plan donné P. A cette sphère, on circonscrit un cône dont le sommet est donné, et qui est terminé au plan P. On propose de construire les projections de ce cône, les projections de sa base, et les projections du cercle suivant lequel il touche la sphère (*).*
- XII. *On donne une hélice, tracée sur un cylindre de révolution vertical, et l'on propose de construire les projections de cette courbe sur deux plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires au plan vertical.*
- XIII. *On donne une hélice tracée sur un cylindre de révolution vertical, et l'on propose de construire la trace horizontale d'un second cylindre ayant*

(*) Cette question appartient à la *Théorie des ombres*, ainsi que les six questions suivantes.

- pour directrice cette hélice, et dont les génératrices seraient parallèles à l'une des tangentes de cette courbe. Démontrer que cette trace est une cycloïde (*).
- XIV. Construire la courbe d'intersection d'une sphère avec un cylindre ayant pour base le grand cercle horizontal de la sphère, et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée. Démontrer que cette courbe est une circonférence de grand cercle.
- XV. A une sphère donnée, circonscrire un cylindre dont les génératrices aient une direction donnée, et trouver l'intersection de ce cylindre avec un cône ou avec un cylindre donné.
- XVI. Construire la courbe de contact d'un tore dont l'axe est vertical, avec un cylindre circonscrit à cette surface, et dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée. On construira aussi la trace horizontale du cylindre.
- XVII. Un tore, dont les dimensions sont données, et dont l'axe passe par un point donné, repose sur un plan donné. On demande : 1° les deux projections de cette surface; 2° les projections de la courbe suivant laquelle le tore est touché par un cône circonscrit, dont le sommet est donné.
- XVIII. Avec un même cube directeur on peut déterminer plusieurs hyperboloïdes de révolution (p. 87).

(*) Ce théorème est attribué à M. Guillery.

Quel est le nombre de ces surfaces? Comment se coupent-elles deux à deux? Ont-elles des points communs ()?*

- XIX. *On suppose que des anneaux, à section rectangulaire, et tous égaux entre eux, soient assemblés de manière à former une chaîne pesante, librement suspendue par une de ses extrémités. Dans cet état, deux anneaux consécutifs se rencontrent en quatre points, appartenant à quatre arêtes intérieures. De plus, les axes de tous les anneaux sont horizontaux, et deux axes successifs sont perpendiculaires entre eux. On propose de projeter la chaîne sur un plan donné.*
- XX. *Le centre d'une sphère, de rayon donné, parcourt une hélice donnée, tracée sur un cylindre de révolution, dont l'axe est vertical. Dans son mouvement, la sphère est enveloppée par une surface-canal dont on demande les deux projections.*
- XXI. *Construire l'intersection d'un plan vertical quelconque, avec la surface-canal définie dans la question précédente.*
- XXII. *Une droite mobile s'appuie sur une horizontale et sur une verticale données, en faisant un angle constant avec la verticale. Représenter la surface ainsi engendrée (**).*

(*) Pour construire l'épure qui répond à ces diverses questions, on pourra supposer les faces du cube donné parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection.

(**) Cette surface, dont le modèle a été construit par M. Bardin, admet des sections conchoïdales et des sections hyperboliques : pour cette raison, j'ai cru pouvoir la désigner sous le nom d'*hyperboloïde conchoïdal*.

- XXIII. *On donne, comme seconde directrice de la circonférence qui engendre une surface cyclotomique (p. 112), une droite perpendiculaire à la première directrice, et l'on suppose que ces deux droites sont horizontales. Représenter : 1° les lignes de niveau et les lignes de plus grande pente de la surface; 2° les sections faites par des sphères concentriques avec la circonférence génératrice (*).*
- XXIV. *Représenter la surface engendrée par une circonférence tournant autour d'une droite non située dans son plan, cas où la droite est parallèle au plan.*
- XXV. *Une circonférence, dont le rayon est a , se meut de manière que son plan reste horizontal et que son centre décrive une circonférence fixe, ayant pour rayon b , située dans un plan vertical. Représenter la surface ainsi engendrée. Faire voir qu'elle admet une seconde série de sections circulaires. Examiner le cas où $a = b$.*

(*) Les projections horizontales de ces diverses courbes sont des coniques ayant les mêmes foyers.

QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES CONCOURS D'ADMISSION

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (*).

1. Trois droites indéfinies sont données, savoir : une droite α située dans le plan horizontal et perpendiculaire à la ligne de terre LL ; une deuxième droite β située dans le plan vertical et perpendiculaire aussi à LL ; enfin, une troisième droite γ parallèle à LL' , mais qui n'est ni dans le plan horizontal, ni dans le plan vertical.

Imaginons qu'une surface soit engendrée par une droite mobile μ , qui glisse sur ces trois droites fixes.

On coupe cette surface par un plan vertical V , et l'on veut connaître l'intersection en vraie grandeur, dans un rabattement qui devra être fait sur le plan vertical (1852).

2. Un cylindre est donné : il est droit, sa base est un cercle, et il est tangent aux deux plans de projection. Sur le plan horizontal un cercle est donné, lequel est tangent à la ligne de terre et égal à la base du cylindre.

Prenez un point quelconque dans le plan vertical, et supposez que ce point soit le sommet d'un cône engendré par une droite qui s'appuie sur le cercle : on demande l'intersection de ce cône avec le cylindre, et la tangente en un point quelconque de cette intersection (*id.*).

(*) Ces énoncés sont extraits, textuellement, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

3. *Données.* Un cylindre droit, vertical, d'un rayon de 2 centimètres, et dont l'axe est distant de 10 centimètres du plan vertical ; deux droites D et d , inclinées sur chacun des plans de projection, et situées d'un même côté par rapport au cylindre.

Il s'agit : 1° de construire le lieu de toutes les droites assujetties à toucher le cylindre et à s'appuyer à la fois sur les deux droites D et d ; 2° de tracer la courbe, lieu des points où ces droites rencontrent le plan vertical (*id.*).

4. *Données.* Deux cônes droits à base circulaire dont les axes se rencontrent ; l'axe de l'un est perpendiculaire au plan horizontal, et l'axe de l'autre est perpendiculaire au plan vertical.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection des deux surfaces ; 2° de tracer le développement du premier cône ; 3° de construire la tangente en un point de la transformée (*id.*).

5. *Données.* Sur le plan horizontal, une ellipse et un cercle touchant l'ellipse intérieurement et la coupant en deux points. Le grand axe de l'ellipse = 9 centimètres, le petit axe = 6 centimètres : ces axes ne sont ni perpendiculaires ni parallèles à la ligne de terre ;

Un point dont la projection horizontale s tombe dans le cercle et dans l'ellipse, et dont la projection verticale s' est élevée de 10 centimètres environ au-dessus du plan horizontal ;

Deux cônes indéfiniment prolongés, ayant le point (s, s') pour sommet commun, et pour bases respectives l'ellipse et le cercle ;

Une droite indéfinie passant par le point (s, s') et ren-

contrant le plan horizontal en un point (z, z') plus éloigné de la ligne de terre que ne l'est le point s .

Il s'agit de déplacer le cône circulaire parallèlement à lui-même, en faisant monter ou descendre son sommet sur la droite $(sz, s'z')$, d'arrêter ce cône dans une certaine position, et de construire le résultat (*sic*) de son intersection avec le cône elliptique. On arrêtera le sommet du cône auxiliaire au-dessus du point (s, s') , au tiers de la longueur de la droite $(sz, s'z')$ (1853).

6. *Données.* Un point (o, o') , situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre commun d'une sphère S de 4 centimètres de rayon, et d'un cercle horizontal c de 2 centimètres de rayon ;

Dans le plan horizontal, le point o est le centre d'un cercle C de 8 centimètres de rayon ;

Une droite (D, D') part d'un point de la circonférence du cercle C et touche le cercle c de manière à avoir sa projection horizontale tangente à celle du cercle (on ne prendra pas cette droite parallèle au plan vertical).

Il s'agit: 1° de percer dans la sphère S le trou qu'y ferait un cylindre de révolution ayant pour axe la droite (D, D') et 2 centimètres de rayon; 2° de faire une *coupe* de la sphère et de son trou cylindrique par un plan vertical passant par l'axe du cylindre (*id.*).

7. *Données.* Un point (o, o') , situé à 10 centimètres de chacun des plans de projection, est le centre d'une sphère S de 4 centimètres de rayon et d'un cercle horizontal c , dont le rayon a 1 centimètre $\frac{1}{2}$;

Dans le plan horizontal, le point O est le centre d'un

cercle C de 8 centimètres de rayon, sur la circonférence duquel trois points m, n, p forment un triangle équilatéral : par ces points passent trois génératrices M, N, P de l'hyperboloïde à une nappe qui aurait le cercle C pour trace et c pour cercle de gorge ;

L'axe de tout le système est le diamètre vertical de la sphère S .

Il s'agit de construire les courbes de pénétration de la sphère par trois cylindres de révolution de même rayon que le cercle de gorge de l'hyperbole (*sic*), et ayant pour axe une des trois génératrices M, N, P .

Nota. Chaque cylindre sera limité, en bas par le plan horizontal de projection, en haut par un plan perpendiculaire à son axe et distant de 6 centimètres du centre (o, o') de la sphère S . Le triangle mnp n'aura pas de côté parallèle ou perpendiculaire au plan vertical (*id.*).

8. *Données.* Un triangle équilatéral abc , de 5 centimètres de côté, situé dans un plan horizontal élevé de 5 centimètres au-dessus de la ligne de terre ;

Trois sphères ayant leurs centres aux points a, b, c , et un rayon commun de 5 centimètres.

Il s'agit : 1° de construire l'intersection des trois sphères ; 2° de détacher par un mouvement de transport parallèle le solide commun à ces trois sphères, et d'en faire séparément les projections (*ib.*).

9. *Données.* Un hyperboloïde à une nappe dont l'axe est vertical ; sa trace a 5 centimètres de rayon ; le cercle de gorge, de 4 centimètres de rayon, est élevé de 5 centimètres au-dessus du plan horizontal ; l'hyperboloïde est limité dans sa partie supérieure par un plan horizontal

élevé de 9 centimètres au-dessus de la ligne de terre.

Une droite (D, D') qui fait avec le plan horizontal un angle plus grand que celui de la génératrice rectiligne de l'hyperboloïde avec le même plan.

Il s'agit; 1° de construire le contour de la projection verticale de l'hyperboloïde; 2° de mener une suite de plans parallèles à la droite (D, D') et tangents à la surface, et de tracer le lieu des points de contact de tous ces plans (*id.*).

10. Un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical a ses génératrices inclinées de 45° sur le plan horizontal, et un cercle de gorge de 2 centimètres de rayon; il est supposé limité à deux plans horizontaux distants chacun de 5 centimètres du cercle de gorge.

On propose de trouver son intersection avec un cylindre oblique ayant pour directrice la circonférence qui limite l'hyperboloïde à sa partie supérieure, dont les génératrices seraient inclinées sur le plan horizontal comme celles de l'hyperboloïde, et dont les projections horizontales feraient avec la ligne de terre un angle de 45° degrés.

On construira la tangente en un point quelconque de cette intersection (1854).

11. Une calotte de sphère creuse repose par sa base sur le plan horizontal; le rayon extérieur de cette base est de 10 centimètres, le rayon intérieur de 3 centimètres et demi. La hauteur de la calotte, mesurée jusqu'à la surface extérieure, est de 3 centimètres.

Par le centre de la base on mène une droite dont la projection horizontale fait un angle de 45° avec la

ligne de terre et la projection verticale un angle de 60° , puis on prend cette droite pour l'axe d'un cône dont le sommet est à 8 centimètres du centre de la base de la calotte et dont la section, faite perpendiculairement à l'axe et à trois centimètres du sommet, est un cercle de 1 centimètre de rayon.

Cela posé, on veut connaître l'intersection de ce cône droit avec les deux surfaces sphériques qui limitent la calotte creuse, ainsi que la tangente au point quelconque de l'une de ces courbes. On fera une coupe par le plan des deux axes, et cette coupe devra être dégagée de toute ligne de construction, afin de représenter plus nettement l'ouverture faite par le cône dans la calotte (*id.*).

12. Données : 1° Un tétraèdre régulier de $0^m,12$ de côté reposant sur une de ses faces sur le plan horizontal de projection. Aucun des côtés de la base n'est parallèle ni perpendiculaire à la ligne de terre ; le tétraèdre est placé de manière que les projections de ses trois arêtes soient visibles sur le plan vertical de projection.

2° Une (*sic*) ellipsoïde de révolution : L'axe de révolution est vertical et porté à une distance de $0^m,025$ du sommet du tétraèdre dans un plan faisant un angle de 45 degrés avec celui de projection. Le centre de l'ellipsoïde est à $0^m,6$ au-dessus du plan horizontal. Les deux demi-axes de la méridienne ont respectivement $0^m,05$ et $0^m,03$ de longueur ; le grand axe est vertical.

Il faut : 1° construire la projection du corps formé par l'ensemble de ces deux solides sur chacun des plans de projection horizontale et verticale placé comme il est indiqué ci-dessus ; 2° construire la tangente au point où

se rencontrent deux des coupes (*) d'intersection déterminées dans l'ellipsoïde par les faces du tétraèdre, puis les tangentes horizontales de ces mêmes courbes (1835).

13. Un cylindre horizontal plein terminé d'un côté au plan vertical de projection, et de l'autre à un plan vertical parallèle, rencontre un cône dont la base est posée sur le plan horizontal. On demande :

1° De construire les projections de l'intersection des surfaces ;

2° De faire le développement de la surface du cylindre avec les transformées des bases et de l'intersection ;

3° De construire les projections d'une tangente de l'intersection, et la tangente au point correspondant de la transformée de cette courbe.

On suppose que le cône est enlevé, et en conséquence sa trace et toutes les lignes qui le concernent seront pointillées.

Les bases du cylindre seront des cercles ; celle du cône un (*sic*) ellipse.

Le cylindre ne sera pas perpendiculaire au plan vertical. (1860).

14. On donne un ellipsoïde de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical de projection. On coupe cette surface par un plan, et l'on prend la courbe résultant de cette intersection pour directrice d'un cône ayant pour sommet le point le plus élevé de l'ellipsoïde au-dessus du plan horizontal. Trouver la trace de ce cône

(*) Probablement : *des courbes*.

sur le plan horizontal passant par l'axe de révolution de l'ellipsoïde.

Données. Le centre de l'ellipsoïde est à 90 millimètres des deux plans de projection. Le demi grand axe de l'ellipse méridienne est parallèle au plan vertical et a 70 millimètres de longueur; le demi petit axe a 50 millimètres. (1863).

15. Le problème consiste à représenter la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située hors du plan de cette courbe.

L'axe de révolution est la droite verticale (O,O'Z). L'ellipse génératrice est donnée dans sa position initiale par les projections (ABCD, M'N') et par les traces LG, GH de son plan : ce plan est perpendiculaire au plan vertical. Le grand axe de l'ellipse ABCD passe par la trace horizontale O de l'axe de révolution.

On tracera le contour apparent de la surface sur chacun des plans de projection. Les deux courbes méridiennes situées dans le plan vertical OL seront entièrement construites, et l'on distinguera par la ponctuation celles de leurs parties qui sont vues de celles qui sont cachées.

$$\begin{aligned} \text{Ellipse ABCD} & \left\{ \begin{array}{l} \text{grand axe AC} = 90^{\text{mm}} \\ \text{petit axe BD} = 44, \end{array} \right. \\ \text{OO}' = 72^{\text{mm}}, & \quad \text{OL} = 68^{\text{mm}}, \quad \text{OI} (*) = 15^{\text{mm}}, \\ \widehat{\text{AOL}} = 45^\circ, & \quad \widehat{\text{YGH}} = 50^\circ. \end{aligned}$$

La droite OL est parallèle à la ligne de terre. (1864).

16. On demande de représenter par ses contours ap-

(*) Le point I est le centre de l'ellipse ABCD.

parents un solide terminé par un *hyperboloïde de révolution* et par deux plans : l'*hyperboloïde* a pour axe de révolution l'horizontale (AB, A'B') et pour génératrice la droite (CD, C'D') parallèle à la ligne de terre XY ; les *plans* sont perpendiculaires à l'axe (AB, A'B') et également distants du centre de l'hyperboloïde. On supposera tracées sur ce solide douze génératrices d'un même système, la génératrice donnée (CD, C'D') est l'une de ces douze droites. Ces génératrices, également espacées, seront représentées en tenant compte (*sic*) des parties vues et des parties cachées.

Les arcs d'hyperbole qui appartiennent aux contours apparents du solide seront simplement tracés tangentiellement aux proportions de ces génératrices.

On achèvera de déterminer le contour apparent du solide sur le plan vertical de projection en construisant quelques génératrices du système qui ne renferme pas la génératrice donnée ; ces droites seront tracées comme lignes de construction.

A'B' et CD sont à 100 millimètres de la ligne de terre XY.

C'D' est à 25 millimètres de A'B'.

AB et CD comprennent un angle de 40 degrés.

Les plans qui terminent le solide sont l'un et l'autre à 70 millimètres du centre de l'hyperboloïde. XY est parallèle aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés. (1865).

17. *On* donne une sphère pleine; *on* la coupe par un cône. *On* enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cône. *On* demande de représenter par ses pro-

jections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille conique... (*) (1866).

18. Deux cônes sont circonscrits à une sphère ; ils se coupent par conséquent suivant deux courbes planes. L'un de ces cônes est solide. On demande de représenter par ses projections la portion de ce cône solide qui est renfermée dans l'autre.

Le reste de la sphère est projeté en (O', O) ; les points O' et O sont à 120 millimètres de la ligne de terre. Le rayon de la sphère a 60 millimètres de longueur.

Les cônes touchent la sphère suivant de petits cercles projetés verticalement en $A'B', C'D'...$ (1867).

(*) D'après les données, le cône et la sphère sont deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, et le plan des deux axes est parallèle au plan vertical de projection.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SURFACES.

	Pages
Génération du plan, de la sphère, du cylindre et du cône.	1
Définition géométrique des surfaces.	2
Surfaces cylindriques. — Surfaces coniques. — Surfaces de révolution.	2
Surfaces du second ordre.	3
Surfaces réglées. — Elles se partagent en surfaces développables et en surfaces gauches.	5
Définition des surfaces développables et des surfaces gauches.	7
Une surface admet toujours plusieurs modes de génération. — Exemples.	9
Représentation graphique des surfaces. — Contours apparents.	10

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS SUR LES PLANS TANGENTS.

Définition du plan tangent.	11
Propriété générale du plan tangent.	12
Cas d'exception.	13
Le plan tangent peut être situé de trois manières différentes à l'égard de la surface.	14
Conditions nécessaires pour déterminer le plan tangent. — Cas des surfaces réglées.	15

CHAPITRE III.

PLANS TANGENTS AUX CYLINDRES, AUX CÔNES, AUX SURFACES GAUCHES, AUX SURFACES DÉVELOPPABLES, ET AUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

	Pages
THÉORÈME. Le plan tangent en un point d'une surface cylindrique est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.	17
THÉORÈME. La projection de la tangente à une courbe est tangente à la projection de cette courbe.	17
THÉORÈME. Le plan tangent en un point d'une surface conique est tangent tout le long de la génératrice qui passe en ce point.	18
THÉORÈME. Tout plan, mené par une génératrice rectiligne d'une surface gauche, touche celle-ci au point où la génératrice rencontre la courbe d'intersection du plan et de la surface.	20
THÉORÈME. Le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, coupe la surface suivant la génératrice passant en ce point, et suivant une courbe tangente, en ce même point, à l'arête de rebroussement.	21
THÉORÈME. Le plan tangent à une surface développable, en un point de l'arête de rebroussement, est tangent tout le long de la génératrice rectiligne qui passe en ce point.	22
Plan osculateur d'une courbe.	22
THÉORÈME. Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien passant par le point de contact.	22
THÉORÈME. 1° La normale en un point d'une surface de révolution est contenue dans le plan méridien passant par ce point; 2° les normales à la surface, menées par différents points d'un même parallèle, rencontrent l'axe en un même point.	23
Détermination du contour apparent d'une surface. . . .	23

CHAPITRE IV.

PROBLÈMES RELATIFS AUX PLANS TANGENTS.

	Pages
PROBLÈME I. Mener un plan tangent à un cylindre donné, en un point donné.	25
PROBLÈME II. Connaissant la directrice d'un cylindre et la direction de ses génératrices, construire le plan tangent à la surface, en un point donné.	27
PROBLÈME III. Mener un plan tangent à un cylindre, par un point extérieur à la surface.	28
PROBLÈME IV. Mener un plan tangent à un cylindre, parallèle à une droite donnée.	28
PROBLÈME V. Mener un plan tangent à un cône donné, en un point donné.	29
PROBLÈME VI. Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien est donné, connaissant le point de contact.	30
PROBLÈME VII. Mener un plan tangent à une surface de révolution dont le méridien n'est pas donné, connaissant le point de contact.	32
Cas d'une génératrice rectiligne.	33
PROBLÈME VIII. Par une droite donnée, faire passer un plan tangent à une sphère donnée.	34
PROBLÈME IX. Mener à une surface de révolution, dont le méridien est connu, une normale parallèle à une droite donnée.	36
EXERCICES.	37

CHAPITRE V.

SECTIONS PLANES DES CYLINDRES ET DES CÔNES.

PROBLÈME X. Trouver : 1° l'intersection d'un cylindre vertical et d'un plan perpendiculaire au plan vertical ; 2° la tangente en un point de l'intersection ; 3° etc. . . .	38
---	----

THÉORÈME. Toute ligne, tracée sur une surface développable, est de même longueur que sa transformée. . .	43
THÉORÈME. Si l'on considère, sur une surface développable et sur son développement, une ligne quelconque et sa transformée, les tangentes à ces deux lignes, en deux points correspondants, sont également inclinées sur les génératrices et sur les transformées de celles-ci.	43
Point d'inflexion de la transformée d'une section cylindrique.	45
DE L'HÉLICE.	45
THÉORÈME. Les hélices, tracées sur un cylindre quelconque, sont des courbes à double courbure.	45
THÉORÈME. Dans l'hélice, la sous-tangente est égale à l'abscisse curviligne.	46
THÉORÈME. Le lieu du point où la tangente à l'hélice perce le plan d'une section droite du cylindre, est une développante de la section droite.	47
THÉORÈME. Le plus court chemin entre deux points, sur la surface d'un cylindre, est le plus petit des arcs d'hélices terminés à ces deux points.	47
PROBLÈME XI. Trouver : 1° les projections de la section droite d'un cylindre quelconque ; 2° le rabattement de cette courbe ; 3° le développement du cylindre, etc. .	48
PROBLÈME XII. Trouver : 1° l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan perpendiculaire au plan vertical ; 2° la tangente en un point de l'intersection, etc. .	55
Équation des transformées des sections coniques. . . .	59
PROBLÈME XIII. Trouver : 1° les projections de la section faite dans un cône, par un plan quelconque ; 2° le développement du cône ; 3° la transformée de la section, etc.	64

CHAPITRE VI.

SURFACES RÉGLÉES.

Des Surfaces développables.

	Pages
Recherche de la loi suivant laquelle doit se mouvoir une droite, pour engendrer une surface développable :	
1° Une surface développable est le lieu des positions d'une droite qui roule, sans glissement, sur une courbe à double courbure donnée ;	
2° Dans ce mouvement, chaque point de la génératrice décrit une courbe à laquelle la génératrice est normale ; en sorte que cette courbe est une trajectoire orthogonale de toutes les génératrices ;	
3° Cette trajectoire orthogonale des génératrices présente un rebroussement au point où elle coupe la directrice ;	
4° La directrice donnée, ou l'arête de rebroussement de la surface développable, partage cette surface en deux nappes, tangentes l'une à l'autre le long de cette arête.	70
THÉORÈME. L'arête de rebroussement d'une surface développable et la transformée de cette ligne ont, en deux points correspondants, leurs cercles osculateurs égaux.	71
THÉORÈME. Le plan osculateur en un point de l'arête de rebroussement se confond avec le plan tangent, en ce point, à la surface développable.	71

Des Surfaces gauches.

THÉORÈME. Toute surface réglée, qui admet une directrice rectiligne, est gauche.	72
THÉORÈME. Toute surface réglée, à plan directeur, est gauche.	73
HÉLIÇOÏDE DÉVELOPPABLE, Génération et propriétés.	74

	Pages
HÉLICOÏDE GAUCHE. Diverses espèces d'hélicoïdes gauches. Leurs modes de génération.	76
THÉORÈME. Si une droite se meut en coupant une courbe donnée, de manière que la projection de la génératrice, faite sur un certain plan, soit toujours tangente à la projection de la directrice, la surface engendrée est gauche.	77
HYPERBOLÔÏDE DE RÉVOLUTION. Génération et propriétés. Représentation graphique de l'hyperboloïde.	78 82
HYPERBOLÔÏDE A UNE NAPPE. Génération et propriétés. . .	84
PROBLÈME. Reconnaître si un hyperboloïde à une nappe est de révolution.	86
PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE. Génération et propriétés. .	87
EXERCICES.	89

CHAPITRE VII.

SECTIONS PLANES DES SURFACES RÉGLÉES.

PROBLÈME XIV. 1° Représenter graphiquement l'hélicoïde développable; 2° construire un plan tangent à cette surface; 3° déterminer la section faite par le plan, etc.	90
Construction du <i>modèle en relief</i>	94
Équation de l'hélicoïde.	97
PROBLÈME XV. 1° Représenter graphiquement l'hélicoïde de la vis à filet triangulaire; 2° construire le plan tangent à cette surface, en un point, etc.	101
EXERCICES.	104

CHAPITRE VIII.

SECTIONS PLANES DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

PROBLÈME XVI. Construire la section faite par un plan, dans un hyperboloïde de révolution, à une nappe. . .	105
---	-----

	Pages
PROBLÈME XVI. Construire la courbe d'intersection d'un plan et d'un tore.	109
Théorème de M. Yvon Villarceau.	111
EXERCICES.	112

CHAPITRE IX.

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES.

Indication de la méthode à suivre pour résoudre la question, dans le cas général.	114
THÉORÈME. La tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de deux surfaces est, en général, l'intersection des plans respectivement tangents aux deux surfaces, en ce point.	116
THÉORÈME. La tangente en un point quelconque de la courbe d'intersection de deux surfaces, est perpendiculaire au plan des normales menées, en ce point, aux deux surfaces.	116
PROBLÈME XVIII. Intersection de deux cylindres.	117
PROBLÈME XIX. Intersection de deux cônes.	122
Recherche des branches infinies.	122
PROBLÈME XX. Intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes se rencontrent.	125
Cas où les sections méridiennes sont deux coniques ayant un foyer commun.	127
EXERCICES.	129
Questions proposées dans les concours d'admission à l'École Polytechnique.	134

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

EUGÈNE CATALAN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,
ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS
ET DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE,
CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LILLE
ET DE LA SOCIÉTÉ D'AGRICULTURE DE LA MARNE.



SECONDE PARTIE
DES SURFACES COURBES

—
TEXTE
—

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.



PARIS
DUNOD, ÉDITEUR

SUCCESSEUR DE VICTOR DALMONT,
Précédemment Carilian-Gœury et V^o Dalmont,
LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 49.

—
1868

BRIOT (Ch.), professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, maître de conférences à l'École Normale supérieure. **LEÇONS D'ALGÈBRE conformes aux programmes officiels** arrêtés pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 2 vol. in-8° avec figures. 7 fr. 50

On vend séparément :

LA 1^{re} PARTIE, à l'usage des élèves des classes de troisième et de seconde, des candidats au baccalauréat ès sciences, aux Ecoles de la marine et de Saint-Cyr, précédée d'une *Introduction* à l'usage des élèves de la classe de troisième, 6^e édit. 1 vol. in-8°, avec fig. 3 fr. 50 c.

LA 2^e PARTIE (Classe de spéciales et candidature aux écoles Polytechnique et Normale supérieure) 6^e édit. In-8°, av. fig. 1867. 4 fr. 50 c.

— **COURS DE COSMOGRAPHIE, ou ÉLÉMENTS D'ASTRONOMIE**, comprenant les matières du nouveau programme arrêté pour l'enseignement des lycées et l'admission aux écoles spéciales. 1 beau vol. in-8°, avec 94 fig. dans le texte, et 3 pl. dont deux gravées à l'aqua-tinta. 4^e édit., revue et augmentée. Paris, 1867. 6 fr.

— **COMPLÉMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** de MM. BRIOT et BOUQUET, leçons faites par M. BRIOT aux élèves de l'École normale et rédigées par eux. Prix. 5 fr.

— **LEÇONS DE MÉCANIQUE conformes aux programmes officiels** à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales et des candidats à l'École polytechnique et à l'École normale. In-8°, avec fig. Prix. 5 fr.

BOUTAN, prof. au lycée St-Louis, et d'ALMEIDA, prof. au lyc. Napoléon. **COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE**, suivi de problèmes, 3^e édit., entièrement revue et considérablement augmentée. 2 beaux vol. gr. in-8°, avec 800 fig. et un spectre solaire intercalés dans le texte. Prix broché. 12 fr. Relié. 15 fr.

BRÄHY, docteur ès sciences, profess. à l'Athénée royal de Bruges. **EXERCICES MÉTHODIQUES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.** In-8. 5 fr.

CATALAN, doct. ès sciences, agrégé de l'Université, etc. **THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.** *Nouv. édit.*, revue et augmentée. 1 beau vol. in-8. avec 15 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

— **Traité élémentaire de GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, renfermant toutes les matières exigées pour l'admission à l'École Polytechnique, *nouv. édit.*, 2 parties. In-8°, avec atlas de 28 pl. Paris. 7 fr. 50 c.

On vend séparément :

1^{re} PARTIE. *La ligne droite et le plan, nouv. édition*, in-8° avec 11 pl. 4 fr.

2^e PARTIE. *Problèmes sur les surfaces*, in-8°, et atlas de 17 pl. 4 fr.

DEBRAY, examinateur d'admission à l'École polytechnique. **COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE**, suivi de problèmes, 2^e édit., revue et augmentée. 1 beau vol. gr. in-8°, avec nombreuses figures dans le texte. Prix broché. 7 fr. Relié. 9 fr.

EUDES (A.), prof. au lycée Napoléon. **ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE**, comprenant la géométrie pure et appliquée, ouvrage conforme au nouveau programme et aux instructions ministérielles de 1854. 2 parties in-8°, avec 442 fig. dans le texte et 3 pl. gravées. Paris. 6 fr. 25

On vend séparément :

LA GÉOMÉTRIE PURE. 1 vol. in-8°, avec 344 fig. 4 fr.

LA GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE 1. vol. in-8°, avec 98 fig. et 3 pl. gravées. 2 fr. 25

LENGLIER (Ch.), ancien élève de l'École polytechnique, professeur au lycée de Versailles. **COURS D'ARITHÉTIQUE**, suivi de notions élémentaires d'algèbre. Ouvrage rédigé d'après l'instruction générale sur l'exécution du plan d'étude des lycées impériaux, et contenant les énoncés de 560 problèmes dont les données ont été prises pour la plupart dans des publications officielles. 1 vol in-12. 2 fr. 50

NAVIER, de l'Institut, profes. à l'École Polytechnique, etc. **Résumé des leçons d'ANALYSE** données à l'École Polytechnique. 2^e édit. revue et annotée par M. LIOUVILLE, de l'Institut, profes. à l'École Polytechnique, etc. 2 vol. in-8°, pl. Paris, 10 fr.

OLIVIER (Th.), doct. ès sciences, profes.-direct. du Conservatoire des arts et métiers, profes.-fondat. de l'École centrale des arts et manufactures, etc. **TRAITÉ COMPLET DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, ouvrage divisé en plusieurs parties, qui se vendent chacune séparément.

1^o **COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**; 2^o édit. 2 parties in-4°, accompagnées d'un atlas de 97 pl. 22 fr.

On vend séparément :

LA 2^e PARTIE, **COURBES ET SURFACES COURBES.** Prix. 12 fr. 50

2^o **DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.** 2 vol. in-4°, dont un de pl. 18 fr.

3^o **COMPLÈMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.** 2 vol. in-4°, dont un de pl. 18 fr.

4^o **MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE**, théorique et appliquée. 2 vol. in-4°, dont un de planches. 18 fr.

5^o **APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages. 2 vol. in-4°, dont un de 58 pl. doubles, dont plusieurs coloriées ou à l'aqua-tinta. 25 fr.

ROGUET (Ch.), profes. de mathém. **LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE** à deux et à trois dimensions, avec une introduction renfermant les premières notions sur les courbes usuelles, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École normale et au baccalauréat ès sciences; ouvrage entièrement conforme aux programmes officiels de l'enseignement scientifique des lycées. 2^e édition. In-8°, fig. dans le texte. 7 fr. 50

— **LEÇONS DE TRIGONOMETRIE** rectiligne et sphérique, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales du gouvernement. 3^e édit., entièrement refondue, et rédigée conformément au programme officiel de l'enseignement scientifique des lycées. In-8°, avec fig. dans le texte. Paris. 2 fr. 25

SIMON, doct. ès sciences, profes. au lycée Louis-le-Grand. **LEÇONS DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.** Gr. in-8°, avec figures. Prix. 3 fr. 50

STERN (le docteur M. A.), profes. à l'Université de Göttingue. **RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.** Ouvrage couronné par la Société des sciences de Danemark; traduit et annoté par E. LÉVY, agrégé des sciences. In-8° avec fig. dans le texte. Paris. 1 fr. 75