ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

Liége. — Imprimerie de J.-G. CARMANNE.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE

PAR

EUGÈNE CATALAN

Ancien élève de l'Ecole polytechnique, Docteur ès-sciences, Professeur d'Analyse à l'Université de Liége, Associé de l'Académie de Belgique, Membre de la Société Philomathique de Paris et de la Société des Sciences de Liége, Correspondant de l'Académie des Sciences de Toulouse, de la Société des Sciences de Lille et de la Société d'Agriculture de la Marne.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

LIÉGE
DECQ,
LIBRAIRE,
Rue de la Régence.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS,
LIBRAIRE,
Quai des Augustins, 55.

1866

A Monsieur

VANDENPEEREBOOM,

MINISTRE DE L'INTÉRIEUR ET DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

Témoignage de reconnaissance.

E. CATALAN.

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION (1843).

(EXTRAITS.)

. . . .

D'après l'exemple donné par M. Lionnet, je n'ai pas défini la ligne droite. Cette proposition : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre*, ne définit rien ; en outre, elle suppose la notion de *longueur*, notion qui suppose elle-même une connaissance approfondie de presque toute la Géométrie. Il est donc bien plus simple de regarder comme une *idée primitive*, celle de la ligne droite. Néanmoins, comme il convient de n'emprunter à l'expérience qu'un très-petit nombre de principes, je propose en note [1] une définition qui me paraît

---

[1] *Définition.* — *Le plan est une surface indéfinie, qui est partout identique avec elle-même.*

Définition. — *La ligne droite est l'intersection de deux plans.*

exacte, qui se rapproche de celle d'Euclide [1], et de laquelle on déduit immédiatement plusieurs théorèmes préliminaires.

J'ai adopté aussi, d'après le professeur que je viens de citer, cette définition : la *Géométrie est la science des figures*. On la trouvera peut-être incomplète ; mais ce défaut, s'il existe, est racheté par la clarté ; et d'ailleurs, la définition exacte d'une science est à peu près inintelligible pour un commençant.

Depuis l'origine de la Géométrie, la *théorie des parallèles* a fait le désespoir des personnes qui prétendent tout démontrer, et qui demandent *le pourquoi du pourquoi*. La manière dont chaque auteur établit cette théorie est intimement liée à l'idée qu'il attache au mot *angle*. Après avoir hésité longtemps, je me suis décidé à définir l'angle, *la portion de plan comprise entre deux droites indéfinies, issues d'un même point*. Je crois connaître les objections, très-fondées d'ailleurs, que l'on oppose à cette manière d'envisager la question ; mais je crois aussi que l'embarras est bien plus grand si l'on adopte une autre définition. Quand on dit qu'un angle est l'*écartement* ou l'*inclinaison* de deux droites, on remplace seulement un mot par un autre. Legendre, qui a lutté longtemps contre la difficulté inhérente à la théorie des parallèles, n'est point parvenu à la vaincre ; et, pour avoir voulu rejeter toute notion d'infini, il est tombé, après de longs efforts, dans une contradiction singulière, qui ressort clairement des deux définitions suivantes :

---

(1) « La ligne droite est celle qui est également placée aux points qui sont en elle, » (EUCLIDE, traduction de *Peyrard*, tome 1er, page 1.)

« *Lorsque deux lignes droites se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre, quant à leur position, s'appelle angle.* (1) »

« *Angle solide est l'espace angulaire compris entre plusieurs plans qui se réunissent en un même point* (2). »

. . . .

La définition ordinaire de la ligne droite entraîne cette conséquence : *Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.* D'après la marche que je m'étais imposée, cette proposition devenait, ou un *postulatum*, ou un théorème : j'aurais pu la considérer sous ce dernier point de vue ; mais alors il m'aurait fallu bouleverser l'ordre des matières composant le Livre premier, ordre qui me paraît simple et naturel. J'ai donc mieux aimé présenter cette vérité comme résultant de l'expérience.

Après ces considérations essentielles, il me resterait beaucoup de choses à dire sur le moyen que j'emploie pour étendre aux lignes courbes et aux surfaces courbes les théorèmes démontrés pour les figures rectilignes. Je me bornerai à faire observer, en premier lieu, que le mode de démonstration connu sous le nom de *réduction à l'absurde*, qui vise à la rigueur, n'atteint pas son but, car il admet toujours, implicitement, des vérités tout aussi difficiles à prouver que celle qui fait l'objet du théorème. Par exemple, si l'on veut établir, par la ré-

---

(1) LÉGENDRE, *Éléments de Géométrie*, 12e édition, page 2.

(2) LEGENDRE, *Éléments de Géométrie*, page 137.

duction à l'absurde, que les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, on suppose qu'il y a des circonférences de toutes les grandeurs : or, ce point étant admis, la longue et pénible démonstration dont il s'agit devient inutile.

. . . .

Guidé par tous ces motifs, j'ai adopté la *méthode des limites ;* mais, comme ce mode de démonstration n'exclut pas la rigueur, et qu'il est difficile de raisonner juste si l'on n'a pas défini les expressions dont on fait usage, j'ai expliqué, aussi clairement que j'ai pu, les dénominations de *longueur*, *aire* et *volume*. A l'aide de ces préliminaires, qui ont besoin d'être bien étudiés, les propositions relatives au cercle, à la sphère, etc., acquièrent un grand degré de simplicité.

. . . .

AVERTISSEMENT.

La deuxième édition de nos *Éléments de Géométrie*, que nous publions aujourd'hui, n'aurait peut-être jamais paru, si la libre et hospitalière Belgique n'eût offert à l'auteur la position à laquelle il croyait avoir droit en France. Nous pourrions insister sur ce pénible sujet ; mais nous croyons témoigner de notre respect envers le Public, en ne l'initiant pas à de petits mystères dans lesquels les considérations scientifiques ont toujours occupé le second rang. Signalons seulement, parmi les causes qui ont empêché, pendant vingt ans, la réimpression d'un ouvrage très-favorablement accueilli par les professeurs et les élèves, l'influence malfaisante des hommes qui, sous prétexte de *réformer l'Enseignement*, avaient pris à tâche, semble-t-il, d'abêtir la jeunesse. Heureusement, ils n'y ont pas réussi, malgré les forces dont ils disposaient : leurs complices mêmes ont dû réclamer la suppression de ces *Programmes*, à jamais célèbres, où le *Théorème de Sturm* était remplacé par la *Règle à calcul !*

Après avoir donné ces explications essentielles, indiquons en quoi la nouvelle édition diffère de l'ancienne.

Depuis 1843, la controverse relative à la *définition de l'angle* en est restée au même point. Quelques auteurs, esquivant la difficulté, disent simplement : « *Quand deux droites se rencontrent, elles forment un angle.* » Tout en admirant la prudence dont ils font preuve, ne pourrait-on leur demander : « *L'angle est-il dans le plan des droites?* » — Si la réponse n'est pas affirmative (et il semble difficile qu'elle le soit), comment sera-t-on assuré que deux angles *coïncident dans toutes leurs parties*, lorsqu'ils sont *formés* par les mêmes droites?

Ce semblant de définition étant rejeté, il a fallu, sous peine d'expliquer, comme Legendre, l'*angle* par l'*écartement*; il a fallu, disons-nous, continuer à nous servir de la définition dont Lacroix et M. Vincent se sont contentés, à défaut d'une autre qui fût plus satisfaisante. Néanmoins, certaines démonstrations, dans lesquelles *l'infini apparaissait trop*, ont été changées.

Nous reproduisons, avec de nouveaux développements, nos idées sur les *rapports* des grandeurs incommensurables, et sur les *nombres* appelés *longueurs*, *aires*, *volumes*. Ces idées, que nous avons émises il y a bientôt trente ans, paraissaient alors fort étranges, presque *révolutionnaires* : un critique, très-honorable et très-bienveillant, les déclarait *entachées de puritanisme*. Aujourd'hui, elles sont généralement admises ; et on les retrouve (sans indication d'origine, bien entendu) dans quelques Traités publiés récemment.

La détermination approchée du *rapport de la circonférence au diamètre*, un peu écourtée dans la première édition, a été reprise en entier, avec tous les détails nécessaires.

Au moyen d'un Lemme presque évident, la théorie de la *Perpendiculaire au plan* a été notablement simplifiée. Ce Lemme peut, croyons-nous, remplacer avec avantage la Proposition à laquelle certains auteurs attribuent la dénomination de *Théorème des trois perpendiculaires;* dénomination qui ne semble pas heureuse.

Dans la première édition, les *angles dièdres* étaient considérés comme un cas particulier des *angles polyèdres :* les uns et les autres venaient après les *Plans perpendiculaires*. Cette disposition, dont les avantages sont nombreux, a l'inconvénient de nécessiter une définition des plans perpendiculaires, moins naturelle que celle qui est calquée, pour ainsi dire, sur la définition des *droites perpendiculaires* (Livre I). Pour ce motif, sans doute, la première définition, très en faveur il y a une vingtaine d'années, est généralement abandonnée aujourd'hui. Afin de nous conformer à l'usage, nous avons donc, mais à regret, placé les *angles dièdres* avant les *plans perpendiculaires*.

D'après l'avis de plusieurs personnes compétentes, nous avons introduit, dans le Livre VI, le beau Théorème de Cauchy, sur *l'égalité des polyèdres convexes*, ainsi que diverses conséquences du Théorème d'Euler.

Les Appendices, que l'on pourra passer à une première lecture, de même que les paragraphes ou n[os] précédés d'un astérisque, renferment les principes de théories importantes, dues à MM. Poncelet, Chasles, Brianchon, Steiner, et à d'autres Géomètres : ces théories appartiennent à la *Géométrie moderne*. Le lecteur les retrouvera, plus développées, dans les

Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, ouvrage qui peut être considéré comme un complément de celui-ci.

Enfin, chaque Livre est terminé par les énoncés d'un grand nombre de Théorèmes à démontrer et de Problèmes à résoudre.

Liége, 1er juillet 1866.

ERRATA.

Page 5,	ligne 23.	Au lieu de : CDB, lisez : DCB.
» 32,	» dernière.	Au lieu de : *celui qui est équilatéral et équiangle à la fois*, lisez : *celui qui est, à la fois, équiangle et équilatéral.*
» 47,	» 17	Au lieu de : *supérieur, égal ou inférieur,* lisez : *inférieur, égal ou supérieur.*
» 109,	» 9	Au lieu de : *(fig.* 161*)*, lisez : *(fig.* 161 *bis).*
» 160,	» 4	— 203, lisez : 201.
» 178,	» 17	Lisez : *compris entre* $\frac{223}{71}$ *et* $\frac{22}{7}$.
» 213,	» 29	Au lieu de : *(fig.* 426*)*, lisez : *(fig.* 463*).*
» 213,	» 31	— 431 — 464.
» 217,	» (en remontant)	Au lieu de : 206, lisez : 209.
» 314,	ligne 20.	Au lieu de : *(fig.* 299*)*, lisez : *(fig.* 296*).*
» 334,	» 26	— 305 — 308.
» 339,	» 10	— 317 — 312.
» 343,	» 24	— 323 — 318.

N. B. Par suite d'une erreur, les nos d'ordre 539 à 544 ont été répétés.

ÉLÉMENTS

DE GÉOMÉTRIE.

INTRODUCTION.

Notions préliminaires.

1. Toute chose occupe, dans l'*Espace*, un lieu déterminé. Ce lieu, considéré sous le rapport de sa *forme*, et indépendamment de la matière qu'il renferme, est appelé *corps* (¹).

2. La *limite* d'un corps, c'est-à-dire ce qui le sépare de l'espace environnant, est une *surface*.

La surface se conçoit indépendamment du corps qu'elle termine.

3. Si deux corps se pénètrent, l'intersection de leurs surfaces est une *ligne*.

On appelle également ligne, la limite commune de deux portions d'une même surface.

La ligne se conçoit indépendamment de la surface sur laquelle elle est située.

4. L'intersection de deux lignes est un *point*.

On appelle également points, les extrémités d'une ligne.

Le point se conçoit indépendamment de la ligne à laquelle il appartient.

5. Les corps, les surfaces et les lignes sont désignés sous le nom générique de *figures*.

(¹) Afin d'éviter toute équivoque, nous attribuerons désormais au mot *corps* le sens qui vient d'être défini.

6. La *Géométrie* est la science des figures.

7. Deux figures sont *égales* lorsqu'elles sont *superposables*, c'est-à-dire lorsqu'elles peuvent *coïncider*.

De la ligne droite.

8. Tout le monde acquiert, par l'expérience, la notion de la *ligne droite*. Par exemple, l'arête d'une règle bien dressée est sensiblement *droite*. Secondement, si l'on suspend un petit poids à l'extrémité inférieure d'un fil homogène et flexible, dont l'autre extrémité soit fixe, et si l'on met ce fil en équilibre sous l'action de la pesanteur, on pourra, en faisant abstraction de l'épaisseur du fil, le regarder comme une ligne droite, ou presque droite, etc.

9. Toute droite *finie* AB (*fig.* 1) doit être considérée comme étant une partie, ou un *segment*, d'une autre droite finie A′B′, plus grande que la première. De même, A′B′ est un segment de A″B″, etc. En continuant ainsi indéfiniment, on parvient au principe suivant, qui doit être regardé comme une *demande* :

Toute droite FINIE AB *est un segment d'une droite* INDÉFINIE CD.

10. Chacune des parties AC, BD est appelée *prolongement* de la droite AB.

11. On doit admettre, comme étant vérifiée par l'expérience, la *demande* suivante :

Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite, mais l'on n'en peut faire passer qu'une.

12. Des deux principes qui précèdent, on conclut que :

1° *Deux droites finies ou indéfinies, qui ont deux points communs, coïncident ;*

2° *Toute droite finie a, d'un même côté, un seul prolongement.*

13. La *direction* d'une droite finie AB est la droite indéfinie CD à laquelle appartient AB.

14. *Deux droites différentes ne peuvent avoir qu'un seul point commun.*

Car si elles avaient deux points communs, elles coïncideraient (12, 1°).

15. La *ligne brisée* est celle qui est composée de lignes droites. — Elle est aussi appelée *polygone*.

16. La *ligne courbe* est celle qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites.

Du plan.

17. Le *plan* est une surface indéfinie sur laquelle est située tout entière la droite qui unit deux quelconques de ses points.

18. Une *figure plane* est celle qui est tout entière dans un même plan.

19. La *Géométrie plane* est la partie de la Géométrie relative aux figures planes;

La *Géométrie de l'espace* est relative aux figures non situées dans un même plan.

De la mesure des droites.

20. Si la partie AG de la droite AB (*fig.* 2), est *égale* à CD (7), la droite AB est plus grande que CD; et la *différence* entre ces deux lignes est BG.

De même, si les deux parties AG, BG de AB sont respectivement égales aux droites CD, EF, la droite AB est la *somme* de CD, EF.

21. L'*addition* et la *soustraction* des droites se font commodément avec le *compas*.

22. Si la droite AB est composée de quatre parties AE, EF, FG, GB (*fig.* 3), égales chacune à CD, le *rapport* de AB à CD est 4. Nous verrons plus loin comment on peut compléter cette notion du rapport de deux droites.

23. Prenons la droite CD pour unité; alors le nombre 4 *mesure* AB : nous dirons que la *longueur* de cette dernière droite est égale à 4.

24. Le mot *longueur* signifie aussi la droite finie; et l'on dit, indifféremment, la *droite* AB ou la *longueur* AB.

25. Enfin, la droite finie qui joint deux points s'appelle aussi leur *distance*.

Termes usités en Géométrie.

26. Un *axiôme* est une vérité évidente par elle-même.

27. Une *demande* est une vérité presque évidente, que l'on énonce sans preuves (9, 11).

28. Un *théorème* est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé *démonstration*. La proposition du n° 14 est un théorème. L'énoncé d'un théorème renferme toujours une *supposition* et une *conclusion*.

29. Un *problème* est une question qui exige une *solution*.

30. Un *lemme* est une proposition peu importante qui sert à démontrer un théorème ou à résoudre un problème.

31. Un *corollaire* est la conséquence qui se déduit, presque immédiatement, d'un ou de plusieurs théorèmes.

32. Un *scolie* est une remarque faite sur une proposition.

33. La *réciproque* d'un théorème est un théorème inverse, dans lequel la supposition est remplacée par la conclusion, *et vice versâ*. — Une réciproque peut être fausse.

34. *Hypothèse* est synonyme de supposition.

LIVRE PREMIER.

FIGURES RECTILIGNES.

PRÉLIMINAIRES.

35. La portion de plan, comprise entre deux droites indéfinies AB, AC', issues du même point A, s'appelle *angle* (*fig*.4). Le point A est le *sommet* de l'angle; les droites AB, AC en sont les *côtés*.

On désigne un angle par la lettre du sommet, ou par les trois lettres qui indiquent les côtés, en ayant soin de mettre au milieu celle du sommet. Ainsi l'on dit : l'angle A, l'angle BAC, ou l'angle CAB.

36. Si la droite AC, d'abord appliquée sur AB, *tourne* autour du point A, *en restant constamment dans le même plan*, elle *engendre* l'angle CAB.

37. Deux angles BAC, CAD (*fig*.5), extérieurs l'un à l'autre, qui ont même sommet et un côté commun, sont dits *adjacents*.

38. La *bissectrice* d'un angle BAD (*fig*. 5) est la droite AC qui le divise en deux parties égales.

39. *Demande. — Tout angle a une bissectrice, et n'en a qu'une.*

40. Lorsqu'une droite CD (*fig*. 6) rencontre une droite AB, de manière que les angles adjacents ACD, CDB soient égaux, chacun d'eux est un *angle droit*, et la ligne CD est dite *perpendiculaire* sur AB. Le point C est le *pied* de la perpendiculaire.

41. *Demande. — D'un point* C, *pris sur une droite* AB, *on peut toujours mener une droite* CD *perpendiculaire à* AB (*), *mais l'on n'en peut mener qu'une.*

42. La droite CE, qui fait avec AB des angles adjacents ACE, BCE, inégaux entre eux, est une *oblique* relativement à AB. L'angle ACE, moindre que l'angle droit ACD, est un *angle aigu*; l'angle BCE, plus grand que l'angle droit BCD, est *obtus*.

43. Un *polygone* (*fig.* 7) est une partie de plan, terminée par des droites. On donne aussi ce nom, soit à la ligne brisée qui limite la partie de plan (15), soit à un système quelconque de droites (*fig.* 8).

44 Le polygone de trois côtés s'appelle *triangle*; celui de quatre côtés, *quadrilatère*; celui de cinq côtés, *pentagone*; celui de six côtés, *hexagone*, etc.

45 On appelle *diagonale* d'un polygone la droite qui joint deux sommets non consécutifs : telle est BG (*fig.* 7).

46. Une ligne *convexe* est celle qui ne peut être rencontrée en plus de deux points par une droite.

47. *Demande.— Dans tout triangle, un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Ainsi, dans le triangle ABC (*fig.* 9), on a

$$AB < AC + BC.$$

Cette proposition, que l'on peut regarder comme démontrée par l'expérience, entraîne les conséquences suivantes :

48. 1er *Corollaire. — Si l'on joint par des droites les extrémités d'un même côté* AB *d'un triangle* (fig. 10), *avec un point intérieur* D, *la somme de ces deux droites est moindre que celle des deux autres côtés du triangle.*

Prolongeons la droite AD jusqu'à ce qu'elle rencontre en E le côté BC ; nous aurons, dans le triangle BDE,

---

(1) Cette *demande* peut être regardée comme un cas particulier de celle qui précède. Elles ont, l'une et l'autre, le degré d'évidence de cette autre demande : *Toute droite finie a un milieu unique.*

$$BD < DE + EB;$$

et, dans le triangle ACE,

$$AD + DE < AC + CE.$$

Ajoutant *membre à membre* ces deux inégalités, supprimant la partie commune DE, et faisant attention que

$$EB + CE = BE,$$

on trouve

$$AD + BD < AC + BC.$$

49. 2e *Corollaire. — La somme de deux droites qui se coupent est plus grande que la somme des droites opposées qui joignent, deux à deux, les extrémités des premières.*

50. 3e *Corollaire. — Dans tout quadrilatère convexe, la somme des côtés est comprise entre la somme des diagonales et le double de cette seconde somme.*

Théorème I.

51. *Dans tout polygone, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.*

1° Soit le polygone convexe ABCDE (*fig.* 11). Menons les diagonales AC, AD: nous aurons

$$\begin{aligned} AB &< BC + AC, \\ AC &< CD + AD, \\ AD &< DE + EA; \end{aligned}$$

d'où

$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

2° Soit le polygone quelconque ABCDEFGHI (*fig.* 12).

Nous aurons, en menant une ou plusieurs diagonales, telles que CE, et en prenant les points M, N, P où la droite AB rencontre les autres côtés :

$$\begin{aligned} AM &< AI + IM, \\ MN &< MH + HG + GN, \\ NP &< NF + FP, \\ PB &< PE + CE + CB, \\ CE &< CD + DE. \end{aligned}$$

Ces inégalités donnent

$$AM + MN + NP + PB + CE < AI + IM + MH + HG + GN + NF + FP + PE + CE + CB + CD + DE,$$

ou

$$AB < AI + IH + HG + GF + FE + CB + CD + DE.$$

Théorème II.

52. *Une ligne brisée convexe* ABCDE (fig. 13) *est plus courte que toute ligne brisée* AFGHIK *qui l'enveloppe, et qui est terminée aux mêmes extrémités.*

Pour que la ligne convexe soit *enveloppée* par l'autre, il faut qu'en menant la droite AE, le polygone *convexe* ABCDE soit *intérieur* à l'autre polygone.

Cela étant, prolongeons dans le même sens AB, BC,...., et soient A′, B′,.... les points où ces droites rencontrent la ligne AFG... Nous aurons, par le théorème précédent,

$$\begin{aligned} AB + BA' &< AF + FG + GH + HA', \\ BC + CB' &< BA' + A'I + IB', \\ CD + DC' &< CB' + B'K + KC', \\ DE &< DC' + C'E. \end{aligned}$$

Donc, en ajoutant,

$$AB + BC + CD + DE < AF + FG + GH + HI + IK + KE.$$

Théorème III.

53. *Une ligne brisée convexe est plus courte que toute ligne brisée qui l'enveloppe de toutes parts.*

Ce théorème se démontre comme le précédent.

ANGLES ET PERPENDICULAIRES.

Théorème IV.

54. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient les droites CD, C′D′, respectivement perpendiculaires à AB, A'B' (*fig.* 14) : je dis que l'angle droit ACD est égal à l'angle droit A'C'D'.

Transportons la seconde figure sur la première, de manière que le point C' coïncide avec le point C, et qu'un point A' de A'B' coïncide avec un point A de AB : les deux droites A'B', AB coïncideront (12). D'ailleurs, par le point C, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à AB (41); donc C'D' prendra la direction de CD ; donc

$$A'C'D' = ACD.$$

55. Deux angles sont *complémentaires* ou *supplémentaires*, suivant que leur somme est égale à *un* angle droit ou à *deux* angles droits.

Théorème V.

56. *Toute droite* CD (fig. 15) *qui en rencontre une autre* AB *fait avec celle-ci, d'un même côté, deux angles supplémentaires.*

Par le pied C de l'oblique CD, menons la perpendiculaire CE à AB ; nous aurons

$$ACD = ACE + ECD,$$
$$BCD = BCE - ECD;$$

d'où, à cause de $ACE = BCE = 1^d$:

$$ACD + BCD = 2^d.$$

57. *Réciproque. — Si deux angles adjacents* ACD, DCB (fig. 16), *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AC, CB *sont en ligne droite.*

Si CB n'est pas le prolongement de AC, soit CB' ce prolongement; nous aurions, par hypothèse,

$$ACD + DCB = 2^d;$$

et, par la proposition directe,

$$ACD + DCB' = 2^d;$$

d'où

$$DCB = DCB';$$

ce qui est absurde.

58. 1er *Corollaire. — La somme de tous les angles consécutifs formés, d'un même côté d'une droite, par d'autres droites quelconques, issues d'un même point de la première, égale 2 droits.*

59. 2e *Corollaire. — La somme des quatre angles consécutifs, formés par deux droites qui se coupent, égale 4 droits.*

60. 3e *Corollaire. — La somme de tous les angles consécutifs, formés autour d'un même point, par des droites issues de ce point, égale 4 droits.*

Théorème VI.

61. *Lorsque deux droites* AB, CD (fig. 17), *se coupent, les angles* AOC, BOD, *opposés au sommet, sont égaux.*

Par le théorème précédent,

$$\text{AOC} + \text{COB} = 2^{d},$$
$$\text{BOD} + \text{COB} = 2^{d};$$

donc

$$\text{AOC} = \text{BOD}.$$

62. 1er *Corollaire. — Le prolongement* OD (fig. 18) *de la perpendiculaire* OC *à une droite* AD, *est également perpendiculaire à cette droite* AB.

Les angles AOD, BOD sont respectivement égaux à BOC, AOC (61); mais, par hypothèse, ces derniers angles sont droits ; donc

$$\text{AOD} = \text{BOD} = 1^{d}:$$

en d'autres termes, CD est perpendiculaire à AB.

63. 2e *Corollaire. — Si une droite* CD *est perpendiculaire à une droite* AB, *réciproquement celle-ci est perpendiculaire à la première.*

D'après le premier corollaire, si l'un des deux *segments* OC, OD d'une droite CD est perpendiculaire à une droite AB, l'autre segment jouit de la même propriété : on dit alors que la première droite est perpendiculaire à la seconde.

Ceci posé, nous venons de voir que

$$AOD = BOC = AOC = BOD = 1^d;$$

donc $AOD = AOC = 1^d,\ BOC = BOD = 1^d$;

donc AB est perpendiculaire à CD.

Théorème VII.

64. *Par un point* O (fig. 20), *donné hors d'une droite* AB :

1° *On peut toujours mener une perpendiculaire* OC *à cette droite ;*

2° *On n'en peut mener qu'une.*

1° Soit O′ la position que viendrait occuper le point O si l'on faisait tourner autour de AB la partie supérieure de la figure; menons OO′ qui rencontre AB au point C : je dis que OO′ est perpendiculaire à AB.

En effet, les angles OCA, O′CA sont égaux à cause de la superposition des droites CO, C′O; de plus, ils sont supplémentaires (56) ; donc AB est perpendiculaire à OO′; donc, etc.

2° Si la droite OC est perpendiculaire à AB, toute droite OC′, différente de OC, ne sera pas perpendiculaire à AB.

Soit O′C′ la position que prendra OC′ après la *rotation* autour de AB.

Si OC′ était perpendiculaire à AB, les deux angles droits OC′A, O′C′A seraient supplémentaires; donc (57) OC′O′ serait une ligne droite.

65. Si d'un point O, extérieur à une droite AB, on mène la perpendiculaire OC et une oblique OC′, l'intervalle CC′, compris entre le pied de l'oblique et celui de la perpendiculaire, est appelé *projection* de l'oblique.

Théorème VIII.

66. *Si d'un point* O (fig. 21), *extérieur à une droite* AB, *on mène la perpendiculaire* OC *et plusieurs obliques* OD, OE, OF *à cette droite* :

1° *La perpendiculaire* OC *est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques* OD, OE, *qui ont des projections égales sont égales ;*

3° *De deux obliques* OD, OF, *celle qui a la plus grande projection est la plus grande.*

1° Faisons tourner la figure COD autour de AB, jusqu'à ce qu'elle vienne occuper la position CO'D. L'angle OCA étant droit, son égal O'CA est droit; donc OCO' est une ligne droite (57), et ODO' est un triangle. Conséquemment,

$$OC + CO' < OD + DO',$$

ou

$$2OC < 2OD,$$

ou enfin

$$OC < OD.$$

2° Si l'on fait tourner la figure AOC autour de OC, la droite CA, perpendiculaire à CO, prend la *direction* de CB. De plus, CD étant égal à CE, le point D tombe sur le point E, et l'oblique OD coïncide avec OE (12, 1°) : ces deux obliques sont donc égales.

3° On peut supposer les deux obliques situées d'un même côté de OC; car si elles étaient de côté et d'autre de cette droite, comme OD et OF, on prendrait CE = CD; et, menant OE, on aurait OD = OE.

Soient donc OE, OF deux obliques situées d'un même côté de la perpendiculaire OC. Faisons tourner la figure autour de AB, de manière que le point O vienne en O'; menons O'E et O'F.

Le point E, intérieur au triangle OFO', donne (48)

$$OE + EO' < OF + FO',$$

ou

$$2OE < 2OF,$$

ou

$$OE < OF.$$

67. *Réciproques. — Si d'un point, extérieur à une droite, on mène la perpendiculaire et plusieurs obliques* :

1° *Deux obliques égales ont des projections égales;*

2° *De deux obliques inégales, la plus grande a la plus grande projection.*

La démonstration de ces réciproques est évidente par le principe suivant, qui est lui-même évident :

Si l'énoncé d'un théorème renferme toutes les hypothèses que l'on peut faire sur un sujet déterminé, et si chaque hypothèse conduit à une conclusion différente de toutes les autres, les réciproques du théorème sont vraies.

68. *Corollaire. — D'un point à une droite, on ne peut mener trois droites égales.*

69. *Remarque.* — Le triangle OCD (fig. 21), après la rotation autour de OC, coïncide avec le triangle OEC ; donc les deux angles ODC, OEC sont égaux. Ainsi *les deux obliques égales* OD, OE, *menées d'un point* O *à une droite* AB, *font, avec cette droite, des angles égaux.* C'est ce qu'on exprime en disant qu'elles sont *également inclinées* sur AB.

70. La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est appelée *distance* du point à la droite.

Théorème IX.

71. 1° *Tout point de la perpendiculaire au milieu d'une droite est également distant des extrémités de cette droite ;*

2° *Tout point extérieur à la perpendiculaire est inégalement distant des mêmes extrémités.*

1° Soit M (*fig.* 22) un point quelconque de la perpendiculaire CD, élevée au milieu C de AB.

Les deux obliques MA, MB, ayant des projections égales, sont égales; donc, etc.

2° Soit N un point extérieur à la perpendiculaire; menons NA, NB; nous aurons AN < BN.

En effet, soit M le point où NB rencontre CD. Le triangle ANM donne

$$AN < AM + MN,$$

ou

$$AN < BM + MN;$$

ou enfin

$$AN < BN.$$

72. On appelle *lieu géométrique* une ligne contenant *tous* les points qui satisfont à une même condition, ou qui jouissent d'une même propriété.

D'après cette définition, les deux parties du théorème précédent, et les réciproques de ce théorème, peuvent se résumer ainsi :

La perpendiculaire au milieu d'une droite est le lieu géométrique des points tels, que chacun d'eux soit également distant des extrémités de la droite.

Théorème X.

73. *Lorsque deux droites* AB, CD (fig. 23) *se coupent :*

1° *Les bissectrices* OE, OF, *de deux angles adjacents* BOD, AOD, *sont perpendiculaires entre elles ;*

2° *Les bissectrices* OE, OG, *de deux angles* BOD, AOC, *opposés au sommet, sont en ligne droite.*

1° La ligne AOB étant droite, on a (58)

$$AOF + FOD + DOE + EOB = 2^d,$$

ou

$$2FOD + 2DOE = 2^d,$$

ou

$$FOD + DOE = 1^d.$$

2° Les droites OE, OG, étant perpendiculaires à OF, les angles EOF, FOG sont supplémentaires; donc EOG est une ligne droite (57).

Théorème XI.

74. 1° *Tout point* M (fig. 24) *pris sur la bissectrice* AD *d'un angle* BAC, *est également distant des côtés de cet angle ;*

2° *Tout point* N (fig. 25) *situé dans l'angle, extérieurement à la bissectrice, est inégalement distant des côtés.*

1° Abaissons les perpendiculaires ME, MF sur les côtés AB, AC : il faut démontrer que ces perpendiculaires sont égales (70).

Faisons tourner la figure DAFC autour de DA, jusqu'à ce que le côté AC vienne, à cause de l'égalité des angles DAC, DAB, s'appliquer sur AB. Dans ce mouvement, le point M reste immobile ; et comme, d'un point à une droite, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire (64), la droite MF, perpendiculaire à AC, coïncide avec ME.

2° Faisons tourner NAFC autour de AN, jusqu'à ce que AC prenne la position AC′, et que NF vienne en NF′. Soit G le point où NE rencontre AC′. L'oblique NG est plus longue que la perpendiculaire NF′; donc, à plus forte raison,

$$NE > NF',$$

ou

$$NE > NF.$$

75. *Corollaire. — Le lieu géométrique des points tels, que chacun d'eux soit également distant des côtés d'un angle ou de leurs prolongements, se compose de la bissectrice de cet angle et de la perpendiculaire à la bissectrice, menée par le sommet.*

PARALLÈLES.

76. *On nomme parallèles deux droites qui, étant situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer, quelque loin qu'on les suppose prolongées.*

Cette définition est justifiée par les propositions suivantes.

Théorème XII.

77. *Deux droites* CD, EF (fig. 26), *perpendiculaires à une même droite* AB, *sont parallèles entre elles.*

Car si elles se rencontraient en un point O, il y aurait deux perpendiculaires OC, OE, abaissées de ce point sur la droite AB; ce qui est absurde.

78. *Corollaire. — Par un point donné* C (fig. 27), *on peut mener une parallèle à une droite donnée* AB.

Du point C, abaissons une perpendiculaire CD sur la droite AB; puis, de ce même point C, élevons à CD la perpendiculaire CE : cette dernière droite est parallèle à AB.

79. *Demande. — Par un point donné* C, *on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée* AB.

80. 1[er] *Corollaire.—Deux droites, parallèles à une troisième, sont parallèles entre elles.*

81. 2e *Corollaire. — Deux droites, l'une oblique, l'autre perpendiculaire à une même droite, se rencontrent.*

82. 3e *Corollaire. — Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

83. 4e *Corollaire. — Si deux droites sont parallèles, leurs perpendiculaires respectives sont parallèles entre elles.*

84. 5e *Corollaire. — Si deux droites* AB, AC (fig. 33) *se coupent, leurs perpendiculaires respectives* DE, FG *se coupent aussi.*

En effet, si les droites DE, FG étaient parallèles, leurs perpendiculaires AB, CD seraient parallèles (83).

85. Si deux droites AB, CD (*fig.* 28), parallèles ou non, sont coupées par une droite EF, celle-ci est appelée *transversale.*

Elle détermine, avec les deux autres droites, huit angles qui, considérés deux à deux, prennent différentes dénominations :

1° Deux angles, situés d'un même côté de la transversale, et placés de la même manière relativement aux deux droites, sont dits *correspondants.* Tels sont, par exemple, AHE et CGE.

2° Deux angles, situés de côté et d'autre de la transversale, et en dedans des deux droites, sont *alternes-internes.* Ainsi, AHE, DGF sont alternes-internes.

3° Deux angles, situés de côté et d'autre de la transversale, mais en dehors des deux droites, sont *alternes-externes.* Les angles AHF, DGE sont dans ce cas.

4° Deux angles, situés d'un même côté de la transversale, et en dedans des deux droites, sont *internes d'un même côté.* Tels sont AHE et CGF.

5° Enfin, deux angles situés d'un même côté de la transversale, et en dehors des deux droites, sont dits *externes d'un même côté.* Tels sont, par exemple, AHF et CGE.

Théorème XIII.

86. *Deux droites* AB, CD (fig. 31) *sont parallèles lorsqu'elles font, avec une même transversale* EF, *des angles correspondants égaux.*

Soit l'angle FGB égal à l'angle FHD; et supposons que les droites AB, CD se rencontrent en un point O.

Les angles FGB, AGE, opposés au sommet, sont égaux (61); donc AGE = FHD.

Ces derniers angles étant égaux, leurs suppléments BGE, FHC le sont aussi.

Transportons la figure BGHD sur CHGA, de manière que le point G vienne en H, et que le point H vienne en G. A cause de l'égalité des angles BGE, CHF, la droite GB prendra la direction HC. Pour une raison semblable, HD prendra la direction GA. Si donc les lignes GB, HD se coupaient en un point O, situé *à droite* de EF, les lignes HC, GA devraient se couper en un point O′, situé *à gauche*. Autrement dit, les deux droites AB, CD auraient deux points communs O, O′; ce qui est absurde.

87. *Réciproque. — Deux parallèles* AB, CD (fig. 32) *font, avec une même transversale* EF, *deux angles correspondants égaux.*

Soit FCD′ un angle ayant CF pour côté, C pour sommet, et égal à FEB. Si la droite CD′, parallèle à AB (86), n'était pas confondue avec CD, on pourrait, par un même point, mener deux parallèles à une droite; ce qui est impossible (79).

88. 1er *Corollaire. — Si deux droites font, avec une même transversale, des angles correspondants inégaux, ces droites, prolongées suffisamment, doivent se rencontrer.*

89. 2e *Corollaire* (réciproque du 1er). — *Si deux droites, prolongées suffisamment, se rencontrent, elles font, avec une même transversale, des angles correspondants inégaux.*

90. 3e *Corollaire. — Deux droites sont parallèles lorsqu'elles font, avec une même transversale,*

1° *Des angles alternes-internes égaux;*

2° *Des angles alternes-externes égaux;*

3° *Des angles internes d'un même côté, supplémentaires;*

4° *Des angles externes d'un même côté, supplémentaires.*

91. 4ᵉ *Corollaire.* — *Deux parallèles font, avec une même transversale,*

1° *Des angles alternes-internes égaux;*

2° *etc.*

Ces deux corollaires se démontrent facilement au moyen des Théorèmes V et VI.

Théorème XIV.

92. *Deux angles sont égaux ou supplémentaires, lorsque les côtés de l'un sont parallèles aux côtés de l'autre.*

Soient les deux parallèles AB, A'B' (*fig.* 34), et les deux parallèles CD, C'D'. Je dis que les quatre angles en O et les quatre angles en O' sont, deux à deux, égaux ou supplémentaires.

Prolongeons A'B' : cette droite rencontre nécessairement CD (79). Les angles AOC, A'EC sont égaux comme correspondants. De même, les angles A'O'C', A'EC sont égaux. Donc

$$AOC = A'O'C'.$$

On comparerait de même les autres angles.

Théorème XV.

93. *Deux angles sont égaux ou supplémentaires, lorsque les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre.*

Soient les deux perpendiculaires AB, A'B' (*fig.* 35), et les deux perpendiculaires CD, C'D'. Je dis que les quatre angles en O et les quatre angles en O' sont, deux à deux, égaux ou supplémentaires.

Menons, par le point O', les droites A''B'', C''D'', respectivement parallèles à AB, CD. D'après le théorème précédent, les angles AOC, A''O'C'' sont égaux. Il reste donc à faire voir que A''O'C'' égale A'O'C'. Or,

$$A''O'C'' = 1^d + A'O'C'',$$
$$A'O'C' = 1^d + A'O'C'';$$

donc, etc.

La démonstration serait identique pour les autres couples d'angles.

TRIANGLES

94. On appelle triangle *équilatéral*, celui qui a les trois côtés égaux ; triangle *isocèle*, celui qui a deux côtés égaux ; et triangle *scalène*, celui qui a les trois côtés inégaux.

95. Dans un triangle isocèle, le côté adjacent aux deux côtés égaux prend le nom de *base*.

96. Un triangle est dit *rectangle, obtusangle* ou *acutangle*, suivant qu'il a un angle droit, un angle obtus, ou trois angles aigus.

97. Dans tout triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est nommé *hypoténuse*.

Théorème XVI.

98. *Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à 2 droits.*

ABC étant un triangle quelconque (*fig.* 36), prolongeons indéfiniment le côté AB et menons, par le sommet B, une parallèle BE au côté AC.

Les angles A, EBD sont égaux comme correspondants (87); les angles C, CBE sont égaux comme alternes-internes (91, 1°). La somme des trois angles du triangle est donc égale à la somme des angles EBD, CBE, ABC: or, cette dernière est égale à 2 droits (58).

99. 1^er^ *Corollaire. — Un triangle ne peut avoir ni deux angles droits, ni deux angles obtus.*

100. 2^e^ *Corollaire.—Dans tout triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

101. 3^e^ *Corollaire. — Chaque angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés.*

102. 4e *Corollaire. — Si deux angles d'un triangle sont, chacun à chacun, égaux à deux angles d'un autre triangle, les deux derniers angles sont égaux entre eux.*

Théorème XVII.

103. 1° *Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ;*

2° *Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.*

1° Les côtés AC, BC (*fig.* 37) étant égaux, joignons le sommet C au milieu du côté opposé AB: la droite CD sera perpendiculaire sur AB (72); et les obliques AC, BC seront également inclinées sur AB (69).

2° AC étant plus grand que BC (*fig.* 38), abaissons CD perpendiculaire à AB, prenons DE = DB, puis tirons CE. A cause de BD < AD (67, 2°), l'oblique CE, égale à BC, est intérieure au triangle rectangle ADC ; et l'angle CEB, égal à CBA (69), est *extérieur* au triangle CAE. Donc

$$\text{CBA} > \text{CAB}.$$

104. *Réciproque. — Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux* (67).

105. *Corollaire. — Tout triangle équilatéral est en même temps équiangle, et réciproquement.*

106. *Remarque.—Dans tout triangle isocèle, la droite menée du milieu de la base au sommet opposé, partage la figure en deux triangles rectangles égaux.*

Théorème XVIII.

107. *Dans tout triangle, les perpendiculaires aux milieux des côtés concourent en un même point.*

Les perpendiculaires élevées aux milieux D, E des côtés

BC, AC (*fig.* 39) se coupent en un point O (83). Si nous joignons ce point au milieu F du troisième côté AB, la droite OF sera perpendiculaire sur AB.

En effet, le point O, appartenant aux perpendiculaires DO, EO, est également distant des sommets B, C et des sommets A, C. Donc ce point est également distant des sommets A, B. Le point F est, par hypothèse, également distant des mêmes sommets; donc, etc.

108. *Corollaire. — Un triangle étant donné, on peut toujours trouver, dans son plan, un point également distant des trois sommets ; mais on n'en peut trouver qu'un.*

109. *Remarque.* — Selon que le triangle ABC est *acutangle, rectangle* ou *obtusangle*, le point de concours des perpendiculaires se trouve *dans l'intérieur* du triangle, sur l'*hypoténuse* ou *à l'extérieur du triangle.*

Théorème XIX.

110. *Dans tout triangle, les bissectrices des angles intérieurs ou extérieurs concourent, deux à deux, en quatre points.*

Les bissectrices AO, BO (*fig.* 40) des angles intérieurs BAC, ABC se coupent en un point O, situé *dans l'intérieur* du triangle ABC. Si nous joignons ce point au troisième sommet C, la droite OC sera bissectrice de l'angle ABC. En effet, le point O, appartenant aux bissectrices AO, BO, est également distant des côtés AB, AC et des côtés AB, BC (74). Donc ce point, situé à égale distance des côtés AC, BC, appartient à la bissectrice de l'angle ACB (75).

Si, par les sommets A, B, C, nous menons EF, FD, DE respectivement perpendiculaires sur AO, BO, CO, ces perpendiculaires seront les bissectrices des angles extérieurs du triangle (73). On verra, par le raisonnement qui vient d'être employé, que les points D, E, F, où ces droites se coupent deux à deux, sont respectivement situés sur les bissectrices AO, BO, CO.

111. *Corollaire. — Un triangle étant donné, on peut toujours trouver, dans son intérieur, un point également distant des trois côtés; mais on n'en peut trouver qu'un.*

ÉGALITÉ DES TRIANGLES.

112. Dans la théorie qui fait l'objet de ce paragraphe, on se propose de trouver des conditions dont l'existence permette d'affirmer que deux triangles sont égaux, sans qu'il soit nécessaire de vérifier que toutes les parties de l'un sont égales aux parties de l'autre.

Théorème XX.

113. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.*

Supposons l'angle A égal à l'angle A' (*fig.* 41), le côté AB égal à A'B', et le côté AC égal à A'C'; je dis que les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux.

Portons le second triangle sur le premier, de manière que le côté A'B' coïncide avec AB. A cause de l'égalité des angles A, A', le côté A'C' prend la direction AC; et, comme $A'C' = AC$, le sommet C' tombe en C. Donc les deux triangles coïncident; donc ils sont égaux.

Théorème XXI.

114. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun.*

Supposons $AB = A'B'$, $A = A'$, $B = B'$. Portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que A'B' coïncide avec AB. Le côté A'C' prend la direction AC, et le côté B'C' prend la direction BC. Le point C', devant se trouver à la fois sur AC et sur BC, tombe en C. Donc les deux triangles sont égaux.

115. *Corollaire. — Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, chacun à chacun.*

Théorème XXII.

116. *Lorsque deux triangles ont un angle inégal, compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, le côté opposé au plus grand angle est plus grand que le côté opposé au plus petit angle.*

Supposons (*fig.* 42) :

$$AC = A'C',\ BC = B'C',\ ACB > A'C'B'.$$

Je dis que le côté AB est plus grand que le côté A'B'.

Portons le triangle A'B'C' sur ABC, de manière que B'C' coïncide avec BC : le côté A'C' tombera dans l'intérieur de l'angle ACB, et prendra une position telle que CA''. Menons AA''; puis abaissons, du sommet C, une perpendiculaire CD' sur cette droite : à cause des obliques égales AC, A''C, nous aurons AD = A''D. Par suite, le point E, intersection de AB, CD, est également distant de A et de A'' (72).

Actuellement, le triangle A''BE donne

$$A''B < A''E + BE,$$

ou

$$A''B < AE + BE,$$

ou enfin

$$A'B' < AB.$$

117. *Réciproque des Théorèmes* XXI et XXII.

Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et un côté inégal, l'angle opposé au plus grand côté est plus grand que l'angle opposé au plus petit côté.

Théorème XXIII.

118. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun.*

Supposons (*fig.* 41):

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C'.$$

Je dis que les deux triangles sont égaux.

Cette égalité serait évidente si l'angle A était égal à l'angle A'; car alors les deux triangles auraient un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun.

Or, si l'angle A était différent de A', le côté BC serait, contrairement à l'hypothèse, différent de B'C' (117). Donc, etc.

119. *Remarque.* — Dans deux triangles égaux, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Théorème XXIV.

120. *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal, chacun à chacun.*

Supposons (*fig.* 43) :

$$BC = B'C',\ AB = A'B';$$

A et A′ étant les angles droits. Je dis que les deux triangles sont égaux.

Cette proposition serait démontrée si le côté AC était égal au côté A′C′ (118).

Portons le triangle A′B′C′ sur ABC, de manière que A′B′ coïncide avec AB. Les angles A, A′ étant égaux, le côté A′C′ prend la direction AC. Mais alors BC et B′C′ sont des obliques égales, menées d'un même point à la droite AC; leurs projections sont donc égales; c'est-à-dire que

$$A'C' = AC.$$

QUADRILATÈRES.

121. Parmi les quadrilatères, on remarque :

1° Le *trapèze*, qui a deux côtés parallèles nommés *bases;*

2° Le *parallélogramme*, qui a les côtés parallèles deux à deux;

3° Le *rectangle*, dont tous les angles sont droits;

4° Le *losange*, qui a tous les côtés égaux;

5° Le *carré*, qui a les côtés égaux et les angles droits.

122. Nous devons faire observer, relativement à ces définitions :

1° Que le rectangle ABCD (*fig.* 44) peut être regardé comme composé de deux triangles rectangles égaux ABC, CDA, ayant une hypoténuse commune AC;

2° Que le losange ABCD (*fig.* 45) résulte de la réunion de deux triangles isocèles égaux, ABC, CDA, ayant une base commune AC ;

3° Que le carré peut être considéré comme un *losange-rectangle.*

Théorème XXV.

123. *Dans tout parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

Menons la diagonale AC (*fig.* 46), et comparons les triangles ABC, ADC.

Le côté AC est commun; les angles BCA, DAC sont égaux comme alternes-internes (91); les angles BAC, DCA sont égaux par la même raison; donc les deux triangles sont égaux (114); donc

$$AB = CD, \quad BC = AD, \quad B = D.$$

124. *Corollaire. — Deux parallèles sont partout également distantes.*

Soient deux parallèles AB, CD (*fig.* 47) et deux droites EF, GH, perpendiculaires à AB et CD (82). La figure EFGH est un rectangle; donc EF = GH. C'est là ce qu'exprime l'énoncé du corollaire.

125. *Réciproques.* — 1° *Si, dans un quadrilatère, les côtés opposés sont égaux deux à deux, la figure est un parallélogramme.*

2° *Si, dans un quadrilatère, deux côtés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

126. *Remarque.*— Dans tout parallélogramme, les angles opposés sont égaux, et les angles adjacents à un même côté sont supplémentaires.

Théorème XXVI.

127. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Dans les deux triangles AOB, COD (*fig.* 48), l'on a

$$AB = CD, \ ABO = CDO, \ BAO = DCO.$$

Ainsi, ces deux triangles sont égaux; donc

$$BO = DO, \ AO = CO.$$

128. *Réciproque.* — *Si, dans un quadrilatère, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, la figure est un parallélogramme.*

129. Le point O, où se coupent les diagonales AC, BD, est le *centre* du parallélogramme. On peut démontrer que ce centre divise en deux parties égales toute *corde* EF qui y passe.

130. D'après le nº 122, le rectangle, le losange et le carré sont des cas particuliers du parallélogramme. Ces figures doivent donc jouir des propriétés qui viennent d'être démontrées. Le rectangle et le losange jouissent encore des propriétés suivantes, qui appartiennent, l'une et l'autre, au carré.

Théorème XXVII.

131. *Les diagonales d'un rectangle sont égales.*

En effet, les deux triangles ABC, BAD (*fig.* 49) ont un angle égal compris entre un côté commun et un côté égal; donc ils sont égaux (113); donc

$$AC = BD.$$

Théorème XXVIII.

132. *Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires entre elles.*

En effet, la diagonale BD (*fig.* 50), ayant deux de ses points, B, D, également éloignés chacun des extrémités de la diagonale AC, est perpendiculaire au milieu de AC (72).

Théorème XXIX.

133. *Dans tout trapèze, la droite* EF *(*fig. 51*) qui joint les milieux des côtés non parallèles* AB, DC, *est* : 1° *parallèle aux deux bases* AB, CD*;* 2° *égale à leur demi-somme;* 3° *également distante de chacune d'elles.*

Menons, par le point F, GH parallèle à AD; et soient G, H les points où cette droite rencontre AB, DC.

Les deux triangles CHF, BGF ont: les côtés CF, BF égaux par hypothèse; les angles HCF, GBF égaux comme alternes-internes; les angles HFC, GFB égaux comme opposés par le sommet. Donc ces triangles sont égaux. Par suite, HF = GF: le point F est le milieu de GH.

La figure AGHD est un parallélogramme; donc

$$GH = AD, \quad GF = AE.$$

Le quadrilatère AGFE, ayant deux côtés égaux et parallèles, est un parallélogramme (125, 2°). La première partie de la proposition est ainsi démontrée.

En second lieu, les parallélogrammes EFDH, AGEF donnent :

$$EF = DH = DC + CH,$$
$$EF = AG = AB - BG;$$

d'où, à cause de $\quad CH = BG,$

$$EF = \frac{AB + DC}{2}$$

Enfin, si du point F on mène la droite IFK perpendiculaire aux trois parallèles, on forme deux triangles rectangles CKF, BIF, égaux comme ayant un angle aigu égal et l'hypoténuse égale (115). Donc

$$FI = FK;$$

donc la droite EF est également distante de AB et CD.

134. *Réciproque. — Dans tout trapèze, la parallèle aux bases, menée par le milieu de l'un des côtés non parallèles, divise l'autre en deux parties égales.*

POLYGONES.

135. Un polygone est dit *équilatéral* ou *équiangle*, suivant qu'il a les côtés égaux ou les angles égaux. Le carré est à la fois équilatéral et équiangle.

Théorème XXX.

136. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois 2 droits, qu'il a de côtés moins deux.*

Menons, de l'un des sommets, des diagonales à tous les sommets opposés : le polygone sera décomposé en triangles dont le nombre égale celui des côtés du polygone, moins deux. Or, la somme des angles de tous les triangles est égale à la somme des angles intérieurs du polygone ; donc, etc.

* 137. *Remarque.* — L'angle droit étant pris pour unité, et n désignant le nombre des côtés d'un polygone convexe, la somme de ses angles est $2n-4$. Si le polygone a les angles égaux, chacun d'eux a pour valeur

$$2\frac{n-2}{n} = 2\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

A mesure que n augmente, la fraction $\frac{2}{n}$ diminue. En même temps, la mesure de l'angle augmente indéfiniment, sans pouvoir devenir égale à 2.

Théorème XXXI.

138. *Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone convexe, la somme des angles extérieurs ainsi formés est égale à 4 droits.*

La somme de l'angle *intérieur* FAB (*fig.* 52) et de l'angle *extérieur* adjacent BAA′, est égale à 2 droits ; donc la somme de tous les angles intérieurs et extérieurs vaut autant de fois 2 droits qu'il y a de côtés dans le polygone ; et comme la somme des angles intérieurs est égale à celle-ci, diminuée de 4 droits (136), il reste 4 droits pour la somme des angles extérieurs.

Théorème XXXII.

139. *Deux polygones* P, P′ *sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles égaux, chacun à chacun, et assemblés de la même manière.*

Si l'on transporte le polygone P′ sur le polygone P, de manière qu'un triangle A′ du polygone P′ coïncide avec le triangle A du polygone P, les deux triangles égaux B′ et B, adjacents à A′ et A, ayant un côté commun, coïncideront; et ainsi de suite.

Théorème XXXIII.

* 140. *Deux polygones de n côtés sont égaux lorsqu'ils ont (n — 1) côtés égaux, chacun à chacun, ainsi que les (n — 2) angles compris entre ces côtés.*

Soient, pour fixer les idées, les deux pentagones ABCDE, A′B′C′D′E′ (*fig.* 53), dans lesquels

$$AB = A'B', \; B = B', \text{ etc.}$$

Transportons le second polygone sur le premier, de manière que le côté A′B′ coïncide avec AB.

L'angle B′ étant égal à B, le côté B′C′ prend la direction de BC; et comme ces deux côtés sont égaux, le sommet C′ coïncide avec C. De même, D′, E′ coïncident avec D, E. Par suite,

$$E'A' = EA, \quad E' = E, \quad A' = A.$$

Théorème XXXIV.

* 141. *Deux polygones de n côtés sont égaux lorsqu'ils ont (n — 2) côtés consécutifs égaux, chacun à chacun, ainsi que les (n — 1) angles compris entre ces côtés et les deux derniers.*

Ce théorème se démontre comme le précédent.

* 142. *Remarque.*— Deux polygones de n côtés étant égaux lorsqu'ils ont $(n - 1)$ côtés et $(n - 2)$ angles égaux, chacun à chacun, ou bien $(n - 2)$ côtés et $(n - 1)$ angles, il s'ensuit que $(2n - 3)$ *éléments*, angles ou côtés, choisis convenablement, suffisent pour *déterminer* un polygone de n côtés.

FIN DU LIVRE PREMIER.

EXERCICES SUR LE LIVRE I [1].

1. Les trois hauteurs [2] d'un triangle se coupent en un même point.

2. Les médianes [3] d'un triangle se coupent en un même point situé au tiers de chacune d'elles, à partir du côté correspondant.

3. Dans tout triangle, la somme des médianes est comprise entre le périmètre [4] du triangle et les trois quarts de ce périmètre.

4. Dans tout triangle, à un plus grand côté correspond une plus petite médiane.

5. Dans tout triangle, une bissectrice intérieure quelconque ne surpasse pas la médiane correspondante.

6. Dans tout triangle, la somme des bissectrices est comprise entre le périmètre et le demi-périmètre.

7. Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite bissectrice.

8. Parmi tous les triangles formés avec un angle donné, compris entre deux côtés dont la somme est constante, celui dont le périmètre est un minimum est le triangle isocèle.

9. Dans tout quadrilatère, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

10. Dans tout quadrilatère, le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés est situé au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

11. Deux polygones convexes, d'un nombre impair de côtés, sont égaux lorsque leurs côtés ont mêmes points milieux.

---

(1) Les solutions des *Exercices* se trouvent, pour la plupart, dans l'ouvrage intitulé : THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, (4e édition).

(2) La *hauteur* est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé : on donne à celui-ci le nom de *base*.

(3) Les *médianes* sont les droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés.

(4) Le *périmètre* est la somme des côtés.

12. Par un point, situé dans un angle donné, mener une droite qui soit divisée en deux parties égales par ce point.

13. Trouver, sur l'un des côtés d'un angle, un point M également distant du second côté et d'un point A, donné sur le premier côté.

14. Construire un triangle, connaissant deux côtés et une médiane.

15. Construire un triangle, connaissant un côté et deux médianes.

16. Construire un triangle, connaissant les trois médianes.

17. Construire un triangle, connaissant le périmètre et deux angles.

18. Construire un parallélogramme, connaissant les diagonales et un côté.

19. Construire un quadrilatère, connaissant les quatre côtés et l'une des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

20. Sur les prolongements des côtés AB, AC d'un triangle ABC, on prend les distances BD, CE, de manière que leur somme soit égale au troisième côté du triangle, et l'on mène DE. Dans quel cas cette droite DE est-elle un minimum ?

21. Trouver, sur une droite donnée AB, un point M tel, que la somme de ses distances à deux points donnés C, D, situés d'un même côté de AB, soit un minimum.

22. A un angle donné, inscrire un triangle MNP, de périmètre minimum, et dont l'un des sommets soit un point donné P, situé entre les côtés de l'angle.

23. A un angle ABC, inscrire un triangle MNP, de périmètre minimum.

24. Quelle route doit suivre une bille M pour rencontrer une bille N, après avoir touché les quatre bandes du billard ?

25. Quelle route doit suivre une bille pour revenir au point de départ, après avoir touché les quatre bandes du billard ?

26. A un quadrilatère convexe, inscrire un quadrilatère de périmètre minimum.

27. Trouver, sur une droite donnée AB, un point M tel, que la différence de ses distances à deux points donnés C, D, situés de part et d'autre de AB, soit un maximum.

28. Trouver, sur l'un des côtés d'un triangle, un point tel, que la somme de ses distances aux deux autres côtés soit un minimum.

29. Trouver, dans le plan d'un triangle, un point tel, que la somme de ses distances aux trois côtés du triangle soit un minimum.

30. Trouver le lieu géométrique des points tels, que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites données soit égale à une longueur donnée.

31. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont les quatre côtés égaux, chacun à chacun, et disposés de la même manière.

32. On joint un point donné P, à un point quelconque M d'une droite donnée BC. Sur la droite PM, on construit un triangle isocèle MPQ, rectangle en P. Quel est le lieu du sommet Q ?

33. Même question, en supposant que le triangle isocèle soit rectangle en M ou en Q.

34. On joint les milieux des côtés d'un carré (*fig.* 188) avec les sommets non adjacents, par les droites BE, CE, CF, DF ;... Démontrer : 1° que l'octogone MNPQ..., déterminé par ces droites, est équilatéral ; 2° que les angles K, M, P, R de ce polygone sont égaux, et qu'il en est de même pour les angles I, L, N, Q ; 3° que la somme de deux angles inégaux, tels que L, M, est égale à 3 droits.

35. Si les côtés et les diagonales d'un pentagone sont parallèles deux à deux, le pentagone est-il régulier [1]?

---

[1] On appelle polygone *régulier* celui qui est équilatéral et équiangle à la fois.

LIVRE DEUXIÈME.

CERCLE, ET MESURE DES ANGLES.

PRÉLIMINAIRES.

143. La *circonférence* est une ligne plane dont tous les points sont également distants d'un point intérieur appelé *centre*.

144. Le *cercle* est la partie du plan limitée par la circonférence.

145. Une droite telle que OA (*fig.* 54), menée du centre à un point quelconque de la circonférence, est un *rayon*. En vertu de la définition, tous les rayons OA, OB, OC sont égaux.

146. Toute droite DOE, qui passe par le centre, et qui se termine à deux points de la circonférence, est un *diamètre*. — Tous les diamètres sont égaux.

147. Une partie quelconque de la circonférence, telle que AFB, est appelée *arc*. La droite AB, qui joint les extrémités d'un arc, est une *corde*. On dit que la corde *sous-tend* l'arc, ou que l'arc est *sous-tendu* par la corde.

A la même corde AB, répondent toujours deux arcs AFB, ACB; mais l'arc *sous-tendu* est le plus petit des deux.

148. La portion de cercle AFBG, comprise entre un arc et sa corde, est nommée *segment*. La partie OAFBO, comprise entre un arc et les rayons menés à ses extrémités, est un *secteur*.

149. Toute droite HL, qui n'a qu'un point M de commun avec la circonférence, est une *tangente*.

Le point M est appelé *point de contact*.

150. Enfin, toute droite qui traverse la circonférence est nommée *sécante*.

Théorème I.

151. *Une ligne droite ne peut rencontrer la circonférence en plus de deux points.*

Si une droite pouvait rencontrer la circonférence en trois points, les rayons menés à ces points étant égaux, il s'ensuivrait que, d'un point, on pourrait mener à une droite trois droites égales; ce qui est impossible (68).

Théorème II.

152. *Tout diamètre partage le cercle et la circonférence, chacun en deux parties égales.*

Plions la figure suivant AB (*fig.* 55) : la partie ACB de la circonférence doit coïncider avec la partie ADB ; car tous les rayons sont égaux.

Théorème III.

153. *Toute corde est plus petite que le diamètre.*

En effet, dans le triangle AOB (*fig.* 56), on a

$$AB < AO + OB.$$

154. *Corollaire. — Le diamètre est la plus grande droite inscrite au cercle.*

Théorème IV.

155. 1° *La perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangente à la circonférence ;*

2° *Toute oblique à l'extrémité d'un rayon est sécante.*

1° Soit la droite BC (*fig.* 57), perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Si nous prenons sur BC un point quelconque

M, différent de A, l'oblique OM sera plus grande que la perpendiculaire OA; et le point M, dont la distance au centre surpasse le rayon, sera extérieur au cercle. Donc la droite BC est tangente à la circonférence.

2° Soit la droite AB (*fig.* 58), oblique à l'extrémité du rayon OA. Si nous menons du centre une perpendiculaire sur AB, cette perpendiculaire est plus petite que l'oblique OA : le pied de la perpendiculaire est dans le cercle; donc la droite AB est sécante.

156. *Réciproque.* — 1° *La tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact ;*

2° *La perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente, passe par le point de contact.*

157. *Corollaire.* — *Deux tangentes, menées aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles.*

158. *Remarque.* — Une droite est sécante, tangente ou extérieure à la circonférence, selon que sa distance au centre est inférieure, égale ou supérieure au rayon.

Théorème V.

159. *A tout triangle, on peut circonscrire une circonférence, mais on n'en peut circonscrire qu'une.*

Les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés du triangle se rencontrent en un point *unique*, également distant des trois sommets (107 et 108). Ce point est donc le centre d'une circonférence *circonscrite* au triangle. D'ailleurs, avec un centre et un rayon donnés, on ne peut tracer qu'une seule circonférence; donc, etc.

Théorème VI.

160. *A tout triangle, on peut inscrire une circonférence, mais on n'en peut inscrire qu'une.*

Les bissectrices des angles intérieurs se rencontrent en un point *unique*, également distant des trois côtés (110 et 111). Si l'on abaisse, de ce point, des perpendiculaires sur les côtés, elles seront égales; donc la circonférence décrite du même point comme centre, avec une de ces perpendiculaires pour rayon, est située dans l'intérieur du triangle et a pour tangentes les trois côtés (155). Donc cette circonférence est *inscrite* au triangle; etc.

161. *Remarque.* —Si l'on proposait cette question générale: *tracer une circonférence tangente à trois droites données* AB, BC, CA (*fig.* 59), on trouverait pour solutions, d'abord la circonférence O, inscrite au triangle ABC, et ensuite trois circonférences D, E, F extérieures au triangle, ayant pour centres les points où les bissectrices des angles extérieurs sont rencontrées par les bissectrices des angles intérieurs (111). Ces circonférences sont dites *ex-inscrites* au triangle.

CORDES ET ARCS.

Théorème VII.

162. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.*

1° Soient deux cercles égaux O, O′ (*fig.* 60), c'est-à-dire ayant des rayons égaux; soit ACB = A′C′B′. Je dis que

$$AB = A'B'.$$

Transportons le cercle O′ sur le cercle O, de manière que le rayon A′O′ coïncide avec le rayon AO. Les deux circonférences, ayant même centre et même rayon, coïncident; et, l'arc A′C′B′ étant égal à l'arc ACB, le point B′ tombe en B; donc

$$A'B' = AB.$$

2° Soient, sur une même circonférence, les arcs ACB, A′C′B′ (*fig.* 61), égaux entre eux. Je dis que

$$AB = A'B'.$$

Imaginons une circonférence O′ égale à la circonférence O. Prenons, sur cette circonférence auxiliaire, un arc A″C″B″ = ACB = A′C′B′. La corde A″B″ sera, en même temps, égale aux deux cordes AB, A′B′; donc, etc..

Théorème VIII.

163. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, un plus grand arc* (moindre qu'une demi-circonférence) *est sous-tendu par une plus grande corde.*

Par le théorème précédent, on peut toujours supposer que les deux arcs appartiennent à la même circonférence, et que, partant du même point, le plus petit soit appliqué sur le plus grand. Soient alors ADB et ADBC (*fig.* 62) ces arcs. Menons les rayons AO, BO, CO.

Les triangles AOB, AOC ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc (116)

$$AB < AC.$$

164. *Réciproque des deux théorèmes précédents. — Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Des cordes égales sous-tendent des arcs égaux ;*

2° *Une plus grande corde sous-tend un plus grand arc.*

Théorème IX.

165. *Le diamètre* CD (fig. 63), *perpendiculaire à une corde* AB, *partage cette corde et les deux arcs sous-tendus, chacun en deux parties égales.*

Menons les rayons OA, OB, et les cordes AC, BC.

Les obliques égales ont des projections égales; donc AE = EB; donc le diamètre CD est perpendiculaire au milieu de AB. Par suite, les cordes AC, BC sont égales; donc (164)

$$\text{arc } AC = \text{arc } BC.$$

On démontrera de même que les arcs AD, BD sont égaux.

166. *Remarque. — La droite* CD :

1° *Passe par le centre ;* 2° *est perpendiculaire à* AB ; 3° *divise* AB *en deux parties égales;* 4° *passe au milieu de l'arc* ACB; 5° *passe au milieu de l'arc* ADB.

Or, une droite étant généralement déterminée par deux conditions, il résulte, du théorème, que toute droite qui satisfait à deux des cinq conditions précédentes, satisfera nécessairement aux trois autres. Ce théorème est donc susceptible de *dix* énoncés. Autrement dit, la proposition directe entraîne *neuf* réciproques. Nous laissons au lecteur le soin de les chercher.

167. En généralisant cette manière de raisonner, on peut établir, relativement aux réciproques, le principe suivant, différent de celui qui a été posé au numéro 67.

Si, en vertu d'un théorème, une certaine ligne satisfait à plus de conditions qu'il n'en faut pour la déterminer, toute ligne de même nature, déterminée par un certain nombre de ces conditions, satisfait à toutes les autres.

La seconde réciproque du numéro 156 est évidente par ce principe.

Théorème X.

168. *Deux cordes égales sont également éloignées du centre; et, de deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.*

1° Soient (*fig.* 19) les cordes égales AB, A'B'. Je dis qu'elles sont également distantes du centre O, c'est-à-dire que les perpendiculaires OC, OC' sont égales (70).

D'après l'une des réciproques de la proposition précédente, ces perpendiculaires divisent les cordes, chacune en deux parties égales. Si donc nous menons les rayons AO, A'O', nous formerons deux triangles rectangles ACO, A'CO' égaux entre eux, comme ayant l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal. Donc

$$OC = OC'.$$

2° Soient AB, AD deux cordes inégales, ayant une extrémité commune A et inscrites au même demi-cercle. La corde AB étant supposée plus grande que AD, l'arc ADB sera plus grand que l'arc AD (164). Donc la droite OE, perpendiculaire sur AD, coupe AB en un point F. Et comme OF est une oblique à AB, tandis que OC est perpendicuaire à cette corde, nous aurons

$$OF > OC;$$

d'où, à plus forte raison,

$$OE > OC.$$

Théorème XI.

169. *Deux parallèles interceptent, sur la circonférence, des arcs égaux.*

Ces parallèles peuvent être : 1° deux sécantes; 2° une sécante et une tangente; 3° deux tangentes.

Soit une sécante AB (*fig.* 64). Menons un diamètre CD perpendiculaire à cette droite, puis les tangentes EF, GH en C,D : elles sont parallèles à AB.

Nous avons (152, 165)

$$AC = CB \text{ , } DAC = DBC :$$

les deux derniers cas sont donc démontrés.

Si nous menons une autre sécante IK, parallèle à AB, nous aurons de même

$$IAC = KBC;$$

d'où, à cause de

$$AC = CB,$$

il résulte

$$AI = BK.$$

CIRCONFÉRENCES SÉCANTES ET TANGENTES.

170. Deux circonférences situées dans un même plan peuvent occuper, l'une par rapport à l'autre, cinq positions différentes. Elles peuvent être, en effet : 1° extérieures l'une à l'autre; 2° tangentes extérieurement; 3° sécantes; 4° tangentes intérieurement; 5° intérieures l'une à l'autre.

Nous allons chercher quelles sont les relations de grandeur qui existent entre les rayons et les distances des centres, dans ces cinq circonstances.

171. *Lemme. — Si deux circonférences ont un point commun* A *(fig.*65*), situé d'un côté de la ligne des centres* OO′, *elles en ont un second*, B, *symétrique du premier par rapport à cette ligne.*

Abaissons du point A la perpendiculaire ACB sur OO′, et prenons CB=CA : le point B sera dit *symétrique* de A par rapport à OO′.

Menons OA, OB : ces deux obliques, ayant des projections égales, sont égales. Donc le point B appartient à la circonférence décrite du point O comme centre, et passant en A. On verrait de même que le point B appartient à la seconde circonférence; donc, etc.

Théorème XII.

172. *Lorsque deux circonférences se coupent, la ligne des centres est perpendiculaire au milieu de la corde commune.*

Ce théorème est évident par le lemme qui précède.

Théorème XIII.

173. *Lorsque deux circonférences se touchent, la ligne des centres passe par le point de contact.*

En effet, si le point de contact était situé en dehors de la ligne des centres, les deux circonférences auraient un second point commun ; ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème XIV.

174. *Deux circonférences étant situées dans un même plan :*

1° *Si elles sont extérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons;*

2° *Si elles sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons;*

3° *Si elles sont sécantes, la distance des centres est plus petite que la somme des rayons, et plus grande que leur différence;*

4° *Si elles sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons;*

5° *Si elles sont intérieures l'une à l'autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.*

En effet :

1° $$OO' = OA + O'A' + AA' \qquad (fig.\ 66);$$

2° Les centres O, O' (*fig.*67), et le point de contact A, étant en ligne droite (173), on a

$$OO' = OA + O'A;$$

3°. Le triangle OAO' (*fig.* 68) donne

$$OO' < OA + O'A, \quad OO' > OA - O'A;$$

4° $$OO' = OA - O'A \ (\textit{fig. } 69);$$

5° $$OA = OO' + O'A' + AA' \ (\textit{fig. } 70);$$

donc

$$OO' < OA - O'A'.$$

175. *Corollaire.* — *Deux circonférences, situées dans un même plan, sont : 1° extérieures, 2° tangentes extérieurement, 3° sécantes, 4° tangentes intérieurement, 5° intérieures, suivant que la distance des centres est : 1° supérieure à la somme des rayons, 2° égale à la somme des rayons, 3° plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, 4° égale à la différence des rayons, 5° plus petite que la différence des rayons.*

Ce corollaire est évident par le premier principe sur les réciproques (67).

THÉORÈME XV.

* 176. *Lorsque deux circonférences n'ont aucun point commun, la plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener de l'une à l'autre, est un segment de la ligne des centres.*

Soient les circonférences O, O' (*fig.* 71), extérieures. Menons la ligne des centres OO', qui rencontre en A,B la première circonférence, et qui rencontre la seconde en A', B'. Joignons ensuite un point quelconque M de la première à un point quelconque M' de la seconde. Je dis que l'on aura

$$MM' < AA', \quad MM' > BB'.$$

La ligne droite MM' est plus courte que la ligne brisée MOO'M' (51); donc

$$MM' < MO + OO' + O'M',$$

ou

$$MM' < AO + OO' + O'A',$$

ou enfin

$$MM' < AA'.$$

En second lieu,

$$OO' < OM + MM' + O'M',$$

ou

$$OO' < OB + MM' + O'B',$$

ou enfin

$$MM' > BB'.$$

La démonstration serait la même pour deux circonférences intérieures l'une à l'autre.

* 177. *Corollaire. — La plus grande et la plus petite droite que l'on puisse mener à une circonférence, d'un point extérieur ou intérieur, sont les distances de ce point aux extrémités du diamètre qui y passe.*

MESURE DES ANGLES.

178. En général, *mesurer* une grandeur A, c'est chercher le rapport qui existe entre A et une autre grandeur B, de même espèce, prise pour unité. Si la comparaison immédiate ne peut être établie, en tâche de la ramener à celle de deux grandeurs A′ et B′, choisies de telle sorte, que leur rapport étant connu, on puisse facilement en conclure le rapport de A à B. Si ces rapports sont égaux, la question est simplifiée autant que possible ; car le nombre qui mesure A′, lorsque B′ est prise pour unité, est précisément celui qui aurait exprimé la mesure de A, si la comparaison immédiate de A à B avait pu être faite et que l'on eût pris B pour unité.

Ce procédé, qui consiste à substituer à la mesure directe d'une grandeur la mesure d'une grandeur auxiliaire, est fréquemment employé en Géométrie. Nous allons voir, par exemple, comment on est parvenu à remplacer la comparaison de deux angles, par la comparaison de deux arcs décrits d'un même rayon, avec les sommets de ces angles pour centres.

THÉORÈME XVI.

179. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre, correspondant à des arcs égaux, sont égaux.*

1°, Soient les deux cercles égaux O, O′ (*fig.* 72), et soit ACB = A′C′B′. Je dis que les angles *au centre* AOB, A′O′B′ sont égaux.

Menons les cordes AB, A′B′ : ces cordes sont égales (162). Par suite, les triangles AOB, A′O′B′ sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun; donc, etc.

2° Si les arcs égaux sont situés sur une même circonférence, on ramène ce cas au précédent, comme on a fait au n° 162.

THÉORÈME XVII.

180. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles au centre sont entre eux comme les arcs correspondants.*

Par la proposition précédente, nous pouvons toujours supposer que les deux arcs sont situés sur la même circonférence, et que, leurs extrémités coïncidant, le plus petit arc soit appliqué sur le plus grand.

Cela posé, soient AB, AC (*fig.* 73) les arcs, AOB, AOC les angles correspondants. Je dis que le rapport des angles est égal à celui des arcs, ou que l'on a

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}.$$

Il y a deux cas à distinguer, selon que les arcs AB, AC sont commensurables ou incommensurables entre eux.

1° Supposons les arcs AB, AC commensurables, et soit A*a* leur plus grande commune mesure. Supposons en outre, pour fixer les idées, que cette plus grande commune mesure soit contenue 5 fois dans l'arc AB, et 8 fois dans l'arc AC [1], de telle sorte que le rapport des arcs soit $\frac{5}{8}$. Divi-

[1] On démontre, en Arithmétique, que les quotients de deux grandeurs, par leur plus grande commune mesure, sont deux nombres premiers entre eux, et que la réciproque est vraie.

sons l'arc ABC en 8 parties égales; et, par les points de division a, b, c,..., et le centre O, menons les droites indéfinies Oa, Ob, Oc,... Il résulte, de cette construction, des angles AOa, aOb,..., tous égaux entre eux, comme répondant à des arcs égaux. Or, les angles AOB, AOC contiennent, respectivement, 5 fois et 8 fois l'angle AOa, lequel est ainsi leur plus grande commune mesure. Le rapport de AOB à AOC est donc $\frac{5}{8}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

* 2° Supposons les arcs AB, AC (*fig.* 74) incommensurables entre eux. Je dis que l'on aura encore

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}}.$$

Pour bien fixer le sens de cette proposition, il est essentiel de rappeler ce que l'on entend par *rapport de deux grandeurs incommensurables.*

A cet effet, divisons l'arc AC en n parties égales; soit D le dernier point de division, précédant le point B, et soit m le nombre des divisions contenues dans AD. Divisons ensuite l'arc AC en n' parties égales, *moindres que la moitié* de DB. Soit D′ le point de division qui précède immédiatement B, et soit m' le nombre des divisions contenues dans AD′. De même, divisons AC en n'' parties égales, moindres que la moitié de BD′ ; etc. Si nous continuons ainsi, nous trouverons une série de points D, D′, D″, qui s'approcheront indéfiniment du point B, *sans jamais l'atteindre.* En effet, *les arcs* BD, BD′, BD″, ... *diminuent plus rapidement que les termes de la progression*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots;$$

et aucun de ces arcs ne peut être nul, puisque AB et AC sont incommensurables.

D'après cela, l'arc AB est la *limite* des arcs AD, AD′, AD″,... D'un autre côté, les *rapports de* AD *à* AC, *de* AD′ *à* AC, *de* AD″ *à* AC, ..., respectivement exprimés par les fractions $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \ldots$, *augmentent sans cesse, tout en restant inférieurs à l'unité :* ils tendent donc vers une certaine limite. Cette limite est ce qu'on appelle *rapport* de AB à AC.

Revenons actuellement à la comparaison des angles AOB, AOC ; et, en conservant les constructions indiquées tout à l'heure, supposons que l'on joigne les points D, D′, D″,..... au centre O, par les droites indéfinies OD, OD′ OD″,... Les arcs AD et AC, AD′ et AC,... étant commensurables, nous aurons

$$\frac{\mathrm{AOD}}{\mathrm{AOC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}, \quad \frac{\mathrm{AOD}'}{\mathrm{AOC}} = \frac{\mathrm{AD}'}{\mathrm{AC}}, \quad \frac{\mathrm{AOD}''}{\mathrm{AOC}} = \frac{\mathrm{AD}''}{\mathrm{AC}}, \ldots$$

D'après la définition qui vient d'être rappelée, la limite des premiers membres de ces égalités est le rapport de AOB à AOC, et la limite des seconds membres est celui de AB à AC. D'ailleurs, *lorsque deux séries de quantités variables ont tous leurs termes égaux, chacun à chacun, la limite des premières quantités est égale à la limite des secondes* [1]; donc

$$\frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{AOC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}.$$

* 181. Nous venons de donner, avec tous les développements nécessaires, le principe de la proportionnalité entre les grandeurs incommensurables. Le raisonnement que nous avons employé subsistant dans toutes les circonstances analogues, nous le supprimerons à l'avenir, nous contentant de considérer les proportions entre grandeurs commensurables. Mais le lecteur devra répéter, à chaque fois, la démonstration.

182. Par le théorème ci-dessus, la comparaison des angles se trouve, ainsi que nous l'avions annoncé, remplacée par la comparaison des arcs décrits d'un même rayon, et des sommets de ces angles comme centres. Si, comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous prenons pour unité d'angle l'*angle droit*, et si en même temps nous prenons pour unité d'arc le quart de la circonférence, ou le *quadrans*, le même théorème entraîne la conséquence suivante :

183. *Corollaire. — Tout angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.*

---

[1] Autrement dit, *une même variable ne peut avoir qu'une limite.*

En effet, si dans la proportion

$$\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}} = \frac{\text{AB}}{\text{AC}},$$

on suppose que AOC et AC soient l'unité d'angle et l'unité d'arc, le rapport $\frac{\text{AOB}}{\text{AOC}}$, *mesure* de l'angle AOB, sera égal au nombre qui mesure l'arc AB. L'énoncé précédent exprime que ces deux mesures sont égales.

184. *Remarque sur la mesure des angles par les arcs correspondants.* — Afin de pouvoir évaluer plus facilement les angles, on suppose le quadrans partagé en 90 parties égales, appelées *degrés*. Chaque degré se divise en 60 *minutes;* chaque minute en 60 *secondes*, etc. Si, par le centre de la circonférence, on mène ensuite des droites à tous les points de division, l'angle droit sera partagé en 90 angles égaux entre eux; puis chacun de ceux-ci en 60 angles égaux entre eux, etc. D'après ce que nous avons démontré ci-dessus, la grandeur d'un angle dépend seulement du nombre de degrés, minutes, secondes,... de l'arc correspondant. C'est pourquoi l'on dit: *un angle de* 1°, *un angle de* $1'$, *un angle de* $1''$,..., en faisant porter, en quelque sorte, sur l'angle droit, le mode de division établi d'abord pour le quadrans.

185. Il est bon de se rappeler les valeurs suivantes:

1° La circonférence est partagée en 360°;

2° L'angle droit $= 90^\circ$;

3° L'angle d'un triangle équilatéral $= 60^\circ$;

4° Chacun des angles aigus d'un triangle rectangle isocèle $= 45^\circ$; etc.

Théorème XVIII.

186. *Tout angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Cet énoncé signifie qu'un angle tel que BAC (*fig.* 75), est la moitié de l'angle au centre BOC, correspondant à l'arc BC compris entre les côtés du premier.

Cela posé, plusieurs cas peuvent se présenter.

D'abord, si les côtés de l'angle sont des sécantes, le centre peut être situé sur un des côtés, ou entre eux, ou extérieurement à ces côtés.

1° Soit l'angle BAD, dont l'un des côtés passe par le centre. Je dis que BAD est la moitié de BOD.

En effet, l'angle BOD est extérieur au triangle isocèle BOA ; donc, etc.

2° Soit l'angle BAC. Je dis que cet angle est la moitié de BOC.

Menons le diamètre AOD; nous aurons

$$\mathrm{BAD} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{BOD},\quad \mathrm{DAC} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{DOC};$$

donc, etc.

3° On prouverait de même que l'angle BAE est la moitié de BOE.

Considérons maintenant l'angle BAC (*fig.* 76), formé par une tangente AC et par une sécante AB.

Menons le diamètre AOD. L'angle BAC sera décomposé en un angle aigu BAD et un angle droit DAC. Or, l'angle BAD a pour mesure $\frac{1}{2}$ BD, et l'angle droit a pour mesure le quadrans, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ DEA. Donc, etc.

187. 1^er^ *Corollaire. — Tous les angles* ACB, AC′B, AC″B,... (*fig.* 77), *inscrits à un même segment* ACB, *sont égaux.*

188. *Remarque.* — A cause de cette propriété, le segment ACB est dit *capable* de l'angle ACB.

189. 2^e^ *Corollaire. — Un angle inscrit est aigu, droit ou obtus, selon que l'arc compris entre ses côtés est supérieur, égal ou inférieur à la demi-circonférence.*

Théorème XIX.

190. *Un angle* BAC (fig. 78), *dont le sommet est dans la circonférence, a pour mesure la demi-somme des arcs* BC, DE *compris entre ses côtés.*

Menons DC. L'angle BAC, extérieur au triangle CAD, est égal à la somme des angles C et D. Or, l'angle C a pour mesure $\frac{1}{2}$ DE, et l'angle D a pour mesure $\frac{1}{2}$ BC. Donc la mesure de BAC est $\frac{1}{2}$ (BC + DE).

Théorème XX.

191. *Un angle dont le sommet est hors la circonférence, a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés.*

La démonstration est la même que celle du théorème précédent, excepté quand l'angle est formé par deux tangentes. Dans ce dernier cas, il est facile de voir que l'angle BAC (*fig.* 79), a pour mesure $\frac{1}{2}$ (BDC—BEC).

192. *Corollaire. — Le lieu géométrique du sommet d'un angle dont les côtés passent par deux points fixes* A, B (fig. 77), *est un arc de circonférence.*

Soit ACB une première position de l'angle. Par les trois points A, B, C faisons passer une circonférence (159). En vertu des trois théorèmes précédents, un angle dont les côtés passent en A et en B est égal à ACB, ou différent de ACB, suivant que son sommet est ou n'est pas sur l'arc ACC'B. Donc, etc.

QUADRILATÈRE INSCRIT OU CIRCONSCRIT.

Théorème XXI.

193. *Dans tout quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires.*

Dans le quadrilatère inscrit ABCD (*fig.* 80) les angles A et C ont pour mesure, respectivement,

$$\tfrac{1}{2}\,arc\ \mathrm{BCD},\ \tfrac{1}{2}\,arc\ \mathrm{BAD}.$$

Leur somme a donc pour mesure la moitié de la circonférence.

194. *Réciproque* (à démontrer). — *Un quadrilatère est inscriptible, lorsque ses angles opposés sont supplémentaires.*

195. *Lemme.* — 1° *D'un point situé hors d'un cercle on peut toujours mener deux tangentes à la circonférence;* 2° *ces deux tangentes sont égales.*

1° Joignons le point A (*fig.* 81) au centre O; sur OA, comme diamètre, décrivons une circonférence OBAC; elle coupera la circonférence O en deux points B, C. Menons AB, AC, OB, OC.

L'angle OBA, inscrit à un demi-cercle, est droit (189); donc AB, perpendiculaire au rayon OB, est une tangente (155).

2° Les triangles rectangles ABO, ACO sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un côté égal; donc

$$AB = AC.$$

Théorème XXIII.

196. *Dans tout quadrilatère circonscrit, les côtés opposés, pris deux à deux, forment des sommes égales.*

Soient E, F, G, H (*fig.* 82) les points de contact. Par le lemme qui précède, nous avons

$$AG = AH,\quad DG = DF,\quad BE = BH,\quad CE = CF;$$

d'où

$$AG + DG + BE + CE = AH + BH + DF + CF,$$

ou bien

$$AD + BC = AB + CD.$$

197. *Réciproque* (à démontrer). — *Un quadrilatère est circonscriptible lorsque ses côtés opposés, pris deux à deux, forment des sommes égales.*

PROBLÈMES RELATIFS AUX DEUX PREMIERS LIVRES.

Problème I.

Par un point donné C, *mener une perpendiculaire à une droite donnée* AB.

Ce problème présente quatre cas principaux.

1

1er *Cas.* — *Le point étant situé sur la droite.*

Du point C comme centre (*fig.* 83), et d'un même rayon arbitraire, décrivons deux arcs qui coupent en D, E la droite AB. De ces deux points comme centres, et d'un même rayon plus grand que CD, décrivons, d'un même côté de AB, deux arcs qui se couperont en un point F (175). La droite CF est la perpendiculaire demandée.

En effet, chacun des points C, F est également distant des extrémités D, E de la droite finie DE. Donc CF est perpendiculaire au milieu de DE.

2e *Cas. — Le point étant situé sur la droite, et vers son extrémité.*

Décrivons une circonférence qui passe au point donné C (*fig.* 84) et qui coupe la droite AB en un second point E. Joignons ce point au centre D par le diamètre EDF; menons enfin CF : cette droite sera perpendiculaire à AB.

En effet, l'angle ECF, inscrit à un demi-cercle, est droit.

3e *Cas. — Le point étant situé hors la droite.*

Du point C (*fig.* 85) comme centre, et d'un rayon suffisamment grand, traçons une circonférence qui coupe aux points D, E la droite donnée AB; puis, de ces deux points comme centres, et d'un même rayon plus grand que la moitié de DE, décrivons deux arcs qui se coupent en F. La droite CF est la perpendiculaire demandée.

En effet, chacun des points C, F est également distant des extrémités de DE; donc, etc.

4e *Cas. — Le point étant situé hors la droite, et vers son extrémité.*

Traçons arbitrairement deux circonférences ayant leurs centres D, E (*fig.* 86) situés sur AB, et se coupant au point donné C. Ces lignes se coupent une seconde fois (171) en un point F; et, si nous menons CF, cette droite sera perpendiculaire à AB (72).

PROBLÈME II.

Diviser en deux parties égales une droite donnée AB (*fig.* 87).

Des extrémités A, B comme centres, avec un même rayon arbitraire, plus grand que la moitié de AB, décrivons deux circonférences : elles se coupent en deux points C, D (175), également éloignés, chacun, des extrémités de AB. Donc la droite CD est perpendiculaire au milieu de AB.

Remarque. — En répétant la même construction, on peut diviser une droite en 4, 8, 16,... parties égales.

Problème III.

Par un point donné A, *mener une parallèle à une droite donnée* BC.

1[re] *Solution*. — Du point A comme centre (*fig*. 88), avec un rayon suffisamment grand, traçons un arc DF qui coupe en D la droite BC. Du point D comme centre, avec le même rayon, traçons l'arc AE. Enfin, du même point D comme centre, avec une ouverture de compas égale à la distance AE, décrivons un nouvel arc qui coupe en F le premier. La droite AF sera la parallèle demandée.

En effet, si nous menons les droites AE, FD, le quadrilatère AEDF, qui a ses côtés opposés égaux deux à deux, est un parallélogramme.

2[e] *Solution*. Plaçons, sur le plan ABC (*fig*. 89), une *équerre* PQR, de manière que l'hypoténuse QR coïncide avec la droite BC, et que le côté QP appuie contre une *règle* fixe MN; puis, faisons glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que QR vienne, en Q'R', passer par le point A. Les droites QR, Q'R' formant, avec la droite MN, des angles correspondants égaux, sont parallèles (86).

Problème IV.

Par un point donné A, *mener une droite qui fasse, avec une droite donnée* BC, *un angle égal à un angle donné* D.

1[er] *Cas*. — *Le point étant situé sur la droite*.

Du point D comme centre (*fig*. 90), décrivons un arc qui coupe en E, F les côtés de l'angle donné. Du point A comme centre, avec le même rayon, traçons un autre arc F'E'. Enfin, du point F' comme centre, avec une ouverture de compas égale à la distance FE, décrivons un dernier arc qui coupe F'E' en un point E'. AE' est la droite cherchée.

En effet, les triangles DEF, AE'F' sont égaux comme ayant les côtés égaux, chacun à chacun.

2e *Cas. — Le point étant situé hors la droite.*

Menons, par le point A (*fig.* 91), une parallèle AE à BC (*Problème* II); puis, faisons EAF égal à l'angle donné D : AF est la droite demandée.

En effet, les angles alternes-internes EAF, AFB sont égaux.

Remarques. — 1° Le problème que nous venons de résoudre admet *deux* solutions, excepté quand l'angle D est droit.

2° La construction indiquée dans le premier cas peut servir à *construire un arc égal à un arc donné.*

Problème V.

Diviser en deux parties égales un angle donné BAC (fig. 92).

Décrivons, du point A comme centre, un arc qui coupe en B, C les côtés de l'angle; puis, de ces derniers points comme centres, avec un même rayon suffisamment grand, traçons deux arcs qui se coupent en un point D : la droite AD est la bissectrice demandée.

En effet, si nous menons BD, CD, les deux triangles ABD, ACD, seront égaux.

Remarque. — La même construction permet de diviser un arc en 2, 4, 8,... parties égales.

Problème VI.

1° *Par trois points donnés* A, B, C. (fig. 93) *faire passer une circonférence*; 2° *trouver le centre d'une circonférence donnée ou d'un arc donné.*

1° Des points A, B comme centres, et d'un même rayon, décrivons deux arcs qui se coupent aux points D, E. Des points B, C comme centres, et d'un même rayon, décrivons deux arcs qui se coupent aux points F, G. Enfin, menons les droites DE, FG : leur point de rencontre est le centre O de la circonférence cherchée (159).

2° Si ABC est donné, on prend sur cet arc trois points A, B, C; et l'on achève comme précédemment.

Remarque. — Cette même construction donne *le centre du cercle circonscrit à un triangle donné.*

Problème VII.

Inscrire un cercle à un triangle donné ABC (fig. 94).

Menons les bissectrices AO, BO de deux des angles. (*Problème* V). Ces droites se coupent en un point O, centre du cercle cherché (160). Si donc, de ce point comme centre, avec un rayon égal à sa distance au côté AB, nous traçons une circonférence, elle touchera les trois côtés du triangle (158).

Remarque. — Une construction analogue donne les centres des cercles ex-inscrits.

Problème VIII.

Construire un triangle, connaissant deux côtés a, b (fig. 95) *et l'angle compris* O.

Tirons la droite indéfinie Cx; formons au point C l'angle xCy égal à l'angle donné O (*Problème* IV); prenons $CB = a$, $CA = b$; et menons AB. Le triangle demandé est ABC.

Remarque. — Ce problème est toujours possible.

Problème IX.

Construire un triangle, connaissant un côté et deux angles.

Si les deux angles doivent être, l'un et l'autre, adjacents au côté donné, la construction se fait immédiatement. Si l'un des angles donnés doit être opposé au côté connu, le troisième angle, étant supplémentaire de la somme des deux premiers, s'obtient facilement; et le problème est ramené au premier cas.

Remarque. — Le problème est possible toutes les fois que la somme des deux angles donnés est moindre que 2 droits.

Problème X.

Construire un triangle, connaissant les trois côtés a, b, c (fig. 96).

Sur une droite indéfinie xy, prenons $BC = a$. Des points B, C comme centres, avec des rayons respectivement égaux à c et b, traçons deux circonférences. Enfin, joignons l'un des points où elles se coupent, avec les points B, C, par les droites AB, AC. Le triangle demandé est ABC.

Remarque. — Supposons

$$a > b > c,$$

d'où évidemment,

$$a > b - c;$$

en sorte que la distance des centres est plus grande que la différence des rayons. Le problème sera donc possible si a, b, c satisfont à la condition

$$a < b + c.$$

Ainsi, *pour que l'on puisse construire un triangle connaissant ses trois côtés, il faut et il suffit que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres.*

Problème XI.

Construire un triangle, connaissant deux côtés a, b (fig. 97) *et l'angle O opposé au côté b.*

Contruisons l'angle xBy égal à O. Prenons $BC = a$; puis, du point C comme centre, avec b pour rayon, traçons un arc qui coupe en A la droite By. Le triangle demandé est ABC.

Discussion. — Ce problème présente trois cas principaux, selon que l'angle O est aigu, droit ou obtus.

1er *Cas.* $O < 1^d$. Abaissons, du point C, la perpendiculaire CD sur By.

1° Si b est moindre que CD, la circonférence décrite du point C comme centre ne rencontre pas By (158), et le problème est impossible;

2° Si $b = $ CD, la circonférence touche By en D, le problème admet *une* solution, et le triangle ABC est rectangle;

3° Si l'on a CD $< b < a$, la circonférence coupe By en *deux* points situés d'un même côté du sommet B, et le problème admet *deux* solutions;

4° Si $b = a$, la circonférence passe en B, le problème n'admet plus qu'*une* solution, et le triangle ABC est isocèle;

5° Enfin, si l'on a $b > a$, la circonférence coupe By en un point, et son prolongement By' en un point : le problème admet *une seule* solution.

2^e *Cas.* $O = 1^d$. Le problème a *une* solution si l'on a $b > a$. Il est impossible pour $b \stackrel{=}{<} a$.

3^e *Cas.* $O > 1^d$. Le problème n'est possible que si l'on a $b > a$. Il admet *une* solution.

PROBLÈME XII.

Construire un carré, connaissant son côté AB (fig. 99).

Parmi les différentes solutions de ce problème, nous indiquerons la suivante, qu'il est aisé de démontrer.

Des points A et B comme centres, avec AB pour rayon, décrivez les arcs BCG, ACD, qui se coupent en C. De ce point C comme centre, avec le même rayon, décrivez l'arc BD, qui coupe ACD au point D. Menez AD, qui coupe BCG en E. Du point C comme centre, tracez l'arc GEF; menez FB, FG, GA. Le carré demandé est ABFG.

PROBLÈME XIII.

Construire un polygone égal à un polygone donné.

Soit ABC... (*fig.* 100) le polygone donné. Traçons, dans son plan, une droite quelconque xy; puis, par les différents sommets A, B, C,..., menons les droites Aa, Bb, Cc,... parallèles entre elles.

Traçons actuellement une droite quelconque $x'y'$. Au point a' de cette droite, faisons un angle A$'a'y'$ égal à Aay. Prenons, à partir du point a', les distances $a'b'$, $a'c'$,..., respectivement égales à ab, ac,... Par les points b', c',.., menons des parallèles à a' A$'$. Enfin, prenons a'A$' = a$A, b'B$'=b$B, c'C$'=c$C, etc. Le polygone demandé est A$'$B$'$C$'$...

PROBLÈME XIV.

Construire, sur une droite donnée AB (fig. 101), *un arc capable d'un angle donné* C.

Supposons le problème résolu, et soit AMB le segment cherché. Si, au point B, nous menons la tangente BE, l'angle EBD, formé par cette tangente et par le prolongement de AB, sera égal à l'angle donné C (186). D'ailleurs, BE est perpendiculaire au rayon OB; et le centre O se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Donc, pour résoudre le problème proposé :

Menez une droite BE qui fasse, avec le prolongement de AB, un angle égal à l'angle donné C. Au point B, élevez BO, perpendiculaire à BE; et, sur le milieu de AB, élevez la perpendiculaire FO. Du point O, où ces perpendiculaires se coupent, décrivez l'arc BMA qui détermine, avec la corde AB, le segment AMBA, capable de l'angle donné.

PROBLÈME XV.

Par un point donné, mener une tangente à une circonférence donnée (*Voyez* n^{os} 155 et 195.).

PROBLÈME XVI.

Mener une tangente commune à deux cercles donnés O, O′ (fig. 160).

Soit AB l'une des tangentes inconnues. Joignons les points de contact A, B, aux centres O, O′, par les rayons OA, O′B : ces droites, perpendiculaires à AB, seront parallèles entre elles. Si donc, par le centre O′, nous menons O′E parallèle à AB, nous connaîtrons, dans le triangle rectangle OEO′, l'hypoténuse OO′ et le côté OE, égal à la différence des rayons OA, O′B.

De cette *analyse* résulte la construction suivante :

Sur la distance OO′ des centres, comme diamètre, décrivez une circonférence OEO′E′. Du point O, centre du plus grand des deux cercles, décrivez, avec une ouverture de compas égale à la différence des rayons donnés, une circonférence EKE′. Joignez les points E, E′, où elle coupe la circonférence OO′, avec le centre O, par les rayons OEA, OE′A′. Menez aussi, par le centre O′, les rayons O′B, O′B′, respectivement parallèles à OA, OA′. Enfin, tirez AB, A′B′ : ces droites seront tangentes aux cercles donnés.

Remarques I. — La construction qui vient d'être indiquée donne les tangentes *extérieures*. En remplaçant la circonférence EKE′ par une circonférence FLF, décrite du centre O, avec un rayon égal à la somme des rayons donnés, on obtiendra les tangentes *intérieures* CD, C′D′. Le problème admet donc, en général, *quatre* solutions qui peuvent, dans certains cas particuliers, se réduire à *trois*, à *deux* ou à *une* : il est impossible si les cercles donnés sont intérieurs l'un à l'autre.

II. La plupart des Problèmes contenus dans ce paragraphe ont été résolus par la *Synthèse*. Cette méthode se réduit à indiquer la construction du Problème, et à la justifier après coup. On voit qu'elle suppose une véritable *divination* de la solution. Aussi, n'est-elle applicable qu'à des questions excessivement simples. L'*Analyse*, dont nous venons de faire une application, consiste à *supposer le* *problème résolu*, et à chercher, au moyen des théorèmes qui semblent devoir s'y rapporter, des *relations entre les données et les inconnues* : si l'on peut conclure, de ces relations, une série de constructions déterminant de proche en proche, au moyen des *données*, les *inconnues auxiliaires* et les *inconnues principales*, le problème est résolu [1].

PROBLÈME XVII.

Trouver la plus grande commune mesure de deux droites données.

La commune mesure de deux droites A, B, est une autre droite. La recherche de la plus grande commune mesure de deux droites équivaut donc à l'opération du plus grand commun diviseur de deux nombres.

D'après cela, pour résoudre le problème proposé :

Portez la plus petite droite B sur la plus grande A, autant de fois qu'elle y peut être contenue; portez le reste C sur B autant de fois qu'il y peut être contenu; puis le deuxième reste D sur le premier reste C, etc. Si les droites données sont *commensurables*, vous arriverez à un dernier reste M qui divisera exactement le reste précédent, et qui sera la plus grande commune mesure demandée.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait trouvé

$$A = 3B + C, \quad B = 2C + D,$$
$$C = 7D + E, \quad D = 3E.$$

Ces équations donnent

$$C = 21E + E = 22\,E, \quad B = 44E + 3E = 47E,$$
$$A = 141E + 22E = 163E.$$

Ainsi, la commune mesure E est contenue 163 fois dans A et 45 fois dans B ; donc

$$\frac{A}{B} = \frac{163}{45}.$$

[1] Ainsi que le fait remarquer avec raison M. Vincent, dans son remarquable *Cours de Géométrie élémentaire*, l'Analyse est la véritable *méthode d'invention*, la Synthèse n'est qu'une *méthode de démonstration*.

Si les droites données sont incommensurables, l'opération précédente n'aura pas de fin, et l'on ne pourra pas déterminer rigoureusement le rapport des deux droites. Mais, en négligeant le dernier reste obtenu, on obtiendra, au lieu de ce rapport, une valeur qui en approchera d'autant plus, que le reste négligé sera plus petit. (*Voyez* les Traités d'Arithmétique et d'Algèbre.)

Remarques I.—La règle ci-dessus, exacte en théorie, est à peu près illusoire dans la pratique, parce que les *pointes du compas* ne peuvent se rapprocher indéfiniment. On évite cet inconvénient en doublant ou triplant, à chaque fois, les deux restes consécutifs que l'on veut comparer.

II. Lorsque deux droites A, B sont commensurables, elles ont *une infinité de communes mesures* : la plus grande commune mesure M jouit de cette propriété que les quotients $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$ sont *premiers entre eux* (1). Dans l'exemple ci-dessus, ces quotients étaient 163 et 45; aussi la fraction $\frac{163}{45}$ est irréductible.

PROBLÈME XVIII.

Trouver la plus grande commune mesure de deux angles donnés.

Des sommets de ces angles, comme centres, décrivons, avec un même rayon, des arcs A, B, compris entre les côtés des deux angles. En opérant comme dans le problème précédent, c'est-à-dire en cherchant combien de fois A contient B, puis combien de fois B contient le reste C de la première opération, etc., nous pourrons trouver la plus grande commune mesure M de ces arcs. Et si nous prenons l'angle correspondant à M, cet angle sera la plus grande commune mesure cherchée.

FIN DU LIVRE DEUXIÈME.

---

(1) (P. 43, Note.)

EXERCICES SUR LE LIVRE II.

36. Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle ayant pour sommets les pieds de ces droites.

37. Les circonférences qui passent par deux des sommets d'un triangle et par le point de concours des hauteurs, sont égales à la circonférence circonscrite au triangle.

38. Si, sur les côtés d'un triangle quelconque ABC, on construit extérieurement des triangles équilatéraux ABC', BCA', CAB', et si l'on mène les droites AA',BB', CC' : 1° ces trois lignes sont égales ; 2° elles se coupent en un même point O ; 3° les côtés du triangle ABC sont vus, de ce point, sous des angles égaux.

39. Les bissectrices des angles intérieurs d'un quadrilatère forment un quadrilatère inscriptible.

40. Les bissectrices des angles formés par les côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible, sont perpendiculaires entre elles.

41. Les circonférences qui ont pour cordes les côtés d'un quadrilatère inscriptible, donnent lieu, par leurs secondes intersections, à un quadrilatère inscriptible.

42. Les points de concours des hauteurs des triangles déterminés par les sommets d'un quadrilatère inscriptible, sont les sommets d'un quadrilatère égal au premier.

43. Un polygone inscrit, de n côtés, étant décomposé en triangles au moyen de diagonales, les points de concours des hauteurs de ces triangles sont situés, $n-2$ à $n-2$, sur $\frac{n(n-1)}{2}$ circonférences, symétriques de la circonférence donnée, par rapport aux côtés ou aux diagonales du polygone.

44. Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'une circonférence sur les côtés d'un triangle inscrit, sont situés sur une même droite (*Théorème de Simpson*).

45. D'un point pris sur une circonférence, on mène trois cordes ; sur ces droites, prises comme diamètres, l'on décrit trois circonférences : les points où ces lignes se coupent deux à deux, sont situés sur une même droite.

46. Si, par le point de contact de deux circonférences, on mène deux cordes communes AB, CD, les droites AD, BC, qui joignent les extrémités de ces cordes, sont parallèles.

47. Si, par le point d'intersection de deux circonférences, on mène deux cordes communes AB, CD, les droites AD, BC, qui joignent les extrémités de ces cordes, font entre elles un angle constant.

48. Si, à un cercle I, inscrit à un angle O, on mène des tangentes *intérieures* ou *extérieures* : 1° les tangentes intérieures AB déterminent des triangles ayant même périmètre ; 2° les tangentes extérieures CD déterminent des triangles dans lesquels l'excès du demi-périmètre sur le côté CD est constant ; 3° en joignant le centre aux extrémités des tangentes intérieures ou extérieures, on forme des angles constants pour chaque espèce de tangente ; 4° les angles au centre, pour la tangente extérieure et pour la tangente intérieure, sont supplémentaires.

49. 1° Les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les points de contact du cercle inscrit et d'un des cercles ex-inscrits sont égaux, chacun, au demi-périmètre moins un côté ; la somme de ces segments est égale au demi périmètre (1).

50. Dans tout triangle ABC : 1° la circonférence qui passe par le centre I du cercle inscrit, par les extrémités d'un côté et par le centre I' du cercle ex-inscrit tangent à ce côté, a son centre sur la circonférence circonscrite ; 2° la circonférence qui passe par les extrémités d'un côté et par les centres I'', I''' des cercles ex-inscrits, tangents aux prolongements de ce côté, a son centre sur la circonférence circonscrite.

51. Dans tout triangle , la somme des rayons des cercles ex-inscrits est égale au rayon du cercle inscrit, augmenté de quatre fois le rayon du cercle circonscrit.

52. Dans tout triangle, la somme des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit est égale à la somme des distances des côtés au centre du cercle circonscrit.

53. Si, par le centre O d'un cercle, on élève une perpendiculaire OC au rayon OA, égale à la corde AB d'un arc ADB ; l'arc décrit du point C comme centre, avec une ouverture de compas égale au rayon OA, divise ADB en deux parties égales.

54. Etant donnés une circonférence et un rayon prolongé OA ; si au point A l'on mène une perpendiculaire AB à ce rayon, et une sécante ADE à la circonférence ; puis que, par les points d'intersection D, E, on mène les tangentes DC, EB ; ces droites déterminent, par leurs intersections avec la perpendiculaire, deux distances égales AB, AC.

---

(1) On trouvera, plus loin, la démonstration de ce théorème.

55. Trouver la bissectrice de l'angle de deux droites qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur point de rencontre.

56. Deux circonférences qui se coupent étant données, mener, par l'un des points d'intersection, une sécante qui ait une longueur donnée.

57. Inscrire, entre deux circonférences données, une droite parallèle à une droite donnée et qui ait une longueur donnée.

58. Par deux points A, B, donnés sur une circonférence, mener deux cordes parallèles AC, BD, dont la somme soit donnée.

59. Construire un triangle, connaissant les pieds des trois hauteurs.

60. Construire un triangle, connaissant la base, la hauteur et l'angle au sommet.

61. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit.

62. Construire un triangle, connaissant la base, la somme des deux autres côtés, et un angle à la base.

63. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des deux autres côtés, et un angle à la base.

64. Construire un triangle, connaissant un angle à la base, la hauteur et le périmètre.

65. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la somme des deux derniers côtés.

66. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et la différence des deux derniers côtés.

67. Construire un triangle, connaissant un côté et le cercle inscrit.

68. Construire un triangle, connaissant le cercle inscrit et l'un des cercles ex-inscrits.

69. Construire un triangle, connaissant deux des cercles ex-inscrits.

70. Construire un triangle, connaissant les centres des cercles ex-inscrits.

71. Construire un triangle, connaissant un côté, l'angle opposé et le rayon du cercle inscrit.

72. Construire un triangle, connaissant un côté, la somme des deux autres côtés et le rayon du cercle inscrit.

73. Construire un triangle, connaissant un côté, la différence des deux autres côtés et le rayon du cercle inscrit.

74. Construire un triangle, connaissant le périmètre, un angle, et le rayon du cercle inscrit.

75. Construire un triangle, connaissant le périmètre, un angle et la hauteur correspondante.

76. Construire un triangle, connaissant les longueurs de la médiane, de la bissectrice et de la hauteur issues d'un même sommet.

77. Construire un triangle, connaissant les longueurs de la bissectrice et de la hauteur issues d'un même sommet, ainsi que le rayon du cercle circonscrit.

78. Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois parallèles données.

79. A un triangle donné, circonscrire un triangle égal à un triangle donné.

80. A un triangle donné, circonscrire un triangle équilatéral maximum.

81. Par un point donné, mener une droite qui forme, avec les deux côtés d'un angle donné, un triangle ayant un périmètre donné.

82. Etant donnés un triangle ABC et un point O, mener par ce point une droite OMN, telle que le segment MN, compris dans l'angle A, soit égal à la somme des segments BM, CN.

83. Construire un quadrilatère, connaissant deux angles opposés, les deux diagonales et leur angle.

84. Inscrire, à un carré donné, un autre carré donné.

85. Placer, dans l'angle A d'un triangle donné ABC, une droite DE de longueur donnée, égale à la somme des segments BD, EC.

86. Etant donnés un point et deux circonférences, mener une droite terminée aux circonférences et divisée en deux parties égales par le point.

87. Mener, dans un triangle ABC, une transversale MNP telle, que les segments MP, NP, déterminés par les côtés du triangle, soient égaux à des droites données.

88. Des sommets d'un triangle, comme centres, décrire trois circonférences tangentes deux à deux.

89. Etant donnés, sur une circonférence, deux points situés d'un même côté par rapport à un diamètre donné, trouver sur la circonférence, de l'autre côté de ce diamètre, un point tel, qu'en le joignant aux deux points donnés, les segments du diamètre, compris entre le centre et les droites de jonction, soient égaux entre eux.

90. Mener, à deux circonférences données, deux tangentes égales, faisant entre elles un angle donné.

91. Par un point, situé hors d'une circonférence, mener une sécante qui soit divisée en deux parties égales par la circonférence.

92. Inscrire, à un cercle donné, une corde de longueur donnée, qui soit divisée en deux parties égales par une corde donnée.

93. Par un point donné sur un diamètre AB, mener une transversale CD telle, que l'arc AC soit le triple de BD.

94. Décrire un cercle qui touche une circonférence donnée et qui touche, en un point donné, une droite donnée.

95. Décrire, sur une corde donnée, une circonférence qui coupe une circonférence donnée, de manière que la corde commune soit parallèle à une droite donnée.

96. Décrire d'un point donné, comme centre, une circonférence qui coupe une droite donnée, de manière que l'un des deux arcs interceptés soit capable d'un angle donné.

97. Décrire une circonférence ayant pour centre un point donné, et qui détermine, avec les côtés d'un angle donné, une corde parallèle à une droite donnée.

98. Connaissant une circonférence C, une droite XY et un point A situé sur cette droite, décrire une circonférence qui touche XY en A, et qui coupe C sous un angle donné α.

99. Connaissant deux circonférences, avec un point pris sur l'une d'elles, on propose d'en tracer une qui passe en ce point et qui coupe les deux premières sous des angles donnés α, β.

100. Quel est le lieu géométrique des sommets des triangles ayant même base AB et dans lesquels la médiane AM a une longueur donnée ?

101. Par un point D, pris sur le côté BC d'un triangle donné ABC, on mène une transversale quelconque EDF. On trace les circonférences CDE, BDF. Quel est le lieu du second point d'intersection de ces circonférences ?

LIVRE TROISIÈME.

SIMILITUDE ET MESURE DES POLYGONES.

PRÉLIMINAIRES.

198. Si quatre droites A, B, A′, B′ sont telles, que le rapport des deux premières égale le rapport des deux dernières, on a la proportion

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'};$$

et les quatre droites sont dites *proportionnelles*.

La *théorie des lignes proportionnelles*, d'un usage continuel en Géométrie, repose tout entière sur les propositions suivantes :

Théorème I.

199. *Les segments de deux droites quelconques, déterminés par trois parallèles, sont proportionnels.*

1° Si les deux droites sont parallèles, la proposition est évidente.

2° Si les droites concourent en un même point, et que les deux segments de la première soient égaux entre eux, les deux segments de l'autre droite sont aussi égaux entre eux (134) ; la proposition est donc démontrée.

3° Soient deux droites quelconques AB, CD (*fig.* 102), et trois parallèles AC, EF, BD.

Supposons que le point E partage AB en deux parties commensurables entre elles, et qui soient, par exemple, dans le rapport de 3 à 5.

Portons la plus grande commune mesure Aa, à partir du point A, sur AB; elle sera contenue 3 fois dans AE, et 5 fois dans EB.

Par les points de division a, c..., menons des parallèles aux transversales données. La droite CD sera partagée en 8 parties égales, et CF en contiendra 3.

En effet, si l'on considère trois parallèles consécutives gh, kl, mn, on retombe sur le deuxième cas. Par suite,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}.$$

* 4° Enfin, supposons les segments AE, EB (*fig.* 103), incommensurables entre eux.

Divisons AE en un certain nombre de parties égales; portons ces divisions sur EB, à partir de E; et soit I l'extrémité de la dernière.

En menant IK parallèle à AC, nous avons

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FK}}.$$

Divisons AE en parties égales, moindres que la moitié de IB; nous trouverons un dernier point de division I', situé entre I et B; d'où

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EI'}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FK'}},$$

etc.

Il est évident qu'en suivant la marche indiquée au n° 180, nous conclurons

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}.$$

200. *Réciproque. — Toute droite qui partage proportionnellement les deux côtés non parallèles d'un trapèze, est parallèle aux deux bases.*

201. 1er *Corollaire. — Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle, partage proportionnellement les deux autres côtés; — et réciproquement.*

202. 2[e] *Corollaire.* — *Les segments de deux droites quelconques, déterminés par tant de parallèles que l'on voudra, sont proportionnels.*

SIMILITUDE DES POLYGONES.

203. On se forme à peu près l'idée de la similitude en disant : *deux figures sont semblables, lorsque l'une est en grand ce que l'autre est en petit.* Mais, sous le point de vue géométrique, cette explication est trop vague. Nous arriverons à une définition nette et concise, en observant d'abord qu'étant donné un triangle, on peut toujours en construire un autre dont les côtés aient un rapport quelconque avec les côtés du premier.

En effet, soient a, b, c les côtés d'un triangle, et m un nombre quelconque. Supposons

$$a > b > c;$$

nous aurons

$$ma > mb > mc.$$

D'ailleurs, on a nécessairement

$$a < b + c;$$

d'où

$$ma < mb + mc.$$

Si donc l'on cherche à former un triangle avec ma, mb, mc pour côtés, ce triangle est possible, attendu que le plus grand des côtés donnés est moindre que la somme des deux autres (Liv. II, Prob. X).

204. Deux triangles sont dits *semblables*, lorsque les côtés du premier sont proportionnels aux côtés du second.

Deux polygones sont dits semblables, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de triangles semblables, chacun à chacun, et semblablement disposés.

205. Ces deux définitions entraînent les conséquences suivantes :

1° *Deux triangles semblables à un troisième sont semblables entre eux;*

2° *Deux polygones semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

206. Quelquefois on distingue une similitude *directe* et une similitude *inverse*.

Deux polygones sont directement ou inversement semblables, selon qu'ayant fait, dans un certain sens, le tour du premier polygone, on est obligé, pour trouver dans le second les côtés correspondants aux côtés du premier, de faire le tour de ce second polygone, dans le même sens, ou en sens contraire.

Ainsi, P et P′ (*fig.* 104) sont directement semblables, tandis que P et P″ sont inversement semblables.

Dans ces *Éléments*, nous nous occuperons seulement de la similitude directe.

THÉORÈME II.

207. *Toute parallèle* B′C′ (fig. 105) *à l'un des côtés d'un triangle* ABC, *détermine un triangle* A′B′C′ *semblable au premier.*

Nous avons (199)

$$\frac{AB'}{BB'} = \frac{AC'}{CC'},$$

ou

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}.$$

Menons C′D parallèle à AB ; nous aurons de même

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}.$$

Mais la figure BB′C′D est un parallélogramme ; donc

$$BD = B'C';$$

et enfin

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Théorème III.

208. *Deux triangles semblables sont équiangles entre eux.*

Soient (*fig.* 106)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}:$$

je dis que

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Prenons $AB'' = A'B'$, $AC'' = A'C'$, et menons $B''C''$.

En vertu de l'hypothèse, nous aurons

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''};$$

donc la droite $B''C''$ est parallèle à BC (201) ; d'où (207)

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}.$$

En comparant les deux suites de rapports égaux, on conclut $B''C'' = B'C'$. Ainsi les triangles $AB''C''$, $A'B'C'$ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun. D'ailleurs $AB''C''$ et ABC sont équiangles entre eux ; donc, etc.

Théorème IV.

209. *Deux triangles équiangles entre eux sont semblables.*

Soient (*fig.* 106)

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Je dis que l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Prenons $AB'' = A'B'$, $AC'' = A'C'$, et menons $B''C''$. Les triangles $AB''C''$, $A'B'C'$ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Donc les angles B'', B' sont égaux ; et comme $B = B'$, les angles B″ et B sont égaux. Ainsi la droite B″C″ est parallèle à BC ; donc, etc.

210. 1er *Corollaire*. — *Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal.*

211. 2e *Corollaire*. — *Deux triangles isocèles sont semblables lorsque leurs angles à la base, ou lorsque leurs angles au sommet opposé, sont égaux.*

212. *Remarque*. — Dans deux triangles semblables, les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels, et sont dits *homologues*.

Théorème V.

213. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels.*

Soient (*fig.* 106) $A = A'$, et

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Si l'on répète la construction précédente, les triangles AB″C″, A′B′C′ seront égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. Mais, en vertu de l'hypothèse,

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''};$$

donc la droite B″C″ est parallèle à BC; donc le triangle AB″C″, égal à A′B′C′, est semblable à ABC; etc.

Théorème VI.

214. *Deux triangles sont semblables lorsqu'ils ont les côtés parallèles, chacun à chacun, ou lorsqu'ils les ont perpendiculaires.*

Nommons A, B, C les angles du premier triangle, et A′, B′, C′ les angles correspondants dans le second ; je dis que

$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C.$$

Nous savons déjà (92, 93) que ces angles sont égaux ou supplémentaires; examinons donc les hypothèses suivantes:

1° $A' = 2^d - A, \quad B' = 2^d - B, \quad C' = 2^d - C$;

mais alors

$$A + A' + B + B' + C + C' = 6^d;$$

ce qui est absurde.

2° $A' = 2^d - A, \quad B' = 2^d - B, \quad C' = C.$

Cette hypothèse donne

$$A + A' + B + B' = 4^d;$$

et comme $A + B = A' + B'$, il vient

$$A + B = 2^d;$$

ce qui est absurde.

3° $B' = B, \ C' = C$;

alors $A' = A$;

donc les deux triangles sont équiangles, et semblables.

215. *Remarque.* — Les côtés homologues sont les côtés parallèles ou perpendiculaires : car ils sont opposés aux angles égaux.

Théorème VII.

216. *Deux polygones semblables ont les angles égaux et les côtés proportionnels, chacun à chacun.*

Admettons, pour plus de simplicité, que les deux polygones aient été décomposés en triangles au moyen de diagonales.

1° Chacun des triangles de P (*fig.* 107) répondant à un triangle semblable dans P′ (204), il est clair que, dans ces deux polygones, deux angles correspondants quelconques seront égaux, comme étant composés d'angles égaux.

2° La similitude des triangles donne cette suite de rapports égaux :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \ldots;$$

donc

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

217. Dans deux polygones semblables, les côtés proportionnels sont appelés *homologues*, parce que ces côtés sont homologues dans les triangles correspondants. Les côtés homologues sont adjacents aux angles respectivement égaux.

218. On appelle *points homologues*, deux points situés de la même manière dans les deux polygones. Autrement dit, deux points sont homologues lorsque, étant joints aux extrémités de deux côtés homologues, ils déterminent deux triangles semblables et semblablement disposés.

219. Les *droites homologues* sont celles dont les extrémités sont homologues, chacune à chacune.

220. Le rapport de deux côtés homologues est appelé *rapport de similitude* des deux polygones.

Théorème VIII.

* 221. *Deux polygones de* n *côtés sont semblables, lorsqu'ils ont* (n—1) *côtés proportionnels, et les* (n—2) *angles compris entre ces côtés, égaux chacun à chacun.*

Considérons, pour fixer les idées, deux hexagones (*fig.* 107). Soient

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'},$$

et

$$B = B', \quad C = C', \quad D = D', \quad E = E'.$$

Menons les diagonales AC, AD, AE, A'C', A'D', A'E'.

Les triangles ABC, A'B'C' sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; donc

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'},$$

et

$$ACB = A'C'B'.$$

Ainsi, les triangles ACD, A'C'D' ont les côtés AC, CD proportionnels à A'C',C'D'. De plus, ACD = A'C'D'; donc ces triangles sont semblables.

En continuant de même, nous prouverions que les deux polygones sont composés d'un même nombre de triangles, semblables chacun à chacun, et semblablement disposés; donc, etc.

Théorème IX.

* 222. *Deux polygones de* n *côtés sont semblables, lorsqu'ils sont équiangles et qu'ils ont* (n—2) *côtés consécutifs proportionnels.*

Même démonstration.

* 223. *Remarque.* Nous avons vu (142) que l'égalité de deux polygones de n côtés exige, généralement, $(2n-3)$ conditions. D'après les deux derniers théorèmes, la similitude de deux polygones de cette espèce suppose seulement $(2n-4)$ conditions ([1]). Il suffit donc de $(2n-4)$ éléments, convenablement choisis, pour que l'on puisse construire un polygone semblable à un polygone donné : en effet, le rapport de similitude reste arbitraire.

Si ce rapport est 1, les deux polygones *semblables* deviennent *égaux*.

Théorème X.

224. *Dans deux polygones semblables, les droites homologues sont proportionnelles aux côtés homologues.*

Supposons que les triangles AMB, CND (*fig.* 108) soient

([1]) Dans la démonstration du Théorème VIII, le nombre des égalités distinctes est $(5-1)+4=(6-2)+(6-2)=2.6-4$. En général, ce nombre serait $(n-2)+(n-2)=2n-4$. De même, dans la démonstration du Théorème IX, le nombre des égalités serait $(n-1)+(n-3)=2n-4$, parce que les deux polygones sont équiangles du moment qu'ils ont $(n-1)$ angles égaux, chacun à chacun.

semblables, respectivement, aux triangles A'M'B',C'N'D'. Les points M,M' sont homologues (218) ; les points N,N' le sont pareillement; et MN,M'N' sont deux droites homologues (219).

Menons les diagonales AC, AD, A'C', A'D': elles décomposent en triangles semblables, chacun à chacun, les polygones donnés.

Cela étant, nous pouvons regarder les figures AMBCNDE, A'M'B'C'N'D'E', comme formées d'un même nombre de triangles, semblables chacun à chacun, et semblablement disposés. Sous ce point de vue, les droites MN, M'N' deviennent des côtés ou des diagonales homologues; donc elles sont dans le rapport de similitude.

225. On appelle *périmètre* d'un polygone, soit une droite égale à la somme des côtés, soit une longueur (24) égale à la somme des longueurs de ces mêmes côtés.

Théorème XI.

226. *Les périmètres de deux polygones semblables sont entre eux dans le rapport de similitude.*

En effet (*fig.* 107),

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots;$$

donc

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{A'B' + B'C' + C'D' + \ldots} = \frac{AB}{A'B'}.$$

227. On dit que deux polygones semblables sont *semblablement situés*, lorsque deux côtés homologues quelconques sont *parallèles et de même sens;* lorsqu'ils sont *parallèles et de sens contraires*, les deux polygones sont dits : *inversement situés* (¹).

(¹) M. Chasles appelle, en général, *figures homothétiques* celles qui sont ainsi définies *: deux points homologues quelconques sont situés sur une même droite passant par le centre d'homothétie (*centre de similitude); *de plus, leurs distances à ce centre sont dans un rapport constant.*

Théorème XII.

228. *Les droites qui joignent les sommets homologues de deux polygones* P,P′, *semblables et semblablement ou inversement situés, se coupent en un même point.*

Soient AB,BC (*fig.* 98) deux côtés consécutifs du polygone P, et A′B′, B′C′ les côtés correspondants du polygone P′. Soit O le point de rencontre des droites AA′, BB′ : il s'agit de démontrer que la droite CC′ passe par le point O.

Les triangles semblables OAB, OA′B′ donnent

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O};$$

d'où

$$\frac{AB - A'B'}{AB} = \frac{BB'}{BO}.$$

Appelons O′ le point de rencontre des droites BB′, CC′ ; nous aurons, de la même manière,

$$\frac{BC - B'C'}{BC} = \frac{BB'}{BO'}.$$

Mais, les polygones P, P′ étant semblables, on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'};$$

d'où

$$\frac{AB - A'B'}{AB} = \frac{BC - B'C'}{BC}.$$

Les proportions ci-dessus ont donc un rapport commun. Conséquemment,

$$\frac{BB'}{BO} = \frac{BB'}{BO'};$$

d'où

$$BO = BO'.$$

Ainsi, le point O′ coïncide avec le point O.

229. *Remarques.* I. On appelle, en général, *centre de similitude* de deux lignes, un point *situé de la même manière* par

rapport à chacune d'elles. En adoptant cette définition, on voit que le point O est le centre de similitude des polygones P,P'.

II. Le centre de similitude est *externe* lorsque les deux figures sont *directement* semblables ; il est *interne* dans le cas contraire.

III. Deux figures semblables et semblablement placées peuvent avoir deux centres de similitude. Exemple : deux circonférences.

* Théorème XIII.

230. *Deux polygones semblables ont un centre de similitude.*

AB,A'B' (*fig.* 29) étant deux côtés homologues, soit C leur point de concours. Par les trois points A, A', C, faisons passer une circonférence; puis, par les trois points B, B', C, faisons passer une autre circonférence. Ces deux lignes, qui se coupent en C, se couperont en un autre point O, centre de similitude des deux polygones.

En effet, dans le quadrilatère inscrit OACA', les angles A,A' sont supplémentaires; donc OAB = OA'B'. De même, OBA = OB'A'. Conséquemment, les triangles OAB,OA'B' sont semblables, et le point O est situé de la même manière relativement aux côtés AB,A'B'. C'est ce qu'il fallait démontrer.

* Théorème XIV.

231. *Les centres de similitude de trois polygones* P,P',P'', *semblables et semblablement placés, sont en ligne droite.*

Soit X le point du polygone P', homologue du centre de similitude O' de P,P''. La droite O'X, qui joint deux points homologues de P,P', passe par O'', centre de similitude de ces deux polygones. Cette même droite, qui joint deux points homologues de P',P'', passe par leur centre O. Les quatre points O, O', O'', X sont donc en ligne droite.

232. *Remarques* I. La droite qui passe par les centres de similitude de trois figures semblables et semblablement placées s'appelle *axe de similitude*.

II. Trois circonférences ont en général *six* centres de similitude, lesquels sont situés, trois à trois, sur *quatre* axes de similitude.

APPLICATIONS DE LA SIMILITUDE DES POLYGONES.

Théorème XV.

233. *Dans tout triangle* : 1° *la bissectrice de chaque angle divise le côté opposé en deux segments* ADDITIFS *proportionnels aux côtés adjacents ;* 2° *la bissectrice de chaque angle extérieur divise le côté opposé en deux segments* SOUSTRACTIFS *proportionnels aux côtés adjacents.*

1° Soit, dans le triangle ABC (*fig.* 109), la bissectrice AD de l'angle A. Je dis que

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

Menons, par le sommet C, une parallèle CE à la bissectrice, et soit E le point où cette parallèle rencontre BA prolongée. Nous aurons

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}.$$

Les angles BAD, BEC sont égaux comme correspondants, et les angles DAC, ACE sont égaux comme alternes-internes. Donc, à cause de BAD = DAC, les angles BEC, ACE sont égaux ; par suite, AC = AE ; donc, etc.

2° La même construction donne, AD (*fig.* 110) étant la bissectrice,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}.$$

On prouve, comme dans le premier cas, que AEC est isocèle ; donc

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}.$$

234. *Remarque.* — Si, dans un triangle, on mène la bissectrice AD (*fig.* 111) et la perpendiculaire AD′ à cette droite, on aura

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD'}{CD'}.$$

Ainsi, la droite BC est divisée de telle sorte, aux points D, D′, que les segments additifs sont proportionnels aux segments soustractifs. Quand il en est ainsi, on dit que la droite est divisée *harmoniquement*. (Voir l'Appendice au Livre III.)

Théorème XV.

235. *Si, du sommet* A (fig. 114) *de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire* AD *sur l'hypoténuse* BC :

1° *Les deux triangles partiels sont semblables entre eux et semblables au triangle total ;*

2° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et la projection de ce côté sur l'hypoténuse ;*

3° *La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des côtés de l'angle droit.*

1° Les angles ABC, CAD sont égaux, comme ayant pour complément l'angle BAD ; donc les trois triangles rectangles ADB, CDA, CAB ont un angle aigu égal ; donc ils sont semblables (210).

2° En comparant les triangles ADB, CAB, nous aurons

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

Ainsi, AB est moyen proportionnel entre BD et BC. De même, AC est moyen proportionnel entre BC et CD.

3° Les deux triangles ADB, CDA donnent

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD},$$

donc AD est moyen proportionnel entre BD et CD.

236. *Remarque*. Reprenons la proportion

$$\frac{\text{BD}}{\text{AD}} = \frac{\text{AB}}{\text{BC}}.$$

Si les droites BD, AB, BC sont rapportées à une certaine unité, et que a, b, c soient les nombres qui *mesurent* ou qui *représentent* ces droites, on aura

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c};$$

d'où

$$b = \sqrt{ac}.$$

Ainsi, *quand une droite* AB *est moyenne proportionnelle entre deux droites* BD, BC, *le nombre qui mesure* AB *est égal à la racine carrée du produit des nombres qui mesurent* BD *et* BC. Pour éviter cette périphrase, on écrit et l'on énonce

$$\text{AB} = \sqrt{\text{BC} \,.\, \text{BD}}.$$

De même,

$$\text{AC} = \sqrt{\text{BC} \,.\, \text{CD}}, \quad \text{AD} = \sqrt{\text{BD} \,.\, \text{CD}}.$$

Cette remarque est faite une fois pour toutes.

237. *Corollaire.—Si, d'un point d'une circonférence, on mène la perpendiculaire au diamètre, et des cordes aux extrémités de ce diamètre :*

1° *Chaque corde est moyenne proportionnelle entre sa projection et le diamètre ;*

2° *La perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les projections des deux cordes.*

Théorème XVII.

238. 1° *Les segments de deux cordes qui se coupent dans le cercle sont inversement proportionnels ;*

2°. *Les sécantes qui se coupent hors du cercle sont inversement proportionnelles à leurs parties extérieures ;*

3° *Une tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante issue du même point et la partie extérieure de celle-ci.*

1° Soient AB,CD (*fig.* 115) les deux cordes, se coupant en E. Je dis que l'on aura

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE};$$

c'est-à-dire que, les deux segments d'une corde formant les extrêmes de la proportion, les deux segments de l'autre corde en seront les moyens. C'est là ce que signifie l'expression *inversement proportionnels*.

Menons AD et BC: dans les triangles ADE, BCE, les angles en E sont égaux comme opposés par le sommet, et les angles D, B sont égaux parce qu'ils sont inscrits au même segment (187). La comparaison des côtés homologues donne la proportion ci-dessus.

2° Menons AD et BC (*fig.* 116): les deux triangles ADE, CBE ont l'angle E commun, et les angles B, D égaux; donc

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}.$$

3° Soient la tangente AD (*fig.* 117) et la sécante BCD; je dis que

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}.$$

Menons AB et AC : dans les triangles BAD, ACD, l'angle D est commun, et les angles ABD, CAD sont égaux comme ayant même mesure (186) ; donc, etc.

239. *Remarque.* — Considérons, comme cas particulier, celui dans lequel la tangente AD (*fig.* 118) étant égale au diamètre, la sécante BD passe par le centre O. Nous venons de trouver

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD};$$

donc

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{CD}.$$

Ainsi, la sécante BD est partagée au point C, de manière que le segment BC est moyen proportionnel entre la droite entière et le second segment CD. Pour exprimer cette propriété, on dit que BC est divisée en *moyenne et extrême raison*.

Si l'on fait DE = DC, la droite AD est partagée aussi en moyenne et extrême raison au point E. En effet, la proportion précédente donne

$$\frac{BC}{BD - BC} = \frac{CD}{BC - CD},$$

ou

$$\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{AE}.$$

MESURE DES POLYGONES.

240. On appelle *figures équivalentes*, celles qui sont décomposables en un même nombre de parties, égales chacune à chacune.

Ainsi, soient les pentagones égaux ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig* 119), et les triangles égaux BCF, IHG : le quadrilatère AFDE et le polygone A'IHGB'C'D'E' sont équivalents.

241. Si les parties égales qui composent les deux figures *équivalentes* sont disposées de la même manière, ces figures deviennent *égales*.

242. On peut regarder comme évidents les principes suivants, qui découlent immédiatement de la définition :

1° Les sommes ou les différences de figures équivalentes sont équivalentes ;

2° Les multiples ou les sous-multiples de figures équivalentes sont équivalents.

243. La *hauteur* d'un triangle est la perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé, lequel prend le nom de *base*.

244. La *hauteur* d'un parallélogramme, d'un rectangle ou d'un trapèze est la perpendiculaire à deux côtés parallèles, lesquels sont nommés *bases*.

245. *Deux rectangles de même base et de même hauteur sont égaux;* car ils ont les côtés égaux et les angles égaux, chacun à chacun.

Théorème XVIII.

246. *Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Plaçons le plus petit rectangle ABC′D′ (*fig.* 120) sur le plus grand, de manière que AB soit la base commune. Je dis que

$$\frac{\text{ABCD}}{\text{ABC'D'}} = \frac{\text{BD}}{\text{BD'}}.$$

1° Supposons les hauteurs BD, BD′ commensurables, et, par exemple, dans le rapport de 8 à 3.

Si nous divisons BD en 8 parties égales, BD′ en contiendra 3; et si, par les points de division, nous menons des parallèles à AB, le rectangle ABCD sera partagé en 8 rectangles qui seront égaux, comme ayant même base et même hauteur. ABC′D′ contient 3 de ces rectangles; donc etc.

2° Si les hauteurs BD, BD′ sont incommensurables, la proposition est également vraie (179).

247. *Corollaire. — Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Théorème XIX.

248. *Le rapport de deux rectangles est égal au rapport des bases, multiplié par le rapport des hauteurs.*

Soient R,R′ deux rectangles ayant pour bases B,B′ et pour hauteurs H,H′. Je dis que

$$\frac{R}{R'} = \frac{B}{B'} \times \frac{H}{H'}.$$

Prenons un rectangle auxiliaire R″, dont la base soit B et dont la hauteur soit H′. Par le Théorème XVIII,

$$\frac{R}{R''} = \frac{H}{H'}, \quad \frac{R''}{R'} = \frac{B}{B'}.$$

D'un autre côté, *le produit des rapports de* R *à* R″ *et de* R″ *à* R′ *est égal au rapport de* R à R′ (1); donc, etc.

249. *Remarques.* — I. Soient deux rectangles ABCD, A′B′C′D′ (*fig.* 121) tels, que leurs bases soient dans le rapport de 4 à 3, et leurs hauteurs dans celui de 4 à 5. Le théorème précédent exprime que le rapport des deux rectangles est

$$\tfrac{4}{3} \times \tfrac{4}{5} = \tfrac{16}{15},$$

ou qu'un même rectangle peut être contenu 16 fois dans ABCD et 15 fois dans A′B′C′D′. C'est ce qui est rendu évident par la figure.

II. Supposons qu'avec une certaine unité, on ait mesuré B, B′, H, H′; alors ces lignes pourront être remplacées par leurs *longueurs*, c'est-à-dire *par des nombres* (23). Représentons ces nombres par b, b', h, h'; le théorème ci-dessus deviendra

$$\frac{R}{R'} = \frac{bh}{b'h'}.$$

Ce résultat s'énonce ainsi : *Deux rectangles sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

III. On doit bien observer que bh est le produit de deux nombres, et non le produit de deux lignes, ce qui n'aurait aucun sens.

250. Supposons que l'on prenne R′ pour unité de surface; alors le nombre $\frac{R}{R'}$ est ce qu'on appelle *aire* du rectangle R. En représentant cette quantité par a, nous aurons

$$a = \frac{bh}{b'h'}.$$

---

(1) On démontre, en Arithmétique, la proposition suivante :

Le rapport de deux grandeurs A, B est égal au quotient des rapports entre A, B et une troisième grandeur C ; ou, ce qui est équivalent :

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}.$$

On voit que l'*aire* est, pour les rectangles, ce que la *longueur* est pour les droites : un nombre représentant la mesure.

251. L'expression précédente se simplifie si, au lieu de prendre arbitrairement le rectangle R′, nous choisissons pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur. En effet, nous aurons

$$b' = h' = 1;$$

d'où

$$a = bh.$$

Ce nouveau résultat s'énonce ainsi :

L'aire d'un rectangle est égale à la base multipliée par la hauteur,

ou

Tout rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.

252. Dorénavant, nous prendrons pour unité de surface celle qui vient d'être définie. En outre, nous supposerons toujours que les dimensions des figures sont rapportées à l'unité de longueur, et représentées par des nombres ; ce qui permettra de simplifier les énoncés et de faire entrer les lignes dans le calcul, absolument comme des nombres.

253. *Corollaire. — L'aire d'un carré est égale à la seconde puissance de son côté.*

En effet, si dans la formule $a = bh$, on suppose $h = b$, il vient $a = b^2$. Si, par exemple, le côté d'un carré est représenté par 5, l'aire de ce carré sera 25.

C'est pour cette raison que l'on donne, en Arithmétique, le nom de *carrés* aux secondes puissances des nombres.

Théorème XX.

254. *Deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Supposons que les parallélogrammes aient même base inférieure AB (*fig.* 122) ; leurs bases supérieures CD, C′D seront en ligne droite.

Le premier parallélogramme ABCD se compose du trapèze ABCD', diminué du triangle DBD'. De même, ABC'D' se compose de ABCD', diminué de CAC'. Or, les triangles CAC', DBD' sont égaux, à cause de A = B (92), AC = BD, AC' = BD' (123). Donc, d'après la définition (240), les parallélogrammes sont équivalents.

255. *Corollaires.* — I. *Tout parallélogramme est équivalent au rectangle de même base et de même hauteur.*

II. *Tout parallélogramme a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Théorème XXI.

256. *Tout triangle est la moitié du parallélogramme de même base et de même hauteur.*

En effet, la diagonale d'un parallélogramme partage cette figure en deux triangles égaux.

257. *Corollaire.* — *Tout triangle a pour mesure la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Théorème XXII.

258. *Tout trapèze a pour mesure le produit de sa hauteur par la demi-somme de ses bases.*

En effet, le trapèze ABCD (*fig.* 123) est égal à la somme des triangles ABC, CAD de même hauteur que le trapèze.

259. *Remarque sur la mesure des polygones.* — Tout polygone étant décomposable en triangles, si l'on peut mesurer la base et la hauteur de chacun d'eux, on déterminera l'aire du polygone.

Cette méthode, simple et rigoureuse en *théorie*, ne l'est plus dans l'*application*. Elle ne pourrait servir, par exemple, à *mesurer un terrain* de forme irrégulière. Le procédé suivant, commode à employer, conduit à une formule qu'il est bon de connaître.

Menons, dans le plan du polygone AA'A''... (*fig.* 124), une droite indéfinie OX, et prenons, sur cette droite, un point de *repère* O.

Abaissons ensuite, des différents sommets du polygone, des perpendiculaires sur OX [1], et mesurons chacune d'elles, ainsi que sa distance au point O.

Désignons par b, b', b'',... les distances OB, OB', OB'',..., et par a, a', a'',... les perpendiculaires. Enfin, représentons par P l'aire du polygone; nous aurons

$$2\,P = (a+a')(b'-b) + (a'+a'')(b''-b') + (a''+a''')(b'''-b'') - (a'''+a^{\text{IV}})(b'''-b^{\text{IV}}) - (a^{\text{IV}}+a^{\text{V}})(b^{\text{IV}}-b^{\text{V}}) - (a^{\text{V}}+a)(b^{\text{V}}-b);$$

ou, en mettant a, a', a'',... *en facteur commun*,

$$2\,P = a(b'-b^{\text{V}}) + a'(b''-b) + a''(b'''-b') + a'''(b^{\text{IV}}-b'') + a^{\text{IV}}(b^{\text{V}}-b''') + a^{\text{V}}(b-b^{\text{IV}}).$$

Pour abréger, appelons *abscisses* les distances b, b', b'',..., et *ordonnées* les perpendiculaires a, a', a'',... : nous pourrons dire que

L'aire d'un polygone quelconque est égale à la demi-somme des produits que l'on obtient en multipliant l'ordonnée de chaque sommet par la différence entre les abscisses des deux sommets voisins [2].

PROPRIÉTÉS NUMÉRIQUES DES FIGURES.

Théorème XXIII.

260. *Le carré construit sur la somme* AC (fig. 125) *de deux droites* AB, BC, *est égal au carré de la première, plus le carré de la seconde, plus deux fois le rectangle construit sur ces deux droites.*

Sur AC, comme côté, construisons le carré ACDF; pre-

---

(1) Sur le terrain, cette construction se fait aisément avec l'*équerre d'Arpenteur*.

(2) Cette différence, qui peut être positive ou négative, doit toujours être prise dans le même ordre.

La formule ci-dessus est une réduction de celle qui a été donnée par *De Stainville* (*Mélanges d'Analyse algébrique et de Géométrie*).

nons $AG = AB$, et menons les droites BE, GI, respectivement parallèles à AD, AC.

Le carré ACDF est décomposé en deux carrés dont les côtés sont égaux à AB, BC, et en deux rectangles égaux entre eux, dont les dimensions sont AB, BC; donc, etc.

261. *Remarques.* — I. L'aire d'un carré étant égale à la seconde puissance de son côté (253), et l'aire d'un rectangle étant égale au produit de la base par la hauteur, l'énoncé précédent peut être remplacé par l'équation suivante, dans laquelle on suppose AB, BC, AC remplacés par des nombres :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC \ [1].$$

Et comme il y a des carrés de toutes dimensions, on peut conclure que, a et b représentant des nombres quelconques, on a généralement

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

II. Nous voyons qu'en vertu des conventions établies sur les unités de longueur et de surface, à la *propriété géométrique* démontrée ci-dessus, correspond une *propriété numérique* qui est, en quelque sorte, la traduction de la première. La même correspondance s'observe dans la plupart des théorèmes suivants.

Théorème XXIV.

262. *Le carré construit sur la différence* AC (*fig.* 126) *de deux droites* AB, BC, *est égal au carré de la première, plus le carré de la seconde, moins deux fois le rectangle construit sur ces deux droites.*

Sur les droites AB, BC, AC, construisons les carrés ABGH, ACDF, BCIK. En prolongeant DF jusqu'en E, nous formerons deux rectangles DEGH, FIEK, ayant pour dimensions AB et BC. Or, la figure entière se compose, soit de ces

[1] Cette remarque n'est guère qu'un complément de celle qui a été faite à l'occasion du Théorème XVI.

deux rectangles et du carré construit sur AC, soit des carrés construits sur AB et BC; donc, etc.

263. *Remarque.* — Ce théorème s'exprime par l'équation

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC.$$

En général,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Théorème XXV.

264. *Le rectangle construit sur la somme* AC (fig. 127) *et la différence* AF *de deux droites* AB, BC, *est égal à la différence des carrés construits sur ces droites.*

Construisons le carré ABDE. Prenons BC′ = BC = EF, et menons C′I parallèle à BD. Les rectangles BG, FI, qui ont pour dimensions BC, AF, sont égaux. Or

$$ACGF = ABKF + BCGK;$$

donc

$$ACGF = ABKF + FHIE = ABDE - KDIH;$$

etc.

265. *Remarque.* a, b étant des nombres quelconques,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Théorème XXVI.

266. *Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés.*

1^re^ *Démonstration.* — Abaissons, du sommet A de l'angle droit (*fig.* 128), la perpendiculaire AHI sur l'hypoténuse BC. Le carré BCDE sera décomposé en deux rectangles BI, CI. Menons encore AD et FC.

Les angles ABD, FBC sont égaux; car chacun d'eux se compose de l'angle aigu ABC, augmenté d'un angle droit. Donc les triangles ABC, FBC sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. Or le triangle ABD est la moitié du rectangle BI, de même base et de même hauteur (256); par la même raison, le triangle FBC est la moitié du carré FBA; donc (242, 2°) ce carré est équivalent au rectangle BI.

On démontrerait de même l'équivalence du carré ACG et du rectangle CI; donc, etc,

2e *Démonstration.* — Sur l'hypoténuse BC (*fig* 129), construisons le carré BCDE. Menons DF parallèle à BA, et EG parallèle à CA. Il est visible que les quatre triangles rectangles sont égaux, et que AHFG est un carré. Si donc nous désignons par a l'hypoténuse, et par b, c les côtés de l'angle droit, nous aurons, en observant que chaque triangle a pour mesure $\frac{1}{2} bc$,

$$a^2 = 2bc + (c - b)^2,$$

ou

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3e *Démonstration.* — Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et la projection du côté sur l'hypoténuse (229, 2°). Ce théorème, appliqué aux côtés AB AC (*fig.* 114) donne, d'après les remarques faites précédemment,

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD,$$

$$\overline{AC}^2 = BC \times DC;$$

d'où

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + DC) = \overline{BC}^2.$$

4e *Démonstration.* — Après avoir construit des carrés sur les côtés du triangle BAC, rectangle en A (*fig.* 112), menons IK parallèle à AB, et HK parallèle à AC : le triangle IHK est égal à BCA. Menons ensuite FE, AK, GA, DA : ces deux dernières droites n'en font qu'une, parce qu'elles sont bissectrices des angles BAF, CAE (73).

Cela posé, les quadrilatères DEFG, DCBG, ACIK, KHBA sont égaux; car deux quelconques d'entre eux ont trois côtés consécutifs égaux chacun à chacun, ainsi que les deux angles compris entre ces côtés (140).

En second lieu, la somme des carrés BF, CE se compose de la somme des deux premiers quadrilatères, diminuée des triangles égaux BAC, EAF ; et le carré construit sur l'hypoténuse se compose de la somme des deux derniers quadrilatères, diminuée des triangles égaux BAC, IKH. Donc, conformément à la définition (240), le dernier carré est équivalent à la somme des deux autres.

267. *Remarque.* — La première démonstration fait voir que les carrés ABF, ACG (*fig.* 128) sont équivalents aux rectangles BI, CI. Or, ces rectangles ayant même hauteur HI, sont entre eux comme leurs bases BH, CH (246). La même relation existe donc entre les carrés ; ainsi :

Les carrés des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les projections de ces côtés sur l'hypoténuse ;

et

Le carré d'un côté de l'angle droit est au carré de l'hypoténuse, comme la projection de ce côté est à l'hypoténuse.

Ces deux conséquences se déduisent également des équations posées dans la troisième démonstration. Elles confirment ce que nous avons annoncé dans le n° 261.

268. *Corollaire.* — *Le carré construit sur la diagonale d'un carré est double de celui-ci.*

THÉORÈME XXVII.

269. 1° *Dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle aigu, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le rectangle de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier ;*

2° *Dans tout triangle obtusangle, le carré du côté opposé à l'angle obtus, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le rectangle de l'un de ces côtés par la projection du second sur le premier.*

1° Soit le côté BC (*fig.* 130), opposé à l'angle aigu A. En abaissant CD perpendiculaire sur AB, nous avons, par le théorème précédent,

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2.$$

La droite BD étant la différence entre AB et AD, nous avons aussi (262),

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AB \times AD.$$

Ajoutant ces égalités, nous trouvons

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AD.$$

2° Si l'angle A (*fig.* 131) est obtus, on a pareillement

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2,$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2,$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2AB \times AD;$$

et

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD.$$

268. *Corollaire. — Un triangle est acutangle, rectangle ou obtusangle, selon que le carré du plus grand côté est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Théorème XXVIII.

271. *Dans tout triangle* ABC *(fig.* 132*), la somme des carrés de deux côtés* AB, AC, *est égale à deux fois le carré de la moitié du troisième côté* BC, *plus deux fois le carré de la médiane* AD *relative à ce troisième côté.*

Abaissons AE perpendiculaire sur BC; nous aurons successivement, dans les deux triangles, ABD, ACD :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2BD \times DE,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2CD \times DE;$$

d'où, à cause de BD = CD,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{BD}^2.$$

271. *Remarque.*— Nommons a, b, c les trois côtés, et α la médiane aboutissant au milieu de a; nous avons

$$b^2 + c^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2\alpha^2.$$

La même équation, appliquée aux deux autres médianes β, γ, donne facilement

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Théorème XXIX.

273. *Dans tout quadrilatère* ABCD (fig. 133), *la somme des carrés des côtés est équivalente à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite* EF *qui joint les milieux des diagonales.*

Menons CF, AF, BE, DE : le théorème précédent donne

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{CF}^2,$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{AF}^2,$$

$$2\overline{CF}^2 + 2\overline{AF}^2 = 4\overline{CE}^2 + 4\overline{EF}^2;$$

d'où, en ajoutant,

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = 4\overline{BF}^2 + 4\overline{CE}^2 + 4\overline{EF}^2,$$

ou

$$\overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

274. *Corollaires.* — I. *Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.*

II. *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des diagonales est égale à deux fois la somme des carrés des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

Théorème XXX.

275. *Dans tout triangle* ABC (fig. 152), *le carré d'une bissectrice* AD *est équivalent au rectangle des deux côtés adjacents, diminué du rectangle des segments* BD, CD *déterminés, sur le troisième côté, par la bissectrice.*

Prolongeons la droite AD jusqu'à sa rencontre, en E, avec la circonférence circonscrite au triangle ABC : à cause de l'égalité des angles BAE, CAE, le point E est le milieu de l'arc BEC. Menons la corde BE.

Les angles BEA, BCA sont égaux, comme inscrits au même segment; donc les triangles BEA, DCA sont équiangles et semblables. Conséquemment,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}},$$

ou

$$\mathrm{AB} \,.\, \mathrm{AC} = \mathrm{AD} \,.\, \mathrm{AE}.$$

Mais

$$\mathrm{AD} \,.\, \mathrm{AE} = \mathrm{AD}\,(\mathrm{AD} + \mathrm{DE}) = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \mathrm{AD} \,.\, \mathrm{DE}\,.$$

D'ailleurs (Th. XVI, 1°),

$$\mathrm{AD} \,.\, \mathrm{DE} = \mathrm{BD} \,.\, \mathrm{CD}\,;$$

donc enfin

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 = \mathrm{AB} \,.\, \mathrm{AC} - \mathrm{BD} \,.\, \mathrm{CD}.$$

276. *Remarque.* Si l'on désigne par a, b, c les côtés d'un triangle et par x, y, z les bissectrices respectivement opposées, on conclut, du théorème précédent,

$$x^2 = \frac{bc\,(a+b+c)\,(b+c-a)}{(b+c)^2},$$

$$y^2 = \frac{ca\,(a+b+c)\,(a+c-b)}{(c+a)^2},$$

$$z^2 = \frac{ab\,(a+b+c)\,(b+a-c)}{(b+a)^2}.$$

COMPARAISON DES AIRES.

Théorème XXXI.

277. *Deux triangles qui ont un angle égal, sont entre eux oomme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle.*

Soient les triangles ABC, ADE (*fig.* 134), qui ont un angle égal A. Je dis que

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$

Menons BE : les triangles ABC, ABE ont même sommet B, et leurs bases AC, AE sont situées sur une même droite; ces triangles ont donc même hauteur; conséquemment, ils sont proportionnels à leurs bases ; c'est-à-dire que

$$\frac{ABC}{ABE} = \frac{AC}{AE}.$$

On trouve de même

$$\frac{ABE}{AED} = \frac{AB}{AD}.$$

Donc, (248, note)

$$\frac{ABC}{AED} = \frac{AC}{AE} \times \frac{AB}{AD};$$

etc.

Théorème XXXII.

278. *Deux triangles semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.*

Si, dans la figure 134, les deux triangles sont semblables,

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD};$$

donc

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{AED}} = \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}\right)^2.$$

Ainsi, le rapport de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de deux côtés homologues.

Et si les côtés sont représentés par des nombres, l'équation précédente devient

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{AED}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{AE}}^2};$$

donc, etc.

THÉORÈME XXXIII.

279. *Deux polygones semblables sont entre eux comme les carrés des côtés homologues.*

Deux polygones semblables peuvent toujours être décomposés en un même nombre de triangles, semblables chacun à chacun. Or, un triangle quelconque du premier polygone, et son homologue dans le second, sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues des polygones; donc, etc.

280. *Corollaire. — Si, sur les côtés d'un triangle rectangle, comme homologues, on construit trois figures semblables, la figure construite sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des deux autres figures.*

Soient a, b, c, les longueurs des côtés du triangle rectangle, a représentant l'hypoténuse; soient A, B, C les aires des polygones semblables correspondants. Nous aurons

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2};$$

d'où

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2};$$

Mais

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

donc, etc.

Théorème XXXIV.

281. *Si, sur différentes cordes* AC, AC′, AC″, ... (*fig.* 135) *menées par l'extrémité d'un diamètre, comme homologues, on construit des figures semblables, ces figures seront entre elles comme les projections* AD, AD′, AD″,... *des cordes sur le diamètre.*

Cette proposition est évidente par les nos 237 et 280.

AIRE DU TRIANGLE. — QUADRILATÈRE INSCRIT.

Théorème XXXV.

282. *Dans tout triangle, le rectangle deux côtés* AB, AC *(fig.* 136*) est équivalent au rectangle construit sur la hauteur* AD *correspondant au troisième côté, et sur le diamètre* AE *du cercle circonscrit.*

Menons CE : les deux triangles ABD,AEC seront semblables, car ils sont rectangles, et les angles B, E sont égaux, comme inscrits au même segment. Comparant les côtés homologues, nous trouvons

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC},$$

ou

$$AB \times AC = AD \times AE.$$

283. Dans l'équation précédente, les lignes sont remplacées par des nombres. Si nous multiplions les deux membres par la valeur numérique de BC, il viendra

$$AB \times AC \times BC = AD \times BC \times AE.$$

Mais AD $\times$ BC est le double de l'aire du triangle ; donc :

Corollaire. — Dans tout triangle, le produit des trois côtés est égal à l'aire du triangle, multipliée par le double du diamètre du cercle circonscrit.

284. *Remarque.* — Si a, b, c sont les trois côtés d'un triangle, R le rayon du cercle circonscrit, T l'aire du triangle ; on a

$$R = \frac{abc}{4T}.$$

Théorème XXXIV.

285. *Dans tout quadrilatère inscrit, le rectangle des diagonales est équivalent à la somme des rectangles des côtés opposés.*

Soit ABCD (*fig.* 137) un quadrilatère, inscrit à une circonférence ; je dis que

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

Menons par le sommet A la droite AE, de manière que l'angle BAE = CAD. Les deux triangles BAE, CAD, évidemment semblables, donnent

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD};$$

ou

$$AB \times CD = AC \times BE.$$

Les angles BAC, EAD sont égaux, parce qu'ils se composent de l'angle EAC et des angles égaux BAE, CAD. En outre, les angles ADE, ACB sont égaux comme inscrits au même segment. Donc les triangles BAC, EAD sont semblables et donnent

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD},$$

ou

$$BC \times AD = AC \times ED.$$

Ajoutant membre à membre les deux équations, on trouve

$$AB \times CD + BC \times AD = AC(BE + ED);$$

etc.

Théorème XXXV.

286. *Dans tout quadrilatère inscrit, les diagonales sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.*

Soit le quadrilatère inscrit ABCD (*fig.* 139); je dis que

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \times BC + AD \times CD}{AB \times AD + BC \times CD}.$$

Le quadrilatère peut être regardé comme égal à la somme des triangles ABD, BCD, ou comme égal à la somme des triangles ABC, ACD.

En considérant la première décomposition, et désignant par D le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère, nous aurons (280)

$$AB \times AD \times BD = 2D \times ABD,$$
$$BC \times CD \times BD = 2D \times BCD;$$

d'où, en ajoutant,

$$(AB \times AD + BC \times CD)\,BD = 2D \times ABCD.$$

La seconde décomposition donnerait pareillement

$$(AB \times BC + AD \times CD)\,AC = 2D \times ABCD.$$

Par suite,

$$(AB \times AD + BC \times CD)\,BD = (AB \times BC + AD \times CD)\,AC;$$

etc.

287. *Remarques.* — I. Soient a, b, c, d les côtés d'un quadrilatère inscriptible, et α, β les diagonales. Le Théorème XXXIV donne

$$\alpha\beta = ac + bd;$$

et le Théorème XXXV,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Si nous multiplions ou si nous divisons membre à membre ces deux équations, nous obtiendrons

$$\alpha^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

$$\beta^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

II. Soit δ la droite qui joint les milieux des diagonales; nous aurons, par le Théorème XXIX,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 4\delta^2.$$

Si, dans cette équation, on remplace α^2 et β^2 par les valeurs précédentes, on trouve, par un calcul que nous supprimons,

$$4\delta^2 = \frac{(a^2 - c^2)^2 bd + (b^2 - d^2)^2 ac}{(ad + bc)(ab + cd)}.$$

Théorème XXXVI.

288. *L'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du produit que l'on obtient en multipliant le demi-périmètre par ce demi-périmètre diminué de chacun des côtés.*

1re *Démonstration.* — 1° Menons les bissectrices AO, BO, CO (*fig.* 140) des angles intérieurs : elles se coupent au point O, centre du cercle inscrit (160). Menons aussi les bissectrices BO′, CO′ des angles extérieurs : elles coupent AO au point O′, centre d'un des cercles ex-inscrits (161).

Enfin abaissons, sur les côtés du triangle, les perpendiculaires OD, OE, OF, O′G, O′H, O′I.

En désignant par a, b, c les côtés, et par r le rayon du cercle inscrit, nous aurons, pour mesures des triangles BOC, COA, AOB :

$$\tfrac{1}{2}ar,\quad \tfrac{1}{2}br,\quad \tfrac{1}{2}cr.$$

L'aire du triangle ABC est donc

$$T = \frac{1}{2}(a + b + c)\,r,$$

ou

$$T = pr,$$

$2p$ étant le périmètre du triangle. Ainsi :

L'aire d'un triangle est égale au produit du demi-périmètre par le rayon du cercle inscrit.

2° *La droite* AH *est égale au demi-périmètre du triangle* ABC*; et les trois segments* AF, FB, BH *sont égaux, chacun, au demi-périmètre moins un côté.*

J'observe que le périmètre est

$$AB + AC + BC = AB + AC + BG + CG.$$

Mais (195,2°)

$$BG = BH,\ CG = CI,\ \text{etc.};$$

donc

$$2p = AB + BH + AC + CI = AH + AI = 2AH;$$

et

$$p = AH.$$

Secondement, à cause de

$$AF = AE,\ BD = BF,\ CE = CD,$$

le demi-périmètre

$$p = AF + BF + CD = AB + CD.$$

Et comme

$$p = AH = AB + BH = AB + BG;$$

il s'ensuit que

$$CD = BG,\ BD = CG.$$

Nous aurons ensuite, pour les valeurs des trois segments :

$$AF = p - FB - BH = p - BD - CD = p - a,$$
$$FB = p - AF - BH = p - AE - CE = p - b,$$
$$BH = p - c.$$

3° Comparons maintenant les deux triangles rectangles BFO, O'BH. Ces triangles sont semblables, comme ayant les côtés perpendiculaires (214); donc

$$\frac{OF}{BH} = \frac{BF}{HO'},$$

ou

$$(p - c)(p - b) = r.HO'.$$

Les deux triangles AFO, AHO' donnent

$$\frac{AF}{AH} = \frac{FO}{HO'},$$

ou

$$(p - a)HO' = pr.$$

Multipliant les deux équations membre à membre, nous trouvons

$$(p - a)(p - b)(p - c) = pr^2;$$

ou bien, en multipliant de part et d'autre par p,

$$p(p - a)(p - b)(p - c) = p^2r^2.$$

Le second membre représente le carré de l'aire du triangle ; donc

$$T = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

2° *Démonstration.* — Pour déterminer l'aire du triangle, nous allons calculer la hauteur AD (*fig.* 141).

En supposant l'angle B aigu, nous aurons d'abord (269).

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\,BD;$$

d'où

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Le triangle rectangle ABD donne

$$\overline{AD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Telle est l'expression du carré de la hauteur ; mais cette formule peut être considérablement simplifiée.

Le second membre, étant la différence de deux carrés, est égal à

$$\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right).$$

Dans ce produit, le premier facteur égale $\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}$ $=\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}$. Ici encore le numérateur, étant la différence de deux carrés, peut être mis sous la forme

$$(a+c+b)\,(a+c-b).$$

Notre premier facteur devient donc $\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2a}$.

Le second se transforme pareillement en

$$\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}=\frac{b^2-(a-c)^2}{2a}=\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2a}.$$

Par suite,

$$\overline{\mathrm{AD}}^2=\frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b-a+c)(b+a-c)}{4a^2}.$$

Introduisons dans cette expression le périmètre $2p$ du triangle : les quatre facteurs du numérateur deviennent, respectivement :

$$2p,\quad 2(p-b),\quad 2(p-a),\quad 2(p-c);$$

donc

$$\overline{\mathrm{AD}}^2=4\,\frac{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{a^2}.$$

Et comme $\mathrm{T}=\frac{1}{2}\,\mathrm{AD}a$, il vient finalement

$$\mathrm{T}=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

289. *Remarques.*—I. Dans la première démonstration [1], représentons par α le rayon du cercle O′ ; nous aurons, en observant que le triangle ABC = ABO′ + ACO′ − BCO′,

$$T = (p - a)\alpha.$$

Si nous désignons par β, γ les rayons des cercles ex-inscrits, situés dans les angles C,B, nous obtiendrons de même

$$T = (p - b)\beta, \quad T = (p - c)\gamma.$$

Mais nous avons trouvé $T = pr$; donc

$$T^4 = p(p - a)(p - b)(p - c)\alpha\beta\gamma r.$$

Et comme

$$p(p - a)(p - b)(p - c) = T^2,$$

il vient

$$T = \sqrt{r\alpha\beta\gamma}.$$

Ainsi *l'aire d'un triangle est égale à la racine carrée du produit des rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.*

II. Les quatre valeurs de T, écrites ci-dessus, donnent

$$p = \frac{T}{r}, \quad p - a = \frac{T}{\alpha}, \quad p - b = \frac{T}{\beta} \quad p - c = \frac{T}{\gamma}.$$

Ajoutons, membre à membre, les trois dernières équations, et retranchons la première ; nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

Ainsi *l'inverse du rayon du cercle inscrit est égal à la somme des inverses des rayons des cercles ex-inscrits.*

---

[1] Due à Euler, aussi bien que la démonstration du Th. XXXVII.

Théorème XXXVII.

290. *L'aire* A *d'un quadrilatère inscrit* ABCD (fig. 142), *est égale à la racine carrée du produit que l'on obtient en retranchant du demi-périmètre chacun des côtés, et en multipliant entre eux les quatre restes.*

Prolongeons les côtés BC, AD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en O. Nommons T l'aire du triangle CDO, semblable à ABO ; nous aurons (278),

$$\frac{A+T}{T}=\frac{a^2}{c^2},$$

ou

$$\frac{A}{T}=\frac{a^2-c^2}{c^2};$$

donc

$$A=T.\frac{a^2-c^2}{c^2}.$$

Par le théorème précédent,

$$T=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(x+y-c)(c+x-y)(c+y-x)}.$$

Il reste à déterminer chacun des facteurs de la quantité placée sous le radical.

La comparaison des côtés homologues, dans les deux triangles, donne

$$\frac{a}{c}=\frac{b+x}{y}=\frac{d+y}{x}.$$

De ces proportions, nous déduisons les suivantes :

$$\frac{a}{c}=\frac{b+x+d+y}{x+y},\quad \frac{a}{c}=\frac{d+y-b-x}{x-y},$$

$$\frac{a-c}{c}=\frac{b+d}{x+y},\quad \frac{a+c}{c}=\frac{d-b}{x-y};$$

puis, de ces deux dernières,

$$\frac{a-c}{c}=\frac{a-c+b+d}{c+x+y},\quad \frac{a-c}{c}=\frac{b+d-a+c}{x+y-c},$$

$$\frac{a+c}{c}=\frac{a+c+d-b}{c+x-y},\quad \frac{a+c}{c}=\frac{a+c-d+b}{c-x+y}.$$

Donc

$$x+y+c=\frac{c}{a-c}(a+b+d-c),$$

$$x+y-c=\frac{c}{a-c}(b+c+d-a),$$

$$c+x-y=\frac{c}{a+c}(a+c+d-b),$$

$$c+y-x=\frac{c}{a+c}(a+b+c-d).$$

En substituant, nous aurons

$$\mathrm{T}=\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(a+b+d-c)(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+c-d)}.$$

Si l'on pose

$$2p=a+b+c+d,$$

cette formule devient

$$\mathrm{T}=\frac{c^2}{a^2-c^2}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

donc, A étant l'aire du quadrilatère,

$$\mathrm{A}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

APPENDICE AU LIVRE TROISIÈME (*).

CENTRE DES MOYENNES DISTANCES.

Théorème I.

291. *Une droite* AB (fig. 157) *étant partagée en deux segments* AC, BC, *proportionnels aux nombres* b, a; *si*, *des points* A, B, C *on abaisse*, *sur une droite quelconque* XY, *des perpendiculaires* AA′, BB′, CC′, *on a*

$$(a+b)\ CC' = a\,AA' + b.\,BB'.$$

Menons la diagonale A′B, qui rencontre CC′ en un point D. Les triangles semblables BCD, BAA′ donnent

$$\frac{CD}{AA'} = \frac{BC}{BA} = \frac{a}{a+b};$$

d'où

$$(a+b)\ CD = a.\ AA'.$$

De même, à cause des triangles semblables A′C′D, A′B′B:

$$\frac{C'D}{BB'} = \frac{A'D}{A'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{a+b};$$

d'où

$$(a+b)\ C'D = b.\ BB'.$$

(*) Cet Appendice contient les premières notions de diverses théories créées par Desargues, Pascal, Carnot, Brianchon, le général Poncelet et M. Chasles, et constituant la *Géométrie moderne*. Le lecteur qui voudra se mettre en état d'entendre les œuvres des Géomètres que nous venons de citer pourra consulter, préalablement, les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, ou la remarquable *Introduction à la Géométrie supérieure*, par M. Housel.

Ajoutant les deux égalités, on trouve

$$(a+b)\,CC' = a.\,AA' + b.\,BB'.$$

292. *Remarques.* — I. Lorsque la droite XY ne laisse pas, d'un même côté, les trois points A, B, C, on doit affecter du signe + les perpendiculaires situées d'un côté de cette ligne, et du signe — celles qui sont situées de l'autre côté.

Considérons, par exemple, la figure 158. Nous aurons, comme ci-dessus,

$$(a+b)\,CD = a.\,AA',$$

$$(a+b)\,C'D = b.\,BB'.$$

Mais la perpendiculaire CC' est égale à C'D — CD; donc

$$(a+b)\,CC' = b.\,BB' - a.\,AA'.$$

II. Si les segments AC, BC, au lieu d'être *additifs*, sont *soustractifs*, c'est-à-dire si le point C est situé sur le prolongement de AB (*fig.* 159), on aura

$$(a-b)\,CC' = a.\,AA' - b.\,BB'.$$

En effet, de

$$\frac{AC}{AB} = \frac{a}{b},$$

on conclut

$$\frac{AC}{BC} = \frac{b}{a+b};$$

d'où, par le théorème ci-dessus,

$$a.\,AA' = b.\,BB' + (a-b)\,CC'.$$

Théorème II.

293. *Il existe toujours un point tel, que sa distance à une droite quelconque* XY (fig. 160) *soit égale à la moyenne arithmétique entre les distances de la même droite à des points donnés* A,B,C,...

D'après le Théorème I, la proposition est vraie dans le cas où le nombre des points A,B, C,... se réduit à *deux.* Admettons donc qu'elle ait été démontrée pour le cas de n point A,B,C,D,E, et vérifions qu'elle subsiste si l'on fait intervenir un nouveau point F.

Soit I le *centre des moyennes distances* des points A,B,C, D, E; nous avons, par hypothèse,

$$n.\ \mathrm{II}' = \mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' + \mathrm{DD}' + \mathrm{EE}'.$$

Tirons IF, et divisons cette droite en deux segments IO, OF, proportionnels aux nombres 1, n. Par le Théorème I,

$$(n+1)\ \mathrm{CC}' = n\ \mathrm{II}' + \mathrm{FF}'.$$

donc

$$\mathrm{OO}' = \frac{\mathrm{AA}' + \mathrm{BB}' + \mathrm{CC}' + \mathrm{DD}' + \mathrm{EE}' + \mathrm{FF}'}{n+1}.$$

294. *Remarques.*—I. Pour trouver le centre des moyennes distances d'un système de points A,B,C,... il suffit, évidemment, d'appliquer la règle suivante :

Tracez la droite AB, *et prenez-en la moitié* AM*; tracez la droite* MC, *et prenez-en le tiers* MN*; tracez la droite* ND, *et prenez-en le quart* NP*; etc : le dernier point de division* O *est le centre des moyennes distances cherché.*

II. *Tout système de points a un centre de moyennes distances.*

III. *Ce centre est unique.*

En effet, si un même système de points avait deux centres, chacun de ces deux points serait également distant d'une droite quelconque ; ce qui est absurde.

IV. *Si la somme algébrique des distances d'une droite* XY *à des points* A, B, C,.. *est nulle, cette droite contient le centre des moyennes distances du système.*

De cette proposition résultent les propriétés suivantes :

V. *Le centre des moyennes distances d'un triangle est le point d'intersection des trois médianes. De plus, ce centre est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet correspondant.*

VI. *Le centre des moyennes distances d'un quadrilatère est le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.*

VII. *Le centre des moyennes distances d'un polygone régulier est le centre de figure du polygone* (1).

TRANSVERSALES.

THÉORÈME III.

295. *Toute transversale* A'B'C' (fig. 161) *détermine, sur les côtés d'un triangle* ABC, *six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres* (2).

Soit CD la parallèle à la transversale, menée par le sommet C ; il en résulte

$$\frac{DC'}{CB'}=\frac{AC'}{AB'},\quad \frac{CA'}{DC'}=\frac{BA'}{BC'}.$$

On tire, de ces deux proportions,

$$\frac{CA'}{CB'}=\frac{AC'}{AB'}\cdot\frac{BA'}{BC'};$$

puis, en supposant les droites remplacées par leurs mesures,

$$AB'.\,BC'.\,CA'.=BA.'\,CB'.\,AC'.$$

296. *Remarques.* — I. Pour caractériser la relation précédente, on dit que les segments sont en *involution*.

II. La réciproque du théorème est vraie ; c'est-à-dire que si trois points, pris sur les côtés d'un triangle, déterminent six segments en involution, ces trois points sont en ligne

(1) Voir le Livre IV.

(2) Cette proposition, connue sous le nom de *Théorème de Ptolémée*, lui est antérieure d'au moins un siècle (CHASLES ; *Géométrie supérieure*). L'énoncé suppose, comme tous ceux qui se rapportent à la *théorie des transversales*, que les droites considérées sont indéfiniment prolongées.

droite. On démontre aisément cette réciproque, au moyen de la *réduction à l'absurde.*

III. La réciproque prouve que, *dans tout triangle* : 1° *les bissectrices intérieures rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite;* 2° *deux bissectrices intérieures et une bissectrice extérieure rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite* ; etc.

Théorème IV.

297. *Trois droites* AA', BB', CC' (fig. 162), *issues des trois sommets d'un triangle, et concourant en un même point* O, *déterminent, sur les côtés du triangle, six segments en involution* [1].

Le triangle ACC' et la transversale BOB' donnent, par le théorème précédent,

$$AB' . CO . BC' = AB . OC' . CB'.$$

Le triangle BCC' et la transversale AOA' donnent, en vertu du même théorème,

$$AB . OC' . CA' = BA' . CO . AC'.$$

Multipliant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$AB' . BC' . CA' = BA' . CB' . AC'.$$

298. *Remarques.*— I. La réciproque du théorème est vraie.

II. De cette réciproque, on conclut que, *dans tout triangle, les trois médianes se coupent en un même point*, et qu'il en est de même pour *les trois bissectrices*, pour *les trois hauteurs, pour les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit*; etc.

---

[1] Ce théorème, qui avait été attribué à Jean Bernoulli, est peut-être dû à Jean de Ceva, géomètre italien (CHASLES, *Géométrie supérieure).*

Théorème V.

299. *Si les droites qui joignent les sommets correspondants de deux triangles se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*[1].

Soient (*fig.* 170) ABC, A'B'C' les deux triangles, et soit O le point de concours des droites qui joignent les sommets correspondants. Il faut démontrer que les points M, N, P, où se coupent les côtés respectivement opposés à ces sommets, sont en ligne droite.

Le triangle OAB et la transversale A'B'P donnent, par le Théorème de Ptolémée,

$$OA'.\ AP.\ BB' = OB'.\ BP.\ AA'.$$

Le triangle OBC et la transversale B'C'M donnent, semblablement,

$$OB'.\ BM.\ CC' = OC'\ CM.\ BB'.$$

Enfin, le triangle ABC et la transversale A'C'N' :

$$OC'.\ CN.\ AA' = OA'.\ AN.\ CC'.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on trouve

$$AP.\ BM.\ CN = BP.\ CM.\ AN.$$

Donc (298, II.) les points M, N, P sont en ligne droite.

300. *Remarques.* I. La réciproque du théorème est vraie.

II. Les triangles ABC, A'B'C' sont dits *homologiques ;* O est un *centre d'homologie;* PMN est un *axe d'homologie.*

---

(1) Ce théorème est attribué à Desargues.

Théorème VI.

301. *Si l'on considère, sur les côtés du triangle ayant pour sommets les centres* C, C', C'' *de trois circonférences,* (fig. 189) *les trois centres de similitude internes* I, I', I'' *et les trois centres de similitude externes* E, E', E'' *: 1° les trois centres internes sont en involution; 2° deux centres internes et un centre externe sont en involution.*

Le centre I'' de similitude interne de deux circonférences divise la ligne des centres CC' en deux segments *additifs* CI'', C'I'', proportionnels aux rayons R, R'.

Semblablement, le centre de similitude externe E'' partage la droite CC' en deux segments *soustractifs* CE'', C'E'', proportionnels à R, R'.

Cela posé, il faut démontrer que :

1° $$\mathrm{CI''.C'I.C''I'=CI'.C''I.C'I''};$$
2° $$\mathrm{CE''.C'I.C''I'=CI'.C''I.C'E''}.$$

Or, ces deux relations deviennent évidentes si l'on multiplie terme à terme les proportions

$$\frac{\mathrm{CI''}}{\mathrm{C'I''}}=\frac{\mathrm{R'}}{\mathrm{R'}},\quad \frac{\mathrm{C'I}}{\mathrm{C''I}}=\frac{\mathrm{R'}}{\mathrm{R''}},\quad \frac{\mathrm{C''I'}}{\mathrm{C'I}}=\frac{\mathrm{R''}}{\mathrm{R}};$$

ou si l'on multiplie celles-ci :

$$\frac{\mathrm{CE''}}{\mathrm{C'E''}}=\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R'}},\quad \frac{\mathrm{C'I}}{\mathrm{C''I}}=\frac{\mathrm{R'}}{\mathrm{R''}},\quad \frac{\mathrm{C''I'}}{\mathrm{CI'}}=\frac{\mathrm{R''}}{\mathrm{R}}.$$

On voit donc que : 1° *les droites* CI, C'I', C''I'' *concourent en un même point* P; 2° *les points* I, I', E'' *sont en ligne droite.*

On démontrerait, de la même manière, que les points I, I'', E' sont en ligne droite, ainsi que les points I, I', E''.

FAISCEAUX HARMONIQUES.

302. Nous avons déjà dit (234) qu'une droite AB est partagée *harmoniquement* aux points C, D, lorsque les deux segments

additifs AC, BC sont proportionnels aux deux segments *soustractifs* AD, BD ; c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

303. Les points C, D sont dits *conjugués harmoniques*. Il en est de même des points A, B, parce que la droite CD est divisée harmoniquement en ces deux points. En effet, la proportion précédente équivaut à celle-ci :

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}.$$

304. En adoptant ces définitions, on conclut que *les bissectrices de l'angle d'un triangle divisent harmoniquement le côté opposé* ; et que *les centres de similitude de deux circonférences divisent harmoniquement la distance des centres.*

305. Plus généralement, d'après les Théorèmes III et IV, *si l'on joint les sommets d'un triangle à un point* O, *par les transversales* AA', BB', CC' (fig. 162 *bis*), *et que l'on mène ensuite la transversale* B'A'C'', *les points* C', C'' *divisent harmoniquement la base* AB.

306. Cette remarque donne le moyen de construire, *avec la règle seulement*, le conjugué harmonique C'' d'un point C'.

307. Lorsque, après avoir divisé harmoniquement une droite AB (*fig.* 248) aux points C, D, on joint les points A, B, C, D avec un point quelconque O, les quatre droites OA, OB, OC, OD forment ce qu'on appelle un *faisceau harmonique.*

Théorème VII.

308. *Toute parallèle à l'un des rayons d'un faisceau harmonique est partagée en deux parties égales par les trois autres rayons.*

Menons, par le point B, MN parallèle à OA; nous aurons

$$BM = AO.\frac{BD}{AD},\ BN = AO.\frac{BC}{AC}.$$

Mais

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC};$$

donc

$$BM = BN.$$

309. RÉCIPROQUE. *Si, par le sommet d'un triangle, on mène la médiane et la parallèle à la base correspondante, ces deux droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux autres côtés du triangle.*

THÉORÈME VIII.

310. *Si l'on mène, dans un faisceau harmonique, une transversale quelconque, elle est coupée harmoniquement par les quatre rayons.*

Ce théorème est évident par celui qui précède.

POINTS RÉCIPROQUES. — CERCLES ORTHOGONAUX.

311. Deux points C, D (*fig.* 249), situés sur un diamètre AB, et d'un même côté par rapport au centre O, sont dits *réciproques*, lorsque *le rectangle de leurs distances au centre est équivalent au carré du rayon;* c'est-à-dire lorsque l'on a

$$OC.\,OD = \overline{OB}^2.$$

Il est évident, d'après cette définition, que si le point C est intérieur au cercle, son *conjugué* D sera extérieur.

THÉORÈME IX.

312. *Deux points réciproques quelconques* C,D *divisent harmoniquement le diamètre* AB *qui les contient.*

L'égalité

$$OC.\,OD = \overline{OB}^2$$

équivaut à la proportion

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OB},$$

d'où l'on tire

$$\frac{OB + OC}{OB - OC} = \frac{OD + OB}{OD - OB},$$

ou

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

313. *Remarque*. Le théorème peut être énoncé ainsi :

Lorsqu'une droite AB *est divisée harmoniquement en* C,D , *la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points* C,D.

Théorème X.

314. *Lorsqu'une droite* AB *est divisée harmoniquement en* C, D, *la circonférence décrite sur* AB *comme diamètre coupe orthogonalement toutes les circonférences passant par les points* C, D.

Soit *(fig.* 250) M l'un des points d'intersection des deux circonférences. D'après le Théorème IX, le rayon OM est moyen proportionnel entre OC et OD ; ce rayon est donc tangent, en M, à la circonférence CD. En d'autres termes : *les tangentes* MO, MO', *aux circonférences* CD, AB, *sont perpendiculaires entre elles*. C'est ce qu'on exprime en disant que les circonférences sont *orthogonales*.

315. *Remarques*. — I. Si, laissant les points C, D fixes, on fait varier les points A, B, les circonférences décrites sur les droites AB, A'B', A''B'',. . prises comme diamètres, coupent

orthogonalement toutes les circonférences passant par les points C,D ([1]).

II. Cette considération des systèmes de cercles orthogonaux sert de base à la *projection stéréographique*.

THÉORÈME XI.

316. *Les distances d'un point quelconque* M *d'une circonférence, à deux points réciproques* C, D, *sont dans un rapport constant.*

Les droites MA, MC, MB, MD (*fig.* 251) forment un faisceau harmonique dans lequel les deux rayons conjugués MA, MB sont perpendiculaires entre eux. Donc (304) ces droites sont les bissectrices des angles déterminés par MC, MD. Conséquemment,

$$\frac{MC}{MD}=\frac{BC}{BD}.$$

317. RÉCIPROQUE. *Le lieu géométrique des points tels que les distances de chacun d'eux à deux points donnés,* C,D *sont dans un rapport constant, est une circonférence ayant son centre sur la droite* CD.

POLES ET POLAIRES

318. On appelle *polaire* d'un point D, par rapport à un cercle O, la perpendiculaire au diamètre OD, menée par le point C, réciproque ou *conjugué* du point D. Réciproquement, D est le *pôle* de la perpendiculaire.

([1]) On peut démontrer qu'*il n'existe pas, dans un plan, de systèmes orthogonaux autres que ceux qui résultent de cette construction* (*Journal de Liouville*, tome XIX).

Théorème XII.

319. *Le sommet* D *d'un angle circonscrit* EDF (fig. 251 *bis*) *a pour polaire la corde de contact* EF.

Le rayon OE est moyen proportionnel entre l'hypoténuse OD et le segment OC ; donc

$$OC.\,OD = \overline{OB}^2.$$

Ainsi, la perpendiculaire EF au diamètre passant par le sommet D rencontre ce diamètre au point conjugué de D : EF est donc la polaire du point D.

Théorème XIII.

320. *Le pôle* N (fig. 252) *de toute droite* GH *passant par un point* C *est sur la polaire* EF *de ce point*.

Le pôle de GH est situé sur OM, perpendiculaire à GH. Il faut donc, pour démontrer le théorème, faire voir que le point N, où les droites OM, EF se coupent, est conjugué de M. Or, les triangles rectangles OMC, ODN sont semblables ; donc

$$OM.\,ON = OC.\,OD.$$

Mais, les points C, D étant réciproques, on a

$$OC.\,OD = \overline{OB}^2 ;$$

donc aussi

$$OM.\,ON = \overline{OB}^2.$$

Théorème XIV.

321. *La polaire de tout point pris sur une droite passe par le pôle de cette droite.*

Cette proposition est la réciproque évidente du Théorème

XIII. Dans le cas où la droite A est extérieure à la circonférence, on peut remplacer l'énoncé par celui-ci :

Si, par différents points C, C′, C″,... (fig. 252 *bis*) *pris sur une droite* AB, *on mène des tangentes à une circonférence* O, *les cordes de contact* DE, D′E′,... *passent toutes par un même point* P.

Théorème XV.

322. *Etant donné un polygone* P, *on peut toujours construire un polygone* P′ *tel, que les sommets de l'un des polygones soient les pôles des côtés de l'autre, relativement à un cercle donné* O.

Supposons, pour fixer les idées, que ce polygone P soit un quadrilatère ABCD (*fig.* 253). Soient A′, B′, C′, D′ les pôles des côtés de cette figure. La droite A′B′, qui joint le pôle de AB au pôle de BC, est la polaire de B ; etc. Donc les deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ jouissent des propriétés énoncées [1].

THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON.

Théorème XVI.

323. *Dans tout hexagone* ABCDEF (fig. 254) *inscrit au cercle, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.*

Ce théorème, l'un des plus féconds de la Géométrie, est dû à Pascal [2]. On le démontre facilement comme il suit :

Prolongeons les côtés, de deux en deux, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent aux points I, M, N.

Nous aurons (238, 2°)

$$LA.\ LF = LB.\ LC,$$
$$MC.\ MB = MD.\ ME,$$
$$FN.\ ND = NF.\ NA.$$

---

(1) Voir, pour la *théorie des polaires réciproques*, les *Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire.*

(2) On peut voir, dans les Nouvelles *Annales de Mathématiques* (tome XI une analyse des travaux auxquels a donné lieu l'*Hexagramme mystique* d Pascal. Quand il fit connaître son Théorème, cet homme extraordinaire avait à peine dix-sept ans !

D'un autre côté, le triangle LMN, coupé par les transversales AG, DI, FH donne, à cause du Théorème de Ptolémée:

$$\begin{aligned} LB.\ MG.\ NA &= MB.\ NG.\ LA, \\ MD.\ NI.\ LC &= ND.\ LI.\ MC, \\ ME.\ NF.\ LH &= NE.\ LF.\ MH. \end{aligned}$$

Multipliant ces six égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, nous trouvons

$$MG.\ NI.\ LH = NG.\ LI.\ MH.$$

Donc (296, II) les points G, H, I sont sur une même droite.

Théorème XVII.

324. *Dans tout hexagone* abcdef (fig. 255) *circonscrit au cercle, les diagonales menées par les sommets opposés se coupent en un même point* (1).

Si l'on trace les cordes de contact AB, BC,..., elles forment un hexagone inscrit ABCDEF. Les côtés de cet hexagone ont pour pôles les sommets correspondants de l'hexagone circonscrit. Si l'on mène be, le pôle de cette droite appartient à la polaire de b et à la polaire de e (320); donc G est ce pôle. De même, les pôles des diagonales ad, cf sont les points I, H. Et, puisque les points G, I, H sont en ligne droite (323), leurs polaires concourent en un même point.

325. Les Théorèmes de Pascal et de Brianchon donnent lieu à un grand nombre de corollaires, que nous ne pouvons indiquer ici.

AXES ET CENTRES RADICAUX.

Théorème XVIII.

326 *Le lieu géométrique des points* M *d'égale puissance par*

---

1) Théorème de M. Brianchon.

rapport à deux circonférences O, O′, *est une perpendiculaire* MN *à la ligne des centres.*

On appelle *puissance* d'un point, par rapport à une circonférence, le rectangle constant des segments additifs ou soustractifs que forme ce point sur toute corde qui le contient.

D'après cette définition, il est évident : 1° que la ligne cherchée se confond avec le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux circonférences des tangentes MT, MT′ (*fig.* 256), égales entre elles ; 2° que, si les circonférences sont tangentes ou sécantes, le lieu géométrique dont il s'agit est la tangente commune ou la corde commune. Considérons donc le cas où les circonférences seraient extérieures ou intérieures.

Abaissons MP perpendiculaire à OO′, et menons MO, MO′. Nous aurons

$$\overline{MT}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OT}^2, \quad \overline{MT'}^2 = \overline{O'M}^2 - \overline{O'T'}^2;$$

d'où, à cause de MT = MT′, et en appelant R, R′ les deux rayons :

$$\overline{OM}^2 - R^2 = \overline{O'M}^2 - R'^2.$$

Or, $$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2, \quad \overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{MP}^2;$$

onc $$\overline{OP}^2 - R^2 = \overline{O'P}^2 - R'^2.$$

Cette égalité donne

$$\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = R^2 - R'^2,$$

ou

$$(OP + O'P)(OP - O'P) = (R + R')(R - R');$$

ou encore, à cause de $OP + O'P = OO'$,

$$OP - O'P = \frac{(R + R')(R - R')}{OO'}.$$

Ainsi, la position du point P est indépendante de celle du point M : tous les points du lieu cherché ayant même projection sur OO′, ce lieu est précisément la perpendiculaire MP.

327. ***Remarques.*** — I. La droite MN est appelée ***axe radical*** des circonférences O, O′. (*).

II. D'après la valeur trouvée pour OP—OP′, on voit que si R surpasse R′, OP doit surpasser O′P. Ainsi, l'***axe radical est plus près du centre de la petite circonférence que du centre de la grande.***

III. De

$$\overline{OP}^2 - R^2 = \overline{O'P}^2 - R'^2,$$

on déduit

$$(OP + R)(OP - R) = (O'P + R')(O'P - R'),$$

ou

$$(OP + R)\,AP = (O'P + R')\,A'P.$$

Nous avons supposé $R > R'$, d'où nous avons conclu $OP > O'P$. Donc, par compensation, $AP < A'P$. C'est-à-dire que *l'axe radical est plus près de la grande circonférence que de la petite.*

Théorème XIX.

328. *Les axes radicaux de trois circonférences, considérées deux à deux, se coupent en un même point.*

Les axes radicaux MN, M′N′ (*fig.* 257) se coupent en un point tel, que si l'on mène, de ce point, les tangentes CT, CT′, CT″, on aura, en même temps, CT′ = CT″, CT″ = CT. Donc CT′ = CT ; donc le point C est sur l'axe radical M″N″.

329. *Remarques.* — I. Le point C est le *centre radical* des trois circonférences.

II. Pour trouver l'axe radical de deux circonférences C, C′

(*) La *théorie des axes radicaux* est due à Gaultier (de Tours) (*Journal de l'École Polytechnique*, 16e cahier).

qui n'ont aucun point commun, il suffit de les couper par une circonférence auxiliaire C'', puis d'abaisser, du point de rencontre des deux cordes communes, une perpendiculaire sur la droite qui joint les centres des circonférences C, C'.

330. *Corollaire.* 1° *Si trois circonférences se coupent deux à deux, les trois cordes communes se coupent en un même point ;* 2° *Si trois circonférences se touchent deux à deux, les trois tangentes se coupent en un même point ;* etc.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE TROISIÈME.

Problème I.

Diviser en parties égales une droite donnée.

Supposons qu'il s'agisse de diviser en 5 parties égales la droite AB (*fig.* 143 *et* 144).

1re *Construction.* — Par l'une des extrémités de AB (*fig.* 143), menons une droite indéfinie Ax. A partir du point A, prenons une longueur AC, à peu près égale au cinquième de AB, et portons-la cinq fois sur Ax. Joignons le dernier point de division G, avec le point B, par la droite GB ; puis, par les autres points F, E, D, C, menons à cette dernière ligne les parallèles FL, EK, DI, CH : elles divisent AB en cinq parties égales (199, 2°).

2e *Construction.* — Menons, comme ci-dessus, la droite indéfinie Ax (*fig.* 144). Prenons la division arbitraire AC un peu plus grande que le cinquième de AB ; puis, du point A comme centre, décrivons, avec AG pour rayon, un arc qui rencontre en G' la droite GB prolongée. Menons AG' et portons, sur cette droite, AC' = AC, AD' = AD,... Si nous tirons CC', DD',..., ces droites, évidemment parallèles à GG', déterminent les points de division H, I, K,...

Problème II.

Diviser une droite donnée AB, *en parties proportionnelles à des droites données* m, n, p (fig. 145).

Par l'extrémité A de AB, menons une droite indéfinie Ax. Prenons, sur Ax, des longueurs AC, CD, DE, respectivement égales à m, n, p. Tirons BE, et, par les points D, C, menons à cette droite les parallèles DF, CG : elles divisent AB en trois parties AG, GF, FB, qui satisfont à la question (202).

Remarque.—Si l'on demandait de partager AB en parties proportionnelles à des nombres donnés, la question se ramènerait au Problème I.

Problème III.

Trouver une quatrième proportionnelle à trois droites données m, n, p (fig. 146).

Sur les côtés d'un angle quelconque xAy, prenons AB $= m$, AB $= n$, AD $= p$; tirons BC, puis menons, par le point D, la parallèle DE à BC. La droite AE est évidemment la quatrième proportionnelle demandée.

Problème IV.

Trouver une troisième proportionnelle à deux droites données m, n.

Soit x la droite cherchée. On doit avoir

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{x}.$$

Ce problème rentre donc dans le précédent.

Problème V.

Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données m, n.

1^re^ *Construction.* — Prenons, sur une droite indéfinie xy (*fig.* 147), AB $= m$, BC $= n$.

Sur AC $= m + n$ comme diamètre, décrivons la demicirconférence ADC. Élevons, au point, B la demi-corde BD perpendiculaire à xy ; cette droite est la moyenne proportionnelle demandée (237, 2°).

2e *Construction.* — Sur une droite AB (*fig.* 148), égale à la plus grande m des deux droites données, décrivons la demicirconférence ACB. Prenons AD $= n$; élevons DC perpendiculaire à AB, et menons AC : cette droite est moyenne proportionnelle entre m et n (237, 1°).

Le Théorème XIV, qui vient de nous servir à trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données, permet aussi de résoudre le Problème IV.

3e *Construction.* — Sur une droite indéfinie, prenez la distance AB égale à la plus petite n des droites données, et les distances ABC, BAD égales à m. Des points C, D comme centres, avec m pour rayon, décrivez des arcs qui se coupent en un point O. Enfin, tirez AO ou BO : chacune de ces droites est la moyenne proportionnelle demandée (1).

PROBLÈME VI.

Partager, en moyenne et extrême raison, une droite donnée AB.

Au point A (*fig.* 149), élevons la perpendiculaire AC égale à la moitié de AB. Menons BC. Prenons CD $=$ CA, BE $=$BD: le segment BE est moyen proportionnel entre la droite entière AB et l'autre segment AE (239).

Remarque. — En représentant par a la longueur de AB, nous aurons

$$AC = \tfrac{1}{2}a,\quad BC = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{5},$$

et

$$BE = BD = \tfrac{1}{2}a\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a\,(\sqrt{5} - 1).$$

Ainsi, quand une droite est partagée en moyenne et ex-

---

(1) Cette construction, qu'il est très-facile de justifier, a été indiquée par M. *Gouzy* (de Lausanne).

trème raison, le plus grand segment est égal au produit de cette droite par la quantité incommensurable $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Problème VII.

Construire un carré équivalent à un parallélogramme ou à un triangle donné.

Soit C le côté du carré inconnu équivalent à un parallélogramme dont la base et la hauteur sont des droites données B et H. Nous devons avoir (248)

$$\frac{B}{C} \times \frac{H}{C} = 1;$$

d'où

$$\frac{B}{C} = \frac{C}{H}.$$

Ainsi, le côté du carré est moyen proportionnel entre la base et la hauteur du parallélogramme.

On verrait, de même, que le côté du carré équivalent à un triangle donné est moyen proportionnel entre la base et la moitié de la hauteur du triangle.

Dans les deux cas, on construira le côté du carré par le Problème V.

Problème VIII.

Construire, sur une droite donnée, un rectangle équivalent à un rectangle donné.

Soit ABCD (*fig.* 150) le rectangle donné, et soit AB'C'D' le rectangle inconnu, dont la base AB' est donnée. Le Théorème XIX donne

$$\frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AD'}{AD} = 1,$$

ou

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AD}{AD'}.$$

Ainsi, la hauteur inconnue est une quatrième proportionnelle à la base du rectangle cherché, à la base du rectangle donné, et à la hauteur de celui-ci. On trouvera donc le point D′ en menant, par le point B, la parallèle BD′ à B′D.

Problème IX.

Trouver deux droites dont le rapport soit égal à celui de deux rectangles donnés.

Soient B,B′ les bases des rectangles ; H,H′ leurs hauteurs ; X,Y les droites cherchées. Nous devons avoir (248)

$$\frac{X}{Y} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'};$$

d'où

$$X = Y \cdot \frac{B}{B'} \cdot \frac{H}{H'}.$$

Si nous prenons arbitrairement Y, nous trouverons $Y\frac{B}{B'}$ en construisant une quatrième proportionnelle aux droites B′,B et Y : soit Z cette quatrième proportionnelle. Nous aurons ensuite $X = Z\,\frac{H}{H'}$. Ainsi, X est une quatrième proportionnelle aux droites H′, H et Z.

Pour simplifier la construction, on peut prendre $Y = B'$; alors $Z = B$, puis $X = B\,\frac{H}{H'}$.

Remarques. — I. Si les rectangles sont des carrés ayant pour côtés C et C′, la solution se simplifie ; car si l'on construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit soient C, C′, le rapport demandé est celui des projections de ces côtés sur l'hypoténuse (267).

II. Cette construction peut servir à trouver le rapport de deux polygones semblables quelconques ; car ces figures sont proportionnelles aux carrés des côtés homologues (279).

PROBLÈME X.

Trouver un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.

1°. Soient A, B les côtés des carrés donnés, et soit X le côté du carré cherché. Si l'on construit, avec A et B pour côtés de l'angle droit, un triangle rectangle, l'hypoténuse sera X (266).

2°. A étant le côté plus grand des côtés donnés, décrivons sur cette droite, prise comme diamètre, une demi-circonférence. De l'une des extrémités de ce diamètre, comme centre, avec une ouverture de compas égale à B, traçons un arc qui coupe la circonférence. Enfin, joignons le point d'intersection, avec l'autre extrémité du diamètre, par une corde. Cette dernière droite est le côté du carré cherché (266).

Remarque. — En appliquant plusieurs fois ce problème, on peut faire l'addition et la soustraction d'un nombre quelconque de carrés.

PROBLÈME XI.

Construire un carré qui soit à un carré donné, dans le rapport de deux droites données.

Soit A (*fig.* 151) le côté du carré donné, et soient n, m les deux droites.

Prenons, sur une droite indéfinie, $AB = m$, $BC = n$; sur AC, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence ; élevons en B la perpendiculaire BD au diamètre, et menons les droites indéfinies DA, DC.

Prenons ensuite, sur la première de ces deux droites, DE = A ; et, par le point E, menons EF parallèle à AC. Je dis que DF est le côté du carré cherché.

En effet, en désignant par $\overline{AD}^2$ et $\overline{CD}^2$ les carrés construits sur AD et CD, nous avons d'abord (267)

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}.$$

De plus, les parallèles EF, AC donnent

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DF} = \frac{A}{DF},$$

ou

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{A^2}{\overline{DF}^2};$$

donc

$$\frac{A^2}{\overline{DF}^2} = \frac{m}{n}.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où AD se trouverait égal à A, CD serait le côté du carré demandé.

Problème XII.

Construire un triangle équivalent à un polygone donné.

Soit, pour fixer les idées, le pentagone ABCDE (*fig.* 153), qu'il s'agit de transformer en un triangle équivalent.

Par le sommet C, menons CC′ parallèle à la diagonale DB, et soit C′ le point de rencontre de cette parallèle avec le prolongement de AB. Menons C′D.

Au moyen de cette construction, nous avons remplacé le triangle BCD par le triangle AC′D équivalent au premier, comme ayant même base et même hauteur. Donc, à cause de la partie commune ABDE, le quadrilatère AC′DE est équivalent au pentagone proposé.

De même, si nous menons EE′ parallèle à DA, nous remplacerons le triangle DEA par le triangle équivalent DE′A. Le pentagone proposé sera donc transformé dans le triangle C′DE′.

La construction est évidemment indépendante du nombre de côté du polygone proposé,

Remarque. — Par le Problème VII, on sait construire un carré équivalent à un triangle donné ; donc, à l'aide des Problèmes VII et XII, on pourra toujours construire un carré équivalent à un polygone donné.

PROBLÈME XIII.

Construire un polygone semblable à un polygone donné, connaissant le rapport de similitude de ces figures.

1re *Construction.* — Elle se réduit à décomposer en triangles le polygone donné, et à construire une série de triangles semblables aux premiers ; ce qui est conforme à la définition des polygones semblables (204) La méthode suivante est préférable.

2e *Construction.* — Soit à construire un pentagone semblable à ABCDE (*fig.* 154), et dont les côtés soient, à ceux de cette dernière figure, dans le rapport de n à m.

Menons, dans le plan du pentagone donné, une droite indéfinie xy.

Par les différents sommets, menons des droites Aa, Bb, Cc,..., toutes parallèles entre elles.

Prenons, sur les côtés d'un angle zOz', $OM = m$, $ON = n$; portons, à partir du sommet, sur le côté Oz, des distances égales à aA, bB,..., ae, ad, ab,...; puis, par les points ainsi trouvés, menons des parallèles à MN : elles coupent Oz' en des points dont les distances au point O sont, avec les premières, dans le rapport de n à m.

Si donc nous portons, sur une droite indéfinie $x'y'$, des longueurs $a'e'$, $a'd'$, $a'b'$,..., égales à celles que nous venons d'obtenir ; si nous faisons l'angle $y'a'$A' égal à yaA ; si nous menons des parallèles à a'A', etc. ; le pentagone A'B'C'D'E' sera, comme il est aisé de le démontrer, semblable au pentagone proposé.

Remarque. — La construction que nous venons d'indiquer est, à quelques modifications près, celle que l'on emploie dans l'*Architecture*, l'*Arpentage*, etc. Elle est susceptible de plusieurs simplifications dont nous ne pouvons parler ici.

PROBLÈME XIV.

Construire un polygone semblable à un polygone donné, et qui soit à celui-ci dans le rapport de deux droites données n, m.

Nommons a, x deux côtés homologues du polygone donné et du polygone cherché; nous devrons avoir (279)

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{m}{n};$$

donc la question est ramenée aux Problèmes XI et XIII.

PROBLÈME XV.

Construire un polygone X *semblable à un polygone* P *et équivalent à un polygone* Q.

Soient x et a deux côtés homologues des polygones X et P ; nous aurons

$$\frac{X}{P} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Afin de ramener cette proportion à une autre qui ait lieu entre des lignes, cherchons, par le Problème XII, les côtés B, A des carrés équivalents à Q, P : l'équation précédente deviendra

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{a^2}{x^2};$$

d'où

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{x}.$$

Ainsi, le côté x est une quatrième proportionnelle aux droites A, B et a.

PROBLÈME XVI.

Construire un rectangle équivalent à un carré donné, connaissant la somme ou la différence des côtés adjacents.

1° Soit AB (*fig.* 155) la somme de la base et de la hauteur du rectangle. Sur cette droite, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence ; menons parallèlement au diamètre, à une distance égale au côté du carré, la droite CD. Elle rencontre généralement la demi-circonférence en deux points C, D. Si, par l'un d'eux, nous menons CE perpendiculaire à AB, les côtés adjacents du rectangle demandé seront égaux à AE et BE.

En effet, la perpendiculaire CE est moyenne proportionnelle entre les segments AE, BE (237, 2°) ; donc, etc.

2°. Soit AB (*fig.* 156) la différence donnée. Sur cette droite, comme diamètre, décrivons la circonférence AFBE. Au point A, menons la tangente AD, égale au côté du carré donné. Enfin, joignons le point D avec le centre C, par la sécante DFE. Les dimensions du rectangle cherché sont DE et DF.

Effectivement, la tangente AD est moyenne proportionnelle entre ces deux droites (238, 3°), dont la différence est AB.

Remarques. — I. Nommons s la somme de la base et de la hauteur du rectangle, et c le côté du carré donné. La droite CD (*fig.* 155) rencontre la demi-circonférence en *deux* points, si l'on a $c < \frac{1}{2}s$; elle touche la demi-circonférence si $c = \frac{1}{2}s$, et alors le rectangle cherché est précisément le carré donné c^2. Enfin, si l'on a $c > \frac{1}{2}s$, la droite CD est extérieure à la circonférence, et le problème est impossible (158).

2° On conclut, de cette discussion, ce théorème d'arithmétique :

Le produit de deux facteurs dont la somme est constante, est le plus grand possible lorsque ces facteurs sont égaux.

3° L'équation générale du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

prend, si l'on met en évidence les signes de p et de q, les quatre formes suivantes :

$$(1)\quad x^2 + px + q = 0,\qquad (2)\quad x^2 - px + q = 0,$$
$$(3)\quad x^2 + px - q = 0,\qquad (4)\quad x^2 - px - q = 0.$$

Si l'on change x en $-x$, les équations (1), (3) se changent dans les équations (2), (4).

Donc l'équation générale du second degré peut toujours être ramenée à l'une ou à l'autre des équations (2) et (4), lesquelles peuvent être écrites ainsi :

$$(5)\quad x(p-x)=q, \qquad (6)\quad x(x-p)=q.$$

Dans l'équation (5), la somme des facteurs x, $p-x$ est p, et leur produit est q.

Dans l'équation (6), la différence des facteurs est p, et leur produit est q.

On voit donc que les deux problèmes résolus ci-dessus reviennent à la résolution d'une équation du second degré; et que réciproquement l'on peut, par des constructions graphiques très-simples, trouver les racines d'une équation du second degré.

Problème XVII.

Mener une tangente commune à deux cercles donnés.

Soient O, O' *(fig. 161)* les deux cercles, et soit AB une droite qui les touche aux points A, B. Menons les rayons OA, O'B : ces droites, perpendiculaires à AB, sont parallèles entre elles. De plus, si par le centre O', nous menons O'E parallèle à AB, nous connaîtrons, dans le triangle rectangle OEO', l'hypoténuse OO' et le côté OE, égal à la différence des rayons OA, O'B.

De là, la construction suivante :

Sur la distance OO' des centres, comme diamètre, décrivez une circonférence OEO'E'. Du point O, centre du plus grand des deux cercles, décrivez, avec un rayon égal à la différence des rayons donnés, une nouvelle circonférence; elle coupe la première aux points E, E'. Menez OE, OE', qui rencontrent la circonférence O aux points A, A'. Menez aussi, par le centre O', les droites O'B, O'B', respectivement parallèles à OA, OA′. Enfin, tirez AB, A′B′ : ces droites seront tangentes aux cercles donnés.

Remarques. — I. La construction qui vient d'être indiquée donne les tangentes *extérieures*. En remplaçant la circonférence EE′, par une circonférence FF′, décrite du centre O, avec un rayon égal à la somme des rayons donnés, on trouvera les tangentes *intérieures* CD, C′D′. Le problème proposé est donc, en général, susceptible de *quatre* solutions qui peuvent, dans certains cas particuliers, se réduire à un plus petit nombre : il est impossible, si les cercles donnés sont intérieurs l'un à l'autre.

II. Les tangentes extérieures AB, A′B′ rencontrent la ligne des centres en un même point G ; et les tangentes intérieures CD, C′D′ rencontrent cette droite en un point H. Cela étant, nommons R, R′ les rayons des circonférence, et d la distance des centres ; nous aurons, dans les triangles OAG, O′BG :

$$\frac{R}{R'} = \frac{OG}{O'G},$$

d'où

$$\frac{R - R'}{R} = \frac{d}{OG},$$

puis

$$OG = d\,\frac{R}{R - R'}.$$

De la même manière, les triangles OCH, O′DH donnent

$$\frac{R}{R'} = \frac{OH}{O'H},$$

d'où

$$\frac{R + R'}{R} = \frac{d}{OH},$$

et

$$OH = d\,\frac{R}{R + R'}.$$

Ainsi, les distances OG, OH peuvent s'obtenir par des troisièmes proportionnelles ; ce qui donne une autre construction du problème.

* III. Des proportions

$$\frac{R}{R'}=\frac{OG}{O'G},\ \frac{R}{R'}=\frac{OH}{O'H},$$

on conclut

$$\frac{OG}{O'G}=\frac{OH}{O'H}.$$

Ainsi, la droite OO′ est partagée aux points G, H, de manière que les segments additifs OH, HO′ sont proportionnels aux segments soustractifs OG, O′G ; c'est-à-dire que les deux systèmes de tangentes divisent *harmoniquement* la distance des centres (234, 304, etc.)

Problème XVIII.

Trouver, sur une droite donnée AB (fig. 163), *un point également distant de deux points donnés* C, D.

Élevons sur le milieu de CD la perpendiculaire EM : elle rencontre AB en un point M qui satisfait à la question.

Ce problème très-simple va nous donner un premier exemple d'applications numériques, dont nous ne nous sommes pas encore occupés.

Supposons que les positions des points C et D soient déterminées par les distances $CC'=c$, $DD'=d$, $C'D'=a$. Abaissons, du milieu de CD, la perpendiculaire EE′ sur AB, et prenons pour inconnue la distance $E'M=x$.

Si nous tirons DF parallèle à AB, les deux triangles DFC, EE′M seront semblables comme ayant les côtés perpendiculaires, chacun à chacun ; donc

$$\frac{DF}{EE'}=\frac{CF}{E'M},$$

ou

$$\frac{a}{\frac{1}{2}(c+d)} = \frac{c-d}{x},$$

puis

$$x = \frac{(c-d)(c+d)}{2a}.$$

Prenons, pour application,

$CC' = c = 9^m,27$, $DD' = d = 4^m,13$, $C'D' = a = 2^m,35$.

En substituant dans la formule précédente, on trouve

$$x = \frac{5,14 \times 13,4}{4,7} = \frac{68,876}{4,7} = 14,654.$$

Ainsi, la distance E'M est, à moins de *un millimètre*, $14^m,654$.

Remarque. — Dans cet exemple, bien que les lignes fussent exprimées en fonction d'une unité *concrète*, nous avons opéré sur des *nombres abstraits* [1]. Il en est de même dans tous les calculs.

PROBLÈME XIX.

Trouver, à moins de un centimètre carré, la surface d'un triangle dont les trois côtés sont $27^m,13$, $19^m,24$, $40^m,14$.

La formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction des côtés est (288)

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous aurons, dans l'exemple proposé, en prenant pour unités de longueur et de surface le *mètre linéaire* et le *mètre carré*,

---

[1] Cette dénomination, utile à l'époque où il y avait un *calcul des nombres concrets et complexes*, est à peu près abandonnée aujourd'hui : les nombres, n'étant que de simples *rapports*, sont nécessairement *abstraits*.

$$
\begin{aligned}
a &= 27,13, & p - a &= 16,125,\\
b &= 19,24, & p - b &= 24,015,\\
c &= 40,14, & p - c &= \ \ 3,115,\\
2p &= 86,51 & &\\
p &= 43,255 & &
\end{aligned}
$$

$$T = \sqrt{43,255 \,.\, 16,125 \,.\, 24,015 \,.\, 3,115}.$$

En opérant par logarithmes, nous aurons ensuite

$$
\begin{aligned}
\log p \qquad &= 1,6360363\\
\log (p - a) &= 1,2074997\\
\log (p - b) &= 1,3804826\\
\log (p - c) &= \underline{0,4934581}\\
& \quad\ 4,7174767\\
\tfrac{1}{2} &= 2,3587283 = \log T.\\
T &= 228,4170.
\end{aligned}
$$

Ainsi, la surface du triangle est, à moins de *un dix-millième de mètre carré*, ou à moins de *un centimètre carré*, $228^{m.c},4170$.

Problème XX.

Trouver la surface d'un terrain AA'A''. . . (fig. 124), *d'après les mesures suivantes :*

$b = 7^m,23$, $b' = 19^m,37$, $b'' = 40^m,15$, $b''' = 63^m,71$, $b^{iv} = 52^m,45$, $b^{v} = 18^m,40$;
$a = 30^m,17$, $a' = 37^m,15$, $a'' = 29^m,18$, $a''' = 31^m,17$, $a^{iv} = 12^m,35$, $a^{v} = 10^m,65$.

En appliquant la seconde formule du n° 259, et en prenant le mètre carré pour unité de surface, nous aurons, 2P étant l'aire du terrain,

$$
\begin{aligned}
2P &= 30,17 \times \ 0,97 + 37,15 \times 32,92 + 29,18 \times 44,34\\
&\quad + 31,17 \times 12,30 - 12,35 \times 45,31 - 10,65 \times 45,22\\
&= 29,2649 + 1222,9780 + 1293,8412 + 383,3910\\
&\quad - 559,5785 - 481,5930 = 1888,3036\,;\\
P &= 944,1518
\end{aligned}
$$

Ainsi, la surface du terrain serait de $944^{m.c}, 1518$.

EXERCICES SUR LE LIVRE III.

1. La somme des carrés des distances de n points A, B, C..., à un point quelconque S, est égale à la somme des carrés des distances des mêmes points à leur centre O, augmentée de n fois le carré de SO.

2. Le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à des points donnés A, B, C..., soit constante, est une circonférence qui a pour centre le centre O des moyennes distances des points A, B, C...

3. Si les côtés d'un polygone sont coupés par une transversale, le produit des segments qui n'ont pas d'extrémités communes est égal au produit des autres segments.

4. Si, par un point pris dans le plan d'un polygone quelconque, d'un nombre impair de côtés, on mène à chaque sommet une droite qui partage le côté opposé en deux segments, le produit des segments qui n'ont pas d'extrémités communes est égal au produit des autres segments.

5. Si, d'un point quelconque, on mène des droites aux trois sommets d'un triangle, et des perpendiculaires à ces droites; qu'on prolonge chaque perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le côté opposé au sommet qui lui correspond; les trois points ainsi obtenus seront sur une même droite.

6. Dans tout pentagone inscrit, les points de concours de deux couples de côtés non-consécutifs quelconques, et celui du cinquième côté avec la tangente au sommet opposé, sont en ligne droite (*).

7. Dans tout quadrilatère inscrit, les points de concours des côtés opposés, et ceux des tangentes aux sommets opposés, pris deux à deux, sont tous quatre en ligne droite (*).

8. Dans tout quadrilatère inscrit, le point de concours de deux côtés opposés, et les points de concours des tangentes menées aux extrémités de l'un de ces côtés, avec les deux autres, sont tous trois en ligne droite (*).

(*) Corollaire du Théorème de Pascal.

9. Dans tout triangle inscrit, les points de concours des côtés avec les tangentes aux sommets opposés, sont sur une même droite (*).

10. Dans tout pentagone circonscrit, les diagonales menées par deux couples de sommets non consécutifs quelconques, et la droite qui joint le cinquième sommet au point de contact du côté opposé, concourent toutes trois en un même point (**).

11. Dans tout quadrilatère circonscrit, les droites menées par les points de contact des côtés opposés, et les diagonales, concourent en un même point (**).

12. Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite menée par les sommets de deux angles opposés, et les droites qui joignent les points de contact des côtés formant l'un de ces angles, avec les deux autres sommets, concourent toutes trois en un même point (**).

13. Dans tout triangle circonscrit, les droites menées des sommets aux points de contact opposés, concourent en un même point. (**).

14. Le lieu des centres des circonférences qui coupent orthogonalement deux cercles donnés, est l'axe radical de ces cercles.

15. L'axe radical de deux cercles est également distant des deux polaires de chaque centre de similitude.

16. Le centre radical de trois cercles est le centre commun des huit hexagones ayant pour côtés les polaires des six centres de similitude, pris trois à trois.

17. Lorsque deux circonférences sont orthogonales, la polaire d'un point M de la première, par rapport à la seconde, passe par le point M' diamétralement opposé à M.

18. Le lieu des points réciproques d'un point donné M, relativement à toutes les circonférences ayant même axe (***), est la circonférence orthogonale aux circonférences données, passant par le point M.

19. 1° Le lieu des points M tels, que les polaires de chacun d'eux, par rapport à trois cercles donnés, se coupent en un même point P, est la circonférence O, orthogonale à ces cercles; 2° le lieu des points P est la même circonférence O; 3° le centre de cette circonférence est le centre radical des cercles donnés; 4° les points M, P sont diamétralement opposés.

20. Trois cercles étant donnés, si l'on trace une circonférence ayant même axe que deux d'entre eux et touchant le troisième, les six points de contact

---

(*) Corollaire du Théorème de Pascal.

(**) Corollaire du Théorème de Brianchon.

(***) Lorsque plusieurs circonférences, considérées deux à deux, ont même ligne des centres et même axe radical, on dit qu'elles ont *même axe*.

ainsi obtenus coïncident avec les points où les circonférences données coupent la circonférence orthogonale.

21. Le point de rencontre O des trois hauteurs d'un triangle ABC est : 1° le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les côtés du triangle ; 2° le centre radical des circonférences ayant pour diamètres les segments OA, OB, OC des trois hauteurs.

22. Dans tout quadrilatère complet, les circonférences décrites sur les diagonales comme diamètres, étant prises deux à deux, ont même axe radical (*).

23. Les points de rencontre des hauteurs des triangles déterminés par les côtés d'un quadrilatère complet, sont situés sur une même droite.

24. Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.

25. Si, d'un point quelconque, on mène des droites aux sommets d'un quadrilatère et des perpendiculaires à ces droites :

1° Les points où la perpendiculaire qui répond à un sommet coupe les droites qui joignent deux à deux les trois autres sommets sont, trois à trois, sur quatre droites ;

2° Ces quatre droites concourent en un même point.

26. Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est partagée harmoniquement par les deux autres.

27. Dans tout quadrilatère inscrit, le point de rencontre des diagonales et les points de concours des côtés opposés forment un triangle dont chaque sommet est le pôle du côté opposé.

28. Dans tout quadrilatère complet circonscrit, chacune des diagonales est la polaire du point d'intersection des deux autres.

29. Si deux quadrilatères sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, de maniere que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second : 1° les points de concours des côtés opposés de ces quadrilatères sont situés sur une même droite ; 2° les diagonales du quadrilatère inscrit et celles du quadrilatère circonscrit se coupent en un même point, pôle de cette droite ; 3° les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit sont situés sur les diagonales du quadrilatère circonscrit.

30. Si une première droite partage proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère, et qu'une seconde droite partage proportionnellement les deux autres côtés, chacune de ces droites est divisée, par l'autre, dans le même rapport que les côtés qui déterminent celle-ci.

31. Par le centre O d'une circonférence inscrite à un angle xAy, on élève

---

(*) On appelle *quadrilatère complet* la figure formée par les côtés d'un *quadrilatère convexe* ABCD, ces côtés étant indéfiniment prolongés. Tout quadrilatère complet ABCD, a trois diagonales : AC, BD, et la droite EF qui joint les points de concours des côtés opposés, pris deux à deux.

une perpendiculaire BC à la bissectrice AO, et l'on mène ensuite une tangente DE à la circonférence : ces deux droites déterminent, sur les côtés de l'angle, des segments BD, CE dont le rectangle est constant.

32. Les segments déterminés, sur deux côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit, par le diamètre perpendiculaire à la bissectrice de l'angle formé par ces côtés, sont inversement proportionnels.

33. Dans tout quadrilatère circonscrit, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle (*).

34. Dans tout quadrilatère circonscrit :

1° La droite MN qui joint les milieux des diagonales divise, en segments inversement proportionnels, les côtés opposés ;

2° La partie de cette droite, comprise entre deux côtés opposés, est partagée, par le centre du cercle, proportionnellement à ces côtés ;

3° Les segments de la droite MN, déterminés par l'une des diagonales et par les côtés, sont en proportion.

35. Si d'un point A, pris dans le plan d'un angle, on mène des transversales ABC, AB'C', AB'' C''..., les points de concours des quadrilatères BC', B'C''..., sont situés sur une même droite passant par le sommet de l'angle.

36. Si les côtés d'un triangle coupent une circonférence, de manière qu'il y ait sur chaque côté deux segments déterminés par un sommet et la courbe, le produit des six segments obtenus en faisant le tour de la figure dans un sens est égal au produit obtenu en faisant le tour en sens contraire (**).

37. Un quadrilatère étant inscrit à une circonférence, si l'on mène une transversale qui rencontre la courbe en deux points, et les côtés du quadrilatère en quatre points, ces six points sont en involution : les points conjugués sont situés sur la circonférence et sur les côtés opposés du quadrilatère.

38. Si l'on joint les sommets A, B, C d'un triangle à un point intérieur O, par les droites AOA', BOB', COC', on a

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1.$$

39. Si trois droites, aboutissant en un même point O, sont coupées par deux transversales ABC, A'B'C', on a

$$\frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{OC}{OC'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{OB}{OB'}.$$

40. Si l'on joint le sommet A d'un triangle à un point quelconque M de la base BC, on a

$$\overline{AB}^2.CM + \overline{AC}^2.BM = (\overline{AM}^2 + BM.CM).BC.$$

(*) Théorème de Newton.

(**) Théorème de Carnot.

41. La somme des carrés des segments formés par deux cordes qui se coupent rectangulairement est égale au carré du diamètre.

42. La somme des carrés de deux cordes perpendiculaires est égale à huit fois le carré du rayon, moins quatre fois le carré de la distance du centre au point d'intersection des deux cordes.

43. Dans tout triangle, le point de rencontre des trois hauteurs, le centre des moyennes distances et le centre du cercle circonscrit sont sur une même droite. De plus, la distance des deux premiers points est double de la distance des deux derniers.

44. Dans tout triangle, la distance des centres de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite, est moyenne proportionnelle entre le rayon de celle-ci et l'excès de ce rayon sur le double du rayon de la première (**).

45. Dans tout triangle, la distance des centres d'une des circonférences exinscrites et de la circonférence circonscrite, est moyenne proportionnelle entre le rayon de celle-ci et la somme de ce rayon et du double du rayon de la première.

46. Dans tout triangle, la somme des carrés des distances comprises entre le centre du cercle circonscrit et les centres des cercles tangents aux trois côtés, est égale à douze fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

47. Dans tout triangle, le carré de la distance comprise entre le centre du cercle circonscrit et le centre des moyennes distances, est égal au carré du rayon de ce cercle, moins le neuvième de la somme des carrés des côtés.

48. Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets au centre du cercle inscrit, est égale à la somme des carrés des côtés, augmentée de trois fois le carré du rayon du cercle inscrit, et diminuée du carré du demi-périmètre.

49. Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets au centre du cercle inscrit, est égale à la somme des rectangles des côtés, diminuée de douze fois le rectangle des rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit.

50. Dans tout triangle, la somme des carrés des distances des sommets au centre d'un cercle ex-inscrit, est égale à douze fois le rectangle des rayons de ce cercle et du cercle circonscrit, plus le rectangle des côtés adjacents à l'angle auquel est opposé le cercle ex-inscrit, moins la somme des rectangles de chacun de ces côtés et du troisième.

51. Dans tout triangle, la somme des carrés des douze droites qui joignent les sommets aux centres des cercles tangents aux trois côtés, est égale à quarante-huit fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

(**) Théorème d'Euler.

52. Dans tout triangle, le carré de la distance comprise entre le centre du cercle inscrit et le centre des moyennes distances, est égal au carré du rayon de ce cercle, augmenté des deux neuvièmes de la somme des carrés des côtés, et diminué du douzième du carré du périmètre.

53. Dans tout triangle, le carré de la distance comprise entre le centre du cercle inscrit et le point de concours des hauteurs, est égal à quatre fois le carré du rayon du cercle circonscrit, plus deux fois le carré du rayon du cercle inscrit, moins la demi-somme des carrés des côtés.

54. Dans tout triangle, les carrés des rayons des cercles tangents aux côtés, augmentés des carrés des côtés, donnent une somme égale à seize fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

55. L'inverse du rayon du cercle inscrit à un triangle est égal à la somme des inverses des trois hauteurs.

56. Les circonférences circonscrites aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet se coupent toutes les quatre en un même point.

57. Si l'on circonscrit des circonférences aux triangles formés par chacun des côtés d'un pentagone et les prolongements des côtés adjacents, les points d'intersection de ces lignes sont situés tous les cinq sur une même circonférence (*).

58. Le lieu des points récipropres des points d'une droite donnée, relativement à un cercle donné, est une circonférence.

59. Le lieu des points réciproques des points d'une circonférence donnée, relativement à un cercle donné, est une circonférence.

60. Dans deux figures réciproques, les angles correspondants sont égaux.

61. A, B étant deux points d'une figure, et A', B' les points correspondants de la figure réciproque, on a, en appelant R le rayon du cercle directeur :

$$A'B' = AB.\frac{R^2}{OA.OB}.$$

62. Si, à un cercle I, inscrit à un angle $x\mathrm{O}y$, on mène une tangente extérieure quelconque A'B', la circonférence circonscrite au triangle OA'B' est tangente à une circonférence fixe, inscrite à l'angle $x\mathrm{O}y$.

63. Deux polygones de n côtés sont équivalents quand leurs côtés ont les mêmes milieux.

64. La *droite de Simson*, relative à un point M de la circonférence circonscrite à un triangle, divise en deux parties égales la droite menée du point M au point de concours H des hauteurs du triangle.

65. Dans tout triangle :

1° Les milieux des côtés, les pieds des hauteurs, les milieux des segments

---

(*) Théorème de Miquel.

compris entre les sommets et le point de rencontre des hauteurs, sont neuf points situés sur une même circonférence ;

2° Le centre de cette circonférence est le milieu de la droite qui joint le point de rencontre des hauteurs au centre du cercle circonscrit;

3° Le rayon de cette circonférence est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

66. Si deux circonférences mobiles C, C′ touchent deux circonférences fixes O, O′ aux points A, B, A′, B′ : 1° les cordes AA′, BB′, des cercles mobiles, se coupent en un point fixe B ; 2° le lieu du point de rencontre des cordes AB, A′B′ appartenant aux cercles fixes, est l'axe radical de ces cercles.

67. Soit AA′ une tangente commune à deux cercles O, O, et soit C′ une circonférence tangente à ces deux cercles : 1° les cordes de contact AB, A′B′ se coupent en un point R de la circonférence C′ ; 2° le point R appartient à l'axe radical des cercles O, O′ ; 3° le rayon RC′ est perpendiculaire à la tangente AA′.

68. Soient O, O′ deux circonférences données ; AA′, DD′ deux de leurs tangentes communes *conjuguées* (*) ; C′, une circonférence tangente à O, O′ ; R,R′ les points où cette ligne coupe l'axe radical de O, O′ : la tangente DD′ est l'axe radical commun de la circonférence C′ et de chacune des circonférences orthogonales à O, O′, décrites du point R ou du point R′ comme centre.

69. Dans tout triangle, *la circonférence des neuf points* (**) est tangente au cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits.

70. Soit D le point où le côté BC du triangle ABC touche la circonférence inscrite I; soit E le point où ce même côté touche la circonférence ex-inscrite, opposée au sommet A. Si, sur DE comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupe en F, G la tangente commune conjuguée de AB, ces deux points F, G appartiennent à la circonférence des neuf points.

71. Dans tout triangle, la circonférence des neuf points touche les douze cercles inscrits ou ex-inscrits aux trois triangles déterminés par deux des sommets et par le point de concours des hauteurs.

72. Si deux cercles O, I sont tels, qu'un triangle ABC puisse être inscrit au premier et circonscrit au second, les circonférences tangentes aux côtés du triangle A′B′C′ qui a pour sommets les points où ABC touche la circonférence I, sont tangentes à un cercle fixe.

73. Si deux cercles O, I sont tels, qu'un triangle ABC puisse être inscrit au premier et circonscrit au second, la circonférence circonscrite au triangle formé par les tangentes en A, B, C, au cercle O, est tangente à un cercle fixe.

(*) C'est-à-dire, symétriques par rapport à la droite des centres.

(**) Voyez la question 65.

74. Le cercle circonscrit à un triangle ABC touche les seize cercles inscrits ou ex-inscrits aux quatre triangles ayant pour sommets les centres des cercles tangents aux trois côtés de ABC.

75. Dans tout triangle ABC la circonférence des neuf points touche : 1° les seize cercles inscrits ou ex-inscrits aux quatre triangles ayant pour sommets les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle dont les sommets sont les milieux des segments compris entre les sommets A, B, C et le point de concours des hauteurs ; 2° trois autres groupes de seize cercles.

76. Placer, dans un angle donné, une droite qui soit divisée, par un point donné, en deux segments ayant un rapport donné.

77. Par un point, donné dans le plan de trois droites qui concourent en un même point, mener une droite MNP telle, que les deux segments MP, PN aient un rapport donné $\frac{m}{n}$.

78. Par un point, donné sur le côté d'un triangle, mener une droite qui partage ce triangle en deux segments ayant un rapport donné.

79. Partager un triangle dans un rapport donné, par une droite parallèle à une direction donnée.

80. Partager un quadrilatère ABCD en deux parties équivalentes, par une droite partant du sommet A.

81. Partager un quadrilatère, dans un rapport donné, par une droite parallèle à une direction donnée.

82. Inscrire un carré à un triangle donné.

83. Inscrire, à un triangle donné, un rectangle semblable à un rectangle donné.

84. Inscrire, à un triangle donné, un rectangle équivalent à un carré donné.

85. A un quadrilatère donné, circonscrire un quadrilatère semblable à un autre quadrilatère donné.

86. Inscrire, à un rectangle donné, un rectangle semblable à un autre rectangle donné.

87. Par un point, situé sur la bissectrice d'un angle droit, mener une transversale telle, que le segment de cette droite, compris entre les côtés de l'angle, soit de longueur donnée.

88. Par un point O, situé sur la bissectrice d'un angle droit CAB, mener une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné.

89. Par un point O, situé dans un angle droit CAB, mener une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné.

90. Par un point O, situé dans le plan d'un angle quelconque CAB, mener

une transversale MN telle, que le triangle MAN soit équivalent à un carré donné.

91. Par un point, situé dans le plan d'un angle, mener une transversale telle, que le rectangle des segments déterminés par cette droite, sur les côtés de l'angle, soit équivalent à un carré donné.

92. Par un point, situé dans le plan d'un angle, mener une transversale telle, que le rectangle des segments de cette droite, interceptés entre le point donné et les côtés de l'angle, soit équivalent à un carré donné.

93. Inscrire, à un angle donné, une droite de longueur donnée, de manière que le triangle résultant soit équivalent à un carré donné.

94. Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs.

95. Construire un triangle, connaissant deux hauteurs et le rayon du cercle inscrit.

96. Construire un triangle, connaissant la hauteur a' abaissée sur le côté inconnu a, le rayon du cercle inscrit, et le rayon du cercle ex-inscrit, tangent au côté a.

97. Construire un triangle, connaissant la hauteur a' abaissée sur le côté inconnu a, ainsi que les rayons des cercles ex-inscrits, tangents aux côtés b, c.

98. Construire un triangle, connaissant les rayons des trois cercles ex-inscrits.

99. Construire un triangle, connaissant les rayons du cercle inscrit et de deux des cercles ex-inscrits.

100. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé et le rapport des deux derniers côtés.

101. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés, et qui touche une droite donnée.

102. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés, et qui touche une circonférence donnée.

103. Décrire une circonférence qui passe par un point donné, et qui touche deux droites données.

104. Décrire une circonférence qui passe par un point donné, et qui touche deux circonférences données.

105. Décrire une circonférence qui passe par un point donné, et qui touche une droite donnée et une circonférence donnée.

106. Décrire une circonférence tangente à deux droites données et à une circonférence donnée

107. Décrire une circonférence tangente à une droite donnée et à deux circonférences données.

108. Décrire une circonférence tangente à trois circonférences données.

109. Décrire une circonférence passant par deux points donnés et interceptant, sur un cercle donné, une corde de longueur donnée.

110. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés, et qui coupe, suivant un diamètre, une circonférence donnée.

111. Trouver, sur un arc donné, un point tel, que le rectangle de ses distances aux extrémités de l'arc soit équivalent à un carré donné.

112. Par un point, extérieur à un cercle, mener une droite qui soit partagée en moyenne et extrême raison par la circonférence.

113. Inscrire, à une circonférence donnée, un triangle isocèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur.

114. A un cercle donné, inscrire un trapèze ayant une hauteur donnée, et équivalent à un carré donné.

115. Trouver, sur une droite donnée, un point tel, que la somme de ses distances à deux points donnés soit égale à une longueur donnée.

116. Trouver, sur une droite donnée, un point tel, que la différence de ses distances à deux points donnés soit égale à une longueur donnée.

117. Par l'extrémité d'un diamètre perpendiculaire à une corde, mener une droite dont le segment, compris entre la corde et la circonférence, soit de longueur donnée.

118. Par un point, extérieur à un cercle, mener une sécante telle, que la somme des carrés de ses deux segments soit équivalente à un carré donné.

119. Par l'un des points d'intersection A de deux circonférences données, mener une corde commune BAC telle, que le rectangle fait sur le segment AB et une droite donnée m, augmenté du rectangle fait sur le segment AC et une droite donnée n, soit équivalent à un carré donné.

120. Inscrire, à un cercle donné, un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

121. Inscrire, à un cercle donné, un triangle dont deux côtés soient parallèles à deux droites données, et dont le troisième côté passe par un point donné.

122. Inscrire, à un cercle donné, un triangle dont deux côtés passent par deux points donnés, et dont le troisième côté soit parallèle à une droite donnée.

123. Inscrire, à un cercle donné, un triangle dont les côtés passent par trois points donnés.

124. Inscrire, à un cercle donné, un polygone dont un côté passe par un point donné, et dont les autres côtés soient respectivement parallèles à des droites données.

125. Inscrire, à un cercle donné, un polygone dont les côtés passent respectivement par des points donnés.

126. Circonscrire, à un cercle donné, un triangle dont les sommets soient situés sur trois droites données.

127. Construire un cercle tel, que les angles circonscrits, dont les sommets seraient trois points donnés, soient respectivement égaux à des angles donnés.

128. Construire un cercle tel, que les tangentes menées à ce cercle, par trois points donnés, aient des longueurs données.

129. Quelle est la route que doit suivre une bille sur un billard circulaire, pour revenir au point de départ, après deux réflexions sucessives sur la bande?

130. Trouver un point tel, que la somme de ses distances à trois points donnés soit un minimum.

131. M étant le point dont la somme des distances aux trois sommets d'un triangle donné ABC est un minimum, exprimer cette somme en fonction des côtés.

132. Trouver un point tel, que la somme des carrés de ses distances aux trois côtés d'un triangle donné soit un minimum.

133. Étant donnés un cercle O et une droite AB, trouver sur le diamètre OE, perpendiculaire à cette droite, un point P tel que, menant par ce point une corde quelconque CC', et abaissant des extrémités de cette corde les perpendiculaires CD, C'D' sur la droite donnée, on ait

$$\frac{1}{\mathrm{CD}} + \frac{1}{\mathrm{C'D'}} = \text{constante}.$$

134. Étant données deux circonférences O, O', on prend un point A sur la première et un point B sur la seconde; et l'on demande de trouver, sur l'axe radical de ces deux lignes, un point C tel, que si l'on mène les sécantes CAD, CBE, la droite DE, qui joint les seconds points d'intersection de ces sécantes et des circonférences données, soit perpendiculaire à l'axe radical.

135. Décomposer un carré en trois carrés égaux.

136. On donne une circonférence et un point de cette ligne. Par ce point on mène une sécante quelconque sur laquelle on prend un point C tel, que le rectangle de la sécante entière et de sa partie extérieure soit équivalent à un carré donné. Quel est le lieu géométrique du point C ?

137. Étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite indéfinie, on demande quel est le lieu géométrique des points M tels, que les angles AMB, CMD soient égaux entre eux.

138. Par deux points A, B d'une circonférence O, on fait passer une circonférence quelconque AMB. Par deux autres points C, D de la circonférence O, on fait passer une circonférence CMD, tangente à AMB. Quel est le lieu du point de contact M ?

139. Quel est le lieu des points de contact mutuels de deux circonférences variables, tangentes à deux circonférences fixes?

140. Par l'une des extrémités d'un diamètre AB du cercle O, on mène une transversale ACD, sur laquelle on prend CD $=m$ AC, m étant un nombre donné. On joint le point D au centre du cercle, par la droite OD; enfin on trace la corde BC, qui rencontre CD en M. Quel est le lieu du point M?

141. Quel est le lieu des points tels, que la différence des carrés des distances de chacun d'eux à deux points donnés, soit égale à un carré donné ?

142. Étant donnés deux points A, B, trouver le lieu des points C satisfaisant à la relation

$$m\,\overline{AC}^2 + n\,\overline{BC}^2 = l^2,$$

dans laquelle m, n, l sont des nombres donnés et une longueur donnée.

143. Étant donnés deux points A, B, trouver le lieu des points C satisfaisant à la relation

$$m\,\overline{AC}^2 - n\,\overline{BC}^2 = l^2,$$

dans laquelle m, n, l sont des nombres donnés et une longueur donnée.

144. Étant donnés deux groupes de points, trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés des distances de chacun d'eux aux points du premier groupe, diminuée de la somme des carrés de ses distances aux points du second groupe, soit égale à un carré donné.

145. Quel est le lieu des points tels, que les tangentes menées de chacun d'eux à deux cercles donnés, soient entre elles comme deux longueurs données?

146. Quel est le lieu géométrique d'un point tel, que sa distance à la base d'un triangle isocèle donné, soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux autres côtés?

147. Quel est le lieu des points d'où deux cercles sont vus sous des angles égaux?

148. Étant données une droite fixe AB et deux perpendiculaires indéfinies AC, BD, on coupe ces dernières par une transversale quelconque EF; on prend sur AB un point P tel, que le rectangle des deux segments de AB soit équivalent au rectangle des deux segments déterminés sur les perpendiculaires; puis, du point P, on abaisse PM perpendiculaire à EF. Quel est le lieu du point M?

149. Par l'un des points d'intersection de deux circonférences, on mène deux droites rectangulaires Pa, Pa', qui rencontrent la ligne des centres en a, a', et les deux circonférences en b, c et b', c'. Il s'agit de démontrer qu'on a toujours

$$\frac{ab}{ac} = \frac{a'b'}{a'c'}.$$

150. Par un point O, pris sur le prolongement d'un diamètre BA du cercle C, on mène une sécante quelconque OMM'; on prend les milieux N, N' des arcs AM, AM'; on joint le centre C aux points N, N' par les droites CN, CN', lesquelles rencontrent en D, D' la perpendiculaire menée au diamètre AB par le point O. Prouver que le rectangle de OD par OD' est constant, quelle que soit la direction de la sécante.

151. Prouver qu'il existe, sur la ligne CC' des centres de deux cercles qui ne se coupent pas, deux points O, O' satisfaisant aux relations

$$CO.CO' = R^2, \quad C'O.C'O' = R'^2,$$

dans lesquelles R, R' désignent les rayons.

152. Prouver qu'il existe, sur la ligne des centres de deux cercles intérieurs l'un à l'autre, deux points tels, que les distances de chacun d'eux aux extrémités d'une corde commune, perpendiculaire à la ligne des centres, sont dans un rapport constant.

153. Etant donnés un cercle O et une droite AB qui ne se rencontrent pas ; on prend, sur la droite, un point quelconque M, d'où l'on mène deux tangentes au cercle ; on prolonge la corde de contact CD jusqu'à sa rencontre, en M', avec la droite donnée. Existe-t-il un point P d'où le segment MM' soit vu sous un angle droit, quelle que soit la position du point M ?

154. Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle O, on forme un second triangle ABC dont les sommets soient situés sur les côtés des premiers, et tel, en outre, que les droites AP, BQ, CR se coupent en un même point D. Des sommets, A, B, C on mène les tangentes Aa, Bb, Cc : elles coupent en a, b, c les côtés BC, CA, AB respectivement opposés à ces sommets. On propose de démontrer que les trois points a, b, c sont en ligne droite.

155. Etant donnés deux points fixes A, B et deux longueurs constantes λ, μ, on prend, sur la direction de AB, un point quelconque M qu'on regarde comme le centre d'un cercle décrit d'un rayon R déterminé par la relation

$$R.AB = \lambda AM + \mu BM.$$

Prouver que les différents cercles, ainsi décrits pour les différents points M de la droite AB, sont tous tangents à deux droites fixes.

156. Étant donnés deux axes fixes Ox, Oy; autour d'un point fixe P on fait tourner un angle aPb de grandeur donnée α. On demande de prouver qu'il existe sur l'axe Ox un point fixe A, et sur l'axe Oy un point fixe B, tels que le rectangle des segments Aa, Bb reste constant pour toutes les positions de l'angle.

157. Etant donnés deux cercles fixes O, O' qui ne se touchent pas ; de chaque point M de l'un O, on mène deux droites aux centres de similitude S, S' des deux cercles ; ces droites rencontrent l'autre cercle O' en quatre points a, a', b, b'. Prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle O', et que la droite qui joint les deux autres passe par un point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle O.

158. Par un point A, situé sur la bissectrice d'un angle xOy, on mène une transversale BAC, qui rencontre en B, C les côtés de l'angle. On abaisse BD, CE perpendiculaires à la bissectrice; puis, ayant pris le milieu G de OA, on décrit une circonférence sur GE comme diamètre. Quel est le lieu des intersections de cette ligne avec la perpendiculaire BD ?

159. Par le point de contact A de deux circonférences O, O', on mène deux cordes AC, AC' dont le rapport est donné. Des centres O, O' on abaisse des perpendiculaires OP, O'P sur ces cordes. Quel est le lieu du point P?

160. Si une circonférence variable coupe deux circonférences fixes O, O', chacune sous un angle constant, elle touche constamment deux circonférences fixes C, C'. (*)

161. Construire un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés.

162. Partager un trapèze en parties proportionnelles à des droites données, par des parallèles aux bases.

163. Sur une même hypoténuse BC $=$ a, l'on construit deux triangles rectangles BAC, BA'C, dont les côtés BA, BA' ont des longueurs données c, c'. Quelle est, en fonction de a, c, c' l'expression du côté x d'un triangle équilatéral ayant l'un de ses sommets en B, et dont les deux autres sommets seraient situés sur les droites CA, CA' ?

(*) Théorème de M. Heegmann.

LIVRE QUATRIÈME.

POLYGONES RÉGULIERS, ET MESURE DU CERCLE.

PROPRIÉTÉS DES POLYGONES RÉGULIERS.

331. On appelle *polygone régulier* celui qui est à la fois équiangle et équilatéral.

Ainsi, un triangle équilatéral, un carré, sont des polygones réguliers.

De cette définition résulte immédiatement la conséquence suivante :

332. *Deux polygones réguliers, d'un même nombre de côtés, sont semblables.*

En effet, les côtés sont proportionnels, chacun à chacun, et les angles sont tous égaux.

Théorème I.

333. *Tout polygone régulier est : 1° inscriptible à une circonférence ; 2° circonscriptible à une circonférence.*

1° Menons les bissectrices AO, BO (*fig.* 164), des angles A, B du polygone régulier ; joignons le point O, où ces lignes se coupent, aux sommets C, D, E,... Je dis que toutes les droites OA, OB, OC,... sont égales.

Les côtés du polygone étant tous égaux entre eux, et OB étant la bissectrice de l'angle B, les triangles ABO, CBO sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. Mais ABO est isocèle, donc CBO l'est pareillement; donc OC = OB = OA. De plus, OC est la bissectrice de l'angle BCD.

Le même raisonnement est applicable aux triangles OBC, OCD ; et ainsi de suite. Donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon, passe par tous les sommets du polygone régulier.

2° Les triangles AOB, BOC,... étant isocèles et égaux, ont même hauteur ; donc la circonférence décrite du point O comme centre, avec OM pour rayon, touche tous les côtés, chacun en son milieu.

334. Le point O, centre commun de la circonférence inscrite et de la circonférence circonscrite, est appelé *centre* du polygone.

Le rayon OM du cercle inscrit, est l'*apothème*.

335. *Remarque.* — Dans deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, les rayons des cercles circonscrits sont des droites homologues (219). Il en est de même des apothèmes. Donc

Les périmètres de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entre eux comme les rayons des cercles circonscrits, ou comme les apothèmes. Les aires de ces polygones sont entre elles comme les carrés des mêmes droites.

Théorème II.

336. *Le côté du carré est au rayon du cercle circonscrit, comme $\sqrt{2}$ est à 1.*

Les diagonales AC,BD (*fig.* 165) étant perpendiculaires entre elles (132), le triangle isocèle AOB est rectangle; donc (168)

$$\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AO}^2,$$

ou

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{1}.$$

337. *Scolie.* — Soit c le côté d'un carré, soient R le rayon du cercle circonscrit et a l'apothème :

$$c = R\sqrt{2}, \quad a = \tfrac{1}{2} R\sqrt{2}.$$

Théorème III.

338. *Le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon du cercle circonscrit.*

Dans le triangle isocèle AOB (*fig.* 166), l'angle AOB étant l'*angle au centre* de l'hexagone, a pour valeur $\frac{4}{6}$ ou $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Donc

$$\textit{angle}\ \mathrm{OAB} = \frac{2^d - \frac{2^d}{3}}{2} = \frac{2^d}{3}.$$

Le triangle AOB est donc équiangle, et AB = AO.

339. Menons l'apothème OM ; nous aurons

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = \tfrac{3}{4}\,\overline{OA}^2.$$

On déduit de là, en désignant OA par R, et OM par a,

$$a = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3}.$$

Théorème IV.

340. *Le côté du triangle équilatéral est au rayon du cercle circonscrit, comme $\sqrt{3}$ est à 1.*

Joignons, de deux en deux, les sommets de l'hexagone par les cordes AC, CE, EA (*fig.* 166) : ces droites sont égales, comme sous-tendantes d'arcs égaux ; donc le triangle ACE est équilatéral. De plus, la figure ABCO est un losange ; conséquemment

$$AC = 2AG = 2OM,$$

ou

$$c = R\sqrt{3}.$$

341. L'apothème OG est la moitié de OB ; donc

$$a = \tfrac{1}{2} R.$$

Théorème V.

342. *Le côté du décagone régulier est égal à la plus grande partie du rayon du cercle circonscrit, partagé en moyenne et extrême raison.*

Soit AB (*fig.* 167) le côté du décagone régulier inscrit au cercle dont le rayon est AO.

L'angle O a pour valeur $\frac{2^d}{5}$; et l'angle ABO, $\frac{2^d - \frac{2^d}{5}}{2} = \frac{4^d}{5}$.

Ainsi, dans le triangle isocèle ABO, l'angle à la base est double de l'angle au sommet. D'après cela, si nous menons la bissectrice BC, le triangle BCO sera isocèle, et les triangles ABO, ACB, ayant un angle commun et un angle égal, seront semblables. Donc

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AO}.$$

Mais comme AB = BC = CO, la proportion précédente devient

$$\frac{AB}{CO} = \frac{CO}{AO}.$$

Sous cette forme, on voit que le point C partage AO en moyenne et extrême raison ; donc, etc.

343. *Scolie.* — Soient c le côté du décagone régulier, R le rayon ; on aura (Problème VI, Livre III)

$$c = \tfrac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1).$$

Quant à l'apothème,

$$a^2 = R^2 - \tfrac{1}{4} c^2 = R^2 - \tfrac{1}{16} R^2 (6 - 2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{16} R^2 (10 + 2\sqrt{5}) ;$$

d'où

$$a = \tfrac{1}{4} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

* Théorème VI.

344. *Le carré du côté du pentagone régulier inscrit égale le carré du décagone régulier, plus le carré du rayon.*

Soit AB (*fig.* 168) le côté du pentagone. Menons le rayon OC, perpendiculaire sur AB : AC, CB seront deux côtés consécutifs du décagone régulier.

L'angle au centre $AOB = \frac{4^d}{5}$; donc

$$ABO = \frac{2 - \frac{4}{5}}{2} = \frac{3^d}{5}.$$

Par suite, si nous menons la bissectrice OE de AOC, nous aurons

$$\textit{angle}\ BOE = \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5} = \frac{3^d}{5} = ABO.$$

Ainsi, le triangle OBE est isocèle, et semblable à ABO (211). Conséquemment,

$$\frac{BE}{BO} = \frac{BO}{AB},$$

ou

$$\overline{BO}^2 = AB \times BE. \qquad (1)$$

D'un autre côté, si nous menons EC, le triangle AEC sera isocèle, et semblable à ACB ; donc

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

ou

$$\overline{AC}^2 = AB \times AE. \qquad (2)$$

Ajoutant les égalités (1), (2), on trouve

$$\overline{BO}^2 + \overline{AC}^2 = AB\,(AE + EB),$$

ou

$$\overline{BO}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2.$$

345. *Scolie.* — Nommons c le côté du pentagone régulier; nous aurons (343)

$$c^2 = \tfrac{1}{4} R^2 (6 - 2\sqrt{5}) + R^2 = \tfrac{1}{4} R^2 (10 - 2\sqrt{5});$$

donc

$$c = \tfrac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

L'apothème a pour valeur

$$a = \tfrac{1}{4} R (\sqrt{5} + 1).$$

Théorème VII.

346. *L'arc sous-tendu par le côté du pentédécagone régulier inscrit est la différence des arcs sous-tendus par les côtés de l'hexagone et du décagone.*

En effet, ces arcs sont respectivement $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ de la circonférence; et $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

* 347. Soient AC, AB (*fig.* 169) les côtés du décagone et de l'hexagone inscrits : la corde BC sera le côté du pentédécagone. Menons le diamètre AOD et les cordes BD, CD. Le quadrilatère inscrit ACBD donne (285)

$$AB \times CD = AD \times BC + AC \times BD.$$

$AB = AO = R$. Les cordes BD, CD sont les doubles des apothèmes de l'hexagone et du décagone; ainsi

$$BD = R\sqrt{3},\quad CD = \tfrac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons, c étant le côté cherché,

$$\tfrac{1}{2} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2Rc + \tfrac{1}{2} R^2 \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1),$$

ou

$$c = \tfrac{1}{4} R(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15}).$$

Théorème VIII.

348. *L'aire d'un polygone régulier est égale au périmètre multiplié par la moitié de l'apothème.*

D'après le Théorème I, le polygone régulier est décomposable en triangles isocèles égaux, ayant pour bases les côtés du polygone. c étant l'un de ces côtés, et a l'apothème, l'aire de chaque triangle sera $\frac{1}{2}ca$. Si donc le polygone a n côtés, son périmètre p sera nc; et comme

$$\tfrac{1}{2}ca \times n = cn \times \tfrac{1}{2}a = p \times \tfrac{1}{2}a,$$

on a

$$\mathrm{P} = p \times \tfrac{1}{2}a,$$

P étant l'aire du polygone

349. En appliquant ce théorème aux polygones réguliers examinés ci-dessus, on trouve :

1° *Triangle équilatéral :*

$$n = 3\,; \quad \mathrm{P} = 3\mathrm{R}\sqrt{2} \times \tfrac{1}{4}\mathrm{R},$$

ou

$$\mathrm{P} = \tfrac{3}{4}\mathrm{R}^2\sqrt{3}\,;$$

2° *Carré :*

$$n = 4\,; \quad \mathrm{P} = 4\mathrm{R}\sqrt{2} \times \tfrac{1}{4}\mathrm{R}\sqrt{2},$$

ou

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{R}^2\,;$$

3° *Pentagone :*

$$n = 5\,; \quad \mathrm{P} = 5.\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{8}\mathrm{R}(\sqrt{5} + 1)$$
$$= \tfrac{5}{16}\mathrm{R}^2\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})},$$

ou

$$\mathrm{P} = \tfrac{5}{8}\mathrm{R}^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,;$$

4° *Hexagone :*

$$n = 6\,; \quad \mathrm{P} = 6\mathrm{R} \times \tfrac{1}{4}\mathrm{R}\sqrt{3},$$

ou

$$\mathrm{P} = \tfrac{3}{2}\mathrm{R}^2\sqrt{3}\,;$$

5° *Décagone :*

$$n = 10\,; \quad P = 10.\tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)\times\tfrac{1}{8}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{5}{8}R^2\sqrt{(10+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})},$$

ou

$$P = \tfrac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,;$$

etc.

350. Ces formules donnent, pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 10$,... :

$$P = R^2 \times 1{,}2990\ldots,\quad P = R^2 \times 2,\quad P = R^2 \times 2{,}3776\ldots,$$
$$P = R^2 \times 2{,}5980\ldots,\quad P = R^2 \times 2{,}9389\ldots$$

On voit, à l'inspection de ces valeurs approchées, que P augmente avec n. Cette propriété sera généralisée plus loin.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS.

PROBLÈME I.

351. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, et le rayon du cercle, trouver le côté du polygone régulier inscrit, d'un nombre double de côtés. — Et réciproquement.*

1° AB étant le côté donné (*fig.* 171), menons la bissectrice OC de l'angle au centre AOB : AC sera le côté du polygone cherché.

Or, dans le triangle AOC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times OD\,;$$

c'est-à-dire, en faisant $OC = R$, $AB = c$, $AC = c'$:

$$c'^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}c^2}, \qquad (1)$$

ou

$$c' = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - c^2})}.\ (*)$$

(*) Cette valeur de c' peut être transformée ainsi :

$$c' = \sqrt{R\left(R + \tfrac{c}{2}\right)} - \sqrt{R\left(R - \tfrac{c}{2}\right)}.$$

L'équation (1), résolue par rapport à c, donne

$$c = \frac{c'}{R}\sqrt{4R^2 - c'^2}. \qquad (2)$$

352. *Remarque sur les polygones réguliers qui peuvent être inscrits au cercle par des procédés géométriques.*

Nous avons vu précédemment qu'étant donné un cercle, on y peut inscrire les polygones réguliers suivants : *triangle* et *hexagone*; *carré*; *pentagone* et *décagone*; *pentédécagone*. Nous avons même trouvé, en fonction du rayon, les valeurs des côtés de ces figures. Or, par le problème qui vient d'être résolu, on saura toujours, connaissant le polygone régulier inscrit de n côtés, trouver celui de $2n$ côtés. Par conséquent, en employant la règle et le compas, on peut inscrire au cercle les polygones réguliers de

3, 6, 12, 24, 48,... *côtés;*
4, 8, 16, 32, 64,... *côtés;*
5, 10, 20, 40, 80,... *côtés;*
15, 30, 60, 128, 240,... *côtés.*

Il existe d'autres polygones réguliers inscriptibles au cercle par des opérations graphiques [1].

PROBLÈME II.

353. *Connaissant le côté d'un polygone régulier inscrit, et le rayon du cercle, trouver le côté du polygone semblable circonscrit. — Et réciproquement.*

1° Soit AB $= c$ (*fig.* 172) le côté donné. Abaissons OE perpendiculaire sur AB ; par le point E, menons une parallèle

---

[1] Voyez THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

à AB, et soient C, D les points où cette droite rencontre les rayons OA, OB prolongés. CD = C sera le côté du polygone circonscrit, semblable au polygone inscrit dont AB est le côté.

On a

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OF}};$$

d'où

$$\mathrm{C}=c\,\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{1}{4}c^2}}. \qquad (3)$$

2° Pour trouver c, connaissant C, j'observe que les triangles ABO, CDO donnent aussi

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{CO}};$$

d'où

$$c=\mathrm{C}\,\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\frac{1}{4}\mathrm{C}^2}}, \qquad (4)$$

valeur qui peut être déduite de la formule (3).

* Problème III.

354. *Connaissant le côté d'un polygone régulier circonscrit, et le rayon du cercle, trouver le côté du polygone régulier circonscrit, d'un nombre double de côtés. — Et réciproquement.*

1° Soit CD = C (*fig.* 173) le côté donné, touchant en son milieu E la circonférence O. Menons CO, DO, EO. Divisons les angles égaux COE, DOE chacun en deux parties égales, par les droites OF, OG. Le côté cherché est FG ; et, si nous menons AF, cette droite, tangente en A à la circonférence, est la moitié de FG = C′.

Les triangles ACF, ECO, évidemment équiangles, donnent

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{EO}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}C'}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + \frac{1}{4}C^2} - R}{\frac{1}{2}C};$$

d'où enfin

$$C' = \frac{4R\left(\sqrt{R^2 + \frac{1}{4}C^2} - R\right)}{C}. \quad (5)$$

2°. Résolvant cette équation par rapport à C, l'on trouve

$$C = \frac{8R^2 C'}{4R^2 - C'^2}. \quad (6)$$

* Problème IV.

355. *Connaissant les côtés c,* C *de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit ; déterminer les côtés c',* C' *des polygones réguliers d'un nombre double de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit.*

Soient (*fig.* 173) : $AB = c$, $CD = C$, $AE = c'$, $FG = C'$.

1° La droite OF étant bissectrice de l'angle AOE, l'on a

$$\frac{CF}{EF} = \frac{OC}{OE} = \frac{OC}{OA} = \frac{CD}{AB};$$

d'où

$$\frac{CE}{EF} = \frac{AB + CD}{AB}.$$

On tire de cette dernière proportion, en doublant la valeur de EF,

$$C' = \frac{Cc}{C + c}. \quad (7)$$

2° Les triangles semblables EIF, AHE donnent

$$\frac{EI}{AH} = \frac{EF}{AE};$$

d'où

$$\overline{AE}^2 = 2\,AH \times EF.$$

La seconde formule cherchée est donc

$$c'^2 = \tfrac{1}{2}cC'. \qquad (8)$$

356. Nommons P, p les périmètres des polygones auxquels appartiennent CD, AB, et soit n le nombre de leurs côtés. Désignons de même, par P' et p', les périmètres des polygones dont AE, EF sont deux côtés. Nous avons

$$P = nC,\ p = nc,\ P' = 2nC',\ p' = 2nc';$$

et, par conséquent,

$$P' = \frac{2Pp}{P+p} \ (9), \quad p' = \sqrt{P'p} \quad (10).$$

357. *Remarques.* — I. De

$$AE + BE > AB$$

on conclut, en multipliant par n,

$$p' > p.$$

Ainsi, *le périmètre du polygone régulier inscrit, de* 2n *côtés, est plus grand que le périmètre du polygone régulier inscrit, de* n *côtés.*

II. La tangente AF, perpendiculaire à OA, est plus courte que l'oblique CF ; donc

$$AF + FG + BG < CF + FG + GD;$$

ou, à cause de

$$AF = FE = EG = GB,$$

$$2\,FG < CD;$$

et, par conséquent,

$$P' < P:$$

Le périmètre du polygone régulier circonscrit, de 2n *côtés, est plus petit que le périmètre du polygone régulier circonscrit, de* n *côtés.*

III. A cause de $p' < P'$ (53), les inégalités précédentes donnent

$$p < p' < P' < P,$$

puis

$$P' - p' < P - p.$$

Ainsi, *la différence entre les périmètres des polygones réguliers de* 2n *côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, est moindre que la différence entre les périmètres des polygones réguliers de* n *côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit.* On peut, comme il suit, prouver que *la première différence est inférieure au quart de la seconde.*

* IV. A cause de l'identité

$$P' - p' = \frac{P'^2 - p'^2}{P' + p'},$$

on a d'abord, en remplaçant p'^2 par $P'p$ (356) :

$$P' - p' = \frac{P'(P' - p)}{P' + p'}. \qquad (a)$$

Or,

$$P' - p = \frac{2Pp}{P + p} - p = \frac{(P - p)p}{P + p};$$

et, d'un autre côté,

$$P' + p' > P' + p,$$

ou

$$P' + p' > \frac{(3P + p)p}{P + p}.$$

Au moyen de ces relations, la formule (a) devient

$$\frac{P' - p'}{P - p} < \frac{P'}{3P + p}. \qquad (b)$$

La fraction $\frac{P'}{3P+p}$ est moindre que $\frac{1}{4}$. En effet, l'inégalité

$$\frac{2\,Pp}{(P+p)(3P+p)} < \frac{1}{4}$$

se transforme aisément en

$$(3\,P-p)(P-p) > 0\,;$$

et celle-ci est évidente. Par suite, et *à fortiori*, l'inégalité (*b*) se réduit à

$$P'-p' < \frac{1}{4}(P-p).\ (^*)$$

* Problème V.

357. *Connaissant les aires* A, B *de deux polygones réguliers semblables, l'un inscrit, l'autre circonscrit; trouver les aires* A′, B′ *des polygones réguliers d'un nombre double de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit.*

En conservant les notations précédentes, et en appelant n le nombre des côtés de chacun des deux premiers polygones, nous avons :

$$A = 2n.\,AOH, \qquad B = 2n.\,COE,$$
$$A' = 2n.\,AOE, \qquad B' = 4n.\,EOF.$$

Cherchons donc des relations entre les aires des triangles AOH, COE, AOE, EOF.

Les triangles AOH, AOE ayant même hauteur,

$$\frac{AOH}{AOE} = \frac{OH}{OE}.$$

De même, les triangles AOE, COE ont même hauteur; donc

$$\frac{AOE}{COE} = \frac{OA}{OC}.$$

(¹) On peut démontrer cette proposition au moyen de considérations géométriques. *Voyez* Théorèmes et Problèmes, p. 240.

Mais, à cause des parallèles,

$$\frac{OH}{OE} = \frac{OA}{OC}.$$

Conséquemment,

$$\frac{AOH}{AOE} = \frac{AOE}{COE};$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{A'}{B}.$$

La première relation est donc

$$A' = \sqrt{AB}. \qquad (11)$$

Pour trouver la seconde, observons d'abord que les triangles COE, EOF, qui ont même hauteur, donnent, à cause de la bissectrice OF,

$$\frac{COE}{EOF} = \frac{CE}{EF} = \frac{OC + OE}{OE}.$$

Mais $OE = OA$, et l'on a

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OH} = \frac{AOE}{AOH};$$

donc

$$\frac{COE}{EOF} = \frac{AOE + AOH}{AOH}.$$

Multipliant les deux termes de chaque rapport par $4n$, nous trouvons

$$\frac{2B}{B'} = \frac{A' + A}{A},$$

ou

$$B' = \frac{2AB}{A + A'} \text{ (*)}. \qquad (12)$$

(*) Les relations (11) et (12) ont été données par Saurin, membre de l'ancienne Académie des Sciences de Paris (1723).

358. *Remarques.*—I. On peut démontrer, soit par un calcul très-simple, soit par la méthode suivante, que *la différence* B′—A′ *entre les aires des polygones de* 2n *côtés, est moindre que le quart de la différence* B — A *entre les aires des polygones de* n *côtés.*

Ces différences sont proportionnelles à AFE et ACEH. Conséquemment, il suffit de faire voir que le triangle AFE est moindre que le quart du trapèze ACEH, ou que l'on a

$$EF < \tfrac{1}{4}(CE + AH). \qquad (c)$$

Soit K le point de rencontre de la bissectrice OF avec AH : nous aurons EF = AF = AK = KE, attendu que AE est la bissectrice de l'angle FAB. L'inégalité précédente se réduit donc à

$$EF < \tfrac{1}{4}(CF + 2EF + KH),$$

puis à

$$EF < \tfrac{1}{2}(CF + KH). \qquad (d)$$

Or, à cause des parallèles AF, KE, les triangles rectangles CAF, EHK sont semblables ; donc

$$\frac{CF}{EK} = \frac{AF}{KH},$$

ou

$$\frac{CF}{EF} = \frac{EF}{KH}.$$

Ainsi

$$EF = \sqrt{CF \cdot KH}. \qquad (e)$$

Mais on sait que *la moyenne par quotient est moindre que la moyenne par différence* : l'inégalité (c) est donc démontrée.

II. A, A′ A″, étant les aires des polygones réguliers inscrits, de n, $2n$ et $4n$ côtés, on a

$$A''^2 = 2\,\frac{A'^3}{A + A'}. \qquad (*)$$

(*) Théorèmes et Problèmes, p. 246. Cette relation remarquable a de nombreuses conséquences. *Voyez* l'ouvrage cité.

Problème VI.

359. *Connaissant le rayon* R *et l'apothème* r *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R' *et l'apothème* r' *d'un polygone régulier isopérimètre, d'un nombre double de côtés.*

Soient (*fig.* 174) : AB le côté du premier polygone ; O le centre et OA le rayon du cercle circonscrit ; OD, l'apothème. Prenons le milieu C de l'arc ACB. Menons AC, CB, puis OA' perpendiculaire à AC, et OB' perpendiculaire à BC. Il est clair que la corde A'B' est la moitié de AB, et que l'angle A'OB' est la moitié de AOB ; d'où il résulte que OA' et OD' sont le rayon R' et l'apothème r' du second polygone (*).

Cela posé, le point D' est le milieu de CD, et OA' est moyenne proportionnelle entre OA' et OD' (237) ; donc

$$r' = \tfrac{1}{2}(r + \mathrm{R}) \ (13), \qquad \mathrm{R}' = \sqrt{\mathrm{R}r'} \ (14).$$

Ainsi : 1° *le second apothème est moyen, par différence, entre le premier apothème el le premier rayon ; 2° le second rayon est moyen, par quotient, entre le premier rayon et le second apothème.*

360. *Remarques.* — I. La *flèche* CD est égale à $\mathrm{R} - r$; et si, du point O pris comme centre, nous décrivons l'arc A'EB', nous aurons $\mathrm{R}' - r' = \mathrm{ED}'$.

Or, la corde A'E est bissectrice de l'angle CA'D' ; donc, à cause de A'D' < A'C', on a

$$\mathrm{ED}' < \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CD}', \quad \mathrm{ED}' < \tfrac{1}{4}\,\mathrm{CD},$$

ou enfin

$$\mathrm{R}' - r' < \tfrac{1}{4}(\mathrm{R} - r).$$

Ainsi, *la différence entre le second rayon et le second apothème est moindre que le quart de la différence entre le premier apothème.*

II. Les formules (13), (14) sont beaucoup plus simples que celles qui résolvent les Problèmes IV et V. Mais, ainsi que

(*) Cette élégante construction est due à Léger, ancien chef d'institution à Montmorency.

M. Vincent l'a fait voir, on peut ramener les unes aux autres. Prenons, par exemple, les relations

$$A' = \sqrt{AB} \ (11), \quad B' = \frac{2AB}{A + A'} \ (12).$$

Si l'on suppose

$$A = \frac{1}{a}, \ B = \frac{1}{b}, \ A' = \frac{1}{a'}, \ B' = \frac{1}{b'};$$

on trouve, par un calcul très-simple,

$$a' = \sqrt{ab}, \quad b' = \tfrac{1}{2}(a + b).$$

* Problème VII.

361. *Connaissant le rayon* R *et l'apothème* r *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R' *et l'apothème* r' *d'un polygone régulier équivalent, d'un nombre double de côtés.*

Soient (*fig.* 113) :

$$OA = OB = R, \ OC = r, \ OA' = OB' = R', \ OC' = r'.$$

D'après l'énoncé, le triangle *isocèle* A'OB' doit être équivalent au triangle *rectangle* AOC.

1° Ces triangles ayant un angle commun, la condition d'équivalence devient (277)

$$OA' \times OB' = OA \times OC,$$

ou

$$R' = \sqrt{Rr} \quad (15).$$

2° L'angle DAB, qui a pour mesure la moitié de l'arc BD (186), égale A'OC'. Conséquemment, les triangles rectangles A'C'O, DCA sont semblables, et l'on a

$$\frac{OC'}{AC} = \frac{OA'}{AD}.$$

ou

$$\frac{r'}{AC} = \frac{R'}{AD}.$$

D'ailleurs $AC = \sqrt{R^2 - r^2}$; et, si l'on mène le diamètre DOE, $AD = \sqrt{2R(R-r)}$ (237, 1°). La proportion précédente donne donc, à cause de la relation (13),

$$r' = \sqrt{r\,\frac{R+r}{2}} \qquad (16).$$

Ainsi : 1° *le second rayon est moyen proportionnel entre le premier rayon et le premier apothème ;* 2° *le second apothème est moyen proportionnel entre le premier apothème et la demi-somme du premier rayon et du premier apothème* (*).

AIRE DU CERCLE, ET LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE.

362. Avant de passer à l'objet de ce paragraphe, il convient de généraliser nos idées relativement aux *longueurs* des lignes, aux *aires* des figures, et d'examiner ce que signifient ces expressions, quand on veut les appliquer aux figures terminées par des lignes courbes.

Pour plus de simplicité, considérons un triangle ABC (*fig.* 175). Nous avons trouvé, dans le Livre troisième, que l'aire de ce triangle est égale à la moitié du produit des nombres qui représentent respectivement la base AB et la hauteur CD.

Nous sommes parvenu à cette conclusion en démontrant qu'un triangle est la moitié du rectangle de même base et de même hauteur, et en obtenant, en premier lieu, le rapport de ce rectangle au carré pris pour unité. Le théorème sur la mesure des triangles exprime donc que si l'on couvrait, par des figures toutes égales entre elles, le triangle ABC et le carré PQRS (*fig.* 176), et si la *commuue mesure* était contenue m fois dans le triangle et n fois dans le carré, on aurait

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{AB}{PQ}\cdot\frac{CD}{PS}.$$

(*) Ce théorème est dû à l'illustre Legendre.

Or, on conçoit qu'il n'est pas toujours possible de décomposer deux polygones en figures toutes égales entre elles. Par suite de cette impossibilité, on est obligé de se représenter d'une autre manière la comparaison de ces polygones ; et l'on arrive alors, nécessairement, à la considération des limites, considération que nous avons déjà employée.

Admettons, pour abréger, l'expression de l'aire du rectangle. Partageons la hauteur CD (*fig.* 175) en un nombre n de parties égales ; par les points de division, menons des parallèles à la base ; puis achevons les rectangles EFGH, E'F'G'H',.... Soit a l'aire de la somme de ces rectangles.

Si nous divisons la hauteur CD en un nombre n' de parties égales, moindres que les premières (en prenant, par exemple, $n' = 2n$), nous trouverons une aire a', plus grande que a, attendu que la somme des nouveaux rectangles surpasse la somme des premiers.

En continuant de la même manière, nous obtiendrons une série de nombres a, a', a'',... qui augmentent sans cesse, et qui, comme nous le vérifierons tout à l'heure, tendent vers une certaine limite A. Or, cette limite est ce que nous prenons pour définition de l'aire du triangle ABC.

363. Pour justifier cette définition, et pour démontrer, dans ce cas très-simple, que l'aire de la somme des rectangles a une limite, exécutons le calcul qui vient d'être indiqué.

En comptant les divisions à partir du sommet, soit MM' la $(m+1)^{ième}$, n représentant le nombre total des parties contenues dans la hauteur h. Nous aurons, b étant la base du triangle AB,

$$\frac{IK}{AB} = \frac{m}{n},$$

ou

$$IK = \frac{m}{n} b.$$

L'aire du rectangle IKI'K' est donc

$$\frac{m}{n} b \times \frac{h}{n} = bh . \frac{m}{n^2}.$$

Si l'on fait successivement $m = 1$, $m = 2, \ldots$, $m = n - 1$, cette expression représentera l'aire du premier, du deuxième,..., du $(n-1)^{ième}$ rectangle. Donc, en ajoutant,

$$a = \frac{bh}{n^2}[1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)].$$

La quantité entre parenthèses a pour somme $\frac{n(n-1)}{2}$; ainsi

$$a = \tfrac{1}{2}\, bh \frac{n-1}{n}.$$

Si n augmente indéfiniment, la fraction $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ tend vers l'unité, qui en est la limite. Donc, a a pareillement une limite, laquelle est $A = \frac{1}{2}\, bh$.

Nous retombons, de cette manière, sur l'expression connue de l'aire du triangle.

364. Considérons actuellement une figure terminée par une ligne courbe, et, pour plus de simplicité, supposons-la convexe.

Si, comme nous venons de le faire pour le triangle, nous inscrivons à ABCD (*fig.* 177) une série de rectangles, l'aire a de cette somme de rectangles tend, quand leur nombre augmente indéfiniment, vers une limite A. En effet, A est toujours moindre que l'aire d'un polygone extérieur à la courbe ABCD. Cette limite A est ce que nous appelons *aire* de la surface ABCD.

365. En considérant le polygone EFGHIKLM..,. formé par l'ensemble des rectangles inscrits à ABCD, on voit que, le nombre de ceux-ci augmentant indéfiniment, les côtés de ce polygone diminuent de plus en plus, de manière à devenir moindres que toute grandeur assignable.

Tout autre polygone, jouissant de la même propriété, pourrait également être employé. Par exemple, inscrivons à la courbe ABCD (*fig.* 178) un polygone convexe MNPQR; puis faisons croître indéfiniment le nombre de ses côtés, de manière à les rendre tous aussi petits que nous voudrons : les aires successives trouvées ainsi auront une limite, laquelle sera, *par définition*, l'aire de ABCD.

366. Nous venons d'indiquer deux manières d'inscrire, à la figure donnée, des figures rectilignes.

Mais alors se présente cette question : En employant des rectangles, comme dans le premier mode, et en employant des polygones, comme dans le second, arrivera-t-on à la même limite ? Et même, en conservant le second procédé, comme on peut concevoir une infinité de séries de polygones, toutes ces séries conduiront-elles à la même limite ?

La réponse est affirmative ; mais la démonstration complète de l'identité des résultats ne semble pas pouvoir être établie sans le secours du Calcul intégral. Nous admettrons donc cette identité ; et, sans nous préoccuper des différentes méthodes qui peuvent conduire à la détermination de l'aire d'une figure plane, nous adopterons la définition suivante :

367. *L'aire d'une figure plane terminée par une courbe est la limite des aires que l'on obtient en inscrivant à cette courbe une série de polygones convexes dont les côtés diminuent indéfiniment, de manière à devenir moindres que toute droite donnée.*

368. Si, après avoir inscrit à la courbe un premier polygone convexe EFGH (*fig.* 179), nous prenons sur chaque *arc* EF, GH,... un ou plusieurs points intermédiaires, nous formerons un second polygone dont le périmètre sera plus grand que celui du premier. En continuant de la sorte, nous trouverons donc une série de périmètres allant tous en augmentant. D'ailleurs, ces périmètres ne peuvent pas devenir infinis, car chacun d'eux est moindre qu'une ligne brisée quelconque, enveloppant ABCD (53). Cela posé :

369. *La longueur d'une courbe convexe plane est la limite vers laquelle tendent les périmètres des polygones inscrits à cette courbe, lorsque les côtés de ces polygones diminuent indéfiniment, de manière à devenir moindres que toute droite donnée.*

370. Les considérations précédentes s'appliquent à une courbe quelconque, non convexe, attendu qu'une pareille ligne est toujours décomposable en plusieurs arcs convexes.

Ainsi, soit la courbe ABCDEF (*fig.* 180), qui se compose des arcs convexes AB, BC, CD,... : nous appellerons *longueur* de cette ligne la somme des longueurs de ses six parties; etc.

371. Ces mêmes considérations conduisent aux conséquences suivantes, qui ne sont qu'une extension des Théorèmes I, II, III du Premier livre :

1° *Une droite finie* AB (fig. 181) *est plus petite que toute ligne plane* ACDEB, *terminée aux mêmes extrémités* A, B ;

2° *Une ligne convexe est plus petite que toute ligne qui l'enveloppe, et qui est terminée aux mêmes extrémités ;*

3° *Une ligne convexe est plus petite que toute ligne qui l'enveloppe de toutes parts.*

372. *Remarque.* — La première proposition s'énonce encore de cette manière :

Le plus court chemin entre deux points, sur un plan, est la droite finie qui les joint. Cet énoncé justifie l'expression de *distance*, par laquelle nous avons désigné la droite finie qui joint deux points.

De même, nous avons appelé *distance* d'un point à une droite la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, parce que cette perpendiculaire est plus courte que toute autre ligne plane, menée du point à la droite, etc.

Appliquons à la circonférence les considérations générales qui précèdent : elles se simplifieront considérablement.

Théorème XI.

373. *A une circonférence donnée, on peut toujours inscrire ou circonscrire deux polygones réguliers semblables tels, que la différence de leurs périmètres ou de leurs aires soit moindre qu'une quantité donnée quelconque.*

Inscrivons et circonscrivons à la circonférence deux polygones réguliers semblables : soit n le nombre des côtés de chacun d'eux. Puis, inscrivons et circonscrivons deux polygones réguliers de $2n$ côtés ; puis, deux polygones réguliers de $4n$ côtés ; et ainsi de suite indéfiniment. Je dis que l'on pourra pousser l'opération assez loin pour que la différence entre les périmètres des polygones semblables auxquels on s'arrêtera soit moindre qu'une quantité donnée δ.

Soient : p, P les périmètres de ces deux polygones (*fig.* 172); R, le rayon OE; a, l'apothème OF. On a

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{a};$$

d'où

$$P - p = P.\frac{R - a}{R}.$$

Dans le second membre, le facteur P va en diminuant, le dénominateur R est constant ; donc il suffit de prouver que R — a peut devenir moindre que toute grandeur donnée. Or, R — a, ou AO — OF, est moindre que AF ; c'est-à-dire moindre que la moitié du côté du polygone inscrit auquel on s'arrête; donc, etc.

La démonstration se ferait avec autant de facilité pour les aires.

374. Puisque la différence entre les périmètres des polygones semblables diminue indéfiniment, de manière à devenir moindre que toute quantité donnée, ces périmètres ont une limite commune. Il en est de même pour les aires. Et comme les *formes* des polygones réguliers, inscrits ou circonscrits, s'approchent de plus en plus de celle du cercle lorsque le nombre des côtés de ces polygones va en augmentant, nous adopterons les définitions suivantes :

375. 1° *On appelle* longueur de la circonférence *la limite commune vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers inscrits ou circonscrits; 2° on appelle* aire du cercle *la limite commune vers laquelle tendent les aires de ces polygones.*

Théorème XII.

376. 1° *Deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons ;*

2° *Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

1° Soient deux circonférences ayant pour rayons R, r, et dont les longueurs soient C, c.

Inscrivons à ces circonférences deux polygones réguliers semblables, ayant pour périmètres P, p. Nous aurons (335)

$$\frac{P}{p} = \frac{R}{r}.$$

Si nous doublons indéfiniment le nombre des côtés des deux polygones (*), les périmètres P, p s'approcheront infiniment de C, c, qui en sont les limites respectives. D'ailleurs, le rapport entre les limites de deux grandeurs variables est la limite du rapport de ces grandeurs (180) ; donc

$$\frac{C}{c} = \frac{R}{r}.$$

2° Même démonstration.

377. *Corollaire.* — La proportion précédente donne

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r} :$$

ainsi le rapport d'une circonférence à son diamètre est le même pour toutes les circonférences ; ou

Le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre constant.

378. *Remarque.* — Le rapport de la circonférence au diamètre est, ainsi qu'on peut le démontrer, un nombre incommensurable ; on le représente ordinairement par la lettre π. Sa valeur approchée, réduite en décimales, est

$$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\ldots$$

Théorème XIII.

379. *L'aire d'un cercle est égale à la circonférence multipliée par la moitié du rayon.*

(*) *Doubler indéfiniment le nombre des côtés d'un polygone* signifie que l'on remplace ce polygone (de n côtés) par un polygone de $2n$ côtés, puis par un polygone de $4n$ côtés, etc.

Nous avons trouvé (348) que l'aire d'un polygone régulier est égale au périmètre multiplié par la moitié de l'apothème. Or, les limites respectives du polygone, du périmètre et de l'apothème sont le cercle, la circonférence et le rayon ; donc, etc.

380. *Scolie.* — 1° Soit c une circonférence de rayon R ; on aura (377)

$$c = 2\pi R;$$

2° Soit C l'aire du cercle de même rayon R :

$$C = 2\pi R \times \tfrac{1}{2} R,$$

ou

$$C = \pi R^2.$$

381. *Remarque.* — Si, dans ces expressions, on suppose $R = 1$, on trouve

$$\frac{c}{2} = C = \pi;$$

ainsi *le nombre incommensurable π est la longueur de la demi-circonférence dont le rayon est* 1, *ou l'aire du cercle de rayon* 1.

382. Deux cercles peuvent toujours être considérés comme étant les limites de polygones semblables deux à deux. Donc les cercles doivent jouir des propriétés qui appartiennent à ces polygones. Il en est de même pour les arcs ou pour les secteurs *semblables*, c'est-à-dire répondant à un même angle au centre. Ainsi :

Théorème XIV.

383. 1° *Les arcs semblables sont entre eux comme leurs rayons ;*

2° *Les secteurs semblables sont entre eux comme les carrés de leurs rayons.*

Théorème XV.

384. *Dans un même cercle, deux secteurs sont entre eux comme les arcs correspondants, ou comme les angles au centre.*

Théorème XVI.

385. *L'aire d'un secteur est égale à l'arc multiplié par la moitié du rayon.*

DÉTERMINATION DU RAPPORT DE LA CIRCONFÉRENCE AU DIAMÈTRE.

386. Nous avons dit (378) que le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable ; ainsi, nous ne pouvons l'exprimer exactement par un nombre fini de chiffres. Mais nous pouvons, du moins, nous proposer d'en obtenir une valeur approchée.

Cette recherche peut être envisagée sous quatre points de vue principaux, clairement indiqués par les questions suivantes :

1° *Calculer la longueur d'une circonférence dont le rayon est donné ;*

2° *Calculer l'aire d'un cercle dont le rayon est donné ;*

3° *Calculer le rayon d'une circonférence dont la longueur est donnée ;*

4° *Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est donnée.*

Nous allons indiquer, sommairement, comment on peut résoudre ces quatre problèmes.

Problème VIII.

387. *Calculer la longueur d'une circonférence dont le rayon est donné.*

Prenant le rayon pour unité, inscrivons et circonscrivons des carrés au cercle. Leurs côtés sont, respectivement :

$$c = \sqrt{2}, \quad C = 2.$$

Par les formules des nos 351 et 353, on peut, en partant de ces valeurs, calculer les côtés c', C' de l'octogone régulier inscrit et de l'octogone régulier circonscrit, puis les côtés c'', C'' des polygones réguliers de 16 côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, etc. Multipliant par 4, 8, 16, 32,... ces divers nombres, on connaîtra les périmètres des polygones réguliers, inscrits et circonscrits, de 4, 8, 16, 32,.... côtés. Les périmètres des polygones inscrits vont en augmentant ; ceux des polygones circonscrits vont en diminuant ; et d'ailleurs, la longueur de la circonférence, représentée par 2π (381), est comprise entre les périmètres de deux polygones semblables quelconques. De là résulte que si l'on arrête le calcul à deux de ces polygones, et si l'on prend la moitié du nombre formé par les décimales communes à leurs périmètres, on aura, avec ce même degré d'approximation, la valeur du rapport π.

388. En opérant d'une manière un peu différente, Archimède (*) a trouvé que le périmètre du polygone régulier inscrit, de 96 côtés, surpasse $2\left(3+\frac{10}{71}\right)$, et que le périmètre du polygone circonscrit est inférieur à $2\left(3+\frac{1}{7}\right)$. Conséquemment, le nombre π est compris entre $\frac{223}{71}$ et $\frac{22}{7}$: cette dernière valeur, connue sous le nom de ***Rapport d'Archimède***, est approchée, *par excès*, à moins de 0,001.

* 389. Les calculs précédents deviennent plus réguliers si l'on fait usage des relations

$$P' = \frac{2Pp}{2P+p}, \quad p' = \sqrt{P'p},$$

démontrées ci-dessus (356). En effet, les périmètres des carrés étant

$$P = 8, \quad p = 4\sqrt{2},$$

il en résulte, pour les périmètres de l'octogone circonscrit et de l'octogone inscrit :

$$P' = \frac{16\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, \quad p' = \sqrt{\frac{128}{2+\sqrt{2}}},$$

ou

$$P' = 16\left(\sqrt{2}-1\right), \quad p' = 8\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

(*) Né à Syracuse, vers l'an 287 avant l'ère vulgaire.

Appliquant de nouveau les mêmes formules, on trouve les périmètres P'', p'' des polygones réguliers de 16 côtés ; et ainsi de suite. Il est vrai que les résultats se compliquent rapidement.

* 390. Au lieu d'employer l'une ou l'autre des méthodes précédentes, on peut adopter la marche suivante, indiquée par Lacroix.

Soient (*fig.* 30) $OD = a$, $OD' = a'$ les apothèmes de deux polygones inscrits consécutifs.

Si l'on trace le diamètre COE et la corde AE, on a, simultanément,

$$AE = 2a', \quad AE = \sqrt{CE \cdot DE}.$$

Donc, en prenant le rayon pour unité,

$$2a' = \sqrt{2a + 2}.$$

Ainsi, *en ajoutant 2 au double de l'apothème d'un polygone régulier inscrit, et en extrayant la racine carrée du résultat, on a le double de l'apothème du polygone suivant* (*).

Cela posé, si l'on part de l'apothème a_1 du carré inscrit, on pourra calculer les apothèmes a_2, a_3, a_4, des polygones réguliers inscrits, de 8, 16, 32,... côtés. Parvenu à un apothème a_n dont la différence avec le rayon soit jugée suffisamment petite, on déterminera le côté c_n du polygone correspondant, au moyen de la relation

$$c_n = \sqrt{4 - (2a_n)^2},$$

laquelle équivaut à

$$c_n = \sqrt{2 - 2a_{n-1}}\,;$$

parce que

$$(2a_n)^2 = 2 + 2a_{n-1}.$$

Multipliant c_n par 2^{n+1}, on a

$$p_n = 2^{n+1}\sqrt{2 - 2\,a_{n-1}}\,, \qquad (1)$$

(*) Cette proposition ne diffère pas de la formule trigonométrique

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

p_n représentant le périmètre du polygone inscrit, dont le nombre des côtés est 2^{n+1}. Enfin, le périmètre P_n du polygone semblable circonscrit étant donné par la proportion

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{1}{a_n},$$

d'où résulte

$$P_n = 2^{n+2}\sqrt{\frac{2 - 2a_{n-1}}{2 + 2a_{n-1}}}, \qquad (2)$$

il s'ensuit que l'on connaîtra deux limites entre lesquelles est compris le nombre 2π.

* 391. Voici une application de cette méthode :

$$2a_1 = \sqrt{2} = 1{,}41421356,$$
$$2a_2 = \sqrt{3{,}41421356} = 1{,}84775907,$$
$$2a_3 = \sqrt{3{,}84775907} = 1{,}96157056,$$
$$2a_4 = \sqrt{3{,}96157056} = 1{,}99036945,$$
$$2a_5 = \sqrt{3{,}99036945} = 1{,}99759091,$$
$$2a_6 = \sqrt{3{,}99759091} = 1{,}99939764;$$
$$p_7 = 2^8\sqrt{0{,}00060236} = 256.\ 0{,}024543 = 6{,}2830;$$
$$P_7 = 2^9\sqrt{\frac{0{,}00060236}{3{,}99939764}} = 512.\ 0{,}012272 = 6{,}2833.$$

La moyenne entre ces deux valeurs est

$$\pi = 3{,}1416,$$

résultat exact à moins de 0,0001.

* Problème IX.

392. *Calculer l'aire d'un cercle dont le rayon est donné.*

Si l'on emploie les formules

$$A' = \sqrt{AB}, \quad B' = \frac{2AB}{A + A'},$$

démontrées ci-dessus (357), et que l'on parte, par exemple, des valeurs

$$A_1 = 2, \quad B_1 = 4,$$

qui représentent les aires du carré inscrit et du carré circonscrit au *cercle de rayon* 1, on trouve d'abord

$$A_2 = \sqrt{8}, \quad B_2 = \frac{16}{2+\sqrt{8}};$$

ou, plus simplement,

$$A_2 = 2\sqrt{2}, \quad B_2 = 8\,(\sqrt{2}-1):$$

A_2 et B_2 sont, respectivement, l'aire de l'octogone inscrit et de l'octogone circonscrit. A leur tour, ces valeurs donnent, par le moyen des mêmes formules :

$$A_3 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad B_3 = 8\,(2+\sqrt{2})\left[2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right];$$

et ainsi de suite. D'ailleurs, l'aire du cercle, limite commune de A_1, A_2, A_3,... et de B_1, B_2, B_3,... (375), est comprise entre A_1 et B_1, entre A_2 et B_2, entre A_3 et B_3, etc. On pourra donc, en poussant le calcul suffisamment loin, déterminer cette aire, ou le nombre π (381), *avec une approximation connue*.

393. *Remarque*. Cette méthode, attribuée à *Jacques Gregory* (*), est très-compliquée. D'après la remarque de M. Vincent, on peut la simplifier en prenant, pour inconnues auxiliaires, *les inverses des aires* (360); et alors on trouve directement, non plus le nombre π, mais son inverse $\frac{1}{\pi}$, c'est-à-dire *le rapport du diamètre à la circonférence*.

Problème X.

394. *Calculer le rayon d'une circonférence dont la longueur est donnée.*

(*) Né à New-Aberdeen en 1636; mort en 1675.

Considérons le carré dont le côté est égal à l'unité de longueur : son périmètre sera représenté par 4. Par conséquent, les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit ont pour valeurs,

$$r_1 = \tfrac{1}{2}, \quad R_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Au moyen des formules

$$r' = \tfrac{1}{2}(r - R), \quad R' = \sqrt{Rr'},$$

nous pouvons calculer l'apothème r_2 et le rayon R_2 de l'octogone régulier *isopérimètre* avec le carré (359). Une nouvelle application des mêmes formules donnera l'apothème r_3 et le rayon R_3 du polygone régulier de 16 côtés, dont le périmètre est 4. Et ainsi de suite.

Nous avons trouvé (360)

$$R' - r' < \tfrac{1}{4}(R - r),$$

relation d'où résulte

$R_2 - r_2 < \frac{1}{4}(R_1 - r_1)$ $R_3 - r_3 < (\frac{1}{4})^2(R_1 - r_1)$, $R_4 - r_4 < (\frac{1}{4})^3(R_1 - r_1)$, etc.

Ainsi, *les différences entre les rayons et les apothèmes correspondants décroissent plus rapidement que les termes de la progression* $\frac{1}{4}$, $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{4})^3$,...; donc ces différences tendent vers zéro; c'est-à-dire que *les rayons et les apothèmes ont une limite commune.*

D'un autre côté, si l'on désigne par R_n et r_n le rayon et l'apothème d'un quelconque des polygones considérés, et par ρ le rayon de la circonférence isopérimètre avec chacun d'eux, on a, simultanément :

$$2\pi R_n > 4, \quad 2\pi r_n < 4, \quad 2\pi\rho = 4;$$

et, par suite,

$$R_n > \rho > r_n;$$

en sorte que *le rayon* ρ *de la circonférence égale à 4 est toujours compris entre un rayon et l'apothème correspondant.* Donc la limite dont nous venons de parler n'est autre que ρ.

395. En effectuant les calculs qui viennent d'être indi-

qués, on arrive aux résultats contenus dans le tableau suivant (*) :

NOMBRE DES CÔTÉS.	APOTHÈME.	RAYON.
4.	$r_1 = 0{,}5000000$	$R_1 = 0{,}7071068$
8.	$r_2 = 0{,}6035534$	$R_2 = 0{,}6532815$
16.	$r_3 = 0{,}6284174$	$R_3 = 0{,}6407289$
32.	$r_4 = 0{,}6345731$	$R_4 = 0{,}6376435$
64.	$r_5 = 0{,}6361083$	$R_5 = 0{,}6368754$
128.	$r_6 = 0{,}6364919$	$R_6 = 0{,}6366836$
256.	$r_7 = 0{,}6365878$	$R_7 = 0{,}6366357$
512.	$r_8 = 0{,}6366117$	$R_8 = 0{,}6366237$
1024	$r_9 = 0{,}6366177$	$R_9 = 0{,}6366207$
2048.	$r_{10} = 0{,}6366192$	$R_{10} = 0{,}6366199$
4096.	$r_{11} = 0{,}6366195$	$R_{11} = 0{,}6366197$
8192.	$r_{12} = 0{,}6366196$	$R_{12} = 0{,}6366196$

On a donc, avec sept décimales exactes,

$$\rho = 0{,}6366196.$$

A cause $2\pi\rho = 4$, on déduit, de cette valeur,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\rho}{2} = 0{,}3183098,$$

et

$$\pi = 3{,}14159.$$

396. *Remarque.* Au lieu de commencer la série des apo-

(*) Ce tableau est extrait du *Cours de Géométrie* de M. Vincent (1832).

thèmes et des rayons par $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, on peut prendre, pour termes initiaux, 0 et 1. En effet,

$$\tfrac{1}{2} = \frac{0+1}{2}, \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{1 \times \tfrac{1}{2}}.$$

Résumant alors les explications données ci-dessus (394), on peut énoncer la proposition suivante, connue sous le nom de *Théorème de Schwab* :

Théorème XVI.

397. *Une suite indéfinie de nombres dont les deux premiers sont* 0 *et* 1, *et dont les autres, à partir du troisième inclusivement, sont alternativement moyens par différence et par quotient entre les deux qui les précèdent, a pour limite le rayon d'une circonférence égale à* 4.

* 398. La *méthode des isopérimètres*, ordinairement attribuée à Schwab, est due à Descartes (*). Elle comporte plusieurs simplifications de calcul, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas. Nous énoncerons, seulement, les deux propositions suivantes, qu'il est aisé de vérifier :

1° *La moyenne proportionnelle entre deux nombres* a, b *est comprise entre*

$$\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{2\,(3a+b)}$$

et

$$\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{2\,(a+3b)}.$$

2° a *étant le plus petit des deux nombres donnés*, *cette même moyenne est comprise entre* :

(*) Né à La Haye (Touraine), en 1596 ; mort à Stockholm, en 1650. Dans un Mémoire publié au milieu du siècle dernier, Euler tira de l'oubli cette élégante méthode, et déclara qu'elle avait pour auteur le célèbre philosophe. Malgré cette attention d'Euler, la méthode de Descartes fut, encore une fois, si bien oubliée, que le professeur Schwab dut la découvrir de nouveau en 1812.

$$\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{2\,(3a+b)}$$

et

$$\frac{a+b}{2} - \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)}.$$

Si l'on prend $a = r_7 = 0{,}6365878$, $b = R_6 \doteq 0{,}6366836$, on trouve

$$\frac{(a-b)^2}{2\,(3a+b)} < 0{,}000\ 000\ 01, \quad \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)} < 0{,}000\ 000\ 01\,;$$

donc, *avec sept décimales exactes,*

$$R_7 = \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} = 0{,}6366357.$$

Conséquemment, *à partir d'une certaine valeur de l'indice n, on peut substituer les moyennes par différence aux moyennes par quotient.*

* Problème XI.

399. *Calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est donnée.*

Supposons que cette aire soit celle du carré dont le côté est pris pour unité. Si l'on fait usage des *formules de Legendre* (*) *:*

$$R' = \sqrt{Rr}, \quad r' = \sqrt{r\,\frac{R+r}{2}},$$

démontrées dans le n° 361, on pourra, en partant de

$$R_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad r_1 = \tfrac{1}{2},$$

calculer le rayon R_2 et l'apothème r_2 de l'octogone régulier équivalent au carré ; puis le rayon R_3 et l'apothème r_3 du

---

(*) Né à Toulouse, en 1752 ; mort à Paris, en 1834.

polygone de 16 côtés équivalent ; et ainsi de suite. La limite commune des rayons et des apothèmes est le rayon x du cercle dont l'aire est 1. Par conséquent,

$$\frac{1}{\pi} = x^2, \quad \pi = \frac{1}{x^2}.$$

400. *Valeurs approchées de* π. En réduisant en fraction continue le nombre $3,14159 = \frac{314159}{100000}$, on trouve, comme premières *réduites* :

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}.$$

Le premier rapport n'est jamais employé. Nous avons déjà dit que le second a été trouvé par Archimède ; il est approché à moins de 0,001. Le troisième est peu usité, parce que le suivant, qui n'est guère plus compliqué, donne une approximation beaucoup plus grande. En effet, le rapport $\frac{355}{113}$ (*), dû à *Metius* (**), est approché à moins de 0,000 001.

(*) Pour retrouver la fraction $\frac{113}{355}$, on écrit, deux fois de suite, les trois premiers nombres impairs.

(**) Adrien Metius, géomètre hollandais, né dans le seizième siècle.

APPENDICE AU LIVRE QUATRIÈME (*).

401. Une figure est dite *maximum* ou *minimum*, selon qu'elle est la plus grande ou la plus petite entre toutes celles de même espèce.

Ainsi, le diamètre d'un cercle est une corde *maximum;* la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est un *minimum* relativement à toutes les lignes menées du point à la droite, etc.

Théorème I.

402. *Entre tous les triangles formés avec deux côtés donnés, le maximum est celui dans lequel ces deux côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.*

Soient les deux triangles CAB, C'AB (*fig.* 182), qui ont le côté AB commun, et les côtés AC, AC' égaux; je dis que le premier triangle, dans lequel l'angle CAB est droit, est plus grand que l'autre triangle C'AB.

Menons la hauteur C'D : nous aurons $C'D < C'A$, ou $C'D < CA$. Or, les deux triangles CAB, C'AB, qui ont même base AB, sont entre eux comme leurs hauteurs; donc, etc.

(*) Cet Appendice est tiré d'un Mémoire de Steiner, qui a paru dans le *Journal de Liouville* (tome VI.)

Théorème II.

403. *Le cercle est plus grand que toute figure plane isopérimètre.*

La démonstration de cet important théorème sera décomposée en plusieurs parties.

1° *Une figure qui a un périmètre donné ne peut avoir une aire infinie.*

En effet, la proposition n'a de sens qu'autant que l'on suppose la figure fermée de toutes parts. Donc cette figure est une portion finie de plan.

2° *Entre toutes les figures qui ont un périmètre donné, il existe un ou plusieurs maximums.*

Cette proposition est évidente d'après celle qui précède.

3° *Une figure qui, avec un périmètre donné, renferme une aire maximum, est convexe.*

Considérons, en effet, la figure non convexe ACBD (*fig.* 183). Si nous faisons tourner la partie rentrante ACB autour des points A,B, nous pourrons former une figure AC'B, ayant même périmètre que la première, et qui sera évidemment plus grande que celle-ci.

4° *Toute droite qui divise le contour d'une figure maximum en deux parties équivalentes, divise aussi la surface de cette figure en deux parties équivalentes.*

Soit ABCD (*fig.* 184) une courbe qui, avec une longueur donnée, renferme une surface maximum. Supposons que la droite AB partage cette courbe en deux parties ACB, ADB, ayant même longueur.

Si la surface ABDA est plus grande que la surface ABCA, faisons tourner ADB autour de AB; nous obtiendrons une figure AD'BD, isopérimètre avec ACBD, et dont l'aire sera plus grande que celle de cette dernière figure. Donc ABCD ne serait pas un maximum.

5° *Une figure qui, avec un périmètre donné, a une aire maximum, est un cercle.*

La remarque précédente fait voir que si ADBC est une figure maximum, ADBD' en sera également une.

Cela étant, soit ADBD′ (*fig.* 185) une pareille figure, composée de deux parties ADB, AD′B telles, que si l'on fait tourner la première autour de AB, elle coïncide avec la seconde.

Prenons, sur ADB, un point quelconque D; abaissons sur AB la perpendiculaire DD′, partagée au point P en deux parties égales; menons DA, DB, D′A et D′B.

Si les angles D,D′ ne sont pas droits, transformons le quadrilatère ADBD′ en un autre *adbd′* (*fig.* 186) ayant mêmes côtés que le premier, et dans lequel les angles *d*,*d′* soient droits. D'après le Théorème I, ce second quadrilatère sera plus grand que l'autre. Si donc nous apportons les segments AED, DFB, etc., en *aed*, *dfb*, etc., la figure *aedfbg*... sera plus grande que AEDFBG...; donc celle-ci ne serait pas un maximum.

Il suit de là que la courbe AEDFB (*fig.* 185) est le lieu géométrique du sommet d'un angle droit dont les côtés passent par les points A,B. Donc cette courbe est une demi-circonférence (189 et 192).

Ainsi, dans la figure maximum ADBC (*fig.* 184), une moitié quelconque, déterminée par une droite telle que AB, est un demi-cercle. Donc la figure entière est un cercle.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE QUATRIÈME.

PROBLÈME I.

Déterminer le côté d'un pentagone régulier dont l'aire est donnée

Soient P, c, R l'aire donnée, le côté demandé et le rayon du cercle circonscrit au pentagone; nous avons trouvé (345, 349) :

$$c = \tfrac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad P = \tfrac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

La première formule donne

$$R = \frac{2c}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

En substituant cette valeur dans celle de P, nous aurons

$$P = \tfrac{5}{8}.\, 4\, c^2 . \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10 - 2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{4}\, c^2\, \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{5 - \sqrt{5}}.$$

Si nous tirons de cette nouvelle formule la valeur de c^2, il vient

$$c^2 = \tfrac{4}{5}\, P\, \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}.$$

Pour simplifier cette expression, et la rendre applicable au calcul numérique, multiplions les deux termes de la fraction par $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; nous aurons

$$c^2 = \tfrac{4}{5}\, P\, \frac{(5 - \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}} = \tfrac{4}{5} P \frac{(5 - \sqrt{5})(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}$$

$$= \tfrac{1}{5} P \frac{(5 - \sqrt{5})\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}.$$

Je divise les deux termes par $\sqrt{5}$, et je fais passer sous le radical le facteur $\sqrt{5} - 1$; ce qui donne

$$c^2 = \tfrac{1}{5} P \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})} = \tfrac{2}{5} P \sqrt{(5 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}$$

$$= \tfrac{2}{5} P \sqrt{20 - 8\sqrt{5}};$$

ou enfin

$$c^2 = \tfrac{4}{5}\, P \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Comme application, supposons que la surface du pentagone régulier soit de 27 *centimètres carrés*, et proposons-nous de trouver, à moins de 1 *millimètre*, la valeur de son côté.

Prenant le centimètre pour unité, nous avons

$$P = 27, \quad c^2 = \tfrac{4 \cdot 27}{5} \sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$

$$c = \sqrt{\tfrac{4}{5} . 27 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = \tfrac{6}{5} \sqrt{15 \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}\,;$$

et cette dernière quantité doit être calculée à moins de 0,1.

Le facteur $\frac{6}{5}$ étant presque égal à l'unité, nous calculerons l'autre à moins de 0,05 ; en outre, ce second facteur étant plus grand que l'unité, il nous suffira, d'après un principe démontré en arithmétique, de déterminer $15\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ aussi à moins de 0,05.

A son tour, la quantité $15\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{1125-450\sqrt{5}}$ est plus grande que l'unité : nous atteindrons donc l'approximation demandée si nous déterminons, à moins de 0,05, la quantité incommensurable

$$1125-430\sqrt{5}=1125-10\sqrt{10125}.$$

Enfin, à cause du multiplicateur 10, nous devons calculer, à moins de 0,005, la racine carrée de 10125.

En effectuant, on trouve, à ce degré d'approximation,

$$\sqrt{10125}=100,62;$$

donc

$$1125-450\sqrt{5}=118,8;\quad \sqrt{1125-450\sqrt{5}}=10,9;$$

$$\sqrt{15\sqrt{5-2\sqrt{5}}}=3,3;\quad c=\tfrac{6}{5}\times 3,3=3,9.$$

Le côté du pentagone régulier est donc, à moins de 1 millimètre, 0^{m},039.

Problème II.

Construire un pentagone régulier équivalent à un carré donné.

La question se réduit à déterminer le côté du pentagone. Or, si m est le côté du carré, le problème précédent donne, en remplaçant P par m^2,

$$c^2=\tfrac{4}{5}m^2\sqrt{5-2\sqrt{5}};$$

d'où

$$c = \frac{2}{5} m \sqrt{5\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}.$$

Pour *construire* cette valeur, on peut d'abord la mettre sous la forme suivante,

$$c = \frac{2}{5} \sqrt{5m.m\sqrt{5} - \sqrt{4.5}}.$$

En négligeant pour un instant le facteur $\frac{2}{5}$, nous voyons que le second membre est une moyenne proportionnelle entre $5m$ et une autre droite égale à $m \times \sqrt{5 - \sqrt{4.5}}$. Nommons x cette droite; nous aurons

$$x = \sqrt{m \times m\,(5 - \sqrt{4.5})}.$$

Ainsi, x est une moyenne proportionnelle entre m et $m \times (5 - \sqrt{4.5})$. Soit y cette dernière droite; nous aurons encore

$$y = 5m - \sqrt{4m.5m}.$$

De ces différentes valeurs, et en ayant égard au facteur $\frac{2}{5}$, on conclut la construction suivante, qu'il est aisé de justifier :

Avec un rayon égal au côté m du carré, décrivez une demi-circonférence ADB (*fig.* 187). Divisez le diamètre AB en cinq parties égales ; et, par le quatrième point de division C, élevez la perpendiculaire CD au diamètre. Du point A comme centre, décrivez l'arc DE. Élevez la perpendiculaire EF, qui rencontre en F la demi-circonférence décrite sur BC comme diamètre. Du point B comme centre, décrivez l'arc FG; élevez GH perpendiculaire à AB : BH est le côté du pentagone.

Problème III.

Déterminer, en fonction du rayon du cercle circonscrit, l'aire du dodécagone régulier.

Soit R le rayon donné; soient c et c' les côtés de l'hexagone régulier et du dodécagone régulier inscrits; la formule générale

$$c'^2 = 2R(R - \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}c^2}),$$

trouvée au nº 351, nous donne, en prenant $c = R$,

$$c'^2 = 2R^2(1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}}) = R^2(2 - \sqrt{3});$$

et

$$c' = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

L'apothème a du dodécagone sera donné ensuite par la formule

$$a^2 = \sqrt{R^2 - \frac{c'^2}{4}} = R\sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Au moyen de ces deux valeurs, nous obtenons, pour l'aire du dodécagone régulier,

$$A = 12R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \tfrac{1}{4}R\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 3R^2.$$

Ainsi, *le dodécagone régulier, inscrit à un cercle de rayon* R, *est équivalent à* 3 *fois le carré construit sur* R *comme côté.* Il résulte aussi, de cette valeur, que le dodécagone inscrit est au carré inscrit, comme 3 est à 2 (349).

Remarque. — On parvient plus rapidement au résultat qui précède, en observant que le dodécagone régulier est décomposable en douze triangles isocèles égaux, ayant chacun pour base un rayon R, et pour hauteur la moitié du côté de l'hexagone inscrit, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ R.

PROBLÈME IV.

Trouver, à moins de 1 *millimètre, le rayon d'un cercle dont la surface est de* 3m.c.,25.

L'aire d'un cercle de rayon R est représentée par πR^2. Donc, en prenant le mètre pour unité, nous aurons

$$\pi R^2 = 3{,}25;$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{3,25}{\pi}}.$$

Pour calculer cette quantité à moins de 1 millième, observons que

$$\frac{3,25}{\pi} = 3,25 \times \frac{1}{\pi}.$$

Or, $\frac{1}{\pi}$, rapport du diamètre à la circonférence, égale 0,3183098.... Donc nous obtiendrons l'approximation demandée en prenant

$$R = \sqrt{3,25 \times 0,3183} = \sqrt{1,034475} = 1,017.$$

Ainsi le rayon du cercle est, à moins de 1 millimètre, $1^{m},017$.

PROBLÈME V.

Trouver, à moins de 1 millimètre, l'arc d'un secteur dont la surface est de $2^{m.c.},19$, *et l'angle au centre*, $47°18'$.

Un secteur a pour mesure l'arc qui lui sert de base, multiplié par la moitié du rayon (385). Représentons par x et R ces deux grandeurs ; nous aurons, en prenant le mètre pour unité,

$$2,19 = \frac{Rx}{2}.$$

L'arc de $47°18'$ ayant pour longueur x, la longueur de la demi-circonférence sera

$$x\,\frac{180°}{47°18'};$$

donc

$$R = \frac{x}{\pi}\,\frac{180°}{47°18'};$$

et, par suite,

$$2,19 = \frac{x^2}{\pi}\,\frac{90°}{47°18'}.$$

Cette équation donne

$$x = \sqrt{2,19 \times \pi \times \frac{47^{\circ}18'}{90^{\circ}}}.$$

Pour évaluer x, observons d'abord que

$$\frac{47^{\circ}18'}{90^{\circ}} = \frac{47\frac{18}{60}}{90} = \frac{473}{900};$$

ce qui donne

$$x = \sqrt{2,19 \times \pi \times \tfrac{473}{900}} = \tfrac{1}{300}\sqrt{219 \times 473 \times \pi}.$$

Il suffit maintenant de calculer, à moins de $\frac{3}{10}$, le radical. Or,

$$\pi = 3,141592\ldots;$$

donc

$$219.473.\pi = 325428,08; \quad \sqrt{219.473.\pi} = 570,5.$$

Enfin,

$$x = 1,901.$$

L'arc du secteur est donc $1^{m},901\ldots$.

Remarquons, en terminant, que les deux derniers calculs seraient plus simples et plus rapides par l'emploi des logarithmes.

FIN DU LIVRE QUATRIÈME.

EXERCICES SUR LE LIVRE IV.

1. Dans tout pentagone régulier, les diagonales se coupent mutuellement en moyenne et extrême raison.

2. Le côté du décagone régulier étoilé inscrit est égal au côté du décagone régulier inscrit, augmenté du rayon.

3. Si, sur les segments AC, BC du diamètre AB d'un cercle O, on décrit, de part et d'autre de cette droite, deux demi-circonférences ADC, CEB, la ligne ADCED, formée par l'ensemble de ces demi-circonférences, partage le cercle en deux segments proportionnels aux segments du diamètre.

4. Si deux arcs ont une somme moindre que la demi-circonférence, le rectangle de leurs cordes est équivalent à celui qui aurait pour dimensions le rayon et l'excès de la corde du supplément de la différence des arcs sur la corde du supplément de leur somme.

5. Si deux arcs ont une somme plus grande que la demi-circonférence, le rectangle de leurs cordes est équivalent à celui qui aurait pour dimensions le rayon et la somme des cordes du supplément de la différence et du supplément de la somme de ces arcs.

6. Une circonférence étant partagée en un nombre impair de parties égales, si l'on joint le point diamétralement opposé à l'un des points de division avec tous ceux qui sont situés sur la même demi-circonférence, le produit des cordes ainsi menées est égal à une puissance du rayon marquée par le nombre des cordes.

7. Une circonférence étant partagée en un nombre impair de parties égales, si l'on joint le point diamétralement opposé à celui dont l'indice est zéro avec les points dont les indices sont les termes de la progression 1, 2, 4, 8..., le produit des cordes ainsi menées est égal à une puissance du rayon marquée par le nombre des cordes.

8. On peut, au moyen de la règle et du compas, diviser la circonférence en dix-sept parties égales.

9. Il existe toujours une circonférence à laquelle est inscriptible un polygone convexe dont les côtés sont respectivement égaux à des droites données.

10. Entre toutes les figures équivalentes, le cercle a le périmètre minimum.

11. Entre tous les polygones formés avec des côtés donnés, le maximum est le polygone convexe inscriptible.

12. Entre tous les triangles isopérimètres et de même base, le maximum est le triangle isocèle.

13. Entre tous les polygones isopérimètres et d'un même nombre de côtés, le polygone maximum est équilatéral.

14. Entre tous les polygones isopérimètres, d'un même nombre de côtés, le maximum est le polygone régulier.

15. Entre tous les polygones équivalents, d'un même nombre de côtés, le polygone régulier a le périmètre minimum.

16. De deux polygones réguliers isopérimètres, le maximum est celui qui a le plus grand nombre de côtés.

17. De tous les triangles inscrits à un même segment, le maximum, en surface et en périmètre, est le triangle isocèle.

18. Entre tous les polygones d'un même nombre de côtés, inscrits à un même cercle, le maximum, en surface et en périmètre, est le polygone régulier.

19. De deux polygones réguliers, inscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus grand en surface.

20. De deux polygones réguliers, inscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés a le plus grand périmètre.

21. De tous les triangles qui ont même hauteur et même angle opposé à la base, le plus petit est le triangle isocèle.

22. De tous les polygones d'un même nombre de côtés, circonscrits à un même cercle, le plus petit, en surface et en périmètre, est le polygone régulier.

23. De deux polygones réguliers, circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand nombre de côtés est le plus petit, en surface et en périmètre.

24. Si, sur les côtés d'un triangle rectangle, pris comme diamètres, on décrit des demi-circonférences, la somme des deux *lunules* comprises entre la grande demi-circonférence et les deux autres, est équivalente au triangle donné (*).

25. Le nombre π est égal à la limite des quantités :

$$2,\ 2\sqrt{2},\ 2^2\sqrt{2-\sqrt{2}},\ 2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\ldots$$

(*) Théorème d'Hippocrate de Chio.

26. Le nombre $\frac{\pi}{2}$ est égal à la limite des produits :

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, \ldots\ldots$$

27. On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence C, un triangle équilatéral ABD ; on divise AB en un nombre n de parties égales, et l'on joint l'extrémité E de la deuxième division, avec le point D, par la sécante DEF. Quelle est l'expression de la corde AF ?

28. On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence C, un triangle équilatéral ADB ; on divise le rayon CA en n parties égales, et l'on joint l'extrémité E de la quatrième division, avec le point D, par la sécante DEF. Quelle est l'expression de la corde FG, G étant l'extrémité du diamètre DCG ?

29. Sur les prolongements de deux rayons OA, OB, perpendiculaires entre eux, on prend $AC = BD = \frac{2}{n}$ OA. On mène CD, qui coupe en F, G la circonférence (*). On joint le point d'intersection G (voisin de D) au point E déterminé en prenant, sur BO, BE = 3 BD. 1° Démontrer que la droite EF est, approximativement, égale à la corde qui sous-tend le $\frac{1}{n}$ de la circonférence ; 2° chercher vers quelle limite tend la valeur de EF, lorsque n augmente indéfiniment (**).

30 On joint les milieux des côtés d'un carré avec les sommets non adjacents, et l'on demande : 1° de quelle nature est le polygone déterminé par les huit droites ainsi menées ; 2° à quoi est égal le périmètre du polygone ; 3° quel est le rapport entre ce même polygone et le carré donné ?

31. A l'extrémité B du rayon CB d'un cercle donné C, on élève une tangente BD égale au diamètre ; on prolonge cette tangente d'une longueur Da égale au cinquième du rayon, et d'une longueur Db égale aux trois cinquièmes du rayon ; on prend BA égale à Ca ; enfin, par le point A, on même AE parallèle à Cb. Quelle est l'expression de BE ?

32. Connaissant les rayons de deux polygones réguliers isopérimètres,

---

(*) Pourvu que n surpasse 4.

(**) La construction précédente a été imaginée par M. *Redier*, horloger à Paris.

l'un de n côtés, l'autre de $2n$ côtés, trouver le rayon du polygone régulier isopérimètre, de $4n$ côtés.

33. Calculer les aires et les périmètres des polygones réguliers de 4, 8, 16.... côtés, inscrits à un cercle donné.

34. Les côtés d'un décagone régulier étoilé, inscrit à un cercle donné, forment, par leurs intersections successives, un polygone régulier, ayant vingt côtés. Quels sont, en fonction du rayon du cercle, l'aire et le périmètre de ce polygone ?

35. Inscrire, à une circonférence donnée, un polygone régulier de trente-quatre côtés.

36. Calculer, à moins de 0,0001, le rapport entre le côté du polygone régulier de trente-quatre côtés et le rayon du cercle circonscrit.

37. Calculer, à moins de 0,0001, le rapport entre le côté du polygone régulier de dix-sept côtés et le rayon du cercle circonscrit.

38. A un cercle donné, inscrire six pentagones réguliers égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des cinq autres ait un sommet sur la circonférence.

39. A un cercle donné, inscrire sept hexagones réguliers égaux, de manière que l'un d'eux soit concentrique au cercle, et que chacun des six autres ait deux sommets sur la circonférence.

LIVRE CINQUIÈME.

PLANS, ET ANGLES POLYÈDRES.

PRÉLIMINAIRES.

THÉORÈME I.

404. *Une droite ne peut être en partie dans un plan, en partie au dehors.*

Cela résulte de la définition du plan (17).

405. *Remarque.* Pour reconnaître si une surface donnée est plane, on cherche à y appliquer, en différents sens, une ligne droite.

THÉORÈME II.

406. *Trois points, non en ligne droite, déterminent un plan.*

Cette proposition, analogue à celle du n° 11, pourrait également être regardée comme une demande; mais on peut cependant la rendre évidente.

Pour cela, soient A, B deux des points donnés, et AB la droite qui les joint. Suivant AB, faisons passer un plan quelconque; puis, imaginons que ce plan tourne autour de AB, jusqu'à ce qu'il vienne passer par le troisième point donné C. Alors sa position dans l'espace sera déterminée.

Je dis maintenant que tout autre plan, passant par les points A, B, C, coïncide avec le premier.

En effet, toute droite qui rencontre deux des trois lignes AB, AC, BC est située entièrement dans chacun des deux plans; donc, etc.

407. 1er *Corollaire.* — *Deux droites qui se coupent sont dans un plan, et en déterminent la position.*

408. 2e *Corollaire.* — *Deux droites parallèles déterminent la position d'un plan.*

Théorème III.

409. *L'intersection de deux plans est une ligne droite.*

Si l'on pouvait trouver, sur l'intersection, trois points qui ne fussent pas en ligne droite, les deux plans donnés, passant par ces trois points, se confondraient (406); donc, etc.

PERPENDICULAIRE AU PLAN.

Théorème IV.

410. *Si une droite* AB (*fig.* 190) *est perpendiculaire à deux droites* BC, BD, *passant par son pied dans un plan* MN, *elle est perpendiculaire à toutes les droites menées, de ce point, dans le même plan.*

Soit BE une de ces droites : je dis qu'elle est perpendiculaire à AB.

Menons la droite DEC, de manière qu'elle rencontre BC, BD, BE.

Prenons, sur AB, de part et d'autre du plan, les distances égales BA, BA'; joignons enfin les points A, A' aux points C, E, D.

La droite BC est perpendiculaire au milieu de AA'; donc AC = A'C. De même, AD = A'D. Conséquemment, les triangles ACD, A'CD sont égaux, ainsi que les angles ACE, A'CE. Les triangles ACE, A'CE, ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux; donc AE = A'E. La droite BE, ayant deux de ses points situés, chacun, à égale distance des points A,A', est perpendiculaire au milieu de AA'; donc, etc.

Théorème V.

411. *Trois droites* AC, AD, AE *(fig. 191), perpendiculaires à une droite* AB *en un même point* A, *sont dans un même plan.*

Car, si la droite AE n'était pas dans le plan CAD, celui-ci couperait le plan BAE suivant une droite AE′ (409), différente de AE, et qui, d'après le théorème précédent, serait perpendiculaire à AB. On aurait donc, dans un même plan, deux droites AE, AE′, perpendiculaires à une même droite AB, en un même point; ce qui est absurde.

412. *Corollaire. — Tant de droites que l'on voudra, perpendiculaires à une même droite en un même point, sont dans un même plan.*

413. A cause des deux derniers théorèmes, on adopte les définitions suivantes :

Une droite est dite perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites menées, de son pied, dans le plan;

Réciproquement, le plan est dit *perpendiculaire à la droite.*

414. Ces deux théorèmes peuvent donc être énoncés ainsi :

1° *Si une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire au plan ;*

2° *Le lieu géométrique des droites perpendiculaires à une même droite, en un même point, est le plan perpendiculaire à la droite, en ce point.*

415. *Lemme. — Deux triangles rectangles* ABC, ABD (fig. 192) *ayant un côté commun* AB ; *si l'hypothénuse* BC *de l'un est perpendiculaire au second côté* BD (*) *de l'autre, réciproquement l'hypothénuse* AD *de celui-ci est perpendiculaire au second côté* AC *du premier.*

(*) Sous-entendu : *de l'angle droit.*

Prenons, sur le prolongement de CA, AC′ = AC, tirons BC′, DC′.

La droite BD, perpendiculaire aux droites BA, BC, passant par son pied dans le plan ABC, est perpendiculaire à BC′ (410). Par construction, AB est perpendiculaire au milieu de CC′; donc BC′ = BC. Ainsi, les triangles DBC′, DBC sont égaux, et DC′ = DC. Donc AD est perpendiculaire au milieu de CC′.

416. *Remarque.* — *Chacun des triangles a son second côté de l'angle droit perpendiculaire au plan de l'autre triangle.*

417. A cause de cette *réciprocité* entre les éléments de ABC et ABD, nous dirons que ces triangles sont *conjugués*.

Théorème VI.

418. *Par un point donné, on peut toujours faire passer un plan perpendiculaire à une droite donnée ; mais l'on n'en peut faire passer qu'un.*

Il y a deux cas à distinguer, selon que le point est sur la droite ou en dehors de la droite.

1er *Cas.* — Soient AB et A (*fig.* 191) la droite donnée et le point donné. Elevons, dans deux plans différents, les perpendiculaires AC, AD à la droite AB : le plan demandé est CAD (414, 2°). En outre, un plan quelconque, autre que CAD, et passant par le point A, ne contiendrait pas, en même temps, les droites AC, AD (407) ; donc il ne serait pas perpendiculaire à AB.

2° Soient C et BD (*fig.* 192) le point donné et la droite donnée. Si l'on mène CB perpendiculaire à BD; puis que, du point B ainsi déterminé, on mène une seconde perpendiculaire BA à la droite BD, le plan cherché est CBA (414, 2°). Tout autre plan, perpendiculaire à BD, ne contient pas le point C ; sans quoi l'on pourrait abaisser, de ce point, deux perpendiculaires à la droite BD ; ce qui est impossible (64).

Théorème VII.

419. *D'un point donné* A, *on peut toujours mener une perpendiculaire à un plan donné* MN, *mais l'on n'en peut mener qu'une.*

Il y a encore deux cas à distinguer, selon que le point est sur le plan ou au dehors du plan.

1er *Cas.* — Menons, dans le plan MN *(fig.* 192), la droite quelconque BD, de manière qu'elle ne passe pas en A. Abaissons AB perpendiculaire à BD, puis, par le point B, menons BC perpendiculaire à BD. Enfin, dans le plan ABC, élevons AC perpendiculaire sur AB. Je dis que AC est perpendiculaire au plan MN.

En effet, si l'on joint le point A à un point quelconque D de BD, les triangles *rectangles* ABC, ABD sont *conjugués* (417), parce que l'hypoténuse BC est perpendiculaire à BD.

2e *Cas.* — Menons, dans le plan MN *(fig.* 193), la droite quelconque BC. Abaissons, du point A, une perpendiculaire AD sur cette droite ; puis, par le point D, et dans le plan MN, menons DE perpendiculaire à BC. Enfin, abaissons AE perpendiculaire sur DE. La droite AE est perpendiculaire au plan MN.

Effectivement, si l'on joint E à un point quelconque de BC, on forme un triangle rectangle EDC, conjugué de AED.

La seconde partie de la proposition est presque évidente : si, du point A, on pouvait mener deux perpendiculaires à MN, le plan des deux droites couperait MN suivant une perpendiculaire à ces droites ; ce qui est absurde.

420. *Remarque.* — Si, sur la droite AD *(fig.* 193), nous prenons un point quelconque A', et si nous abaissons de ce point une perpendiculaire A'E' sur DE, la droite A'E' est perpendiculaire au plan MN.

421. Cela posé, admettons les dénominations suivantes :

La projection d'un point, sur un plan, est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan ;

La projection d'une ligne est le lieu géométrique des projections de tous ses points;

Nous conclurons, de la remarque précédente, le théorème suivant :

Théorème VIII.

422. *La projection d'une ligne droite, sur un plan, est une ligne droite.*

En effet, les pieds des perpendiculaires abaissées sur le plan MN (*fig.* 193), par les différents points de l'*oblique* AD, sont situés sur une même droite ED, passant par le pied de l'oblique.

423. *Remarques.* — I. Nous venons de démontrer ce théorème, seulement pour le cas où la *droite projetée* est oblique au plan ; mais nous verrons qu'il subsiste, lors même qu'elle serait *parallèle* au plan.

II. Lorsqu'au lieu d'une droite indéfinie, on considère une droite terminée à deux points A, B, on appelle spécialement *projection de* AB la distance comprise entre les projections de ses extrémités.

III. L'angle que fait une droite avec sa projection sur un plan se nomme, pour une raison que nous expliquerons plus loin, *angle de la droite et du plan.*

Théorème IX.

424. *Si, d'un point* A (fig. 194), *extérieur à un plan* MN, *on mène la perpendiculaire* AB *et plusieurs obliques* AC, AD, AE *à ce plan :*

1° *La perpendiculaire* AB *est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques* AC, AD, *qui ont des projections égales, sont égales ;*

3° *De deux obliques* AC, AE, *celle qui a plus grande projection est la plus grande.*

1° En effet, dans le plan ABC, la perpendiculaire AB à la droite BC est plus courte que l'oblique AC (66) ;

2° Si BC = BD, les triangles rectangles ABC, ABD sont égaux ;

3° Si l'on a BE > BD, prenons BC = BD, puis tirons AC : AC, AE sont obliques relativement à BE; donc

$$AE > AC;$$

ou, à cause de AC = AD :

$$AE > AD.$$

425. La perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan est appelée *distance* du point au plan (*Voyez* n° 7).

426. *Remarque.* — Les réciproques sont évidentes.

427. *Corollaire.* — *D'un même point, on peut mener à un plan une infinité d'obliques égales : les pieds de toutes ces droites sont sur une circonférence qui a pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.*

428. *Remarque.* — De là résulte un second moyen d'*abaisser, d'un point donné* A, *une perpendiculaire sur un plan donné* P, plus commode que le premier (419), dans la pratique. Si l'on prend un fil plus long que la distance du point au plan, et dont l'une des extrémités soit armée d'un crayon ; que l'on fixe l'autre extrémité en A ; puis que, tendant le fil, on marque trois points sur le plan, le centre de la circonférence passant par ces trois points est le pied de la perpendiculaire.

429. La perpendiculaire au plan d'une circonférence, passant par le centre, est nommée *axe* de la circonférence.

Théorème X.

430. 1° *Tout point du plan perpendiculaire au milieu d'une droite est également distant des extrémités de cette droite ;*

2° *Tout point extérieur au plan est inégalement distant des extrémités de la droite.*

En imaginant le plan qui passe par le point et par la droite, on retombe sur le Théorème IX du Livre premier.

431. 1er *Corollaire.* — *Le plan perpendiculaire au milieu d'une droite est le lieu géométrique des points tels, que chacun d'eux soit également distant des extrémités de la droite.* (Voyez n° 73.)

432. 2e *Corollaire.* — *Les plans perpendiculaires aux milieux des côtés d'un triangle se coupent suivant l'axe de la circonférence circonscrite au triangle.* (Voyez no 108.)

Théorème XI.

433. *L'angle que fait une droite avec sa projection sur un plan est le minimum des angles que fait cette droite avec toute autre droite menée, de son pied, dans le plan.*

AB′ (*fig.* 195) étant la projection de AB, prenons, dans le plan MN, AC = AB′, et menons BC.

Cette oblique étant plus grande que la perpendiculaire (424), il s'ensuit que les triangles BAC, BAB′ ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et un côté inégal; donc (117) l'angle BAC est plus grand que l'angle BAB′.

434. *Remarque.* A cause de cette propriété, l'angle BAB′, que fait une droite AB avec sa projection sur un plan MN, est appelé *angle de* AB *avec* MN, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus.

Théorème XII.

435. 1° *Si deux droites* BC, BD (*fig.* 192) *sont perpendiculaires entre elles, la projection* AB *de la première, faite sur un plan* MN *passant par la seconde, est perpendiculaire à celle-ci;*

2° Réciproquement : *Si la projection* AB *d'une droite* BC, *faite sur un plan* MN *passant par une autre droite* BD, *est perpendiculaire à celle-ci, les deux droites sont perpendiculaires entre elles.*

1° La projection A du point C est sur BA perpendiculaire à BD (429, 2°) ; donc cette droite BA est la projection de BC.

2° D'après le premier cas du Théorème VII, le plan CAB, conduit suivant AB et suivant la perpendiculaire AC au plan MN, est le lieu géométrique des droites perpendiculaires en B à la droite BD ; donc BC est perpendiculaire à BD.

436. *Remarques.* — I. Le *plan projetant* de BC, est perpendiculaire à BD (414).

II. La propriété que nous venons de démontrer ne diffère pas de celles des *triangles conjugués* (415).

DROITES PARALLÈLES.

Théorème XIII.

437. *Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.*

Par définition, deux droites parallèles sont toujours dans un même plan (76). Or, par la droite et le point donnés, on ne peut faire passer qu'un seul plan (406); donc, etc. (*Voyez* n° 79.)

Théorème XIV.

438. *Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Soient deux parallèles AB, CD (*fig.* 197), et un plan MN, perpendiculaire à AB. Je dis qu'il est perpendiculaire à CD.

Le plan des parallèles coupe le plan MN suivant une droite BD, perpendiculaire à AB ; donc la droite CD, parallèle à AB, rencontre cette intersection et lui est perpendiculaire (82).

Menons par le point D, dans le plan MN, la droite EF perpendiculaire à BD : le plan ABD, c'est-à-dire le plan des parallèles, est perpendiculaire à EF (436, I) ; et la droite CD, contenue dans ce plan, est perpendiculaire à EF (410). Donc enfin la droite CD, perpendiculaire aux droites DB, DE, est perpendiculaire au plan MN.

439. *Réciproque.* — *Deux droites, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles entre elles.*

Soient AB, CD (*fig.* 198) deux perpendiculaires au plan MN. Si elles ne sont pas parallèles, menons par le point D une parallèle DC′ à AB ; elle sera perpendiculaire à MN. Mais DC est déjà perpendiculaire à ce plan ; donc, etc.

Théorème XV.

440. *Deux droites* A, B, *parallèles à une droite* C, *sont parallèles entre elles.*

Si les trois droites sont dans un même plan, la proposition est démontrée (90). Supposons donc que A ne soit pas dans le plan des parallèles B, C. Menons un plan P, perpendiculaire à C. Les droites A, B sont perpendiculaires à ce plan (438) ; donc elles sont parallèles entre elles (439).

441. *Corollaire. — L'intersection de deux plans menés suivant deux droites parallèles est parallèle à ces droites.*

Car, si par un point de l'intersection, on mène une parallèle commune aux deux droites, cette parallèle, devant se trouver à la fois dans les deux plans, se confond avec leur intersection.

Théorème XVI.

442. *Tout plan, mené suivant une parallèle* B *à une droite* A, *est parallèle à celle-ci* (à moins qu'il la contienne).

En effet, si la droite A rencontrait le plan, ce ne pourrait être qu'en un point de la droite B ; ces deux droites ne seraient donc pas parallèles.

443. *Réciproque.— Si un plan, mené suivant une droite parallèle à un plan, coupe celui-ci, l'intersection est parallèle à la droite.*

Soit la droite AB (*fig.* 199) parallèle au plan MN, et soit ABCD un plan mené suivant AB. Si ce plan coupe MN, l'intersection CD est parallèle à AB. Car si AB rencontrait CD, ce ne pourrait être qu'en un point du plan MN ; donc AB ne serait pas parallèle à MN.

444. 1er *Corollaire. — Une droite et un plan étant parallèles, si, par un point du plan, on mène une parallèle à la droite, cette parallèle est tout entière dans le plan.*

390. 2e *Corollaire.* — *Une droite, parallèle à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.*

Théorème XVII.

446. *Si, par différents points* E, E′, E″,... (fig. 200) *d'une droite* AB, *on mène des parallèles* EF, E′F′, E″F″,... *à une droite* CD (non parallèle à la première), *toutes ces parallèles sont dans un même plan, parallèle à la seconde droite.*

La droite AB et la parallèle EF déterminent un plan parallèle à CD (442). Or, la droite E′F′, parallèle à CD, étant menée par un point de ce plan, y est contenue (444) ; donc, etc.

447. *Corollaire.* — *Si, par différents points d'une droite, on abaisse des perpendiculaires sur un même plan, toutes ces droites sont dans un même plan.*

En effet, elles sont parallèles entre elles (439).

448. *Remarque.* — On voit ici la généralisation du Théorème VIII ; car les perpendiculaires abaissées sur le plan donné, de tous les points de la droite donnée, étant situées dans un même plan, ont leurs pieds sur une ligne droite.

PLANS PARALLÈLES ENTRE EUX.

449. *Deux plans sont parallèles lorsque, étant prolongés indéfiniment, ils ne peuvent se rencontrer.*

Cette définition est justifiée par le théorème suivant.

Théorème XVIII.

450. *Deux plans* MN, PQ (fig. 204), *perpendiculaires à une même droite* AB, *sont parallèles entre eux.*

Si ces plans se rencontrent, soit O un point de leur intersection. Joignons ce point aux points A, B, où la droite perce les plans : les deux droites OA, OB seront perpendiculaires à AB ; ce qui est absurde. Donc, etc.

451. *Corollaire. — Par un point donné, on peut mener un plan parallèle à un plan donné.*

THÉORÈME XIX.

452. *Les intersections de deux plans parallèles, par un même plan, sont parallèles.*

En effet, si ces intersections se rencontraient en un point, ce point serait commun aux deux plans, lesquels ne seraient pas parallèles.

453. *Corollaire. — Par un point donné, on ne peut mener qu'un seul plan parallèle à un plan donné.*

Si, par le point A *(fig.* 205), on peut faire passer deux plans PQ, P'Q', parallèles à MN, soit CD leur intersection.

Menons, par le point A, un plan qui coupe MN, et qui ne passe pas suivant CD. Soient EF, E'F', GH les intersections de ce plan avec PQ, P'Q', MN. Les deux premières droites doivent être parallèles à la troisième; ce qui est absurde, puisqu'elles se coupent.

THÉORÈME XX.

454. *Si deux plans* MN, PQ (fig. 206) *sont parallèles, toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

Soit la droite AB perpendiculaire au plan MN. Je dis qu'elle est perpendiculaire au plan PQ.

Par la droite AB, faisons passer un plan, et soit CD son intersection avec MN. En vertu du corollaire précédent, ce plan auxiliaire coupe PQ ; et, en vertu du théorème, son intersection avec PQ est parallèle à CD.

La droite AB, perpendiculaire à CD, rencontre donc EF ou PQ en un point G ; de plus, elle est perpendiculaire à EF (82).

De là résulte que AB est perpendiculaire à une droite quelconque menée, de son pied, dans le plan PQ; donc, etc.

Théorème XXI.

455. *Deux plans, parallèles à un troisième plan, sont parallèles entre eux.*

Soient deux plans M, N parallèles à un plan P. Menons une droite perpendiculaire à ce dernier plan : elle est perpendiculaire aux deux autres (454); donc ceux-ci sont parallèles entre eux (450).

Théorème XXII.

456. *Les parallèles comprises entre plans parallèles sont égales.*

Soient AB, CD (*fig.* 207) deux droites parallèles, terminées aux plans parallèles MN, PQ. Je dis que AB = CD.

Imaginons le plan de ces droites : il coupe les deux autres plans suivant deux parallèles AC, BD (452) ; donc la figure ABCD est un parallélogramme ; donc AB = CD.

457. *Corollaire. — Deux plans parallèles sont partout également distants.*

La *distance* de deux plans parallèles doit, comme nous le verrons plus loin, s'estimer par la *longueur* de la perpendiculaire commune à ces plans, terminée à l'un et à l'autre. Or, cette longueur est la même pour toutes les perpendiculaires que l'on peut mener aux deux plans.

Théorème XXIII.

458. *Si deux angles* BAC, B'A'C' (fig. 208), *non situés dans un même plan, ont leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens, ces angles sont égaux, et leurs plans sont parallèles.*

Prenons AB = A'B', AC = A'C' ; menons AA', BB', CC', BC et B'C'.

La figure ABA'B', qui a deux côtés égaux et parallèles, est un parallélogramme ; donc AA', BB' sont égales et parallèles. De même pour AA' et CC'. Donc les droites BB', CC', égales et parallèles à AA', sont égales et parallèles entre elles; donc la figure BCB′C′ est un parallélogramme, et BC = B′C′.

Par suite, les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun; donc les angles A, A′ sont égaux.

En second lieu, les plans ABC, A′B′C′ sont parallèles; car s'ils se rencontraient, leur intersection serait, en même temps, parallèle à AB, BC et AC (452); ce qui est absurde.

459. 1[er] *Corollaire.* — *Par deux droites, non situées dans un même plan, on peut toujours faire passer deux plans parallèles.*

460. 2[e] *Corollaire.* — *Deux droites, non situées dans un même plan, sont toujours parallèles à un même plan.*

461. *Remarque.* — Lorsque deux droites ne se rencontrent pas, on appelle *angle* de ces lignes celui qui serait formé par deux droites issues d'un même point, et respectivement parallèles aux premières. On dit, d'après cela, que *deux parallèles font entre elles un angle nul.*

Il résulte, de cette définition et du théorème précédent, que l'on peut généraliser ainsi le Théorème III :

Si deux droites sont perpendiculaires, leurs projections, faites sur un plan parallèle à l'une d'elles, sont perpendiculaires.

ANGLES DIÈDRES.

462. On appelle *angle dièdre*, ou simplement *dièdre*, l'espace indéfini compris entre deux plans terminés à leur commune intersection. Ces deux plans sont les *faces* de l'angle dièdre, et la droite suivant laquelle ils se coupent en est l'*arête.*

426. Un plan PNS (*fig.* 213), qui partage en deux parties égales l'angle dièdre MNPQ, est nommé *plan bissecteur* de cet angle dièdre.

431. *Lemme.* — *Si, en un point* A (fig. 215) *de l'arête* NP *d'un angle dièdre* MNPQ, *on mène, dans les deux faces, des perpendiculaires* AB, AC *à l'arête, l'angle* BAC *est constant.*

Menons, en un autre point A′ de l'arête, et dans les deux faces, les perpendiculaires A′B′, A′C′ à cette droite. Les angles BAC, B′A′C′ sont égaux, comme ayant leurs côtés parallèles (458) ; donc, etc.

465. L'angle dièdre MNPQ et l'angle plan BAC sont dits *correspondants*.

Théorème XXIV.

466. *Deux angles dièdres, correspondant à des angles plans égaux, sont égaux.*

Soient les angles dièdres MPNQ, M′P′N′Q′ (*fig.* 216), et les angles plans correspondants BAC, B′A′C′. Je dis que si ces derniers sont égaux, les dièdres sont égaux.

Transportons le second dièdre dans le premier, de manière que l'angle plan B′A′C′ coïncide avec son égal BAC.

Les arêtes NP, N′P′ sont perpendiculaires aux plans BAC, B′A′C′ ; donc elles coïncident. Par suite, les faces du second dièdre coïncident avec celles du premier ; donc, etc.

La réciproque est vraie ; car si les angles plans BAC, B′A′C′ sont inégaux, les angles dièdres le sont aussi.

Théorème XXV.

467. *Deux angles dièdres quelconques sont entre eux comme les angles plans correspondants.*

Plaçons le plus petit dièdre dans le plus grand, de manière que leurs arêtes et deux de leurs faces coïncident.

Soient alors MNPQ, MNPQ′ (*fig.* 217) ces deux angles. Menons arbitrairement un plan perpendiculaire à l'arête NP : il coupe les faces suivant des droites OA, OB, OB′ ; et les angles AOB, AOB′ sont les angles plans correspondant aux deux angles dièdres. Cela posé, je dis que

$$\frac{\mathrm{MNPQ}}{\mathrm{MNPQ'}} = \frac{\mathrm{AOB}}{\mathrm{AOB'}}.$$

Il y a deux cas à distinguer, selon que les angles AOB, AOB′ sont commensurables ou incommensurables entre eux.

1er *cas.*—Supposons, pour fixer les idées, que les angles plans soient entre eux dans le rapport de 7 à 5; c'est-à-dire qu'un même angle A0m, contenu 7 fois dans AOB, soit contenu 5 fois dans AOB'.

Par les droites de division Om, On, Op,..., et l'arête NP, faisons passer des plans; ils divisent l'angle MNPQ en 7 angles dièdres, égaux entre eux, comme répondant à des angles plans égaux; et l'angle MNPQ' contient 5 de ces angles dièdres.

* 2^e *cas.*—Si les angles plans sont incommensurables entre eux, le raisonnement ordinaire (180) fera voir que leur rapport est encore égal à celui des angles dièdres.

* 468. *Remarque.* — Nous venons de démontrer que tout dièdre a pour mesure l'angle plan correspondant. Il est essentiel d'observer que, si les côtés d'un angle plan n'étaient pas perpendiculaires à l'arête, cet angle ne pourrait plus servir de mesure à l'angle dièdre.

D'abord, si les côtés OA, OB (*fig* 218) de l'angle plan étaient inégalement inclinés sur l'arête NP, cet angle ne deviendrait pas nul lorsque la face NPQ serait appliquée sur MNP. Donc les angles AOP, BOP doivent être égaux.

En second lieu, menons par l'arête NP un plan quelconque NPQ', et soit, dans ce plan, l'angle POB' = POA.

Comme l'on a

$$\text{MNPQ} = \text{MNPQ}' + \text{Q'PNQ},$$

on devrait avoir

$$\text{AOB} = \text{AOB}' + \text{B'OB}.$$

Il est facile de reconnaître que si l'angle AOP n'est pas droit, les droites OA, OB, OB' forment un *angle trièdre;* or, il sera démontré plus loin que, dans un pareil angle, on a nécessairement

$$\text{AOB} < \text{AOB}' + \text{B'OB}.$$

Donc l'angle AOB ne peut servir de mesure à l'angle dièdre.

PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX.

469. Lorsqu'un plan PR rencontre un plan MN, de manière que les dièdres adjacents, PQRM, PQRN (*fig.* 138), soient égaux, chacun d'eux est un angle dièdre *droit*, et le plan PR est dit *perpendiculaire* à MN (*Voyez* nº 40).

Théorème XXVI.

470. *Tous les angles dièdres droits sont égaux.*

En effet, les angles correspondants sont droits ; donc ils sont égaux (54) ; donc les angles dièdres sont égaux (466).

471. *Remarque.* — Par la considération de l'angle plan correspondant, nous avons ramené le théorème précédent, relatif aux angles dièdres, au théorème analogue, relatif aux angles plans. La même réduction a lieu pour les propositions suivantes, qu'il suffit d'énoncer :

Lorsque deux plans se coupent, les dièdres opposés sont égaux deux à deux; les dièdres adjacents sont supplémentaires (c'est-à-dire que leur somme est égale à deux dièdres droits). *Lorsque deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan, les dièdres correspondants sont égaux ; etc.*

Nous énoncerons en particulier le théorème suivant :

Théorème XXVII.

472. *Si un plan* P *est perpendiculaire à un plan* Q, *réciproquement celui-ci est perpendiculaire au premier.*

473. 1er Corollaire. — *Si deux plans sont perpendiculaires entre eux, toute droite menée dans le premier, perpendiculairement à l'intersection, est perpendiculaire au second.*

474. 2e *Corollaire.* — *Si trois droites, passant en un même point, sont perpendiculaires deux à deux, chacune d'elles est perpendiculaire au plan des deux autres, et les trois plans sont perpendiculaires entre eux.*

Théorème XXVIII.

475. *Tout plan* PR (fig. 138), *passant suivant une droite* AB *perpendiculaire à un autre plan* MN, *est perpendiculaire à celui-ci.*

Par le pied A de la perpendiculaire AB, menons, dans le plan MN, la droite AC perpendiculaire à l'intersection QR. D'après l'hypothèse, la droite AB est perpendiculaire à AC (413). Or, l'angle droit BAC mesure le dièdre PQRN (467); donc celui-ci est droit.

476. *Réciproque. — Deux plans* PR, MN, *étant perpendiculaires, toute droite* BA, *perpendiculaire à l'un d'eux et passant par un point* B *de l'autre, est contenue dans celui-ci.*

Si par le point B, et dans le plan PR, on mène une perpendiculaire à l'intersection QR, cette droite est perpendiculaire au plan MN (473); donc elle ne diffère pas de BA.

Théorème XXIX.

477. *L'intersection de deux plans* P, Q, *perpendiculaires à un troisième plan* M, *est perpendiculaire à ce dernier.*

Si, par un point de l'intersection, nous imaginons une perpendiculaire à M, cette droite sera contenue dans chacun des deux plans P, Q; donc elle en est l'intersection.

478. *Réciproque. — Un plan, perpendiculaire à deux plans qui se coupent, est perpendiculaire à leur intersection.*

479. *Corollaire. — Si trois plans sont perpendiculaires deux à deux, chacun d'eux est perpendiculaire à l'intersection des deux autres, et les trois intersections sont perpendiculaires entre elles.*

* QUADRILATÈRE GAUCHE.
COMMUNE PERPENDICULAIRE A DEUX DROITES.

480. Si quatre droites AB, BC, CD, DA (*fig.* 206), non situées dans un même plan, se coupent consécutivement, leur système prend le nom de *quadrilatère gauche*.

On obtient cette figure en assemblant deux triangles ABC, ADC qui ont un côté commun AC, de manière que leurs plans ne coïncident pas.

Théorème XXX.

481. *Tout plan, parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, partage proportionnellement les deux autres côtés.*

Soient E, F (*fig.* 210) les points où le plan MN, parallèle aux côtés AB, CD, coupe les deux autres côtés AD, BC. Je dis que

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}.$$

Faisons passer, suivant CD, le plan PQ parallèle à AB et à MN. Menons, par le point A, une parallèle à BC, et soient G, H les points où elle perce les plans MN, PQ. Tirons EG, DH : ces droites sont parallèles, comme étant les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan (452). Par suite,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GH}.$$

Mais (456)

$$AG = BF, \; GH = FC;$$

donc, etc.

482. *Réciproque. — Toute droite, qui divise proportionnellement deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, est dans un plan parallèle aux deux autres côtés.*

Théorème XXXI.

483. *Si une première droite* EF (*fig.* 211) *partage proportionnellement deux côtés opposés* AB, CD *d'un quadrilatère gauche* ABCD, *et si une seconde droite* GH *partage proportionnellement les deux autres côtés du quadrilatère, ces deux droites sont dans un même plan.*

Suivant AB, faisons passer un plan P parallèle à CD, et, conséquemment, parallèle à GH (460). Par les points C, D, H, G, menons CC′, DD′, HH′, GG′, parallèles à EF ; soient C′, D′, H′, G′ les points où ces droites percent le plan P. Le plan des parallèles CC′, FE, DD′ coupe P suivant une droite C′ED′, parallèle et égale à CD. De plus, les droites BC′, AD′ sont parallèles, comme étant les intersections du plan P par les plans parallèles ADD′, BCC′. Il suit de là que les triangles BEC′, AED′ sont semblables.

Par hypothèse,

$$\frac{AH}{BG} = \frac{HD}{GC};$$

d'où, à cause des parallèles,

$$\frac{AH'}{BG'} = \frac{H'D'}{G'C'} = \frac{AD'}{BC'} = \frac{AE}{BE}.$$

Si donc nous menons G′E et H′E, les triangles BG′E, AH′E sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Par suite, les angles BEG′, AEH′ sont égaux, et G′EH′ est une ligne droite; donc G′H′HG est un quadrilatère plan ; etc.

On peut remarquer, en outre, que si les droites EF, HG se coupent au point I, on a

$$\frac{EI}{IF} = \frac{AH}{HD} = \frac{BG}{GC}, \quad \frac{HI}{IG} = \frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}.$$

484. Le théorème que nous venons de démontrer reçoit son application dans la théorie des *surfaces gauches*. Il peut être regardé comme un cas particulier de celui-ci :

Si deux droites EF, GH *partagent les côtés d'un quadrilatère gauche* ABCD, *de maniere que*

$$AE \times BG \times CF \times DH = BE \times CG \times DF \times AH,$$

ces deux droites sont dans un même plan.

Théorème XXXII.

485. *Étant donné deux droites non situées dans un même plan : 1° on peut toujours mener une droite perpendiculaire à*

la fois à chacune d'elles; 2° on n'en peut mener qu'une; 3° cette commune perpendiculaire est plus petite que toute autre droite menée de l'une à l'autre des deux droites données.

1° AB, CD *(fig.* 212*)* étant les lignes données, menons, par un point A pris sur la première, une droite AE parallèleà la seconde : le plan BAE est parallèle à CD (442).

Par un point quelconque D, pris sur CD, menons DF perpendiculaire au plan BAE; par le pied F de cette perpendiculaire, tirons FG parallèle à EA ou à DC (440); enfin, par le point G, où FG coupe AB, menons GH parallèle à FD : cette droite, située dans le plan GFDC, coupe DC en un point H. Je dis que GH est perpendiculaire aux droites AB, CD.

En effet, la droite GH, parallèle à DF, est perpendiculaire au plan BAE (438); donc elle est perpendiculaire aux droites AB, GF, ou aux droites AB, CD.

2° Pour démontrer que la commune perpendiculaire est unique, il suffit de faire voir qu'une droite quelconque IK, différente de GH, et rencontrant AB et CD, n'est pas perpendiculaire à ces deux droites.

Or, si par le point I nous menons IL parallèle à HG, le pied de cette droite doit se trouver sur FG; donc il diffère du point K. Conséquemment, la droite IK est une oblique au plan BAE; donc elle ne saurait être perpendiculaire aux deux droites AB, AE, situées dans ce plan; etc.

3° IL étant une perpendiculaire au plan BAE, et IK une oblique à ce plan, nous avons $IL < IK$. Mais $IL = HG$; donc $HG < IK$.

ANGLES POLYÈDRES.

486. On appelle *angle polyèdre* l'espace indéfini compris entre plusieurs plans qui se rencontrent en un même point.

Si le nombre des plans se réduit à trois, l'angle prend le nom d'angle *trièdre.*

487. Pour construire un angle polyèdre, on trace arbitrairement, dans un plan, un polygone fermé ABCDEF *(fig.* 214) ; puis, d'un point S, situé en dehors de ce plan, on mène les

droites SA, SB, SC,... que l'on prolonge indéfiniment. On a de la sorte une série d'angles plans ASB, BSC,... : ces angles plans sont les *faces* de l'angle *polyèdre ;* les droites SA, SB,... en sont les arêtes ; le point S en est le *sommet*.

488. *Remarques.* — I. Si, par le sommet S, on mène un plan parallèle à ABC.... l'angle polyèdre est situé, tout entier, d'un seul côté de ce plan.

II. Le polygone ABC... et l'angle polyèdre S sont, simultanément, *convexes* ou *non convexes*.

III. Un angle polyèdre convexe est situé, tout entier, d'un même côté du plan d'une quelconque de ses faces, ce plan étant supposé prolongé indéfiniment.

489. *Lemme. — Si, d'un point* O (fig. 219), *pris dans l'intérieur d'un dièdre* MNPQ, *on abaisse des perpendiculaires* OA, OB *sur les deux faces, l'angle des perpendiculaires est le supplément de l'angle dièdre.*

Cet énoncé signifie que l'angle des perpendiculaires est le supplément de l'angle plan correspondant à l'angle dièdre. On doit entendre, de la même manière, les énoncés des théorèmes qui terminent ce paragraphe.

Le plan des droites OA, OB, perpendiculaire aux faces MN, PQ (475), est perpendiculaire à leur intersection NP (477) ; donc il coupe les faces suivant des droites CA, CB perpendiculaires à NP ; et l'angle ACB mesure le dièdre MNPQ. Or, le quadrilatère OACB ayant deux angles droits A, B, les angles O, C sont supplémentaires ; donc, etc.

THÉORÈME XXXIII.

490. *Si, d'un point* O' (fig. 220), *pris dans l'intérieur d'un angle trièdre* OABC, *on abaisse des perpendiculaires sur les faces, on forme un nouvel angle trièdre* O'A'B'C', *dont les faces sont les suppléments des angles dièdres de* OABC, et vice versa.

La première partie du théorème vient d'être démontrée.

Relativement à la seconde, il suffit d'observer que, d'après le lemme précédent, l'angle trièdre OABC a ses arêtes perpendiculaires aux faces de l'angle trièdre O'A'B'C' ; donc les faces du premier sont les suppléments des angles dièdres de l'autre.

491. *Scolie.* — Désignons par A, B, C les angles dièdres du premier trièdre, et par a, b, c les faces opposées. Désignons de même par A', B', C' les angles dièdres du second trièdre, et par a', b' c' ses faces. Nous aurons, en prenant l'angle droit pour unité,

$$\begin{aligned} A + a' &= 2, & A' + a &= 2, \\ B + b' &= 2, & B' + b &= 2, \\ C + c' &= 2, & C' + c &= 2. \end{aligned}$$

492. A cause des relations précédentes, les angles trièdres O, O' sont dits *supplémentaires.*

Théoreme XXXIV.

493. *Dans tout angle trièdre* S (fig. 221), *une face quelconque est : 1° plus petite que la somme des deux autres ; 2° plus grande que leur différence.*

Il suffit de faire voir que la plus grande face est moindre que la somme des deux autres.

Soit ASB cette plus grande face. Menons, dans son plan, la droite SC', de manière que l'angle ASC' = ASC. Traçons arbitrairement, dans le même plan, la transversale AB ; prenons SC = SC', et tirons CA, CB.

Les triangles ASC, ASC' sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun; donc AC = AC'. Et comme, dans le triangle ABC, le côté AB est plus petit que la somme des deux autres, il vient, en retranchant les parties égales, BC' < BC. Donc, dans les triangles CSB, C'SB, qui ont deux côtés égaux, chacun à chacun, l'angle CSB, opposé au plus grand côté, est plus grand que C'SB, opposé au plus petit ; etc.

494. *Corollaire.—Dans tout angle trièdre, un angle dièdre quelconque est plus grand que la somme des deux autres, diminuée de 2 droits.*

Soient A, B, C les angles dièdres d'un trièdre, A étant le plus petit; et soient a', b', c' les faces correspondantes du trièdre supplémentaire. Nous aurons

$$a' < b' + c',$$

ou (492)

$$2^d - A < (2^d - B) + (2^d - C)\,;$$

ou enfin

$$A > B + C - 2^d.$$

Théorème XXXV.

495. *La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que 4 droits.*

Soit l'angle polyèdre convexe SABC... (*fig.* 222). Je dis que l'on a

$$ASB + BSC + \ldots < 4^d.$$

Coupons l'angle polyèdre par un plan qui rencontre toutes les faces : la section sera un polygone convexe ABCD... (489, 2°). Prenons un point O dans l'intérieur de ce polygone, et menons les droites OA, OB.... Nous obtiendrons ainsi une série de triangles, en nombre égal à celui des faces de l'angle polyèdre, et dans lesquels la somme des angles qui se réunissent en O égale 4 droits.

Or, si nous considérons deux triangles consécutifs ABO, CBO de ce polygone, et les triangles ABS,BCS correspondant à ceux-ci, nous aurons, par le théorème précédent,

$$ABO + OBC < ABS + SBC.$$

La même relation a lieu pour les trièdres C, D, E,... Par conséquent, *la somme des angles à la base, dans les triangles réunis en* O, *est moindre que la somme des angles à la base dans les triangles réunis en* S. Et comme la somme de tous les angles est la même dans les premiers triangles et dans les derniers, il faut, par compensation, que la somme des angles autour du point O surpasse la somme des angles autour du point S. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème XXXVI.

496. *Dans tout angle trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre 2 droits et 6 droits.*

Nommons A, B, C les angles dièdres du trièdre donné, et a', b', c' les faces correspondantes du trièdre supplémentaire. Nous aurons

$$A = 2^d - a', \quad B = 2^d - b', \quad C = 2^d - c';$$

d'où

$$A + B + C = 6^d - (a' + b' + c').$$

Donc, 1°

$$A + B + C < 6^d.$$

Mais, par le théorème précédent,

$$a' + b' + c' < 4^d;$$

donc, 2°

$$A + B + C > 2^d.$$

ÉGALITÉ DES ANGLES TRIÈDRES.

Théorème XXXVII.

497. *Deux angles trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Soit l'angle dièdre A (*fig.* 223) égal à l'angle dièdre A'. Soit la face ASC égale à A'S'C', et soit enfin la face ASB égale à A'S'B'. Je dis que les angles trièdres sont égaux.

Transportons le trièdre S' sur le trièdre S, de manière que la face A'S'C' coïncide avec son égale ASC. L'angle dièdre A' étant égal à A, le plan de la face A'S'B' s'applique sur le plan de la face ASB. Et comme ces deux faces sont égales, l'arête S'B' coïncide avec SB ; donc, etc.

498. *Remarque.* — Si les faces égales étaient *inversement*

disposées par rapport aux angles dièdres égaux, les arêtes S'B', SB tomberaient, après la superposition des faces A'S'C', ASC, de part et d'autre de cette dernière face ; et les angles trièdres ne seraient pas égaux.

Théorème XXXVIII.

499. *Deux angles trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à des angles dièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

La démonstration se fait, comme celle du théorème précédent, par voie de superposition.

Théorème XXXIX.

500. *Deux angles trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont les faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Soient les angles trièdres S, S' (*fig.* 224), dans lesquels

$$ASB = A'S'B',\ BSC = B'S'C',\ CSA = C'S'A'.$$

Prenons, à partir des sommets S, S', les six distances SA, SB, SC, SA', SB', SC', égales entre elles.

Construisons les triangles ABC, A'B'C' ; circonscrivons, à ces triangles, les circonférences O, O' ; enfin menons SO, S'O' : ces droites sont perpendiculaires, respectivement, aux plans ABC, A'B'C' (427).

Il est d'abord visible que les triangles ABC, A'B'C' sont égaux, comme ayant les côtés égaux, chacun à chacun ; donc les cercles circonscrits O, O' sont égaux ; d'où il suit que les triangles rectangles SOA, S'O'A', qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, sont égaux.

Si donc l'on transporte le trièdre S' sur le trièdre S, de manière que le triangle A'B'C' coïncide avec ABC, les centres O, O' coïncideront ; la perpendiculaire O' S' prendra la direction de OS ; et, comme ces perpendiculaires sont égales, le sommet S' tombera en S. Donc les deux trièdres coïncideront.

501. *Corollaire.* — *Deux angles trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont les arêtes parallèles, chacune à chacune, et dirigées dans le même sens.*

502. *Remarque.* — Le théorème précédent est compris dans cette proposition plus générale, qui ne suppose pas les faces disposées dans le même ordre :

Lorsque deux angles trièdres ont les faces égales, chacune à chacune, les angles dièdres opposés aux faces égales sont égaux.

THÉORÈME XL.

503. *Deux angles trièdres sont égaux, lorsqu'ils ont les angles dièdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Prenons, dans l'intérieur des trièdres S,S′, deux points O,O′; abaissons, de chacun de ces points, une perpendiculaire sur la face du trièdre correspondant; nous obtiendrons deux trièdres O,O′, dans lesquels les faces sont égales, chacune à chacune, comme étant les suppléments d'angles dièdres égaux. De plus, ces faces sont semblablement disposées. Donc les trièdres O,O′ sont égaux, et les angles dièdres de l'un sont, respectivement, égaux aux angles dièdres de l'autre. Les suppléments de ces angles dièdres sont donc égaux entre eux. Or, ces suppléments sont les faces des trièdres S,S′; donc, etc.

FIN DU LIVRE CINQUIÈME.

EXERCICES SUR LE LIVRE V.

1. Dans tout angle trièdre, les plans bissecteurs des angles dièdres se coupent suivant une même droite.

2. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les arêtes et par les bissectrices des faces opposées se coupent suivant une même droite.

3. Dans tout angle trièdre, les plans menés par les bissectrices des faces, perpendiculairement à ces faces, se coupent suivant une même droite.

4. Les plans menés par les arêtes d'un angle trièdre, perpendiculairement aux faces opposées, se coupent suivant une même droite.

5. Dans tout trièdre, la somme des angles formés par les arêtes avec les bissectrices des faces opposées est moindre que la somme des faces.

6. La somme des dièdres d'un angle polyèdre convexe de n faces est comprise entre $2n$ et $2(n-2)$ dièdres droits.

7. Tout plan transversal détermine, sur les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, huit segments tels, que le produit de quatre segments non consécutifs est égal au produit des quatre autres segments.

8. Dans tout quadrilatère gauche, les milieux des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

9. Dans tout quadrilatère gauche, le point de rencontre des droites qui joignent les milieux des côtés opposés est situé au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales.

10. Tout plan transversal détermine, sur les côtés d'un triangle, six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres segments.

11. Si les côtés d'un polygone gauche sont coupés par un plan transversal, le produit des segments non consécutifs est égal au produit des autres segments.

12. Si, par une droite quelconque, et par les différents sommets d'un poly-

gone gauche, ayant un nombre impair de côtés, on fait passer des plans qui partagent les côtés respectivement opposés à ces sommets, chacun en deux segments, le produit des segments non consécutifs est égal au produit des autres segments.

13. Lorsqu'une droite AB est partagée en deux segments AC, BC, proportionnels aux nombres b, a ; si, des points A, B, C on abaisse, sur un plan quelconque, des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, on a

$$(a + b)\,CC' = a\,AA' + b\,BB'.$$

14. Étant donné un système de points A, B, C..., on peut toujours déterminer un point tel, que sa distance à un plan quelconque soit égale à la moyenne arithmétique entre les distances, au même plan, des points A, B, C...

15. La somme des carrés des distances de n points, à un point quelconque S, est égale à la somme de carrés des distances des mêmes points à leur centre O, augmentée de n fois le carré de SO.

16. Le lieu géométrique des points tels, que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à des points donnés A, B, C..., soit constante, est une sphère qui a pour centre le centre des moyennes distances des points A, B, C....

17. Si les faces d'un angle dièdre droit passent respectivement par deux droites données, l'arête de l'angle dièdre rencontre une infinité de droites fixes.

18. Si les extrémités d'une droite de longueur donnée glissent sur deux droites fixes, un point quelconque de la droite mobile décrit une ligne plane.

19. Si une droite s'appuie sur deux droites données, en restant parallèle à un plan donné, elle rencontre une infinité de droites fixes. En outre, toutes ces droites fixes sont parallèles à un même plan.

20. Si une droite s'appuie sur trois droites données, telles que deux quelconques d'entre elles ne soient pas dans un même plan, elle rencontre une infinité de droites fixes. Ces droites sont ou ne sont point parallèles à un même plan, suivant que les droites données sont ou ne sont point parallèles à un même plan.

21. Étant donnés un plan et deux points A, B, situés d'un même côté de ce plan, trouver, sur le plan, un point M tel, que la somme des distances AM, BM soit un minimum.

22. Étant donnés un plan et deux points A, B, situés de part et d'autre de ce plan, trouver, sur le plan, un point M tel, que la différence des distances AM, BM soit un maximum.

23. Trouver, sur une droite donnée, un point tel, que la somme de ses distances aux deux faces d'un angle dièdre donné soit un minimum.

24. Couper un angle tétraèdre par un plan, de manière que la section soit un parallélogramme.

25. Couper par un plan un angle trièdre trirectangle, de manière que la section soit égale à un triangle donné.

26. Étant donné deux droites fixes et un angle dièdre, que l'on fait tourner autour de son arête C, supposée fixe, prouver qu'il existe sur la première droite un point fixe A, et sur la seconde droite un point fixe B, tels que a et b étant les points où ces deux droites percent les faces de l'angle dièdre, dans une position quelconque, le rectangle des segments Aa, Bb soit constant.

27. Quel est le lieu des points également distants de deux droites qui se coupent ?

28. Quel est le lieu des points tels, que la différence des carrés des distances de chacun d'eux à deux points donnés, soit égale à un carré donné ?

29. Quel est le lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaires, non situées dans un même plan ?

30. Quel est le lieu des points tels, que la somme des distances de chacun d'eux, à deux plans donnés, soit égale à une droite donnée ?

31. Quel est le lieu des points tels, que la somme des distances de chacun d'eux a plusieurs plans donnés, soit égale à une droite donnée ?

32. Les côtés BM, CM d'un angle variable sont, respectivement, perpendiculaires aux côtés AB, AC d'un angle donné. Quelle est la ligne décrite par le sommet M ?

33. On donne n droites passant par un point O ; et l'on demande sur quelle surface sont situés les points M tels, que si l'on abaisse, de chacun d'eux, les perpendiculaires MP, MP′, MP″..., sur ces droites, la somme des rectangles construits sur les distances OP, OP′, OP″... et sur des longueurs données, soit équivalente à un carré donné.

34. On donne deux plans et un point A. Par ce point, on fait passer une droite arbitraire qui coupe les plans en des points C, D ; après quoi l'on construit le point B, conjugué harmonique du point A, relativement aux deux autres points. Quel est le lieu du point B ?

35. Étant donnés un quadrilatère gauche et une droite qui partage proportionnellement deux côtés opposés de cette figure, trouver une droite qui partage proportionnellement les deux autres côtés, et qui soit perpendiculaire à la première droite.

36. Une droite s'appuie sur deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, en restant parallèle à l'un des deux plans directeurs. Une seconde droite s'appuie sur les deux autres côtés opposés, en restant parallèle au second plan

directeur. De plus, ces deux droites sont constamment perpendiculaires entre elles. De quelle nature est la ligne décrite par leur point d'intersection ?

37. Étant donnés deux points fixes A, B, et deux plans fixes VY, XZ ; on prend dans l'espace un point quelconque M ; on mène la droite AM ; on joint le point P, où elle perce le plan VY, avec le point B, par la droite PpB, laquelle perce le plan XZ au point p ; enfin on trace les droites BM, Ap ; et l'on obtient ainsi un quadrilatère plan MPpm. Si le sommet M de ce quadrilatère décrit une droite CD, quel est le lieu décrit par le sommet m ?

LIVRE SIXIÈME.

POLYÈDRES.

PRÉLIMINAIRES.

504. On nomme *polyèdre* une figure terminée par des plans, ou *faces planes*.

505. Parmi les polyèdres, on distingue, à cause du nombre de leurs faces :

Le *tétraèdre*, qui a quatre faces;

L'*hexaèdre*, qui en a six;

L'*octaèdre*, qui en a huit;

Le *dodécaèdre*, qui en a douze;

L'*icosaèdre*, qui en a vingt;

etc.

Le tétraèdre est le plus simple de tous les polyèdres; car trois plans qui se coupent ne peuvent limiter un espace.

506. On appelle *arêtes* et *sommets* d'un polyèdre les côtés et les sommets de ses faces. Une *diagonale* est une droite qui joint deux sommets non situés dans la même face.

507. Si l'on coupe un angle polyèdre S *(fig. 225)* par un plan qui rencontre toutes les faces, on détermine un polyèdre SAB... appelé *pyramide*. Ce corps peut donc être ainsi défini :

Une pyramide est un polyèdre dont les faces sont un polygone quelconque, et une série de triangles ayant un sommet commun.

Le polygone ABCDEF se nomme *base;* la perpendiculaire SP, abaissée du sommet sur la base, est la *hauteur;* et l'ensemble des triangles ASB, BSC,... forme la surface *latérale* de la pyramide.

Une pyramide est *régulière*, lorsqu'elle a pour base un polygone régulier, ayant pour centre le *pied* de la hauteur.

508. Si une série de plans se rencontrent consécutivement suivant des droites parallèles AA′, BB′... *(fig. 226)*, et qu'on les coupe par deux plans parallèles ABC..., A′B′C′..., on détermine une figure ABC..., appelée *prisme*.

Les faces telles que ABA′B′, BCB′C′,... sont des parallélogrammes; car chacune d'elles est un quadrilatère ayant deux côtés égaux et parallèles (456). De plus, les faces opposées ABC..., A′B′C′..., appelées *bases* du prisme, sont égales. En effet, la figure ABA′B′ étant un parallélogramme, les côtés AB, A′B′ sont égaux et parallèles; donc les polygones ABC..., A′B′C′... ont leurs côtés égaux et parallèles deux à deux; et, par suite, leurs angles égaux, chacun à chacun (458).

509. De là, la définition suivante :

Un prisme est un polyèdre dont les faces sont deux polygones égaux et parallèles, et une série de parallélogrammes.

La *hauteur* d'un prisme est la perpendiculaire abaissée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure. La surface *latérale* du prisme est formée par l'ensemble des parallélogrammes ABA′B′, BCB′C′.....

Un prisme est *droit* ou *oblique*, selon que les arêtes latérales sont perpendiculaires ou obliques aux bases. Dans le premier cas, les faces latérales du prisme sont des rectangles.

Un prisme droit est *régulier* lorsqu'il a pour bases des polygones réguliers.

510. Un *parallélipipède* est un prisme dont les bases sont des parallélogrammes.

Si un parallélipipède droit a ses bases rectangulaires, il prend, pour cette raison, le nom de *parallélipipède rectangle*.

Enfin, le *cube* est un polyèdre qui a pour faces six carrés égaux.

TÉTRAÈDRES.

Théorème I.

511. *Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées. (Voyez* n° 497.*)*

Théorème II.

512. *Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont une face égale, adjacente à trois angles dièdres égaux, chacun à chacun.* (*Voyez* n° 499.)

Théorème III.

513. *Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.* (*Voyez* n° 500.)

514. *Corollaire. — Deux tétraèdres sont égaux, lorsqu'ils ont les six arêtes égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

PYRAMIDES.

Théorème IV.

515. *Les sections faites dans la surface latérale d'une pyramide, par deux plans parallèles, sont semblables.*

Soient AB, *ab (fig.* 227*)* les sections faites dans la face SAB, par les plans donnés : ces droites sont parallèles. Il suit de là que les polygones ABC..., *abc*..., ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

En second lieu, les droites AB, *ab* étant parallèles, on a

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a}=\frac{\mathrm{AB}}{ab}=\frac{\mathrm{SB}}{\mathrm{S}b}.$$

De même, les droites BC, *bc* étant parallèles,

$$\frac{SB}{Sb} = \frac{BC}{bc} = \frac{SC}{Sc};$$

et ainsi de suite.

Donc, à cause des rapports communs,

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \dots$$

Les polygones ABC..., *abc*..., ayant les angles égaux et les côtés proportionnels, sont donc semblables.

516. *Corollaire.* — *Les côtés homologues et les périmètres de deux sections parallèles sont comme les distances des sections au sommet de la pyramide; les aires de ces sections sont comme les carrés des mêmes distances.*

Soient P, p les périmètres des polygones, et A, a leurs aires. On a

$$\frac{P}{p} = \frac{SA}{Sa}, \quad \frac{A}{a} = \frac{\overline{SA}^2}{\overline{Sa}^2}.$$

Menons, du sommet S, une perpendiculaire commune aux plans des deux polygones, et soient O, o les points où elle perce ces plans Menons encore AO et ao : ces droites sont parallèles; donc

$$\frac{SA}{Sa} = \frac{SO}{So}.$$

Théorème V.

517. *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.* (*Voyez* n° 497.)

518. *Corollaire.* — *Deux pyramides sont égales lorsqu'elles ont un angle trièdre formé de trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

PRISMES.

Théorème VI.

519. *Les sections faites dans la surface latérale d'un prisme, par deux plans parallèles, sont égales. (Voyez* n° 508.*)*

520. *Corollaire. — Toute section faite dans un prisme, par un plan parallèle à la base, est égale à cette base.*

Théorème VII.

521. *Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre une base et une face égales, chacune à chacune, et semblablement disposées. (Voyez* n° 497.*)*

522. *Corollaire. — Deux prismes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle trièdre formé de trois faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

PARALLÉLIPIPÈDES.

Théorème VIII.

523. *Dans tout parallèlipipède, les faces opposées sont égales et parallèles.*

Soit le parallélipipède ABC... (*fig.* 228), qui a pour bases les parallélogrammes égaux et parallèles ABCD, EFGH. Je dis que deux autres faces opposées quelconques sont égales et parallèles.

En effet, dans les parallélogrammes CDHG, BAEF, le côté CD est égal et parallèle au côté AE; donc, etc.

524. 1er *Corollaire. — Toute section plane, faite dans la surface latérale d'un parallélipipède, est un parallélogramme.*

525. 2e *Corollaire. — Dans tout parallélipipède, les angles dièdres opposés sont égaux* (471).

526. *Remarque.* — Du théorème précédent, il résulte

que, dans tout parallélipipède, *deux faces opposées quelconques peuvent être prises pour bases ;* ce qui généralise le premier corollaire. Il résulte aussi, de ce théorème, que *les arêtes d'un parallélipipède sont, quatre à quatre, égales et parallèles.*

Théorème IX.

527. *Dans tout parallélipipède, les quatre diagonales, et les six droites qui joignent, deux à deux, les points de rencontre des diagonales des faces opposées, se coupent toutes en un même point, qui est leur milieu commun.*

Menons BD, FH *(fig.* 229) : le quadrilatère BDFH, qui a deux côtés DH, BF égaux et parallèles, est un parallélogramme ; donc les diagonales DF, BH se coupent en leur milieu O.

Menons AC, EG : ces droites coupent BD, FH en leurs milieux I, K. Par suite, BI = HK, IO = OK ; donc, etc.

* POLYÈDRES QUELCONQUES.

Théorème X.

528. *Deux polyèdres sont égaux, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de tétraèdres égaux, chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Observons d'abord qu'un polyèdre convexe quelconque peut se décomposer en tétraèdres ayant un sommet commun.

Prenons, dans l'intérieur de ce polyèdre, un point quelconque O, et menons, de ce point, des droites à tous les sommets. Puisque le polyèdre est convexe, chacune de ces droites n'aura de commun, avec la surface polyédrale, que le sommet où elle se termine. D'après cela, les droites qui, partant du point O, aboutissent aux sommets d'une même face, déterminent une pyramide ayant pour base cette face, et pour sommet le point O. Ainsi, le polyèdre est déjà décomposé en pyramides ayant un sommet commun, et dont les bases sont les faces du polyèdre. Or, une pyramide est toujours, ou un tétraèdre, ou décomposable en tétraèdres; donc, etc.

En second lieu, si l'on coupe un polyèdre non convexe par des plans convenablement choisis, on peut le décomposer en polyèdres convexes. Donc, un polyèdre quelconque est décomposable en tétraèdres.

Actuellement, soient deux polyèdres P, P′, composés d'un même nombre de tétraèdres, égaux chacun à chacun, et assemblés de la même manière. Je dis que ces polyèdres sont égaux.

Transportons P′ sur P, de manière qu'un premier tétraèdre A′ coïncide avec son égal A. Soit B′ un tétraèdre ayant, avec A′, une face commune, et soit B l'homologue de B′. Ces tétraèdres égaux B,B′, ayant une face commune, et étant situés d'un même côté de cette face, coïncideront. Et ainsi de suite.

529. *Lemme. — Si une surface polyédrale convexe est terminée par une ligne brisée, dont les côtés soient ou ne soient pas dans un même plan, le nombre des faces, plus le nombre des sommets, égale le nombre des arêtes plus* 1.

Désignons par F le nombre des faces, par S le nombre des sommets, et par A le nombre des arêtes. Il s'agit de faire voir que

$$F + S = A + 1.$$

Cette formule est vraie dans le cas de $F = 1$; car alors $S = A$. Admettons donc qu'elle ait été vérifiée pour F faces, et démontrons qu'elle subsiste pour $F + 1$ faces.

Soit ABC... (*fig.* 230) la ligne brisée qui termine la surface. Construisons, sur le côté AB, une nouvelle face, composée de n sommets et de n côtés. Si cette face a m côtés communs avec ABCD..., elle aura $m + 1$ sommets communs avec cette même ligne; car on suppose que le nouveau polygone ne ferme pas complétement la surface, et qu'il y laisse une seule ouverture. De cette manière, les nombres F, S, A deviendront, respectivement :

$$F' = F + 1, \quad S' = S + n - (m + 1), \quad A' = A + n - m;$$

d'où, à cause de la formule ci-dessus,

$$F' + S' = A' + 1.$$

THÉORÈME XI (*).

530. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre* F *des faces, plus le nombre* S *des sommets, égale le nombre* A *des arêtes plus* 2 ; *c'est-à-dire que*

$$F + S = A + 2.$$

Enlevons une face du polyèdre : nous aurons une surface polyédrale ouverte, terminée à une ligne brisée, et dans laquelle les nombres de faces, de sommets et d'arêtes seront respectivement F — 1, S, A ; donc, d'après la proposition précédente,

$$F - 1 + S = A + 1;$$

etc.

Ce théorème remarquable a un grand nombre de conséquences, parmi lesquelles nous indiquerons les suivantes.

THÉORÈME XII.

531. *Dans tout polyèdre convexe : 1° les faces d'un nombre impair de côtés sont toujours en nombre pair ; 2° les sommets auxquels aboutissent un nombre impair d'arêtes sont toujours en nombre pair.*

Soient respectivement a, b, c, d,... les nombres de faces triangulaires, quadrangulaires, pentagonales,... ; représentons de même, par α, β, γ, δ,... les nombres d'angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres,... ; de manière que

$$F = a + b + c + d + \ldots,$$
$$S = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots.$$

(*) Théorème d'Euler.

Chaque arête appartient à deux faces, et aboutit à deux sommets ; si donc nous comptons, soit le nombre des côtés de toutes les faces, soit le nombre des arêtes de tous les angles polyèdres, nous aurons le double 2A du nombre des arêtes ; ainsi

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e \ldots,$$
$$2A = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + 7\varepsilon \ldots.$$

Or, ces deux dernières égalités exigent que $a + c + e + \ldots$ et $\alpha + \gamma + \varepsilon + \ldots$ soient des nombres pairs.

Théorème XIII.

532. *Dans tout polyèdre convexe de* F *faces, le nombre* S *des sommets et le nombre* A *des arêtes satisfont aux conditions*

$$S \overset{=}{<} 2(F - 2), \quad A \overset{=}{<} 3(F - 2),$$

$$S \overset{=}{>} \tfrac{1}{2}F + 2, \quad A \overset{=}{>} \tfrac{3}{2}F.$$

Les valeurs de F, S et 2A, écrites plus haut, donnent

$$2A - 3F = b + 2c + 3d + \ldots,$$
$$2A - 3S = \beta + 2\gamma + 3\delta + \ldots;$$

donc

1° $$A \overset{=}{>} \tfrac{3}{2}F;$$

et

$$A \overset{=}{>} \tfrac{3}{2}S.$$

Cette dernière relation devient, par le Théorème d'Euler,

$$A \overset{=}{>} \tfrac{3}{2}(A + 2 - F);$$

ou

2° $$A \overset{=}{<} 3(F - 2).$$

Remplaçant A par $F + S - 2$, on trouve les deux autres conditions.

533. *Remarque.* — Il est facile de construire des polyèdres dans lesquels le nombre des sommets soit, d'après les relations précédentes, le plus grand ou le plus petit possible.

En effet ;

1° Dans un prisme ayant F faces, le nombre des côtés de la base est $F - 2$; donc le nombre S des sommets du polyèdre est $2(F - 2)$.

2° Considérons un polyèdre formé de deux pyramides ayant une base commune. Si le nombre des côtés de cette base est n, on aura, en supposant que deux faces adjacentes ne soient pas dans un même plan,

$$F = 2n, \quad S = n + 2;$$

donc

$$S = \tfrac{1}{2}F + 2.$$

Et si les deux pyramides ont deux faces dans un même plan,

$$F = 2n - 1, \quad S = n + 2;$$

ou

$$S = \tfrac{1}{2}(F + 1) + 2.$$

Théorème XIV.

534. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces triangulaires, augmenté du nombre des angles trièdres, donne une somme qui ne peut être inférieure à 8.*

D'après les valeurs de F, de S et de A, l'équation

$$F + S = A + 2$$

devient

$$2(a + b + c + d + e + \ldots) + 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)$$
$$= 4 + 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots,$$

$$2(a + b + c + d + e + \ldots) + 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)$$
$$= 4 + 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \ldots;$$

ou

$$2(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) - (a + 2b + 3c + 4d + \ldots) = 4 \quad (1),$$
$$2(a + b + c + \ldots) - (\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots) = 4 \quad (2).$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$(a+\alpha)-(c+\gamma)-2(d+\delta)-\ldots=8 \qquad (3);$$

d'où

$$a+\alpha \geqq 8.$$

535. *Corollaire. — Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires ou des angles trièdres.*

536. *Remarque.* — L'équation (3) exprime que : *dans tout polyèdre convexe, la somme du nombre des faces triangulaires et du nombre des angles trièdres est égale à* 8, *plus la somme du nombre des faces pentagonales et du nombre des angles pentaèdres, plus deux fois la somme du nombre des faces hexagonales et du nombre des angles hexaèdres, etc.*

Théorème XV.

537. 1° *Tout polyèdre convexe a des faces triangulaires, ou quadrangulaires, ou pentagonales;* 2° *tout polyèdre convexe a des angles trièdres, ou tétraèdres, ou pentaèdres.*

Entre les équations (1) et (2), éliminons, successivement, α et a ; nous trouvons

$$3a+2b+c-e-2f-\ldots-2\beta-4\gamma-\ldots=12 \qquad (4),$$
$$3\alpha+2\beta+\gamma-\varepsilon-2\varphi-\ldots-2b-4c-\ldots=12 \qquad (5).$$

Or, les relations (4), (5) exigent que $3a+2b+c$ et $3\alpha+2\beta+\gamma$ soient des nombres égaux ou supérieurs à 12; donc, etc.

538. *Remarques.* — I. A l'inspection de l'équation (4), on reconnaît que :

1° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de triangles, ou si elle est formée de triangles et d'hexagones, le nombre des triangles égale ou surpasse* 4 ;

2° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de quadrilatères, ou si elle est formée de quadrilatères et d'hexagones, le nombre des quadrilatères égale ou surpasse* 6 ;

3° *Si la surface d'un polyèdre est formée seulement de penta-*

gones, ou si elle est formée de pentagones et d'hexagones, le nombre des pentagones égale ou surpasse 12.

4° *Si un polyèdre a seulement des angles trièdres, et que ses faces soient des pentagones et des hexagones, le nombre des pentagones est* 12.

II. L'équation (5) prouve pareillement que :

Si un polyèdre a toutes ses faces triangulaires, et que ses angles soient en partie pentaèdres, en partie hexaèdres, le nombre des pentaèdres est 12 ;
etc.

III. On démontre, avec la même facilité, les propriétés suivantes :

1° *Si un polyèdre convexe n'a ni angles trièdres ni angles tétraèdres, il a au moins* 20 *faces triangulaires ;*

2° *Si un polyèdre convexe n'a ni faces triangulaires ni faces quadrangulaires, il a au moins* 20 *angles trièdres ;*

3° *Si un polyèdre convexe a un seul angle trièdre, et qu'il n'ait aucun angle tétraèdre, il a au moins* 16 *faces triangulaires ;*

4° *Si un polyèdre a une seule face triangulaire, et qu'il n'ait aucune face quadrangulaire, il a au moins* 16 *angles trièdres ;*
etc.

Théorème XVI (*).

539. *La somme des angles plans d'un polyèdre convexe est égale à autant de fois* 4 *droits que le polyèdre a de sommets moins deux.*

Représentons par P cette somme, et conservons les notations précédentes : nous aurons, en prenant l'angle droit pour unité (136),

$$\begin{aligned} P &= 2a(3-2) + 2b(4-2) + 2c(5-2) + 2d(6-2) + \ldots \\ &= 2(3a + 4b + 5c + 6d + \ldots) - 4(a + b + c + d + \ldots), \end{aligned}$$

ou

$$P = 4A - 4F.$$

(*) Théorème de Simon Lhuilier.

Mais

$$A - F = S - 2;$$

donc

$$P = 4\,(S - 2).$$

Théorème XVII.

540. *Un polyèdre convexe étant décomposé en tétraèdres ayant pour sommet commun un point intérieur, le nombre de ces tétraèdres est*

$$N = 2\,(S - 2).$$

Si l'on suppose chaque face décomposée en triangles, au moyen de diagonales, le nombre de ces triangles est N. Mais, si l'on se reporte à la démonstration du théorème relatif à la somme des angles intérieurs d'un polygone (136), on en conclut que $N = \frac{P}{2}$; donc, à cause de la valeur trouvée pour P,

$$N = 2\,(S - 2).$$

541. *Lemme* I.—*Si, dans un angle polyèdre convexe, dont toutes les faces, excepté une, sont constantes, on fait varier un seul des angles dièdres opposés à cette face, de manière que l'angle polyèdre reste convexe, la face variable augmentera si l'angle dièdre augmente, et elle diminuera s'il diminue.*

Supposons, par exemple, que dans l'angle polyèdre S (*fig.* 188) supposé convexe, on fasse varier le dièdre SD, opposé à la face ASB; supposons, de plus, que les autres dièdres SC, SE, SF n'éprouvent aucun changement, et qu'il en soit de même des faces BSC, CSD..., FSA.

Si l'on mène les plans ASD, BSD, on décompose l'angle polyèdre donné, en un angle trièdre SABD, et en deux angles polyèdres SAFED, SBCD. Or, il résulte, des hypothèses précédentes, que ces derniers angles polyèdres sont constants. Par suite, la variation du dièdre SD, dans l'angle polyèdre donné, est égale à la variation du dièdre SD, dans l'angle trièdre SABD. D'ailleurs, il est facile de voir que *si un angle trièdre* SABD *a deux faces constantes* ASD, BSD, *la troisième face* ASB *augmente ou diminue avec le dièdre opposé;* donc, etc.

542. *Remarque.* — Au lieu de supposer que le dièdre SD varie seul, on pourrait faire varier successivement plusieurs des angles dièdres opposés à la face ASB. Par conséquent, *Si, dans un angle polyèdre convexe, dont toutes les faces, excepté une, sont constantes, on fait varier, dans le même sens, quelques-uns des dièdres opposés à cette face, de manière que l'angle polyèdre reste convexe, la face variable augmentera si les angles dièdres ont augmenté, et elle diminuera s'ils ont diminué.*

543. *Lemme* II. — *Si l'on fait varier, d'une manière quelconque, les angles dièdres d'un polyèdre convexe dont les faces sont constantes; que l'on mette le signe + sur l'arête de chaque dièdre qui augmente, le signe — sur l'arête de chaque dièdre qui diminue, puis que l'on fasse le tour entier de l'angle polyèdre, on trouvera au moins quatre variations de signes.*

Il faut que l'angle polyèdre considéré ait plus de trois faces, sans quoi l'invariabilité de celles-ci entraînerait l'invariabilité des dièdres. De plus, on suppose que l'angle polyèdre reste convexe, après comme avant la variation de ses angles dièdres. Ceci admis :

1° On ne peut pas supposer que tous les dièdres aient varié dans le même sens, car alors, d'après le Lemme I, il y aurait eu variation d'au moins une des faces.

2° En faisant le tour de l'angle polyèdre, on ne trouvera pas une seule série de signes +, suivie d'une seule série de signes —.

En effet, supposons que, dans l'angle polyèdre S (*fig.* 188), les arêtes SB, SA, SF soient affectées du signe +, et les autres affectées du signe —. Si nous menons le plan *diagonal* BSE qui laisse d'un côté une série de + et de l'autre côté une série de —, il résulte, du Lemme I, que l'angle plan BSE aura, tout à la fois, augmenté et diminué; ce qui est absurde.

3° D'après ce qui vient d'être dit, en faisant le tour entier de l'angle polyèdre, *on trouvera plus de deux variations de signes*. Et, comme on doit revenir à l'arête d'où l'on était parti, il s'ensuit que *le nombre des variations de signes est pair ;* donc il est au moins égal à 4.

Théorème XVIII (*).

544. *Deux polyèdres convexes* P, P′ *sont égaux, lorsqu'ils ont toutes leurs faces égales, chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Pour démontrer que les deux polyèdres sont égaux, il suffit de faire voir que chaque angle polyèdre du premier a son égal dans le second. Si cela n'a pas lieu, c'est que les angles polyèdres de P sont, en tout ou en partie, différents des angles polyèdres de P′. Ce second cas peut facilement être ramené au premier.

En effet, soit SABCDE un angle polyèdre de P, lequel a son égal dans le polyèdre P′. Si nous enlevons cet angle S, et que nous fermions l'ouverture ABCDE par une surface polyédrale convexe (530), nous remplacerons le polyèdre P par un polyèdre Q, ayant moins de faces, moins de sommets et moins d'arêtes que n'en avait le polyèdre P. Nous pourrons de même supprimer dans P′ l'angle polyèdre S égal à S, et nous formerons un polyèdre Q′ dont toutes les faces seront égales à celles du polyèdre Q. En continuant de la sorte, nous arriverons nécessairement (puisque les polyèdres P, P′ sont supposés inégaux) à deux derniers polyèdres convexes T, T′ ayant toutes leurs faces égales, chacune à chacune, et tels, qu'aucun angle polyèdre du premier n'aura son égal dans le second. Le second cas que nous avions à examiner est ainsi réduit au premier.

Admettons donc, s'il est possible, que chacun des angles polyèdres de P soit différent de l'angle correspondant du

---

(*) Théorème de Cauchy.

polyèdre P'. Regardons celui-ci comme une transformation du polyèdre P ; et, dans cette hypothèse, mettons le signe $+$ sur l'arête de chaque dièdre qui a augmenté, et le signe $-$ sur l'arête de chaque dièdre qui a diminué. D'après le Lemme II, le nombre N des changements de signes obtenus en faisant le tour de chacun des angles polyèdres de P, et le nombre S des sommets de P, vérifient la relation

$$N \geqq 4S.$$

Observons maintenant que deux arêtes consécutives d'un angle polyèdre appartenant toujours à une même face de P, et n'appartenant qu'à cette face, donc le nombre N doit être égal au nombre total des variations de signes trouvées en faisant le tour de chacune des faces du polyèdre P.

Or, pour chaque face triangulaire, le nombre des variations de signes est, au plus, égal à 2.

Pour chaque face quadrangulaire, le nombre des variations de signes est, au plus, égal à 4.

En général, si le nombre des côtés d'une face est pair et égal à $2n$, le nombre des variations de signes rencontrées en faisant le tour de cette face sera, au plus, $2n$; et, si le nombre des côtés d'une face est impair et égal à $2n+1$, le nombre des variations de signes ne surpassera pas $2n$.

En conservant les notations précédentes, nous avons donc

$$N \leqq 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \ldots$$

D'ailleurs (539),

$$2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots = 4S - 8.$$

Conséquemment,

$$N \leqq 4S - 8.$$

Ainsi, le nombre N, au moins égal à 4S, ne surpasserait pas $4S - 8$; ce qui est absurde. Donc il n'est pas possible que les polyèdres convexes P, P', qui ont les faces égales, chacune à chacune, n'aient pas en même temps les angles polyèdres égaux, chacun à chacun. Donc ces polyèdres sont égaux.

MESURE DES POLYÈDRES.

Théorème XIX.

539. *Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Plaçons le plus petit parallélipipède dans le plus grand, de manière que ABCD *(fig. 231)* soit la base commune. Je dis que

$$\frac{\mathrm{ACE}}{\mathrm{ACE'}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AE'}}.$$

1° Supposons les hauteurs AE, AE′ commensurables, etc. *(Voyez n° 246.)*

540. *Corollaire. — Deux parallélipipèdes rectangles, qui ont deux dimensions communes, sont entre eux comme leurs troisièmes dimensions.*

On appelle *dimensions* d'un parallélipipède rectangle les longueurs des arêtes qui aboutissent à un même sommet; d'ailleurs, on peut prendre, pour base de ce polyèdre, une quelconque de ses faces (526); donc, etc.

Théorème XX.

541. *Le rapport de deux parallélipipèdes rectangles est égal au produit des rapports de leurs trois dimensions.*

Soient a, b, c les dimensions d'un parallélipipède rectangle P; soient a', b', c' les dimensions d'un autre parallélipipède rectangle P′; je dis que

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P'}}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'}.$$

Prenons deux parallélipipèdes rectangles auxiliaires, P″, P''', dont les dimensions soient a, b, c' pour l'un, et a, b', c' pour l'autre.

P, P'', ayant deux dimensions communes, peuvent être regardés comme ayant même base ; donc

$$\frac{P}{P''} = \frac{c}{c'}.$$

De même,

$$\frac{P''}{P'''} = \frac{b}{b'}.$$

Enfin,

$$\frac{P'''}{P'} = \frac{a}{a'}.$$

Le produit des rapports intermédiaires égale le rapport de P à P' (248) ; c'est-à-dire que

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{c}{c'}$$

542. *Remarque.* — Les considérations employées dans le n° 249 permettent d'énoncer ainsi le théorème précédent :

1° *Deux parallélipipèdes rectangles sont entre eux comme les produits de leurs trois dimensions ;*

2° *Deux parallélipipèdes sont entre eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs.*

De plus, si l'on prend pour unité le cube qui a pour arête l'unité de longueur, le rapport d'un parallélipipède rectangle à ce cube, ou le *volume* du parallélipipède, est donné par la proposition suivante :

543. *Corollaire. — Tout parallélipipède rectangle a pour mesure le produit de ses trois dimensions, ou le produit de sa base par sa hauteur.*

Théorème XXI.

544. *Deux parallélipipèdes de même base et de même hauteur sont équivalents.*

Si l'on fait coïncider les bases inférieures des parallépipèdes, leurs bases supérieures seront dans un même plan. Cela posé, il peut se présenter deux cas : ou ces dernières bases seront comprises entre les deux mêmes parallèles EF',HG' *(fig.* 232), ou le contraire arrivera.

1re *cas.* — Si, du prisme EABF'HDCG', on retranche successivement chacun des prismes triangulaires EAE'HDH', FBFGCG', on obtient les parallélipipèdes AG',BH. Il est visible que les prismes triangulaires sont égaux, comme ayant un angle trièdre formé de trois faces égales, chacune à chacune (522). Donc, d'après la définition (241), les parallélipipèdes AG',BH sont équivalents.

2^{e} *cas.* — Soient *(fig.* 233*)* EFGH, E'F'G'H' les bases supérieures des parallélipipèdes. Prolongeons HG, EF : nous formerons un parallélogramme E'H'F'G' égal à chacun des deux premiers. Concevons que ce parallélogramme soit la face supérieure d'un parallélipipède auxiliaire ayant, pour base inférieure, la face commune aux parallépipèdes donnés. D'après le premier cas, le nouveau parallélipipède est équivalent aux deux premiers ; donc ceux-ci sont équivalents entre eux.

Théorème XXII.

545. *Tout parallélipipède a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Soit un parallélipipède P, ayant pour hauteur a, et pour base un parallélogramme de base b et de hauteur c. D'après le théorème précédent, P équivaut à un parallélipipède *droit* P', de même base et de même hauteur. Mais ce parallélipipède auxiliaire P' peut être considéré comme ayant pour hauteur c, et pour base un *rectangle* de base a et de hauteur b. En vertu du même théorème, P' est donc équivalent à un parallélipède *rectangle* P'', ayant pour arêtes a, b, c. D'ailleurs P'' a pour mesure abc ou $bc.\,a$ (543) ; donc P, qui équivaut à P'', a la même mesure.

546. *Corollaire. — Si, de l'un des sommets d'un paralléli-*

pipède, on abaisse des perpendiculaires sur les trois faces non adjacentes à ce sommet, le produit de chaque perpendiculaire par la face correspondante est constant;

Ou, sous une forme plus concise :

Dans tout parallélipipède, le produit d'une face par la hauteur correspondante est constant.

Théorème XXIII.

547. *Tout prisme triangulaire est la moitié du parallélipipède de base double et de même hauteur.*

ABCEFG *(fig.* 234*)* étant un prisme triangulaire quelconque, achevons le parallélipipède qui aurait, pour deux de ses faces, les parallélogrammes AF, CF : ce parallélipipède a même hauteur que le prisme, et sa base ABCD est double de la base ABC du prisme (256). Le théorème sera démontré si l'on fait voir que les prismes triangulaires ABCEFG, ADCEHG, dans lesquels se décompose le parallélipipède, sont équivalents.

Pour cela, menons arbitrairement un plan E'F'G'H', perpendiculaire à FB, et qui laisse, d'un même côté, la face EFGH. Prenons F'B' = FB; puis, par le point B', menons un second plan A'B'C'D' perpendiculaire à FB. Nous obtiendrons ainsi, en prolongeant les faces du parallélipipède *oblique* donné, un parallélipipède *droit* A'B'C'D'E'F'G'H'. Ces parallélipipèdes sont équivalents. En effet, si nous transportons le parallélipipède *tronqué* E'F'G'H'EFGH sur A'B'C'D'ABCD, de manière que la face E'F'G'H' coïncide avec son égale A'B'C'D' (519), l'arête E'F, perpendiculaire à E'F'G'H', prendra la direction de A'A. De plus, E'A' = EA, donc EF = A'A; ainsi les sommets E,A coïncident. On démontrerait, de la même manière, que les sommets F,G,H coïncident avec B,C,D. Donc les deux parallélipipèdes, qui se composent du même polyèdre ABCDE'F'G'H', augmenté de deux parties égales, sont équivalents (241).

Cela posé, le plan EAGC, qui décompose en deux prismes triangulaires *obliques* le parallipipède donné, décompose aussi le second parallélipède en deux prismes trianglulaires *droits*. D'après la démonstration précédente, les prismes obliques équivalent, respectivement, aux prismes droits. Or, ceux-ci sont égaux entre eux, comme ayant même base et même hauteur ; donc les prismes obliques sont équivalents entre eux.

548. 1er *Corollaire.— Tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

549. 2e *Corollaire.— Tout prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa section droite par son arête latérale.*

La *section droite* d'un prisme est celle qui est déterminée par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales : dans le prisme ABCEFG (*fig.* 234), E'F'G' est une section droite.

On vient de voir que les prismes ABCEFG, A'B'C'E'F'G' sont équivalents. Celui-ci a pour mesure $E'F'G' \times B'F'$; donc

$$Vol.\ ABCEFG = E'F'G' \times BF.$$

Théorème XXIV.

550. *Un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

Au moyen de plans *diagonaux*, passant par une même arête latérale, on peut décomposer la figure en prismes triangulaires, ayant pour bases les triangles qui composent l'une des bases du prisme donné. Chaque prisme triangulaire a pour mesure le produit de sa base par la hauteur commune ; donc le prisme total a pour mesure la somme des bases triangulaires multipliée par la hauteur.

Théorème XXV.

551. *Un prisme quelconque a pour mesure le produit de sa section droite par son arête latérale.*

Ce théorème résulte du 2e Corollaire (549), comme le théorème précédent résultait du 1er Corollaire (548).

552. *Corollaire des deux derniers théorèmes.* — *La base d'un prisme est à la section droite, comme l'arête latérale est à la hauteur.*

553. *Remarque.* — Le plan de la section droite d'un prisme étant perpendiculaire aux arêtes latérales, il s'ensuit que cette section peut être regardée comme la *projection* de chacune des bases du prisme, sur un certain plan. D'après le 2e Corollaire, la section droite est plus petite que la base, excepté quand le prisme est droit ; donc *une figure plane ne peut être plus petite que sa projection sur un plan.*

554. Avant de passer aux autres polyèdres, nous allons examiner comment on doit définir le *volume* d'un tétraèdre, et par suite le volume d'un polyèdre quelconque.

Soit un tétraèdre SABC (*fig.* 237), ayant pour hauteur H. Divisons cette hauteur, ou l'arête AS, en un certain nombre n de parties égales ; et, par les points de division, menons des plans A'B'C', A''B''C'',..., parallèles à ABC. Par les droites B'C', B''C'',... faisons passer des plans parallèles à AS, et achevons les prismes triangulaires A$b'c'$A'B'C', A'$b''c''$A''B''C'',..., *intérieurs* au tétraèdre.

Au moyen des propositions précédentes, nous pourrons déterminer le volume v du polyèdre A$b'c'$B'C'$b''c''$... formé par la somme de ces prismes.

Si nous divisions la hauteur H en n' parties égales, n' étant plus grand que n, nous obtiendrons, en répétant la même construction, un volume v' plus grand que v ; et ainsi de suite. Les volumes v, v', v'',..., des sommes successives de prismes, vont en augmentant indéfiniment : d'ailleurs, la somme des prismes est toujours moindre que le tétraèdre ; donc ces volumes doivent tendre vers une certaine limite V, que nous appelons *volume* de SABC.

Il est évident, d'ailleurs, que les considérations des nos 322 et suivants sont applicables ici, et qu'au lieu de la décomposition qui vient d'être indiquée, on en pourrait employer beaucoup d'autres.

555. Relativement à un polyèdre quelconque, il suffit d'observer qu'une telle figure étant décomposable en té-

traèdres (528), son volume est la somme des volumes des tétraèdres composants.

556. Nous avons défini, au n° 240, l'équivalence des figures. Nous compléterons cette définition, en nommant *polyèdres équivalents, ceux qui ont des volumes égaux.*

THÉORÈME XXVI.

557. *Deux tétraèdres de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalents.*

Plaçons les tétraèdres de manière que leurs bases soient dans un même plan : leurs sommets S, T *(fig.* 238*)* seront alors dans un même plan, parallèle au premier. Soit MN la distance comprise entre ces plans, ou la hauteur commune des tétraèdres. Divisons cette hauteur en un certain nombre de parties égales; par les points de division, menons des plans parallèles aux bases : ils couperont les tétraèdres suivant des triangles équivalents deux à deux.

En effet, l'on a, par exemple (516),

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \left(\frac{MN'}{MN}\right)^2, \quad \frac{D'E'F'}{DEF} = \left(\frac{MN'}{MN}\right)^2;$$

d'où

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{D'E'F'}{DEF}.$$

Mais

$$ABC = DEF;$$

donc

$$A'B'C' = D'E'F'.$$

Actuellement, sur les triangles A'B'C', A''B''C'',... pris pour bases, construisons, comme il a été dit ci-dessus, des prismes intérieurs au tétraèdre S. De même, sur les triangles D'E'F'D''E''F'',..., pris pour bases, construisons des prismes intérieurs au tétraèdre T. Chaque prisme de S est équivalent au prisme qui y correspond dans T; car ces deux prismes ont des bases équivalentes et des hauteurs égales.

Par suite, les deux sommes de prismes ont même volume; donc, d'après les définitions adoptées (554, 556), les tétraèdres S, T ont des volumes égaux; c'est-à-dire qu'ils sont équivalents.

Théorème XXVII.

558. *Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.*

1° Soit d'abord un prisme triangulaire ABCDEF *(fig. 239)*. Menons un plan par le sommet E et par l'arête AC. Nous formons ainsi un tétraèdre EABC ayant même base et même hauteur que le prisme, et il nous reste une pyramide ayant pour base ACDF, et pour sommet le point E.

Menons un plan suivant AE, EF : il décompose la pyramide quadrangulaire en deux tétraèdres EADF, EACF ayant même sommet E, et dont les bases sont les triangles égaux ADF, ACF, situés dans un même plan; donc ces tétraèdres sont équivalents.

De plus, les tétraèdres ADEF, EABC ont même base et même hauteur que le prisme; donc ils sont équivalents.

Il suit de là que les trois tétraèdres qui composent le prisme sont équivalents entre eux; ou que chacun d'eux est le tiers du prisme.

2° Si l'on considère un prisme quelconque, et la pyramide qui a même base et même hauteur que le prisme, on pourra décomposer ces deux corps, l'un en prismes triangulaires, l'autre en tétraèdres, ayant, chacun à chacun, même base et même hauteur; donc, etc.

559. *Corollaire. — Toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

560. *Remarque.* — Le calcul indiqué au n° 502 conduit facilement à l'expression du volume d'une pyramide quelconque.

Soient B, H la base et la hauteur de cette pyramide. Divisons H en n parties égales, puis, ainsi qu'il a été dit plus haut (557), construisons $n-1$ prismes intérieurs. La base d'un quelconque d'entre eux sera, d'après le nº 516, $B\left(\frac{k}{n}\right)^2$, k représentant le rang du prisme, compté à partir du sommet. Le volume de ce même prisme égale $BH\frac{k^2}{n^3}$. Donc, la somme des prismes a pour mesure

$$\frac{BH}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2].$$

La quantité entre parenthèses égale (*)

$$\tfrac{1}{6}(n-1)\,n\,(2n-1):$$

conséquemment, l'expression précédente devient

$$\tfrac{1}{6}BH\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}=\tfrac{1}{6}BH\frac{n-1}{n}\,\frac{2n-1}{n}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, le facteur $\frac{n-1}{n}$ tend vers l'unité, et le facteur $\frac{2n-1}{n}=2-\frac{1}{n}$ tend vers 2. Donc, le volume de la pyramide est

$$V=\frac{BH}{3}.$$

Théorème XXVIII.

561. *Tout prisme triangulaire tronqué est équivalent à la somme de trois tétraèdres ayant pour base commune l'une des bases du tronc, et pour sommets ceux de la base opposée.*

On appelle *tronc de prisme* le corps que l'on détermine en coupant un prisme par un plan non parallèle à sa base.

(*) *Manuel des Candidats à l'Ecole Polytechnique*, tome I, p. 83.

Soit le prisme triangulaire tronqué ABCDEF *(fig. 240)*. Menons, par le sommet E, et par l'arête AC, un plan AEC: nous formerons un premier tétraèdre ABCE, ayant pour base ABC et pour sommet le point E.

La pyramide quadrangulaire ACDFE est décomposable en deux tétraèdres ADFE, ACFE. Or, la droite BE est parallèle au plan ADFC; donc ADFE, ACFE équivalent, respectivement, aux tétraèdres ADFB, ACFB.

ACFB peut être considéré comme ayant pour base ABC et pour sommet le point F.

Enfin, le tétraèdre ADFB est équivalent à ABCD, attendu que l'arête FC est parallèle au plan DABE.

Ainsi, le prisme tronqué est équivalent à la somme des tétraèdres ABCE, ABCF, ABCD.

562. 1er *Corollaire. — Tout prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit d'une de ses bases par le tiers de la somme des perpendiculaires abaissées, sur cette base, de chacun des sommets de la base opposée.*

563. 2^{e} *Corollaire. — Tout prisme triangulaire tronqué a pour mesure le produit de la section droite par le tiers de la somme des arêtes latérales.*

THÉORÈME XXIX.

564. *Un tronc de pyramide, à bases parallèles, est équivalent à la somme d trois pyramides ayant même hauteur que le tronc, et ayant pour bases respectives la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases.*

1° Supposons d'abord la pyramide triangulaire S *(fig. 241)*, coupée par un plan parallèle à la base ABC, lequel détermine le tronc ABCDEF.

Menons, par les droites AE, EC, le plan AEC, qui détache du tronc le tétraèdre ABCE. Coupons ensuite la pyramide quadrangulaire ACDFE par le plan DEC; nous la décomposerons en deux tétraèdres DEFC, DACE. Le premier satisfait évidemment à l'énoncé.

Quant au tétraèdre DACE; en menant par le point E une parallèle EG à DA, nous le transformons en un tétraèdre équivalent DACG, lequel peut être considéré comme ayant pour base AGC et pour sommet le point D. Il reste donc à faire voir que le triangle AGC est moyen proportionnel entre ABC et DEF.

Or, les triangles AGC, ABC, qui ont un angle égal adjacent à un côté égal, sont entre eux comme les deux autres côtés; savoir,

$$\frac{ABC}{AGC}=\frac{AB}{AG}.$$

De même, les triangles AGC, DEF ont un angle égal et un côté égal (458); donc

$$\frac{AGC}{DEF}=\frac{AC}{DF}.$$

Mais, les triangles ABC, DEF étant semblables,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF};$$

donc, à cause de AG = DE,

$$\frac{ABC}{AGC}=\frac{AGC}{DEF};$$

etc.

2° Soit actuellement un tronc ABCDA'B'C'D' *(fig. 242)*, déterminé, dans une pyramide quelconque S, par un plan parallèle à la base. Prenons, sur le plan de cette base, un triangle EFG équivalent à celle-ci, et construisons le tétraèdre T, de même hauteur que S : le tétraèdre et la pyramide sont équivalents; de plus le plan A'B'C'D', prolongé, coupe le tétraèdre S suivant un triangle E'F'G' équivalent à A'B'C'D' (557). Conséquemment, les pyramides SA'B'C'D, TE'F'G' sont équivalentes, et les deux troncs sont équivalents. Donc, le théorème démontré pour le tronc de tétraèdre subsiste pour le tronc de pyramide.

565. *Scolie.* — Soient B, *b* les aires des bases, et H le

nombre qui représente la hauteur du tronc : l'expression du volume est

$$V = \frac{1}{3}H\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

* 566. *Remarque.*— On peut trouver cette formule comme il suit :

Soient H', h' les hauteurs des deux pyramides dont la différence constitue le tronc; nous aurons

$$V = \frac{1}{3}(BH' - bh').$$

Mais

$$\frac{B}{b} = \frac{H'^2}{h'^2};$$

ce qui exige que

$$B = \alpha H'^2,\ b = \alpha h'^2,$$

α étant un certain nombre.

On déduit de là

$$V = \frac{1}{3}a\,(H'^3 - h'^3).$$

La quantité entre parenthèses se décompose en

$$(H' - h')\,(H'^2 + H'h' + h'^2);$$

donc

$$V = \frac{1}{3}(H' - h')\,(\alpha H'^2 + \alpha H'h' + \alpha h'^2),$$

ou

$$V = \frac{1}{3}H\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

* Théorème XXX (*).

567. *Tout plan* GFHE, *mené par les milieux* E, F *de deux arêtes opposées* AB, CD *d'un tétraèdre* ABCD (fig. 243), *partage ce corps en deux segments* EGFHAC, EGFHBD, *équivalents.*

(*) Théorème de Bobillier.

Le premier polyèdre EGFHAC se compose d'une pyramide quadrangulaire EGFHC et d'un tétraèdre AECH. De même, EGHFBD se compose d'une pyramide quadrangulaire EGFHD et d'un tétraèdre EBGD.

Les pyramides quadrangulaires ont même base EGFH. De plus, à cause de $FC = FD$, leurs sommets C, D sont également distants de cette base ; donc elles sont équivalentes.

Il reste à comparer AECH, EBGD. Si nous prenons pour bases de ces tétraèdres les triangles AEC, EBG, nous aurons

$$\frac{AECH}{EBGD} = \frac{AEC}{EBG} \times \frac{AH}{AD}.$$

Les triangles AEC, EBG ont leurs bases AE, EB en ligne droite; leurs hauteurs sont donc proportionnelles à BC et BG; ainsi, à cause de $AE = EB$,

$$\frac{AEC}{EBG} = \frac{BC}{BG};$$

d'où

$$\frac{AECH}{EBGD} = \frac{BC}{BG} \times \frac{AH}{AD}.$$

Actuellement, la figure ABCD est un quadrilatère gauche, dans lequel les côtés opposés AB, CD sont coupés proportionnellement. Donc le plan EGFH partage proportionnellement les deux autres côtés BC, AD (483). Ainsi

$$\frac{BG}{GC} = \frac{AH}{HD},$$

ou

$$\frac{BC}{BG} = \frac{AD}{AH};$$

etc.

* Théorème XXXI.

568. *Le volume d'un polyèdre qui a pour bases deux polygones quelconques* ABC, A'B'C'... *(fig.* 203), *situés dans des plans parallèles, et une série de triangles* ABA', A'BB',...., *est donné par la formule*

$$V = \frac{1}{6}(B + B' + 4B'')\,H\,;$$

H *désignant la distance des deux plans, et* B, B', B'', *les aires des bases et d'une section menée à égales distances des bases.*

Au moyen de plans menés par les arêtes, perpendiculairement aux plans des deux bases, on décompose le polyèdre en un prisme droit, projeté en A'B'C'..., en une série de prismes triangulaires tronqués, projetés en ABA', BCB', CDB'..., et en une autre série de prismes triangulaires tronqués, projetés en A'B'B, B'C'D, C'D'E... (*). Par conséquent, si S, S' représentent la somme des projections ABA', BCB'..., et la somme des projections A'B'B, B'C'D, C'D'E...; le volume cherché aura pour expression

$$V = B'H + \frac{1}{3}(S + 2S')\,H.$$

Pour simplifier cette formule, imaginons la section A''B''C''... menée à égales distances des bases. Nous aurons, B'' étant l'aire de cette section,

$$B - B'' = \frac{3}{4}S + \frac{1}{4}S', \quad B'' - B' = \frac{3}{4}S' + \frac{1}{4}S\,;$$

d'où

$$S + 2S' = \frac{1}{2}(B - 5B' + 4B''),$$

et enfin

$$V = \frac{1}{6}\,(B + B' + 4B'')\,H\ (^{**}).$$

(*) Les prismes de la première série sont, véritablement, des *pyramides triangulaires*, et les autres, des *pyramides quadrangulaires*.

(**) Cette formule a été donnée par M. *Sarrus*.

SIMILITUDE DES POLYÈDRES.

569. Afin de suivre, dans la Géométrie de l'espace, la même marche que dans la Géométrie plane (203), nous ferons d'abord observer qu'étant donné un tétraèdre, on en peut toujours construire un autre dont les arêtes aient, avec celles du premier, un rapport donné m.

Soit en effet un tétraèdre SABC (*fig.* 244), dont les arêtes sont a, b, c, α, β, γ.

Prenons, à partir du sommet S, les longueurs $SA' = m\alpha$, $SB' = m\beta$, $SC' = m\gamma$, et coupons l'angle trièdre S par le plan $A'B'C'$. Les triangles SAB, $SA'B'$ sont semblables ; donc $A'B' = mc$. De même, $B'C' = ma$, $A'C' = mb$. Ainsi, les arêtes du tétraèdre $SA'B'C'$ sont ma, mb, mc, $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$.

570. Deux tétraèdres sont dits *semblables*, lorsque les arêtes du premier sont proportionnelles aux arêtes du second, et qu'elles sont semblablement disposées.

Deux polyèdres sont dits semblables, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun, et semblablement disposés.

571. De ces deux définitions, on conclut que :

1° *Deux tétraèdres semblables ont les faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées, les angles dièdres égaux, et les angles trièdres égaux.*

2° *Deux tétraèdres semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

3° *Deux polyèdres semblables à un troisième sont semblables entre eux.*

Enfin, la première définition conduit aussi au théorème suivant :

Théorème XXXII.

572. *Tout plan, parallèle à la base d'un tétraèdre, détermine un second tétraèdre semblable au premier* (*Voyez n°* 207).

573. 1er *Corollaire. — Tout plan, parallèle à la base d'une*

pyramide, détermine une seconde pyramide semblable à la première.

574. 2e *Corollaire.* — *Les arêtes homologues de deux pyramides semblables sont également inclinées sur les faces homologues.*

575. 3e *Corollaire.* — *Les hauteurs de deux pyramides semblables sont proportionnelles aux arêtes homologues.*

Théorème XXXIII.

576. *Deux tétraèdres sont semblables, lorqu'ils ont un angle dièdre égal, compris entre deux faces semblables chacune à chacune, et semblablement disposées.*

Soient les angles dièdres SA, S'A' égaux (*fig.* 245), la face ASB semblable à A'S'B', et la face ASC semblable à A'S'C'. Je dis que les tétraèdres S, S' sont semblables.

Prenons SA'' = S'A', SB'' = S'B', SC'' = S'C' : le tétraèdre SA''B''C'' est égal à S'A'B'C' (511).

A cause de cette égalité, et d'après l'hypothèse, nous avons

$$\frac{SA}{SA''} = \frac{SB}{SB''} = \frac{SC}{SC''}.$$

Par suite, les côtés du triangle A''B''C'' sont respectivement parallèles à ceux du triangle ABC, et le plan A''B''C'' est parallèle à ABC ; donc (569) les tétraèdres SA''B''C'', SABC sont semblables.

Théorème XXXIV.

577. *Deux tétraèdres sont semblables, lorsqu'ils ont une face semblable, adjacente à trois angles dièdres égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce théorème et celui-ci :

Théorème XXXV.

578. *Deux tétraèdres sont semblables, lorsqu'ils ont cinq angles dièdres, égaux chacun à chacun et semblablement disposés.*

Théorème XXXVI.

579. *Deux polyèdres semblables ont les faces homologues semblables, les angles dièdres et les angles polyèdres égaux, chacun à chacun.*

1° Considérons d'abord un polyèdre convexe P. Décomposons-le en tétraèdres ayant pour sommet commun un point O, intérieur à P. Prenons ensuite arbitrairement un point O′, et construisons, avec ce point comme sommet, une série de tétraèdres semblables à ceux qui composent le polyèdre P, et disposés de la même manière. Nous obtiendrons un polyèdre P′, *semblable* à P. Nous appellerons *sommets homologues*, dans ces polyèdres, ceux qui sont homologues dans deux tétraèdres correspondants ; *arêtes homologues*, celles dont les extrémités sont homologues, etc.

En premier lieu, les surfaces de nos deux polyèdres sont évidemment composées d'un même nombre de triangles, semblables chacun à chacun, et assemblés de la même manière.

Secondement, si deux ou plusieurs triangles de P sont dans un même plan, et forment une face de ce polyèdre, leurs homologues seront dans un même plan ; et les deux surfaces polyédrales seront composées d'un même nombre de faces, semblables chacune à chacune.

En effet, l'angle dièdre qui a pour arête AC *(fig.* 246) et pour faces BAC, OAC, est égal à l'angle dièdre B′A′C′O′, à cause de la similitude des tétraèdres BACO, B′A′C′O′. De même, l'angle dièdre OACD est égal à son homologue. Si donc les triangles BAC, CAD sont dans un même plan, les dièdres B′A′C′O′, O′A′C′D′ étant supplémentaires (471), leurs faces B′A′C′, C′A′D′ seront dans un même plan.

. Le même raisonnement prouve que, si les triangles BAC, DAC ne sont pas dans un même plan, l'angle dièdre BACD est égal à B'A'D'C'. Donc, dans les polyèdres P, P', les angles dièdres homologues sont égaux.

Soient enfin, dans P et P', deux angles polyèdres homologues : d'après ce qui précède, ils ont les faces égales et les angles dièdres égaux ; donc, ces angles polyèdres sont égaux.

2° Un polyèdre non convexe est toujours décomposable en un certain nombre de polyèdres convexes. Or, si deux polyèdres convexes P, Q, ayant une face commune A, sont semblables à deux polyèdres P', Q', le polyèdre formé de P et de Q est semblable à celui qui résulte de P' et de Q', si ces derniers ont en commun la face A' homologue de A, et si le rapport de similitude entre P, P' est le même qu'entre Q, Q'. Donc le théorème subsiste pour deux polyèdres non convexes.

* 580. *Lemme.—Deux tétraèdres* SABC, S'A'B'C' *étant semblables (fig. 245); si deux arêtes consécutives* SA, SB *du premier sont, respectivement, parallèles aux arêtes* S'A', S'B', *homologues des premières; deux autres arêtes homologues quelconques sont parallèles.*

Supposons, pour plus de simplicité, que les arêtes SA, S'A' soient dirigées *dans le même sens;* qu'il en soit de même pour SB, S'B'; et qu'enfin les arètes homologues SC, S'C' soient situées *de la même manière* à l'égard des faces SAB, S'A'B' (*).

Ceci admis, les plans SAB, S'A'B' sont parallèles (458). De là résulte que les faces CSA, C'S'A', des dièdres égaux SA, S'A', sont parallèles (471), et que les plans CSB, C'S'B' sont parallèles. Donc les arêtes SC, S'C' sont parallèles. De même, à cause du parallélisme des faces ASC, A'S'C', et de l'égalité des dièdres AC, A'C', les plans ABC, A'B'C' sont

(*) Sans ces restrictions, la proposition pourrait être en défaut.

parallèles ; donc les arêtes AB, BC, CA sont parallèles, respectivement, à A'B', B'C', C'A'.

* 581. *Corollaire. — Deux polyèdres étant semblables, si deux arêtes consécutives du premier sont, respectivement, parallèles aux arêtes du second, homologues des premières; deux autres arêtes homologues quelconques sont parallèles.*

* 582. On dit que deux polyèdres semblables sont *semblablement situés*, lorsque deux arêtes homologues quelconques sont *parallèles et de même sens* (*) (227).

* Théorème XXXVII.

583. *Les droites qui joignent les sommets homologues de deux polyèdres* P, P', *semblables et semblablement situés, se coupent en un même point* O (*Voyez n°* 228).

* 584. *Remarques* I. Le point O, *situé de la même manière* par rapport à P, P', est le *centre de similitude directe* de ces polyèdres.

II. Le sommet d'un angle polyèdre est le centre de similitude de toutes les pyramides que l'on obtient en coupant l'angle par des plans parallèles.

* Théorème XXXVIII.

585. *Les centres de similitude de trois polyèdres, semblables et semblablement situés, sont en ligne droite (Voyez n°* 231).

* Théorème XXXIX.

586. *Les six centres de similitude de quatre polyèdres* P, P', P'', P''', *semblables et semblablement situés, sont dans un même plan.*

(*) Nous nous occupons seulement de la *similitude directe*.

D'après le théorème précédent, les quatre polyèdres, considérés trois à trois, ont *quatre axes de similitude*, lesquels contiennent chacun *trois* des six centres de similitude. De plus, chaque centre de similitude est à la fois sur deux axes : par exemple, le centre des polyèdres P, P' est situé sur l'axe de P, P', P'', et aussi sur l'axe de P, P', P'''. Donc les quatre axes et les six centres sont dans un même plan, nommé *plan de similitude*.

COMPARAISON DES VOLUMES.

Théorème XI.

587. *Deux tétraèdres* SABC, SA' B'C' (fig. 247), *qui ont un angle trièdre égal, sont entre eux comme les produits des arêtes qui comprennent cet angle.*

Menons le plan BA'C' ; nous déterminerons un tétraèdre auxiliaire SA'BC'.

Comparant d'abord SABC, SA'BC', nous avons, puisque ces tétraèdres ont même hauteur BO,

$$\frac{SABC}{SA'BC'} = \frac{SAC}{SA'C'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SC}{SC'}.$$

Les tétraèdres SA'BC', SA'B'C', qui ont même base SA'C', sont entre eux comme leurs hauteurs BO, B'O'; donc, à cause des triangles semblables SBO, SB'O' :

$$\frac{SA'BC'}{SA'B'C'} = \frac{SB}{SB'}.$$

On déduit, de ces rapports intermédiaires,

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'};$$

etc.

Théorème XLI.

588. *Deux tétraèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.*

Si, dans le théorème précédent, on suppose les deux tétraèdres semblables, on a

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'};$$

d'où

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \left(\frac{SA}{SA'}\right)^3;$$

etc.

Théorème XLII.

589. *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des arêtes homologues.* (*Voyez n°* 279).

Théorème XLII.

590. *Les aires de deux polyèdres semblables sont proportionnelles aux carrés de deux arêtes homologues quelconques.*

Deux faces homologues sont entre elles comme les carrés de deux arêtes homologues (279) ; donc il en est de même pour les sommes des faces des polyèdres.

APPENDICE AU LIVRE SIXIÈME.

DE LA SYMÉTRIE DES FIGURES.

591. Deux points sont *symétriques* par rapport à un point fixe, nommé *centre de symétrie*, lorsque celui-ci divise en deux parties égales la droite qui joint les deux premiers.

Deux points sont symétriques par rapport à une droite fixe, lorsque cette ligne, qu'on appelle *axe de symétrie*, est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les deux points.

Enfin, deux points sont symétriques par rapport à un plan fixe, nommé *plan de symétrie*, lorsque celui-ci est perpendiculaire au milieu de la droite qui les joint.

592. Deux figures sont dites symétriques par rapport à un point, une droite ou un plan, lorsqu'un point quelconque de la première figure a son symétrique dans la seconde.

Théorème I.

593. *Deux figures, symétriques par rapport à une droite* XY (fig. 291), *sont égales.*

Soient A, B, C,... les points de la première figure, et A′, B′, C′,... les points de la seconde figure, symétriques des premiers. Menons AA′, BB′, CC′,... : d'après la définition, ces droites sont rencontrées en leurs milieux *a*, *b*, *c*,... par l'axe de symétrie XY, perpendiculaire à chacune d'elles.

Faisons tourner la première figure autour de XY : dans ce mouvement, les droites Aa, Bb, Cc,..., que l'on suppose liées invariablement, décrivent, dans le même temps, des secteurs semblables ; donc, lorsque le point A coïncide avec A', les points B, C,... coïncident avec B', C',.,. ; donc les deux figures sont égales.

594. *Remarque.*— D'après ce théorème, deux figures, symétriques par rapport à une droite, ne jouissent d'aucune propriété particulière : c'est pourquoi nous nous occuperons seulement de la symétrie relative, soit à un point, soit à un plan.

Théorème II.

595. *Si trois points sont en ligne droite, leurs symétriques, par rapport à un point ou un plan, sont en ligne droite.*

1° Soient A, B, C (*fig.* 292) trois points supposés en ligne droite, et A', B', C' leurs symétriques par rapport au centre O. Menons A'B' et B'C'.

Les triangles ABO, A'B'O sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc,

$$\textit{angle}\ \mathrm{ABO} = \textit{angle}\ \mathrm{A'B'O}.$$

De même,

$$\textit{angle}\ \mathrm{CBO} = \textit{angle}\ \mathrm{C'B'O}.$$

Mais, ABC étant une ligne droite, les points A', B', C' sont dans le plan OABC, et les angles en B sont supplémentaires ; donc les deux angles en B' le sont pareillement.

2° Soient les trois points A, B, C (*fig.* 293), situés en ligne droite, et A', B', C' leurs symétriques par rapport à un plan MN. Tous ces points sont dans un même plan perpendiculaire à MN (476), et qui coupe celui-ci suivant une droite *abc*, *projection* de ABC. Il suit de là que les figures ABC et A'B'C sont symétriques par rapport à *abc ;* donc, la première figure étant une droite, la seconde en est pareillement une.

596. 1er *Corollaire. — La figure symétrique d'une droite est une droite égale à la première.*

597. 2^e^ *Corollaire.* — *Deux droites symétriques coupent en un même point le plan de symétrie, ou elles sont parallèles à ce plan.*

598. 3^e^ *Corollaire.* — *La figure symétrique d'un triangle est un triangle égal au premier.*

599. 4^e^ *Corollaire.* — *La figure symétrique d'un angle est un angle égal au premier.*

Théorème III.

600. *Si quatre points* A, B, C, D *sont dans un même plan, leurs symétriques* A′, B′, C′, D′ *par rapport à un point* O *ou un plan* MN, *sont dans un même plan.*

1° Menons AC et A′C′ (*fig.* 294) : les angles trièdres OABC, OA′B′C′, formés par les droites CO, CA, CB et C′O, C′A′, C′B′, ont, d'après le dernier corollaire, leurs faces respectivement égales ; donc (502) l'angle dièdre OACB est égal à l'angle dièdre OA′C′B′. De même,

$$\textit{angle}\ \mathrm{OACD} = \textit{angle}\ \mathrm{OA'C'D'}.$$

Or, les dièdres suivant AC sont supplémentaires; donc les deux autres le sont aussi, et les faces A′C′B′, A′C′D′ sont dans un même plan.

2° Les angles trièdres ADC*c*, A′D′C′*c* (*fig.* 295) ont leurs faces égales, chacune à chacune. Donc, etc.

601. 1^er^ *Corollaire.* — *La figure symétrique d'un plan est un autre plan.*

602. 2^e^ *Corollaire.* — *Deux plans symétriques coupent suivant une même droite le plan de symétrie, ou ils sont parallèles à ce plan.*

603. 3^e^ *Corollaire.* — *Deux angles trièdres, symétriques par rapport à un plan ou un point, ont : 1° les faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées ; 2° les angles dièdres égaux chacun à chacun, mais inversement disposés.*

604. 4^e^ *Corollaire.* — *La figure symétrique d'un angle dièdre est un angle dièdre égal au premier.*

605. A cause de la propriété exprimée par le troisième

corollaire, on désigne d'une manière absolue, sous le nom d'*angles trièdres symétriques*, deux trièdres qui ont les faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées.

606. On démontre facilement les deux propositions suivantes :

1° *Tout angle trièdre n'a qu'un seul symétrique ;*

2° *Deux angles trièdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

Théorème IV.

607. *Deux angles polyèdres, symétriques par rapport à un point ou un plan, ont les faces symétriques égales chacune à chacune, et les angles dièdres égaux chacun à chacun.*

Ce théorème résulte des nos 599 et 604. D'ailleurs les deux angles polyèdres ne sont pas égaux ; car leurs éléments sont inversement disposés.

608. Nous nommerons *angles polyèdres symétriques* ceux qui ont les faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées, et les angles dièdres égaux chacun à chacun, mais inversement disposés. Cette définition contient d'ailleurs trois conditions superflues.

609. 1er *Corollaire. — Tout angle polyèdre n'a qu'un seul symétrique.*

610. 2e *Corollaire. — Deux angles polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

Théorème V.

611. *Deux polyèdres, symétriques par rapport à un point ou un plan, ont : 1° les arêtes symétriques égales ; 2° les angles plans symétriques égaux ; 3° les faces symétriques égales ; 4° les angles dièdres symétriques égaux. De plus, ces deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de tétraèdres symétriques chacun à chacun, mais inversement disposés.*

Les quatre premières parties de ce théorème sont démontrées dans les nos 596, 598, 599, 601, 604. Quant à la dernière partie, elle est évidente.

612. *Corollaire.* — *Les surfaces de deux polyèdres symétriques sont équivalentes.*

613. A cause du dernier théorème, nous nommerons, d'une manière absolue, *tétraèdres symétriques*, ceux qui ont trois faces égales chacune à chacune, mais inversement disposées; et *polyèdres symétriques*, deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres symétriques, chacun à chacun, mais inversement disposés. Il résulte de cette dernière définition, et du Théorème IV, que deux polyèdres symétriques ont les angles polyèdres symétriques chacun à chacun. On démontre d'ailleurs facilement les deux propositions suivantes :

1° *Tout polyèdre n'a qu'un seul symétrique* ;

2° *Deux polyèdres, symétriques d'un troisième, sont égaux entre eux.*

Théorème VI.

614. *Deux tétraèdres symétriques sont équivalents.*

Prenons pour bases des tétraèdres deux faces égales entre elles, et faisons-les coïncider : les sommets des deux tétraèdres seront alors symétriques l'un de l'autre, relativement au plan de la base commune. Les tétraèdres ayant même base et des hauteurs égales, ont même mesure.

615. *Corollaire.* — *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE SIXIÈME.

Problème I.

Quelle est l'arête d'un cube équivalent à un parallélipipède rectangle dont les dimensions seraient :

$$a = 2^{m},23,\ b = 0^{m},64,\ c = 0^{m},55\ ?$$

x étant la longueur cherchée, on doit avoir (543) $x^3 = abc$, ou

$$x^3 = 2{,}23 \,.\, 0{,}64 \,.\, 0{,}55\,;$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{2{,}23 \,.\, 0{,}64 \,.\, 0{,}55}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve :

$$\log x = \tfrac{1}{3}(\log 2{,}23 + \log 0{,}64 + \log 0{,}55).$$

$$\begin{aligned}
\log 2{,}23 &= 0{,}3483049 + \\
\log 0{,}64 &= \bar{1}{,}8061800 + \\
\log 0{,}55 &= \bar{1}{,}7403627 + \\
\hline
&\quad \bar{1}{,}8948476 \\
\tfrac{1}{3} &= \bar{1}{,}9649492 = \log x. \\
x &= 0{,}922\,464.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'arête du cube serait, à fort peu près, $0^{m},922$.

PROBLÈME II.

Trouver l'aire de la surface convexe et le volume d'une pyramide hexagonale régulière, dans laquelle le rayon R *de la base égale* 17 *millimètres, et la hauteur* H *égale* 63 *millimètres.*

Représentons par a l'apothème de la base ; par h la hauteur de chacun des triangles isocèles égaux qui forment la surface latérale de la pyramide ; par B l'aire de la base ; enfin par A et V l'aire et le volume cherchés.

La hauteur H de la pyramide, l'apothème a et la hauteur h sont les petits côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Donc

$$h = \sqrt{H^2 + a^2}.$$

Mais (339)

$$a = \tfrac{1}{2} R \sqrt{3};$$

donc

$$h = \sqrt{H^2 + \tfrac{3}{4} R^2}.$$

Par suite,

$$A = 3R \sqrt{H^2 + \tfrac{3}{4} R^2}. \qquad (1)$$

En second lieu,

$$V = \tfrac{1}{3} BH, \quad B = 3R . \tfrac{1}{2} R \sqrt{3} = \tfrac{3}{2} R^2 \sqrt{3};$$

donc

$$V = RH \; . \tfrac{1}{2} R \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Pour réduire ces deux formules en nombres, nous commencerons par calculer H^2 et $\frac{3}{4} R^2$.

$$\begin{aligned}
H^2 = 63^2 = 3\,969;\ R^2 &= 17^2 = 289; \\
\tfrac{3}{4} R^2 = \frac{867}{4} &= 216{,}75. \\
H^2 + \tfrac{3}{4} R^2 &= 4\,185{,}75. \\
\log 4185{,}73 &= 3{,}6217733 \\
\tfrac{1}{2} &= 1{,}8108866 + \\
\log 3\,R = \log 51 &= 1{,}7075702 + \\
\log A &= 3{,}5184568 \\
A &= 3\,299{,}53.
\end{aligned}$$

La surface convexe de la pyramide serait donc équivalente à 3 299,53 *millimètres carrés*, ou, environ, à 33 *centimètres carrés*.

Nous avons trouvé $\frac{3}{4} R^2 = 216{,}75$; donc

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{3}=\sqrt{\tfrac{3}{4}\mathrm{R}^2}=\sqrt{216{,}75}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log 216{,}75 & = 2{,}3359591 \\
\tfrac{1}{2} & = 1{,}1679795 + \\
\log \mathrm{R} = \log 17 & = 1{,}2304489 + \\
\log \mathrm{H} = \log 63 & = 1{,}7993406 + \\
\hline
\log \mathrm{V} & = 4{,}1977690 \\
\mathrm{V} & = 15\,767{,}7.
\end{array}$$

Ainsi le volume égale 15767,7 *millimètres cubes.*

Problème III.

On raconte que Sessa, l'inventeur du jeu des échecs, sollicita, comme récompense, 1 grain de blé pour la première case de l'échiquier, 2 pour la deuxième, 4 pour la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la soixante-quatrième case. On demande quelles seraient les dimensions d'un tétraèdre régulier creux, capable de renfermer tous ces grains de blé, sachant que l'hectolitre de blé contient, moyennement, un million cinq cent quatre-vingt-sept mille grains.

Le nombre N des grains de blé demandés par Sessa est égal à la somme des termes de la progression

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,..\ 2^{63}.$$

D'après la formule connue,

$$\mathrm{N}=2^{64}-1.$$

En faisant le calcul, on trouve

$$\mathrm{N}=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Un mètre cube équivaut à 10 hectolitres; si donc nous divisons N par 1 587 000 . 10, nous aurons, en mètres cubes, le volume V du tétraèdre, savoir :

$$\mathrm{V}=\frac{18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615}{15\ 870\ 000}.$$

Soit actuellement c l'arête d'un tétraèdre régulier ABCD (*fig.* 235).

La hauteur DE passe par le centre du triangle équilatéral ABC, et la droite AE est le rayon R du cercle circonscrit à ce triangle.

Or,

$$R = \frac{c}{\sqrt{3}};$$

donc

$$DE = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = c\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'un autre côté, l'apothème du triangle serait (341)

$$\tfrac{1}{2} R = \frac{c}{2\sqrt{3}}.$$

D'après ces diverses valeurs, le volume du tétraèdre a pour expression

$$V = 3\,c.\frac{c}{4\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{3}\sqrt{\frac{2}{3}};$$

ou, plus simplement,

$$V = \frac{1}{12} c^3 \sqrt{2}.$$

Si nous égalons les deux valeurs de V, nous trouverons, en supprimant le facteur commun 12,

$$c = \sqrt[5]{\frac{18\ 446\ldots.}{1\ 322\ 500\sqrt{2}}},$$

ou, à fort peu près,

$$c = \sqrt[5]{\frac{2^{64}}{1\ 322\ 500\sqrt{2}}}.$$

Le calcul logarithmique donne ensuite :

$$\begin{array}{rcl} \log 2 & = & 0{,}30103000 \\ 64 \log 2 & = & 19{,}2659200 + \\ \log 1322500 & = & 6{,}1213957 - \\ \frac{1}{2} \log 2 & = & \underline{0{,}1505150 +} \\ & & 12{,}9940093 \\ \frac{1}{3} = \log c & = & 4{,}3313364 \\ c & = & 21\ 445. \end{array}$$

Ainsi la pyramide triangulaire régulière, capable de renfermer tout le blé demandé par l'inventeur du jeu des échecs, aurait pour arête 21 445 mètres !

PROBLÈME IV.

L'une des arêtes d'un polyèdre égale $0^{m},37$. *A quoi est égale l'arête homologue d'un polyèdre semblable au premier, et double de celui-ci ?*

x étant cette arête, exprimée en mètres, on a (589)

$$\left(\frac{x}{0{,}37}\right)^3 = 2;$$

d'où

$$x = 6{,}37 \sqrt[3]{2}.$$

$$\begin{array}{rcl} \log 2 & = & 0{,}3010300 \\ \frac{1}{3} & = & 0{,}1003433 + \\ \log 0{,}37 & = & \underline{\overline{1}{,}5682017 +} \\ \log x & = & \overline{1}{,}6685450 \\ x & = & 0{,}466\ 17. \end{array}$$

L'arête du second polyèdre serait donc à peu près égale à $0^{m},466$.

PROBLÈME V.

On donne une suite indéfinie de cubes dont les arêtes décroissent comme les termes de la progression

$$1,\ \tfrac{2}{3},\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^2,\ \left(\tfrac{2}{3}\right)^3,\ldots$$

L'arête du plus grand égale 1^m. *A quoi serait égale l'arête d'un cube équivalent à la limite de leur somme?*

Si l'on prend le mètre pour unité, et que l'on représente par x la longueur cherchée, on a

$$x^3 = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots$$

La limite de

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{27}{19};$$

donc

$$x = \sqrt[3]{\frac{27}{19}}.$$

$$\begin{aligned}
\log\ 27 &= 1{,}4313638\ + \\
\log\ 19 &= 1{,}2787536\ - \\
\hline
&\ 0{,}1526102 \\
\tfrac{1}{3} &= 0{,}0508701 \\
x &= 1{,}1241.
\end{aligned}$$

Le cube cherché a donc pour arête

$$1^m{,}124\,1.$$

PROBLÈME VI.

On donne un tronc de pyramide à bases parallèles, dont la hauteur $H = 8^m{,}67$, *et dans lequel les côtés homologues des* *bases sont comme* 13 *et* 17. *On propose de partager ce corps en deux segments équivalents, au moyen d'un plan parallèle aux bases.*

Prolongeons les faces latérales du tronc, de manière à recomposer les pyramides dont il est la différence. Appelons h la hauteur inconnue de la plus petite des deux; alors $H + h$ sera la hauteur de la plus grande. En même temps, soient x, y les segments de H, déterminés par le plan sécant, et z le nombre proportionnel au côté de la section faite par ce plan, homologue aux côtés considérés dans les deux bases. Enfin, soient V, v, V′ les volumes respectifs de la grande pyramide, de la petite pyramide et de la pyramide *moyenne*. Nous aurons d'abord

$$V - V' = V' - v,$$

ou

$$V' = \frac{V + v}{2}.$$

D'ailleurs, les trois pyramides sont semblables; donc

$$\frac{v}{13^3} = \frac{V'}{z^3} = \frac{V}{17^3}.$$

On conclut, de cette égalité de rapports, et de l'équation précédente,

$$z^3 = \frac{13^3 + 17^3}{2};$$

d'où

$$z = \sqrt[3]{\frac{13^3 + 17^3}{2}} = \sqrt[3]{3\,555}.$$

A cause de la similitude des trois pyramides, les hauteurs sont proportionnelles aux côtés homologues des bases; ainsi

$$\frac{17}{H + h} = \frac{z}{H + h - x} = \frac{13}{h}.$$

Ces deux proportions donnent

$$\frac{17 - z}{x} = \frac{z - 13}{y},$$

ou

$$\frac{17 - \sqrt[3]{3\,555}}{x} = \frac{\sqrt[3]{3\,555} - 13}{y} = \frac{4}{\mathrm{H}}.$$

Les deux segments de la hauteur sont donc enfin

$$x = \frac{0{,}67\,(17 - \sqrt[3]{3\,555})}{4},\ y = \frac{0{,}67\,(\sqrt[3]{3\,555} - 13)}{4}.$$

$$\log 3\,555 = 3{,}550\,8396$$
$$\tfrac{1}{3} = 1{,}183\,6132$$

$$\sqrt[3]{3\,555} = 15{,}262\,0.$$

$$17 - \sqrt[3]{3\,555} = 1{,}738\,0 \quad \sqrt[3]{3\,555} - 13 = 2{,}262\,0.$$

$$\begin{array}{ll|ll}
\log 0{,}67 & = \bar{1}{,}8260748 + & \log 0{,}67 & = \bar{1}{,}8260748 + \\
\log 1{,}7380 & = 0{,}2400498 + & \log 2{,}2620 & = 0{,}3544926 + \\
\log 4 & = 0{,}6020600 - & \log 4 & = 0{,}6020600 - \\
\hline
\log x & = \bar{1}{,}4640646 & \log y & = \bar{1}{,}5785074
\end{array}$$

$$x = 0^{\mathrm{m}}{,}291\ 11, \qquad y = 0^{\mathrm{m}}{,}378\ 88.$$

EXERCICES SUR LE LIVRE VI.

1. Dans tout tétraèdre, les droites menées des sommets aux centres des moyennes distances des faces opposées, se coupent en un même point, centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre. Ce point est situé aux trois quarts de chaque droite, à partir du sommet d'où elle est menée.

2. Dans tout tétraèdre, les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées se coupent mutuellement en deux parties égales, au centre des moyennes distances des sommets du tétraèdre.

3. Dans tout tétraèdre, le plan bissecteur de chaque angle dièdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes.

4. Si l'on appelle a, b, c les côtés d'une des faces d'un tétraèdre, et a', b', c' les arêtes respectivement opposées; le volume du tétraèdre est donné par la formule

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{a^2 a'^2 A + b^2 b'^2 B + c^2 c'^2 C - D},$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned}
A &= b^2 + c^2 - a^2 + b'^2 + c'^2 - a'^2,\\
B &= c^2 + a^2 - b^2 + c'^2 + a'^2 - b'^2,\\
C &= a^2 + b^2 - c^2 + a'^2 + b'^2 - c'^2,\\
D &= a^2 b^2 c^2 - a^2 b'^2 c'^2 - b^2 c'^2 a'^2 - c^2 a'^2 b'^2.
\end{aligned}$$

5. Déterminer, en grandeur, la hauteur d'un tétraèdre dont les arêtes sont égales à des droites données.

6. Couper un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, de manière que la section soit un maximum.

7. Par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, on fait passer une infinité de plans. Quel est celui qui détermine la section la plus petite en surface ?

8. Partager en deux parties équivalentes une pyramide quadrangulaire régulière, au moyen d'un plan passant par un des côtés de la base.

9. Etant donné un parallélipipède dont toutes les faces sont des losanges égaux, déterminer le volume de ce polyèdre, en fonction des diagonales des faces.

10. Etant donné un dodécaèdre dont toutes les faces sont des losanges égaux, déterminer, en fonction de l'arête, le volume de ce corps.

11. On prend, sur les arêtes d'un cube, les *vingt-quatre* distances égales FI, FK, FL, AM.... (*fig.* 196). On mène les *vingt-quatre* plans BIG, ELG, BKE, EMD,... ; lesquels déterminent un *icotétraèdre* dont les faces sont des quadrilatères égaux. Déterminer l'aire et le volume de ce corps.

12. Couper par un plan un prisme triangulaire donné, de manière que la section soit semblable à un triangle donné.

13. Sur les côtés d'un hexagone régulier ABCDEF (*fig.* 236), on élève six plans, perpendiculaires au plan de l'hexagone. On prend les arêtes non consécutives BB', DD', FF', égales entre elles. Enfin, par chacune des droites B'D', D'F', F'B' et par un point S, situé sur l'axe de l'hexagone, on fait passer des plans SD'C'B', SB'A'F', SE'D'F'. Comment doit-on prendre le point S, pour que la somme des faces du polyèdre ainsi formé soit un minimum ? (*)

14. Partager un tronc de pyramide en segments proportionnels à des nombres donnés, par des plans parallèles aux bases.

15. Couper un cube par un plan, de manière que la section soit un hexagone régulier.

(*) Ce problème est résolu par les Abeilles, dans la construction de leurs *alvéoles*.

FIN DU LIVRE SIXIÈME.

LIVRE SEPTIÈME.

SURFACES COURBES.

PRÉLIMINAIRES.

616. Nous avons vu que le plan peut être engendré, soit par une droite glissant sur une droite donnée et restant parallèle à une droite donnée (446), soit par une droite qui est toujours perpendiculaire à une même droite en un même point (414).

Cette manière de considérer le plan comme engendré par le mouvement d'une ligne, a été étendue à toutes les surfaces ; et l'on est arrivé alors à la définition suivante :

Une surface est le lieu des positions que prend une ligne qui change de position, et même de forme, d'après une loi déterminée.

Pour éclaircir cette définition, nous prendrons quelques exemples simples.

617. Surfaces cylindriques. — Si une droite DE (*fig.* 259) se meut en s'appuyant constamment sur une ligne fixe ABC, et en restant parallèle à une droite donnée MN, le lieu de ses positions est une *surface cylindrique*.

La droite mobile, qui *engendre* la surface cylindrique, se nomme *génératrice :* ainsi, DE, D′E′, D″E″,... sont différentes positions de la génératrice. La ligne fixe ABC, qui règle le mouvement de la génératrice, est appelée *directrice*.

Si cette directrice est rectiligne, la surface cylindrique se réduit à un plan.

618. Prenons pour directrice une circonférence de cercle

ABC (*fig.* 260), et pour génératrice une perpendiculaire au plan de cette circonférence ; supposons aussi que la surface cylindrique soit terminée au plan ABC et à un plan A′B′C′ parallèle au premier : le corps terminé par ces deux plans et par la surface cylindrique est un *cylindre droit*, *à base circulaire*.

619. Surfaces coniques. — Une surface *conique* est engendrée par une droite assujettie à s'appuyer sur une ligne fixe ABC (*fig.* 261), et à passer par un point fixe O. Chacune des génératrices DO, D′O,... pouvant être prolongée indéfiniment, de part et d'autre du point O, on voit que la surface est formée de deux parties, ou *nappes*. Le *point directeur* O, où les nappes se réunissent, est appelé *centre* de la surface.

620. Choisissons, pour directrice de la surface conique, une circonférence ABC (*fig.* 262) ; plaçons le point directeur sur l'axe IS de la circonférence : le corps limité par le plan ABC et par la nappe inférieure de la surface conique, est un *cône droit*, *à base circulaire*.

Le point S est le *sommet*, et les droites SD, SD′,... sont les génératrices ou les *arêtes* du cône.

621. Surfaces de révolution. — Soient une droite fixe XY (*fig.* 263), et une ligne quelconque ABC. Menons, de différents points A, B, C,... de cette ligne, des perpendiculaires AA′, BB′, CC′,.., sur XY. Si nous faisons tourner le système AA′BB′CC′... autour de XY, chacun des points de la ligne ABC décrit une circonférence ayant son centre sur XY, et dont le plan est perpendiculaire à cette droite ; et la ligne ABC engendre une *surface de révolution*.

Les circonférences décrites par les différents points de la génératrice ABC sont appelées *parallèles* de la surface, parce que leurs plans sont parallèles entre eux.

La section MNP, faite par un plan passant suivant l'*axe de rotation* XY, est un *méridien*.

On reconnaît facilement que tous les méridiens sont égaux.

622. Supposons que le rectangle ABCD (*fig.* 264) tourne autour de son côté CD, supposé fixe. Les droites égales AD, BC engendreront des cercles égaux et parallèles. La droite

AB décrira une surface de révolution; mais, comme cette droite est toujours parallèle à XY, il s'ensuit que la surface est cylindrique, et que le corps engendré par ABCD est le cylindre droit, à base circulaire. De là, cette définition, adoptée dans les Éléments :

Le cylindre droit, à base circulaire, est le corps engendré par un rectangle tournant autour d'un de ses côtés, supposé fixe.

623. De même, si nous prenons pour génératrice l'hypoténuse CB (*fig.* 265) d'un triangle rectangle tournant autour de son côté CA, la surface de révolution deviendra la surface du cône droit, à base circulaire. Donc,

Le cône droit, à base circulaire, est le corps engendré par un triangle rectangle, tournant autour d'un des côtés de l'angle droit, supposé fixe.

624. Enfin adoptons, pour génératrice de la surface de révolution, la demi-circonférence ACB (*fig.* 266), et supposons que l'axe de rotation soit le diamètre AB. Le lieu engendré par ACB est une *surface sphérique*, et le corps terminé à cette surface s'appelle *sphère*. Il est représenté dans la *fig.* 267.

On donne aussi le nom de sphère à la surface sphérique.

Comme, dans le mouvement de la génératrice, les rayons OD, OE restent égaux entre eux, on peut adopter la définition suivante :

La sphère est une surface dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur, appelé centre.

625. Après ces notions générales, nous allons examiner les propriétés de la surface sphérique, en nous bornant, pour le cylindre et le cône, à ce qui vient d'être exposé.

SPHÈRE.

Théorème I.

626. *Toute section faite dans une sphère, par un plan, est un cercle.*

Soit ACB (*fig.* 268) la courbe suivant laquelle le plan MN coupe la surface sphérique. Abaissons, du centre de la sphère, la perpendiculaire OD sur MN, et menons les rayons AO, BO, CO dont les projections, sur le plan sécant, sont AD, BD, CD.

D'après la définition, les obliques AO, BO, CO sont égales; donc, leurs projections AD, BD, CD,... sont égales (426); donc la courbe ABC est une circonférence.

627. *Remarque.* — La projection AD du rayon AO devient égale à ce rayon, lorsque le plan MN passe par le centre. Le cercle ABC est alors le plus grand possible. C'est pour cette raison que l'on appelle *grand cercle* de la sphère la section faite par un plan passant par le centre. Cela posé, on déduit, du théorème qui précède, les corollaires suivants :

628. 1^er^ *Corollaire. — Tous les grands cercles sont égaux.* (*Voyez n°* 146).

629. 2^e^ *Corollaire. — Deux grands cercles se coupent mutuellement en deux parties égales.*

630. 3^e^ *Corollaire. — Tout grands cercle partage la sphère et sa surface, chacune en deux parties égales.* (*Voyez n°* 152).

631. 4^e^ *Corollaire. — Le centre d'un petit cercle, et celui de la sphère, sont sur un même diamètre perpendiculaire au plan du petit cercle.* (*Voyez n°* 165).

632. 5^e^ *Corollaire. — Deux petits cercles également distants du centre de la sphère sont égaux; et, de deux petits cercles, le plus éloigné du centre est le plus petit.* (*Voyez n°* 168).

633. 6^e^ *Corollaire. — Par deux points donnés sur la surface de la sphère, on peut toujours faire passer un grand cercle.*

634. 7^e^ *Corollaire. — La sphère est une surface convexe.* (*Voyez n°* 151).

635. 8^e^ *Corollaire. — Un polyèdre inscrit à la sphère* (c'est-à-dire dont tous les sommets sont situés sur la surface sphèrique), *est convexe.*

636. *Remarque.* — D'après le quatrième Corollaire, si l'on joint le centre de la sphère (*fig.* 269) et le centre D d'un petit cercle ABC, par un diamètre POP′, cette droite est l'axe (375) du petit cercle. Donc, chacune de ses extrémités P, P′, est également éloignée de tous les points de la cir-

conférence ABC. Cela étant, les points P, P′ sont appelés *pôles* de cette circonférence. Ainsi,

637. *Le pôle d'un cercle de la sphère est l'extrémité du diamètre perpendiculaire au plan de ce cercle.* Tout cercle, tracé sur la sphère, a deux pôles.

638. Si, par l'axe PP′, nous faisons passer plusieurs circonférences PAP′, PBP′, PCP′,..., tous les arcs PA, PB, PC,... seront égaux entre eux, comme sous-tendus par des cordes égales. Il suit de là que si l'on place en P l'une des pointes d'un compas, et qu'avec une ouverture égale à la corde PA, on trace une courbe sur la sphère, cette courbe est une circonférence, ayant pour pôle le point P. On voit donc que sur la sphère, comme sur un plan, on peut facilement tracer des circonférences.

639. Si l'on veut, du point P comme pôle, décrire une circonférence de grand cercle EFG, on doit prendre une ouverture de compas égale à la diagonale du carré construit sur PO comme côté ; ou, ce qui revient au même, il faut que l'arc PE, compté sur un grand cercle perpendiculaire à EFG, soit un quadrans.

640. *Remarque.* — L'arc de grand cercle PA est appelé *rayon sphérique* du cercle ABC.

Théorème II.

641. *Tout plan, perpendiculaire à l'extrémité, d'un rayon est tangent à la sphère.*

Soit le plan MN (*fig* 270) perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA; je dis que ce plan n'a que le point A de commun avec la sphère, c'est-à-dire qu'il y est *tangent* en A.

Menons, par OA, un plan quelconque; il coupe la sphère suivant une circonférence de grand cercle, et il coupe le plan suivant une droite perpendiculaire au rayon : cette droite est tangente, en A, à la circonférence; donc, etc.

642. *Réciproque.* — *Tout plan tangent est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact.*

Même démonstration. (*Voyez nos* 155, 156).

Théorème III.

643. *A tout tétraèdre, on peut circonscrire une sphère ; mais on n'en peut circonscrire qu'une.*

Soient E, F *(fig.* 271) les centres des cercles circonscrits aux faces ABC, DBC. Menons les droites EE′, FF′, respectivement perpendiculaires à ces faces. Je dis que ces perpendiculaires se coupent en un même point O, également distant des quatre sommets du tétraèdre.

En effet, les droites EE′, FF′ sont situées dans le plan EFG, perpendiculaire au milieu de BC (432) ; de plus, elles sont les axes des deux cercles ; donc, etc.

Il suit de là que la sphère qui a pour centre le point O, et pour rayon la distance OA, passe par tous les sommets du tétraèdre.

644. *Corollaire. — Quatre points, non situés dans un même plan, déterminent une sphère.*

Théorème IV.

645. *A tout tétraèdre, on peut inscrire une sphère ; mais on n'en peut inscrire qu'une.*

Les faces DAB, DBC, DCA *(fig.* 272) déterminent, avec la face ABC, trois angles dièdres ayant pour arêtes AB, BC, CA. Menons les plans bissecteurs de ces angles dièdres, et soit O le point de rencontre des trois plans. Il est visible que ce point, situé dans l'intérieur du tétraèdre, est également distant des quatre faces.

Donc une sphère, ayant pour centre le point O, et pour rayon l'une des quatre perpendiculaires égales OA′, OB′, OC′, OD′, touche les faces du tétraèdre aux points A′, B′, C′, D′.

646. *Remarque.* — A cette question générale : *trouver une sphère tangente à quatre plans donnés*, répondent, d'abord la sphère inscrite au tétraèdre formé par les quatre plans ; ensuite *sept* autres sphères, extérieures au tétraèdre. La dé-

monstration de cette proposition, et la discussion des cas qu'elle présente, ne sauraient trouver place ici. (*)

Théorème V.

647. *L'intersection de deux sphères est une circonférence qui a pour axe la ligne des centres.*

Faisons passer un plan par les centres O, O′ (*fig.* 273) des deux sphères ; et soient OA, O′A les circonférences de grands cercles qu'il détermine. Lorsque les demi-circonférences CAD, C′AD′ tournent autour de OO′, pour engendrer les surfaces sphériques, le point A décrit une circonférence commune à ces surfaces ; donc, etc.

648. On appelle *angle* de deux arcs de grands cercles, l'angle formé par les tangentes à ces arcs, menées par leur point de rencontre. Ce point est le *sommet* de l'angle, et les arcs en sont les *côtés*.

Théorème VI.

649. *L'angle de deux arcs de grands cercles a pour mesure l'arc de grand cercle compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme pôle.*

Soient les grands cercles CAC′, CBC′ (*fig.* 274), se coupant en C, C′, aux extrémités du diamètre CC′. Menons les tangentes CD, CE ; menons aussi, par le centre de la sphère, un plan perpendiculaire à CC′ ; et soit BAB′ la section faite dans la sphère par ce plan. L'angle DCE, formé par les tangentes, est égal à l'angle BOA (458) ; mais ce dernier a pour mesure l'arc AB, qui peut être décrit du point C comme pôle (639). Donc l'angle DCE a aussi pour mesure AB.

(*) On peut consulter, sur ce sujet, notre *Traité élémentaire de Géométrie descriptive*.

650. *Remarque. — L'angle dièdre formé par les plans des grands cercles* CAC′, CBC′, *a pour mesure l'angle formé par les arcs de ces grands cercles.*

* FUSEAUX, TRIANGLES ET POLYGONES SPHÉRIQUES.

651. On appelle *fuseau* la partie de la surface sphérique comprise entre deux demi-circonférences de grands cercles. Les *sommets* du fuseau sont les extrémités du diamètre commun aux deux *côtés*. L'*angle du fuseau* est celui qui est formé par les tangentes à ces côtés, menées par le sommet.

652. Un *triangle sphérique* est une partie de la surface de la sphère, terminée par trois arcs de grands cercles. De même, un *polygone sphérique* est la partie de la sphère comprise entre plusieurs arcs de grands cercles.

653. Soit un triangle sphérique ABC (*fig.* 275). Menons, du centre de la sphère, les droites OA, OB, OC. Nous formons ainsi un angle trièdre O, qui a une relation bien remarquable avec le triangle sphérique. En effet, la face AOB, par exemple, a pour mesure l'arc AB, c'est-à-dire le *côté* AB du triangle sphérique. De plus, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, l'angle dièdre dont l'arête est OA a pour mesure l'angle A du triangle sphérique. Ainsi,

A tout triangle sphérique correspond un angle trièdre, dont les faces ont pour mesures les côtés correspondants du triangle, et dont les angles dièdres ont pour mesures les angles correspondants du triangle.

De même, à tout polygone sphérique correspond un angle polyèdre.

654. Il suit de là que tout théorème sur l'angle trièdre répond à un théorème sur le triangle sphérique. De là résulte aussi que l'on peut démontrer les propriétés de l'angle trièdre au moyen de celles du triangle sphérique, et réciproquement. Nous pouvons donc, dans ce qui va suivre, nous contenter d'énoncer les théorèmes corrélatifs de ceux qui ont été démontrés dans le Livre V.

Théorème VII.

655. *Si, des sommets* A, B, C (fig. 276) *d'un triangle sphérique, pris comme pôles, on décrit des arcs de grands cercles, on forme un nouveau triangle sphérique* A'B'C', *dont les côtés sont les suppléments des angles du premier ;* et vice-versa. *(Voyez* Théorème XXXIII.)

Remarque. — O étant le centre de la sphère, les rayons OA, OB sont perpendiculaires, respectivement, aux plans OB'C', OA'C'; donc le plan AOB est perpendiculaire à l'intersection OC' des deux autres plans. Conséquemment, le point C' est le pôle de l'arc AB; et, de même, les sommets A', B' sont les pôles des arcs BC, AC.

A cause de ces relations, les triangles *supplémentaires* ABC, A'B'C' sont appelés aussi *triangles polaires.*

Théorème VIII.

656. *Dans tout triangle sphérique, un côté quelconque est : 1° plus petit que la somme des deux autres ; 2° plus grand que leur différence. (Voyez* Théorème XXXIV.)

Théorème IX.

657. *La somme des côtés d'un polygone sphérique convexe est moindre qu'une circonférence de grand cercle. (Voyez* Théorème XXXV.)

Théorème X.

658. *Dans tout triangle sphérique* : 1° *la somme des angles est comprise entre* 2 *droits et* 6 *droits;* 2° *un angle quelconque est plus grand que la somme des deux autres*, *diminuée de* 2 *droits.* (*Voyez nos* 496 et 494).

Théorème XI.

659. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et semblablement disposés. (Voyez* Théorème XXXVII.)

Théorème XII.

660. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et semblablement disposés. (Voyez* Théorème XXXVIII.)

Théorème XIII.

661. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont les côtés égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.* (*Voyez* Théorème XXXIX.)

Théorème XIV.

662. *Deux triangles sphériques sont égaux, lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.* (*Voyez* Théorème XL.)

* MESURE DES FUSEAUX, DES TRIANGLES ET DES POLYGONES SPHÉRIQUES.

Théorème XV.

663. *Dans une même sphère, ou dans des sphères égales, les fuseaux qui ont des angles égaux, sont égaux.*

Ce théorème se démontre facilement par la superposition. (*Voyez* n° 466.)

Théorème XVI.

664. *La surface d'un fuseau est à la surface de la sphère, comme l'angle du fuseau est à 4 angles droits.* (*Voyez* n° 467.)

665. *Remarque.* — Prenons, pour unité de surface, le triangle sphérique *tri-rectangle*, moitié du fuseau dont l'angle est droit. Alors la surface de la sphère sera mesurée par le nombre 8. Prenons, en même temps, pour unité d'angle, l'angle droit. Soient F le rapport d'un fuseau au triangle tri-rectangle, et A le rapport entre l'angle du fuseau et l'angle droit. La proportion énoncée dans le théorème précédent devient

$$\frac{F}{8} = \frac{A}{4};$$

d'où

$$F = 2A.$$

Ainsi :

666. *Corollaire. — Un fuseau a pour mesure le double de son angle.*

667. Soient un triangle sphérique ABC (*fig.* 277), et l'angle trièdre correspondant OABC. Si nous prolongeons les faces OAB, OBC, OCA, nous déterminons un second trièdre OA'B'C', *symétrique* du premier (603). De même, le triangle sphérique A'B'C' est symétrique de ABC. On peut vérifier que les éléments des deux triangles sont égaux chacun à chacun, mais inversement disposés. Supposons, en effet, que OA'B'C' tourne autour du point O, de manière que la face A'OC' ne sorte pas du plan fixe OAC : les arêtes OC', OA' viendront coïncider avec leurs homologues OC, OA ; mais alors les points B', B seront situés de côté et d'autre du plan fixe.

668. *Remarque. — Deux triangles sphériques, symétriques et isocèles, sont superposables.*

Si AB = BC, auquel cas A'B' = B'C', les sommets A', C' peuvent être regardés comme homologues des sommets C, A ; et alors les éléments égaux étant *disposés dans le même ordre*, les triangles sont superposables.

Théorème XVII.

669. *Deux triangles sphériques symétriques sont équivalents.*

Soit P le pôle du petit cercle qui passerait par les sommets A, B, C du premier triangle.

Menons le diamètre POP′ et les arcs de grands cercles $PA = P'A'$, $PB = P'B'$, $PC = P'C'$.

Les arcs PA, PB, PC sont égaux (638); donc les arcs P′A′, P′B′, P′C′ le sont pareillement; et, par suite, P′ est le pôle du petit cercle passant en A′, B′, C′.

Cela posé, les triangles isocèles APB, A′P′B′ ont un angle égal, compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun; donc ils sont égaux. De même, les triangles APC, BPC sont égaux, respectivement, à A′P′C′ et à B′P′C′; etc.

670. *Lemme.— Lorsque deux arcs de grands cercles* ABA′, CBC′ (fig. 278) *se coupent dans un hémisphère, la somme des triangles* ABC, A′BC′, *opposés par le sommet* B, *est équivalente au fuseau* BA′B′C′ *compris entre ces arcs.*

En effet, le triangle ABC est équivalent au triangle A′B′C′; donc

$$ABC + A'BC' = A'B'C' + A'BC' = BA'B'C'.$$

Théorème XVIII.

671. *La surface d'un triangle sphérique a pour mesure l'excès de la somme de ses trois angles sur 2 angles droits.*

ABC étant ce triangle, on a

$$ABC + ABC' = \text{fuseau } C,$$
$$ABC + A'BC = \text{fuseau } A.$$

On a en outre, par le lemme précédent,

$$ABC + A'BC' = \text{fuseau } B.$$

Ajoutant ces égalités, et observant que la somme des trian gles ABC, ABC′, A′BC, A′BC′, est égale à l'hémisphère, on trouve

$$2ABC + \tfrac{1}{2}\,\text{sphère} = \text{fuseau A} + \text{fuseau B} + \text{fuseau C}\,;$$

ou bien, en prenant pour unité de surface le triangle tri-rectangle, et pour unité d'angle l'angle droit (665, 666) :

$$2ABC + 4 = 2A + 2B + 2C\,;$$

ou enfin

$$ABC = A + B + C - 2.$$

672. *Remarque.* — Le théorème précédent permet de comparer un triangle sphérique quelconque au triangle tri-rectangle, et par suite à la sphère. Cette comparaison est possible, parce que la surface de la sphère est partout *identique* à elle-même. Le plan jouit aussi de cette propriété ; mais la sphère est une surface *finie*, *fermée*, tandis que le plan est une surface *indéfinie* et sans *limites*.

Théorème XX.

673. *La surface d'un polygone sphérique convexe a pour mesure l'excès de la somme de ses angles sur autant de fois 2 droits qu'il a de côtés moins deux.* (*Voyez n°* 136.)

674. *Scolie.* — Soient Σ la somme des angles d'un polygone sphérique, n le nombre de ses angles, P le rapport de sa surface à celle du triangle tri-rectangle ; on aura

$$P = \Sigma - 2n + 4.$$

675. *Mesure des angles polyèdres.* D'après la corrélation qui existe entre les angles polyèdres et les polygones sphériques (653), les deux derniers théorèmes permettent immédiatement de mesurer un angle polyèdre, pourvu que l'on prenne pour unité l'angle trièdre tri-rectangle. En observant qu'*un dièdre droit est décomposable en deux trièdres tri-rectangles,* on peut également comparer un angle polyèdre quelconque à l'angle dièdre droit ; mais alors le nombre qui

mesure l'angle donné est seulement la moitié de celui que l'on trouve quand l'unité est le trièdre tri-rectangle (*). Si l'on adopte la dernière unité, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème XXI.

676. *Tout angle trièdre a pour mesure l'excès de la demi-somme de ses angles dièdres sur 2 trièdres tri-rectangles.*

Théorème XXII.

677. *Tout angle polyèdre convexe a pour mesure l'excès de la demi-somme de ses angles dièdres sur autant de fois 2 trièdres tri-rectangles qu'il a de sommets moins deux.*

Théorème XXIII (**).

678. *Dans tout polyèdre convexe, l'excès de la somme des angles dièdres sur la somme des angles polyèdres est équivalent à autant de fois 4 trièdres tri-rectangles que le polyèdre a de faces moins deux.*

Soient, comme dans le Livre VI, α le nombre des angles trièdres, β le nombre des angles tétraèdres, etc. Soient ensuite P la somme des angles polyèdres et D la somme des

---

(*) Cette différence entre les unités employées explique les formes, en apparence contradictoires, sous lesquelles divers auteurs énoncent les mêmes propositions. Par exemple, le Théorème XXIII a été formulé en ces termes par M. Brianchon :

« Dans tout polyèdre convexe, le nombre d'angles droits dièdres contenus dans la somme des angles dièdres, moins la moitié du nombre d'angles droits trièdres contenus dans la somme des angles solides, est égal au nombre 2 pris autant de fois moins deux qu'il y a de faces au polyèdre. »

(**) Dû à M. Brianchon *(Journal de l'École polytechnique,* XXV[e] *cahier).*

angles dièdres. En observant que chaque dièdre appartient à deux angles polyèdres, on a, par le théorème précédent,

$$P = D - 2\alpha(3-2) - 2\beta(4-2) - 2\gamma(5-2) - \ldots$$

Mais (531) :

$$3\alpha + 4\beta + 5\gamma + \ldots = 2A,$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = S;$$

donc

$$P = D - 4(A - S);$$

ou, par le Théorème d'Euler,

$$D - P = 4(F - 2).$$

LIGNE MINIMUM SUR LA SPHÈRE.

679. Au moyen de la *méthode des limites*, nous avons défini, dans le Livre IV, la *longueur* d'une courbe plane. Nous allons étendre cette définition aux lignes qui ne sont point planes, et qu'on appelle *courbes à double courbure*.

680. Démontrons d'abord les deux propositions suivantes :

1° *Une droite* AB (*fig.* 279) *ne peut être plus petite que sa projection* A'B' *sur un plan* MN ;

2° *Une droite* AB (*fig.* 280) *est plus petite que la somme de ses projections* A'B', A"B", *sur deux plans* MN, PQ, *perpendiculaires entre eux*.

1° Si AB est parallèle à MN, AB = A'B' ; et si AB est oblique à MN, on a, en menant AC parallèle à A'B', AC < AB ; donc, etc.

2° Menons par le point A la parallèle AC à A'B' ; nous aurons

$$AB < AC + BC,$$

ou

$$AB < A'B' + BC.$$

Abaissons ensuite, du point C, la perpendiculaire CD sur le plan PQ, et menons $A''D$, $B''D$: ces deux droites sont perpendiculaires entre elles (435); donc

$$B''D < A''B'',$$

ou

$$BC < A''B''.$$

Ajoutant les deux inégalités, nous trouvons

$$AB < A'B' + A''B''.$$

681. En appliquant, à chacun des côtés d'une ligne brisée, le principe précédent, on conclut que :

Une ligne brisée est plus petite que la somme de ses projections sur deux plans perpendiculaires.

682. Soient actuellement une courbe quelconque C située dans l'espace, et C', C'' les projections de C sur deux plans perpendiculaires. Inscrivons, à la courbe C, une ligne polygonale P, et soient P', P'' les projections de P sur les mêmes plans : les polygones P', P'' seront *inscrits* aux lignes C', C''.

Si, en prenant sur C des sommets intermédiaires entre les premiers, nous remplaçons P par une autre ligne polygonale P_1, nous aurons $P_1 > P$. De même, les projections P'_1 et P''_1 de P_1 seront respectivement plus grandes, en périmètre, que P' et P''.

Si nous continuons la même opération, nous obtiendrons une suite indéfinie de polygones $P, P_1, P_2, P_3, \ldots$ inscrits à C, dont les périmètres augmenteront de plus en plus. En même temps, les périmètres des projections $P', P'_1, P'_2, P'_3, \ldots$ tendront vers une limite l', qui est la longueur de C' (368), et les périmètres $P'', P''_1, P''_2, \ldots$ tendront vers la longueur l'' de C''. Donc, comme l'on a toujours

$$\begin{array}{l} P < P' + P'' < l' + l'', \\ P_1 < P'_1 + P''_1 < l' + l'', \\ P_2 < P'_2 + P''_2 < l' + l'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

les périmètres $P, P_1, P_2, \ldots$ tendent vers une limite l, moindre que $l' + l''$: cette limite est ce que nous convenons d'appeler *longueur* de la courbe C. Ainsi :

La longueur d'une courbe, plane ou à double courbure, est la limite vers laquelle tendent les périmètres des polygones inscrits à cette courbe, lorsque les côtés de ces polygones diminuent indéfiniment, de manière à devenir moindres que toute droite donnée (*).

683. De cette définition, on déduit les conséquences suivantes :

1° *Une droite finie est plus petite que toute ligne terminée aux mêmes extrémités* (371, 1°) ;

2° *Le plus court chemin entre deux points est la droite finie qui les joint* (372) ;

3° *Le plus court chemin d'un point à un plan est la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan ;*

4° *Le plus court chemin entre deux plans parallèles est leur perpendiculaire commune ;*

5° *Le plus court chemin entre deux droites non situées dans un même plan est leur commune perpendiculaire ;*

Etc.

684. *Remarque.* — Les trois dernières propositions justifient la dénomination de *distance* que nous avons employée pour la perpendiculaire abaissée d'un point sur un plan, pour la perpendiculaire commune à deux plans, etc. Les deux premières propositions, qui n'en forment réellement qu'une, s'énoncent encore de cette manière : *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

Après ces préliminaires essentiels, revenons à la sphère.

685. *Lemme* I. — *Sur une même sphère, ou sur des sphères égales, les lignes les plus courtes, de deux points pris sur deux circonférences égales, aux pôles de ces circonférences, sont égales entre elles.*

Soient, sur les sphères O, O' (*fig.* 281), les circonférences

(*) On peut faire voir que cette limite est indépendante du mode adopté pour l'inscription des polygones (366).

égales AB, A'B', et leurs pôles P, P', ces pôles étant situés de la même manière par rapport aux circonférences.

Transportons la seconde sphère sur la première, de manière que le rayon O'P' coïncide avec le rayon OP, et qu'en même temps le plan C'P'O' coïncide avec le plan CPO. Alors les surfaces coïncideront, ainsi que les points C', C. Donc, quelle que soit la ligne PDC tracée entre P et C sur la première sphère, on pourra concevoir, sur la seconde, une ligne P'D'C' égale à PDC. Et si l'on suppose que la ligne PDC soit la plus petite de toutes celles qui joignent les points P et C ; comme les sphères coïncident, la ligne P'D'C' sera la plus petite parmi celles qui joignent P' et C'. Donc, etc.

On conclut de là que, sur la même sphère, les plus courts chemins de deux points C, E au pôle P (*fig.* 282) d'une circonférence passant par ces points, sont égaux entre eux.

681. *Lemme* II. — *Sur une même sphère, la ligne la plus courte entre une circonférence et son pôle augmente avec la distance du pôle au plan de cette circonférence.*

En effet, le plus court chemin de P en D (*fig.* 282) se compose du plus court chemin de P en E, augmenté du plus court chemin de E en D. Mais les plus courts chemins de P en C et de P en E sont égaux ; donc, etc.

THÉORÈME XXIV.

687. *Le plus court chemin sur la sphère, entre deux points* A, B (*fig.* 283), *est l'arc de grand cercle* ACB *qui les joint.*

Soit, s'il est possible, AMB le plus court chemin entre A et B. Joignons un point quelconque M de AMB aux points A, B, par des arcs de grands cercles BDM, AEM.

Dans le triangle sphérique AMB, le côté ACB est plus petit que la somme des deux autres (656). Si donc, du point B comme pôle, nous décrivons un arc MM', nous aurons

$$AM' < AEM.$$

D'après le premier lemme, le plus court chemin de B en M' égale le plus court chemin de B en M; et, d'après le second lemme, le plus court chemin de A en M' est moindre que le plus court chemin de A en M. Donc, la somme des lignes BHM', M'GA est plus petite que AMB; donc cette dernière ligne n'est pas le plus court chemin entre A et B; ce qui est contre l'hypothèse.

* POLYÈDRES RÉGULIERS.

688. On appelle *polyèdre régulier* celui dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux, et dont tous les angles polyèdres sont égaux.

Théorème XXV.

689. *On peut toujours construire, avec un côté donné, un tétraèdre régulier.*

Avec le côté donné, traçons un triangle équilatéral ABC (*fig.* 284). Par le centre O de ce triangle, élevons une perpendiculaire indéfinie, et prenons sur cette droite un point D tel, que AD = AB. Menons ensuite BD et CD.

Le tétraèdre ABCD est régulier, car toutes ses arêtes sont égales entre elles. Donc, etc.

Théorème XXVI.

690. *On peut toujours construire, avec un côté donné, un hexaèdre régulier.*

Avec le côté donné, construisons un carré ABCD (*fig.* 285). Élevons, sur les côtés, des plans perpendiculaires au plan du carré; puis coupons ceux-ci par un plan EFGH parallèle à ABCD, et qui en soit à une distance AE = AB. Nous obtiendrons ainsi un cube, c'est-à-dire un hexaèdre régulier.

Théorème XXVII.

691. *On peut toujours construire, avec un côté donné, un octaèdre régulier.*

Avec le côté donné, traçons un carré ABCD (*fig.* 286). Élevons, par le centre O, la perpendiculaire EF au plan ABCD, et prenons OE = OF = OA. Joignons enfin les points E, F aux sommets du carré. La figure ABCDEF est un octaèdre régulier.

En effet, la droite EF est l'axe du cercle circonscrit au carré ABCD ; donc EA = EB =...= AB. Ainsi, toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles équilatéraux, égaux entre eux.

De plus, les angles polyèdres sont égaux; car, si nous considérons, par exemple, les angles A, E, nous voyons qu'ils appartiennent aux pyramides régulières ABEDF, EABCD. Ces deux pyramides sont évidemment superposables, comme ayant même base et même hauteur. Donc, etc.

Théorème XXVIII.

692. *On peut toujours construire, avec un côté donné, un dodécaèdre régulier.*

Avec le côté donné, formons des pentagones réguliers, égaux entre eux. Assemblons trois de ces pentagones, de manière que leurs plans déterminent un angle trièdre ayant pour sommet le point A (*fig.* 287). Les faces de cet angle étant égales, les angles dièdres qu'elles déterminent sont égaux. Conséquemment, les angles trièdres B, A sont égaux, comme ayant un angle dièdre égal, compris entre deux faces égales chacune à chacune, et semblablement disposées. Donc, les droites BH, BC forment un angle égal à ABC.

Il résulte de là qu'après avoir assemblé, autour du point A, trois de nos pentagones réguliers, nous pourrons en apporter un quatrième dans l'angle HBC, puis un cinquième dans l'angle KCD, etc. Nous obtiendrons ainsi une surface polyédrale, ouverte suivant le contour FGHI....

Actuellement, construisons une autre surface égale à la première (*fig.* 288), et rapprochons ces deux figures, de manière que l'angle *rentrant lmn* coïncide avec l'angle *saillant* FGH. L'angle trièdre G est égal à chacun des angles trièdres A, B,..., et l'angle dièdre ayant pour faces *mnp*, GHB, et pour arête GH, est égal à l'angle dièdre ayant pour faces GHI, GHB, et pour arête GH. Donc *np* doit coïncider avec HI, puis *pq* avec IK ; etc.

On voit ainsi que l'ensemble des deux surfaces polyédrales détermine une figure fermée ayant pour faces douze pentagones réguliers égaux, et dont les angles polyèdres sont égaux entre eux. Cette figure est donc un dodécaèdre régulier.

Théorème XXIX.

693. *On peut toujours construire, avec un côté donné, un icosaèdre régulier.*

Avec le côté donné, construisons un pentagone régulier MNPQR (*fig.* 289). Par le centre O, élevons, au plan du pentagone, une perpendiculaire OS telle, que MS = MN.

Joignons le point S à tous les sommets du pentagone : nous obtiendrons une pyramide régulière dans laquelle les faces sont des triangles équilatéraux égaux entre eux.

Soit maintenant le triangle équilatéral ABC (*fig.* 290), dont le côté est égal à MN.

Construisons, en chacun des sommets de ce triangle, une pyramide égale à S, en prenant, pour l'une des faces de cette pyramide, le triangle ABC.

Il est facile de voir que nous déterminons ainsi une surface polyédrale, ouverte suivant DEFGHI, et dans laquelle l'angle *rentrant* DEF est égal à l'angle *saillant* EFG, attendu que chacun d'eux est égal à l'angle EAG.

Si nous concevons une seconde surface égale à la première, nous pourrons faire coïncider les bases de ces deux figures; etc.

Théorème XXX.

694. *Il n'existe que cinq espèces de polyèdres réguliers.*

Chaque angle d'un polyèdre régulier s'obtient en assemblant, autour d'un même point, plusieurs polygones réguliers égaux. Nous avons vu qu'en assemblant des triangles équilatéraux trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq, on forme le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre; qu'en assemblant des carrés trois à trois, on obtient l'hexaèdre; enfin, que des pentagones réguliers, réunis trois à trois, donnent le dodécaèdre.

Si l'on réunissait, autour d'un même point, six triangles équilatéraux, la somme des angles plans ayant ce point pour sommet commun, serait égale à 4 droits ; donc (495) ces six angles ne peuvent donner lieu à un angle polyèdre. A plus forte raison, ne produira-t-on pas un pareil angle en assemblant plus de six triangles équilatéraux.

Le même raisonnement fait voir qu'on ne peut pas former d'angle polyèdre en réunissant plus de trois carrés, ou plus de trois pentagones réguliers, ou un nombre quelconque de polygones réguliers dans lesquels le nombre des côtés surpasserait cinq.

Donc, etc.

Théorème XXXI.

695. *Tout polyèdre régulier est,* 1° *inscriptible à une sphère ;* 2° *circonscriptible à une sphère.*

1° Considérons deux faces adjacentes A, B, et l'arête qui leur est commune. Menons, par les centres de ces faces, des perpendiculaires sur leurs plans respectifs, et des perpendiculaires à l'arête. Les deux dernières se coupent au milieu de cette droite ; donc les perpendiculaires aux deux faces sont situées dans un même plan, perpendiculaire au milieu de l'arête commune ; donc elles se rencontrent en un point O, également éloigné de tous les sommets des faces A, B ; et elles forment, avec les deux autres perpendiculaires, un quadrilatère ayant deux angles droits.

Soit actuellement une troisième face C, adjacente à l'une des deux premières ; si l'on répète, sur celle-ci et sur la face C, la construction précédente, on obtiendra un point O′ coïncidant avec O, attendu que les deux quadrilatères sont égaux.

De là résulte que le point O est également distant des sommets de A, B, C. En continuant, on verra qu'il est également distant de tous les sommets; donc ce point est le centre d'une sphère circonscrite au polyèdre régulier.

2° D'après ce qui vient d'être dit, le point O est également distant de deux faces adjacentes quelconques, et, par suite, également distant de toutes les faces. Donc ce point est le centre d'une sphère inscrite au polyèdre.

696. Le point O, centre commun de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite, est appelé *centre* du polyèdre. Le rayon de la sphère inscrite est *l'apothème* du polyèdre.

697. *Remarques.* — I. *La sphère inscrite à un polyèdre régulier touche chaque face, chacune en son centre.* (*Voyez* n° 333.)

II. *Deux polyèdres réguliers, d'un même nombre de faces, sont semblables.* (*Voyez* n° 332.)

III. *Les aires de deux polyèdres réguliers, d'un même nombre de faces, sont comme les carrés des rayons des sphères circonscrites, ou comme les carrés des apothèmes. Les volumes de ces polyèdres sont comme les cubes des mêmes droites.* (*Voyez* n° 335.)

698. Désignons, comme dans le Livre VI, par F, S, A les nombres de faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre régulier. Nous aurons les valeurs suivantes :

Tétraèdre :	$F = 4$,	$S = 4$,	$A = 6$;
Hexaèdre :	$F = 6$,	$S = 8$,	$A = 12$;
Octaèdre :	$F = 8$,	$S = 6$,	$A = 12$;
Dodécaèdre :	$F = 12$,	$S = 20$,	$A = 30$;
Icosaèdre :	$F = 20$,	$S = 12$,	$A = 30$.

On voit, à l'inspection de ce tableau, que l'on passe de l'hexaèdre à l'octaèdre, en remplaçant le nombre des faces par le nombre des sommets, *et vice versa*. Ces deux polyèdres sont donc, en quelque sorte, *conjugués*. Il en est de même du dodécaèdre et de l'icosaèdre. Quant au tétraèdre, comme ce corps a autant de faces que de sommets, il est conjugué à lui-même.

Cette considération des *polyèdres réguliers conjugués* paraît justifiée par la proposition suivante, que nous nous contenterons d'énoncer.

Théorème XXXII.

699. 1° *Les centres des faces d'un polyèdre régulier sont les sommets d'un autre polyèdre régulier, conjugué du premier;*

2° *Les sommets d'un polyèdre régulier sont les centres des faces d'un autre polyèdre régulier, conjugué du premier.*

Théorème XXXIII.

700. *Les milieux des arêtes d'un tétraèdre régulier sont les sommets d'un octaèdre régulier.*

Théorème XXXIV.

701. *A tout hexaèdre régulier on peut inscrire un tétraèdre régulier, dont les sommets et les arêtes appartiennent aux sommets de l'hexaèdre et aux diagonales de ses faces.*

A l'inspection de la figure 258, on reconnaît que les sommets B, D, G, E de l'hexaèdre sont ceux d'un tétraèdre régulier.

702. *Remarque.* — Indépendamment de ce premier tétraèdre inscrit, il y en a un autre, dont les sommets H, F, A, C sont respectivement opposés aux premiers. Ces deux tétraèdres sont placés symétriquement par rapport au centre de l'hexaèdre.

Théorème XXXV.

703. *A tout dodécaèdre régulier on peut inscrire un hexaèdre régulier, dont les sommets et les arêtes appartiennent aux sommets du dodécaèdre et aux diagonales de ses faces.*

Reportons-nous à la construction indiquée ci-dessus (Th. XXVIII), et soit AB...PQ *(fig.* 258 *bis)* l'une des deux surfaces polyédrales ouvertes dont l'ensemble constitue le dodécaèdre régulier. Menons, dans les pentagones AH, AC, AP, BI, les diagonales FH, EC, FE, HC: nous formerons ainsi un quadrilatère FHCE ayant les côtés égaux. De plus, les diagonales FH, EC, parallèles à AB, sont parallèles entre elles; et chacune d'elles est divisée en deux parties égales par le plan élevé perpendiculairement au milieu de AB; d'où l'on conclut que les angles F, H, C, E sont droits. Donc FHCE est un carré.

Menons CL, EN, LN : la figure ECLN sera un carré égal au premier. En effet, l'angle trièdre CEDL est égal, évidemment, à l'angle trièdre CHBL; donc la face ECL est égale à HCL; etc.

Si nous considérons actuellement la seconde moitié de la surface du dodécaèdre, nous pourrons répéter les mêmes constructions, en choisissant, parmi les diagonales, celles qui aboutissent aux sommets F, H, L, N. Il y aura ainsi, sur chacune des deux parties de la surface du dodécaèdre, six arêtes d'un même cube; donc, etc.

704. *Remarque.* — Chaque diagonale, telle que EC, prise arbitrairement sur une face ABCDE du dodécaèdre, détermine un hexaèdre inscrit. *Le nombre des hexaèdres réguliers inscrits à un dodécaèdre régulier donné est donc* égal au nombre des diagonales d'un pentagone, c'est-à-dire *égal à cinq*.

APPENDICE AU LIVRE SEPTIÈME. (*)

DES POLYÈDRES SEMI-RÉGULIERS.

705. On appelle *polyèdre semi-régulier*, soit *celui dont les faces sont des polygones réguliers et dont les angles polyèdres sont égaux* (ou symétriques), *soit celui dont les faces sont égales et dont les angles polyèdres sont réguliers*.

Nous supposons que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les faces de même espèce sont égales*, et que, *dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les angles polyèdres sont égaux*.

706. *Lemme : 1° Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, a les arêtes égales ;*

2° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, a les angles dièdres égaux ;*

3° *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets sont trièdres, tétraèdres ou pentaèdres ;*

4° *Dans tout polyèdre semi-régulier, du second genre, les faces sont triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales* (**).

PROBLÈME I.

707. *Quels sont les polyèdres semi-réguliers, du premier genre ?*

Si, à chacun des sommets du polyèdre, se réunissent l faces de $n^{\text{ième}}$ espèce (à n côtés), l' faces $n'^{\text{ième}}$ espèce, etc ; et que S soit le nombre total des sommets, on a les relations

(*) Cet appendice contient l'*analyse* de la dernière partie d'un *Mémoire sur la Théorie des polyèdres*, publié dans le *Journal de l'École polytechnique* (XLIe Cahier).

(**) Pour toutes les démonstrations, nous renvoyons au Mémoire cité.

$$S = \frac{4}{2\left(\frac{l}{n} + \frac{l'}{n'} + \ldots\right) + 2 - (l + l' + \ldots)} \quad (1),$$

$$3 \leqq l + l' + l'' + \ldots \leqq 5 \quad (2),$$

auxquelles on doit satisfaire par des valeurs entières et positives des inconnues S, n, n', n'',... l, l', l'',...

708. Les solutions *admissibles*, et les éléments qui en résultent, sont consignés dans le tableau suivant. Il n'y a

	l	l'	l''	n	n'	n''	f_n	f_n	$f_{n''}$	S	F	A
I	1	2		3	6		4	4		12	8	18
II	1	2		3	8		8	6		24	14	36
III	1	2		3	10		20	12		60	32	90
IV	1	2		4	6		6	8		24	14	36
V	1	2		5	6		12	20		60	32	90
VI	1	2		n	4		2	n		$2n$	$n+2$	$3n$
VII	1	3		3	4		8	18		24	26	48
VIII	1	3		n	3		2	$2n$		$2n$	$2n+2$	$4n$
IX	2	2		3	4		8	6		12	14	24
X	2	2		3	5		20	12		30	32	60
XI	1	4		4	3		6	32		24	38	60
XII	1	4		5	3		12	80		60	92	150
XIII	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	26	72
XIV	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	62	180
XV	1	1	2	3	5	4	20	12	30	60	62	120

pas de polyèdres semi-réguliers, du premier genre, autres que ceux qui correspondent à ces solutions (*).

Théorème I.

709. *Tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, est inscriptible.*

710. *Corollaire* I. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les angles dièdres, déterminés par des faces respectivement égales, sont égaux entre eux.*

711. *Corollaire* II. — *Dans tout polyèdre semi-régulier, du premier genre, les sommets adjacents à un sommet donné sont situés sur une circonférence ayant pour pôle le sommet donné.*

712. ÉNUMÉRATION DES POLYÈDRES DU PREMIER GENRE.

I. *Octaèdre à faces triangulaires et hexagonales.*
II. *Décatétraèdre à faces triangulaires et octogonales.*
III. *Triacontadoèdre à faces triangulaires et décagonales.*
IV. *Décatétraèdre à faces carrées et hexagonales.*
V. *Triacontadoèdre à faces pentagonales et hexagonales.*
VI. *Prisme régulier à faces latérales carrées.*
VII. *Icohexaèdre à faces triangulaires et carrées.*
VIII. *Polyèdre à bases égales et parallèles, et à faces latérales triangulaires.*
IX. *Décatétraèdre à faces triangulaires et carrées.*
X. *Triacontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales.*
XI. *Triacontaoctaèdre à faces triangulaires et carrées.*
XII. *Ennécontadoèdre à faces triangulaires et pentagonales.*
XIII. *Icohexaèdre à faces carrées, hexagonales et octogonales.*
XIV. *Hexécontadoèdre à faces carrées, hexagonales et décagonales.*

(*) Plus exactement, il y a *quinze classes* de polyèdres du premier genre. De ces quinze classes, *treize* sont composées, chacune, d'un seul polyèdre ; et les deux autres renferment une infinité de polyèdres.

XV. *Hexécontadoèdre à faces triangulaires, carrées et pentagonales* (*).

Problème II.

713. *Quels sont les polyèdres réguliers, du second genre?*

Si chacune des faces du polyèdre cherché appartient à λ angles polyèdres de $p^{ième}$ espèce (ayant p arêtes), à λ' angles polyèdres de $p'^{ième}$ espèce, etc., on a

$$F = \frac{4}{2\left(\frac{\lambda}{p} + \frac{\lambda'}{p'} + \cdots\right) + 2 - (p + p' + p'' + \ldots)} \quad (3),$$

$$3 \overline{\overline{<}} \lambda + \lambda' + \ldots \overline{\overline{<}} 5 \qquad (4).$$

Ces nouvelles relations ne diffèrent, que par la notation, de celles qui précèdent (707). Par conséquent, il n'y a pas de polyèdres semi-réguliers, du second genre, autres que ceux dont les éléments sont contenus dans le tableau suivant (**)

(*) Le Mémoire cité contient les calculs et les dessins nécessaires à la construction de tous ces corps.

(**) Il donne lieu à une remarque analogue à celle de la page précédente.

	λ	λ'	λ''	p	p'	p''	s_p	$s_{p'}$	$s_{p''}$	F	S	A
I	1	2		3	6		4	4		12	8	18
II	1	2		3	8		8	6		24	14	36
III	1	2		3	10		20	12		60	32	90
IV	1	2		4	6		6	8		24	14	36
V	1	2		5	6		12	20		60	32	90
VI	1	2		p	4		2	p		$2p$	$p+2$	$3p$
VII	1	3		3	4		8	18		24	26	48
VIII	1	3		p	3		2	$2p$		$2p$	$2p+2$	$4p$
IX	2	2		3	4		8	6		12	14	24
X	2	2		3	5		20	12		30	32	60
XI	1	4		4	3		6	32		24	38	60
XII	1	4		5	3		12	80		60	92	150
XIII	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	26	72
XIV	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	62	180
XV	1	1	2	3	5	4	20	12	30	60	62	170

Théorème II.

714. 1° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est* CONJUGUÉ (*) *d'un polyèdre du premier genre,* ET VICE-VERSA ;

2° *Tout polyèdre semi-régulier, du second genre, est circonscriptible ;*

3° *Si deux polyèdres conjugués sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à la même sphère, de façon que les sommets du premier soient les pôles des faces du second,* ET VICE-VERSA, *deux arêtes correspondantes quelconques sont réciproques.*

715. ÉNUMÉRATION DES POLYÈDRES DU SECOND GENRE.

I. *Dodécaèdre à faces triangulaires.*
II. *Icotétraèdre à faces triangulaires, et à sommets trièdres et octaèdres.*
III. *Hexécontaèdre à faces triangulaires, et à sommets trièdres et décaèdres.*
IV. *Icotétraèdre à faces triangulaires, et à sommets tétraèdres et hexaèdres.*
V. *Hexécontaèdre à faces triangulaires, et à sommets pentaèdres et hexaèdres.*
VI. *Double pyramide.*
VII. *Icotétraèdre à faces quadrangulaires.*
VIII. *Polyèdre formé par la pénétration de deux angles polyèdres réguliers égaux.*
IX. *Dodécaèdre rhomboïdal.*
X. *Triacontaèdre à faces quadrangulaires.*
XI. *Icotétraèdre à faces pentagonales.*
XII. *Hexécontaèdre à faces pentagonales.*
XIII. *Tessaracontaoctaèdre.*
XIV. *Hécatonicoèdre.*
XV. *Hexécontaèdre à faces quadrangulaires.*

(*) Pour les polyèdres *conjugués*, le lecteur pourra consulter, soit le Mémoire, soit les *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire.*

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE SEPTIÈME.

PROBLÈME I.

Trouver le rayon d'une sphère solide donnée.

D'un point A *(fig.* 296) pris comme pôle, décrivons une circonférence CDE ; prenons, sur cette ligne, deux arcs BC, BD égaux entre eux ; des points C, D comme pôles, avec une même ouverture de compas plus grande que BC, décrivons deux arcs qui se coupent en un point F. Les trois points A, B, F appartiennent à une circonférence de grand cercle dont le plan est perpendiculaire au milieu de la corde CD (431).

Si donc, avec les distances rectilignes AB, BF, AF, nous construisons un triangle ABF *(fig.* 297), le rayon du cercle circonscrit sera le rayon de la sphère donnée.

Remarque. – Si, dans le cercle O, circonscrit au triangle ABE *(fig.* 297), on mène deux diamètres AG, MN, perpendiculaire entre eux, l'arc AHN sera égal au *quadrans* d'un grand cercle de la sphère. Par conséquent, si l'on prend pour pôle un point quelconque P sur la surface de la sphère *(fig.* 299), et qu'avec une ouverture de compas égale à la corde AN, on décrive un arc QRS, cet arc appartient à une circonférence de grand cercle.

PROBLÈME II.

Par deux points A, B, *donnés sur une sphère* (fig. 202), *faire passer une circonférence de grand cercle.*

Des points A, B comme pôles, avec une même ouverture de compas égale à la corde d'un quadrans, décrivez deux arcs ; ils se couperont généralement, d'un même côté de AB, en un point P, pôle de la circonférence demandée.

Remarque.—Si les deux premiers arcs coïncident *(fig.* 203), *la plus courte distance sphérique* entre les points A, B est égale à une demi-circonférence de grand cercle. Conséquemment, ces deux points sont les extrémités d'un même diamètre de la sphère ; et le problème devient *indéterminé :* tout point P de la circonférence CD ayant A et B pour pôles, est lui-même le pôle d'un grand cercle ADB qui satisfait à la question.

PROBLÈME III.

Par un point C, *donné sur une sphère* (fig. 298), *tracer un arc de grand cercle* CD *perpendiculaire à une circonférence donnée* AB.

Si, du point C pris comme pôle, on trace un arc de grand cercle qui coupe AB en un point P (Prob. I), ce point P sera le pôle du grand cercle cherché.

Remarque. — Si le point C est le pôle de la circonférence AB, le problème est indéterminé, attendu que tout arc de grand cercle, passant en C, est perpendiculaire à AB.

PROBLÈME IV.

Par un point A, *donné sur un arc de grand cercle* ACB (*fig.* 299), *mener un arc de grand cercle qui fasse, avec le premier, un angle égal à un angle donné* D.

Du sommet D de l'angle donné, comme centre, avec un rayon égal à celui de la sphère (Prob. I), traçons un arc EF.

Du point A comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadrans, décrivons l'arc de grand cercle CGH. Du point C comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la distance des points E, F, décrivons un petit arc coupant CGH au point G. Prenons, à partir de ce point, un arc GI égal à un quadrans. Enfin, du point I comme pôle, traçons un arc passant en G : il passe aussi en A et satisfait à la question (649).

Remarque. — Le point G pouvant être pris de part ou d'autre de C, le problème admet toujours deux solutions.

PROBLÈME V.

Par trois points A, B, C, *donnés sur une sphère, faire passer une circonférence.*

Des points A, B, C pris pour pôles, avec une même ouverture de compas, tracez trois arcs ; soient D, E les points où se coupent les deux premiers, et F, G les points d'intersection des deux derniers. Tracez ensuite les arcs de grands cercles DF, FG (Prob. II) : les points de rencontre de ces deux lignes sont les pôles de la circonférence demandée.

PROBLÈME VI.

Construire un triangle sphérique, connaissant les trois côtés a, b, c.

Traçons, sur la sphère donnée, une circonférence de grand cercle ; prenons, sur cette ligne, un arc BC égal au plus grand *a* des côtés donnés. Des extrémités B, C de cet arc, comme pôles, avec des ouvertures de compas respectivement égales aux cordes des deux autres côtés *b*, *c*, décrivons deux petits cercles : ils se couperont généralement en deux points A, A′, symétriques par rapport au plan du cercle BC. Si donc nous joignons chacun de ces deux points aux extrémités B, C, par des arcs de grands cercles, nous obtiendrons deux triangles sphériques symétriques (667) ABC, A′BC, qui satisferont à la question.

On démontre facilement, par des considérations analogues à celles de la Géométrie plane (174), que les circonférences décrites des points B, C, comme pôles, se coupent, ou que le problème est possible, si le plus grand côté est moindre que la somme des deux autres.

* PROBLÈME VII.

Étant donnée l'arête c *d'un polyèdre régulier, trouver le rayon* R *de la sphère circonscrite et le rayon* r *de la sphère inscrite.*

TÉTRAÈDRE. — Soit E (*fig.* 300) le milieu de l'arête BC.

Menons AE, DE. Soient F, G les centres des triangles équilatéraux ABB, DBC : le centre commun des deux sphères est à l'intersection des droites DF, AG (695), et les rayons demandés sont AO, OG.

Or,

$$\frac{R}{r} = \frac{AD}{FG} = \tfrac{1}{3}.$$

En second lieu, le triangle AFO, rectangle en F, donne

$$\overline{AO}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{AF}^2,$$

ou

$$R^2 - r^2 = (\tfrac{2}{3}AE)^2 = (\tfrac{2}{3}.\tfrac{1}{2}c\sqrt{3})^2 = \tfrac{1}{3}c^2.$$

En résolvant ces équations, on trouve

$$R = \tfrac{1}{4}c\sqrt{6}, \qquad r = \tfrac{1}{12}c\sqrt{6}.$$

Hexaèdre. — On a

$$R = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3}, \qquad r = \tfrac{1}{2}c.$$

Octaèdre. — Les trois droites OA, OB, OC (*fig.* 301) perpendiculaires entre elles, sont égales à R (691). Donc

$$c = R\sqrt{2}, \qquad R = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2}.$$

Si nous menons OG perpendiculaire à la face ABC, cette droite est le rayon de la sphère inscrite à l'octaèdre ; et nous avons, comme ci-dessus,

$$R^2 - r^2 = \tfrac{1}{3}c^2;$$

d'où

$$r = \tfrac{1}{6}c\sqrt{6}.$$

Dodécaèdre. — Dans un pentagone régulier ABCDE (*fig.* 302), dont c est le côté, menons le rayon OB $=$ R′, l'apothème OG $= a$, et la diagonale AC $= d$. Les triangles rectangles ABF, OBG sont semblables ; donc

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{OG}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}},$$

ou

$$\frac{\frac{1}{2}d}{a} = \frac{c}{\mathrm{R}'}.$$

Mais (345)

$$\frac{a}{\mathrm{R}'} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

conséquemment

$$c = \frac{2d}{\sqrt{5}+1} = \tfrac{1}{2}d(\sqrt{5}-1).$$

Cela posé, assemblons trois triangles égaux à ABC. Nous obtiendrons un tétraèdre CAHB (*fig.* 303), dans lequel l'angle trièdre B sera l'un de ceux du dodécaèdre (692). Si donc nous abaissons BLI perpendiculaire à CAH ; si nous prenons, sur BF, BO $= \mathrm{R}'$; et si enfin nous menons OI perpendiculaire à ABC, le point I sera le centre des deux sphères.

Les triangles BLF, BOI donnent

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BI}} = \frac{\mathrm{FL}}{\mathrm{IO}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{FL}}{r}.$$

Nous avons

$$\mathrm{BF} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AF}}^2} = \sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}d^2},$$

$$\mathrm{FL} = \tfrac{1}{3}\mathrm{FH} = \tfrac{1}{6}d\sqrt{3};$$

donc

$$\frac{\mathrm{R}}{r} = \frac{\sqrt{c^2 - \frac{1}{4}d^2}}{\frac{1}{6}d\sqrt{3}}.$$

Remplaçons c par sa valeur ; il viendra

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2-1}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})}.$$

Le triangle BOI donne

$$\overline{BI}^2 - \overline{IO}^2 = \overline{BO}^2,$$

ou

$$R^2 - r^2 = R'^2.$$

Si l'on met pour R' sa valeur $\dfrac{2c}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ (345), cette équation donnera, en vertu de la précédente,

$$(14 - 6\sqrt{5})r^2 = \frac{2c^2}{5-\sqrt{5}};$$

d'où

$$r^2 = c^2\,\frac{(25+11\sqrt{5})}{40}.$$

Donc

$$r = \tfrac{1}{2}c\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}};$$

et, par suite,

$$R = \tfrac{1}{4}c\,(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$$

Icosaèdre.— Construisons, avec c pour côté, un pentagone régulier ABCDE (*fig.* 304). Prenons cette figure pour base d'une pyramide régulière ayant G pour sommet, et dans laquelle chaque arête latérale soit égale à c. Enfin, par le centre I du triangle équilatéral AGB, élevons, au plan de ce triangle, la perpendiculaire IO, qui coupe en O la hauteur GF. Le point O sera le centre de l'icosaèdre.

Cela posé, si nous abaissons GH perpendiculaire sur AB, et si nous menons HF, les triangles rectangles GIO, GFH donneront

$$\frac{GO}{GH} = \frac{IO}{FH}.$$

Or,

$$GO = R, \quad IO = r, \quad GH = \tfrac{1}{2}c\sqrt{3}.$$

De plus, la droite HF, apothème du pentagone régulier ABCDE, a pour expression (345)

$$\tfrac{1}{2}c \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}};$$

donc, en remplaçant les lignes par leurs valeurs, nous obtiendrons, au lieu de la proportion ci-dessus,

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Nous avons aussi, comme précédemment,

$$R^2 - r^2 = \tfrac{1}{5}c^2.$$

On tire de ces équations, par un calcul facile,

$$r = \tfrac{1}{4}c\,\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \quad R = \tfrac{1}{2}c\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \quad (*)$$

* Problème VIII.

Connaissant le rayon R *d'une sphère, trouver l'arête* c *d'un polyèdre régulier insrit, et le rayon* r *de la sphère inscrite à ce polyèdre.*

(*) La Trigonométrie sphérique conduit plus rapidement à ces diverses valeurs.

Si l'on résout, par rapport à c et r, les formules trouvées dans le Problème VII, on arrive aux résultats suivants :

Tétraèdre,

$$c = \tfrac{2}{3}\mathrm{R}\sqrt{6}, \quad r = \tfrac{1}{3}\mathrm{R}.$$

Hexaèdre,

$$c = \tfrac{2}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}, \quad r = \tfrac{1}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}.$$

Octaèdre,

$$c = \mathrm{R}\sqrt{2}, \quad r = \tfrac{1}{3}\mathrm{R}\sqrt{3}.$$

Dodécaèdre,

$$c = \tfrac{1}{3}\mathrm{R}(\sqrt{15} - \sqrt{3}), \quad r = \mathrm{R}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$$

Icosaèdre,

$$c = 2\mathrm{R}\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}, \quad r = \mathrm{R}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$$

Remarque. — Le rayon de la sphère inscrite ayant la même valeur pour le dodécaèdre et pour l'icosaèdre, on voit que, si ces deux polyèdres sont inscrits à une même sphère, ils seront circonscrits aussi à une même sphère. L'hexaèdre et l'octaèdre jouissent de la même propriété. Ces observations confirment ce que nous avons dit sur les polyèdres conjugués (698).

* Problème IX.

Connaissant le rayon R *d'une sphère, trouver l'aire* A *et le volume* V *d'un polyèdre régulier, inscrit à la sphère.*

Nous venons d'exprimer, en fonction de R, le côté c du polyèdre régulier ; si donc nous désignons par a l'aire de chacune des faces, nous trouverons, au moyen des Théorèmes II, IV et VI (Livre IV), les valeurs suivantes :

Tétraèdre,

$$a = \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\mathrm{R}^2\sqrt{3}\,; \quad \mathrm{A} = \tfrac{4}{3}\mathrm{R}^2\sqrt{3}.$$

Hexaèdre,

$$a = c^2 = \tfrac{4}{3}R^2\,; \qquad A = 8R^2.$$

Octaèdre,

$$a = \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}R^2\sqrt{3}\,; \quad A = 4R^2\sqrt{3}.$$

Dodécaèdre,

$$a = \tfrac{5}{4}\,c^2\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}} = \tfrac{5}{6}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,;$$

$$A = 10R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Icosaèdre,

$$a = \tfrac{1}{4}c^2\sqrt{3} = \tfrac{1}{10}R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\,; \quad A = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

Si actuellement nous multiplions la valeur de A par $\frac{1}{3}r$, nous aurons le volume V du polyèdre ; savoir :

Tétraèdre,

$$V = \tfrac{4}{3}R^2\sqrt{3}\ .\ \tfrac{1}{9}R = \tfrac{4}{27}R^3\sqrt{3}.$$

Hexaèdre,

$$V = 8R^2\ .\ \tfrac{1}{9}R\sqrt{3} = \tfrac{8}{9}R^3\sqrt{3}.$$

Octaèdre,

$$V = 4R^2\sqrt{3}\ .\ \tfrac{1}{9}R\sqrt{3} = \tfrac{4}{3}R^3.$$

Dodécaèdre,

$$V = 10R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ .\ \tfrac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \tfrac{10}{9}R^3(\sqrt{3}+\sqrt{15}).$$

Icosaèdre,

$$V = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\ .\ \tfrac{1}{3}R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = \tfrac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

EXERCICES SUR LE LIVRE VII.

1. Deux points réciproques par rapport à une sphère partagent harmoniquement le diamètre qui les contient.

2. Les distances d'un point quelconque d'une sphère, à deux points réciproques, sont dans un rapport constant.

3. 1° Les tangentes menées à une sphère, d'un point extérieur A, sont égales entre elles ; 2° le lieu de ces tangentes est une surface conique de révolution ; 3° le lieu de leurs points de contact est une circonférence située dans un plan perpendiculaire au diamètre passant par A.

4. Le sommet d'un cône circonscrit à une sphère est le pôle du plan de la circonférence de contact.

5. Le pôle de tout plan passant par un point est situé sur le plan polaire de ce point.

6. Le plan polaire de tout point pris sur un plan passe par le pôle de ce plan.

7. Le pôle de tout plan passant par une droite est situé sur la droite réciproque de la première (*).

8. Le plan polaire de tout point pris sur une droite passe par la droite réciproque de la première.

9. Toute corde menée par un point, est divisée harmoniquement par ce point et par son plan polaire.

10. Le lieu des pôles d'une droite D, relativement à tous les cercles situés sur une sphère S et passant par cette droite, est la droite D′, réciproque de D.

11. Le lieu des polaires d'un point, relativement à tous les cercles situés sur une sphère et passant par ce point, est le plan polaire de ce même point.

(*) Nous appelons *droites réciproques*, deux droites passant par deux *points réciproques*, perpendiculaires entre elles, et perpendiculaires au diamètre qui contient les deux points.

12. Le lieu géométrique des points d'égale puissance, par rapport à deux sphères, est un plan perpendiculaire à la ligne des centres. (*)

13. Les plans radicaux de trois sphères, considérées deux à deux, se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan des trois centres.

14. Les plans radicaux de quatre sphères, considérées trois à trois, se coupent tous quatre en un même point.

15. Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux cercles situés sur une même sphère, est l'intersection des plans de ces cercles.

16. Deux arcs de grands cercles passant par un même point, et tangents à un petit cercle, sont égaux entre eux.

17. Le lieu des points d'où l'on peut mener, à deux cercles situés sur une sphère, des tangentes sphériques égales (**), est une circonférence de grand cercle dont le plan passe par l'intersection des plans des deux cercles.

18. Si l'on conçoit, sur une sphère, une infinité de circonférence C dont les plans passent par une droite D, et une infinité de circonférences C′ dont les plans passent par la droite D′, réciproque de D, chacune des premières circonférences coupe orthogonalement chacune des dernières.

19. Le sommet A d'un angle sphérique CAD, circonscrit à un cercle directeur CDE, a pour cercle *conjugué* celui qui passe par les points de contact C, D (***).

20. Le conjugué A′ de tout grand cercle C′ passant par un point A, est sur le grand cercle C conjugué de A.

21. Le grand cercle C′, conjugué de tout point A′ pris sur un grand cercle C, passe par le point A, conjugué de ce dernier cercle.

22. Si les arcs de grands cercles qui joignent les sommets correspondants de deux triangles sphériques se coupent en un même point, les points de concours des côtés opposés sont situés sur une même circonférence de grand cercle. — Et réciproquement.

23. Si deux polygones sphériques sont composés d'un même nombre de triangles tels, que les points de concours de deux côtés homologues quelconques, pris dans deux triangles correspondants, soient tous situés sur une même circonférence de grand cercle, les arcs de grand cercles qui joignent les sommets homologues de ces polygones se coupent tous en un même point.

24. Dans tout quadrilatère sphérique, inscrit à un petit cercle, le point de

---

(*) Ce plan porte le nom de *plan radical.*

(**) La *tangente sphérique* à un petit cercle est la circonférence de grand cercle tangente au petit cercle.

(***) *Théorèmes et Problèmes*, p. 336 et suivantes.

rencontre des diagonales, et les points de concours des côtés opposés, forment un triangle dans lequel chaque sommet est conjugué du côté opposé.

25. Dans tout quadrilatère sphérique complet, circonscrit à un petit cercle, chacune des diagonales est conjuguée du point d'intersection des deux autres.

26. Si deux quadrilatères sphériques sont, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même petit cercle, de manière que les sommets du premier soient les points de contact des côtés du second : 1° les points de concours des côtés opposés de ces quadrilatères sont situés sur une même circonférence de grand cercle ; 2° les diagonales des deux quadrilatères se coupent en un même point, conjugué à cette circonférence ; 3° les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit sont situés sur les diagonales du quadrilatère circonscrit.

27. Dans tout hexagone sphérique, inscrit à un petit cercle, les points de concours des côtés opposés, pris deux à deux, sont tous les trois sur une circonférence de grand cercle.

28. Dans tout hexagone sphérique, inscrit à un petit cercle, les diagonales menées par les sommets opposés, pris deux à deux, se coupent en un même point.

29. Dans tout triangle sphérique, inscrit à un petit cercle, les points de concours des côtés avec les tangentes sphériques aux sommets opposés, sont situés sur une même circonférence de grand cercle.

30. Par deux cercles, tracés sur une sphère, on peut généralement faire passer un cône.

31. Si un cercle variable est tangent à deux cercles tracés sur une sphère :

1° Les deux points de contact appartiennent à une génératrice du cône déterminé par les cercles donnés ;

2° La circonférence de grand cercle passant par ces deux points coupe, sous un même angle, les circonférences données ;

3° Toutes les circonférences de grands cercles ainsi déterminées se coupent en deux points fixes ou foyers, situés sur le diamètre qui passe par le sommet du cône.

32. Les sommets des cônes déterminés par trois cercles tracés sur une sphère et considérés deux à deux, sont, trois à trois, sur quatre droites situées dans un même plan.

33. Si deux cônes ont un sommet commun, et que leurs bases soient des circonférences sécantes, tracées sur une sphère, l'angle sous lequel se coupent ces deux bases est égal à celui sous lequel se coupent les deux sections antiparallèles, situées sur la même sphère.

34. Si deux cônes ont pour bases des circonférences sécantes, tracées sur une sphère, et que leur sommet commun soit un point de cette surface, tout plan, parallèle au plan tangent à la sphère en ce point, coupe ces cônes suivant deux circonférences dont l'angle est égal à celui des deux premières.

35. Si un cône a pour base un petit cercle de la sphère, et pour sommet un

point de cette surface, le centre de la section antiparallèle du cône est sur la droite qui joint le sommet au pôle de la base.

36. La figure réciproque d'un plan P, relativement à une sphère S, est la sphère S′ qui a pour diamètre la distance du centre de S au pôle de P.

37. La figure réciproque d'un cercle, relativement à une sphère, est un autre cercle.

38. La figure réciproque d'une sphère S′, relativement à une sphère S, est généralement une sphère.

39. Dans deux figures réciproques, les angles correspondants sont égaux.

40. La somme des carrés des segments formés par trois cordes qui se coupent rectangulairement deux à deux, en un même point, est égale à six fois le carré du rayon de la sphère, moins deux fois le carré de la distance du centre au point d'intersection des trois cordes.

41. La somme des carrés de trois cordes qui se coupent rectangulairement deux à deux, en un même point, est égale à douze fois le carré du rayon de la sphère, moins huit fois le carré de la distance du centre au point d'intersection des cordes.

42. Dans tout quadrilatère sphérique, inscrit à un petit cercle, la somme de deux angles opposés est égale à la somme des deux autres angles.

43. Le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques construits sur une base donnée, et dans lesquels la différence entre la somme des angles à la base et l'angle au sommet est constante, est un arc de petit cercle passant par les extrémités de la base.

44. Le lieu géométrique des sommets des triangles sphériques de même base et de même surface est un arc de petit cercle passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base (*).

45. Si une sphère variable S se meut en touchant continuellement trois sphères fixes A, B, C, le lieu décrit sur chacune de celles-ci, par le point de contact avec la première sphère, est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à celui qui contient les centres de A, B, C (**).

46. Si une sphère variable S coupe, sous des angles égaux, mais variables simultanément, quatre sphères fixes A, B, C, D, le centre de S décrit une ligne droite (***).

47. A un triangle sphérique donné, inscrire une circonférence.

48. Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés et l'angle compris.

(*) Théorème de Lexell.
(**) Théorème de Dupuis.
(***) Théorème de M. Heegmann.

49. Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

50. Construire un triangle sphérique, connaissant un côté et les deux angles adjacents.

51. Construire un triangle sphérique, connaissant deux angles et le côté opposé à l'un deux.

52. Construire un triangle sphérique, connaissant les trois angles.

53. Par un point donné, mener un arc de grand cercle tangent à un petit cercle donné.

54. D'un point donné, comme pôle, décrire un cercle tangent à un cercle donné.

55. Tracer une circonférence de grand cercle tangente à deux petits cercles donnés.

56. Tracer une circonférence tangente à deux cercles donnés et ayant un rayon sphérique donné.

57. Décrire une circonférence qui passe par deux points donnés, et qui touche un cercle donné.

58. Décrire une circonférence qui passe par un point donné, et qui touche deux arcs de grands cercles donnés.

59. Décrire une circonférence qui passe par un point donné, et qui touche deux petits cercles donnés.

60. Décrire une circonférence tangente à trois petits cercles donnés.

61. Tracer, sur une sphère donnée, quatre cercles égaux et tels, que chacun d'eux soit tangent aux trois autres.

62. Partager la surface d'une sphère en polygones réguliers, égaux entre eux.

63. Mener, dans une sphère donnée, trois cordes perpendiculaires entre elles, passant par un point donné, et proportionnelles à des nombres donnés.

64. Quel est le lieu des points tels, que les distances de chacun d'eux à deux points fixes soient dans un rapport donné?

65. Quel est le lieu des centres des sphères qui coupent, suivant des circonférences de grands cercles, trois sphères données?

66. Mener un plan tangent à trois sphères. Combien le problème peut-il admettre de solutions?

67. Construire une sphère tangente aux quatre faces d'un tétraèdre, ou aux prolongements de ces faces. Dans quel cas le problème admet-il *six*, *sept* ou *huit* solutions?

68. A un tétraèdre régulier donné, inscrire un *octaèdre semi-régulier*, *du premier genre* (*).

69. A un hexaèdre régulier, inscrire un *décatétraèdre semi-régulier*, *à faces triangulaires et octogonales*.

70. A un hexaèdre régulier, inscrire un *décatétraèdre semi-régulier*, *à faces triangulaires et carrées*.

71. A un octaèdre régulier, inscrire un *décatétraèdre semi-régulier*, *à faces carrées et hexagonales*.

72. A un dodécaèdre régulier, inscrire un *triacontadoèdre semi-régulier*, *à faces triangulaires et décagonales*.

73. A un dodécaèdre régulier, inscrire un *triacontadoèdre semi-régulier*, *à faces triangulaires et décagonales*.

74. A un icosaèdre régulier, inscrire un *triacontadoèdre semi-régulier*, *à faces pentagonales et hexagonales*.

(*) *Voir* p. 310. Si l'on opère des *troncatures* dans le tétraèdre, au moyen de plans convenablement menés, le *noyau* restant sera le polyèdre semi-régulier demandé. Les questions suivantes doivent être entendues de la même manière.

LIVRE HUITIÈME.

MESURE DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES.

PRÉLIMINAIRES.

Théorème I.

716. *Dans toute surface polyédrale fermée, une face quelconque est plus petite que la somme de toutes les autres.*

Soit la surface polyédrale ABCD.... (*fig.* 305). Je dis que l'aire de la face ABCDE est plus petite que la somme des aires de toutes les autres faces.

Projetons, sur le plan ABCDE, chacune des autres faces du polyèdre. Chaque face, non parallèle à ABCDE, est plus grande que sa projection (553) ; d'ailleurs la somme des projections est au moins égale à ABCDE ; donc, etc.

Théorème II.

717. *Une surface polyédrale fermée, convexe, est plus petite que toute autre surface polyédrale qui l'enveloppe de toutes parts.*

Prenons chaque face A du polyèdre convexe pour base d'un prisme droit, extérieur au polyèdre, et dont la surface latérale détache, sur la surface polyédrale enveloppante, une figure A', ayant A pour projection. Nous aurons $A' \geqq A$. D'ailleurs, le polyèdre étant convexe, les différents prismes ne se rencontrent pas ; donc la somme des surfaces telle que A' est plus petite que la surface enveloppante ; donc, à plus forte raison, celle-ci est plus grande que la surface du polyèdre.

718. Pour étendre aux surfaces courbes ces deux théorèmes, il faut d'abord définir ce que l'on entend par *aire* d'une pareille surface.

Soit une surface fermée S, convexe pour plus de simplicité. Inscrivons à cette surface un polyèdre convexe P, dont l'aire soit A. Inscrivons-y ensuite un polyèdre convexe P', dont toutes les arêtes soient moindres que celles de P, et tel, en outre, que les sommets de P coïncident avec des sommets appartenant à P'. Continuons ainsi indéfiniment. Nous obtiendrons une suite de polyèdres P, P', P'',... dont les arêtes et les faces seront de plus en plus petites, et dont les aires A, A', A'',... augmenteront de plus en plus. D'ailleurs, par le théorème précédent, ces aires sont toujours moindres que celle d'un polyèdre circonscrit à S; donc elles tendent vers une limite : cette limite est ce que nous nommons *aire* de la surface S.

De même, les volumes V, V', V'',..., des polyèdres successifs, tendent vers une certaine limite, que nous appelons *volume* du corps terminé par la surface S.

719. Il y aurait à faire, sur ces deux définitions, des remarques analogues à celles que nous avons développées précédemment (366, 554, 682). Quoiqu'il en soit, les notions *d'aire* et de *volume* étant expliquées, nous pouvons regarder comme démontrés les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME III.

720. *Une surface plane est plus petite que toute autre sur-ace terminée au même contour.*

Théorème IV.

721. *Une surface convexe est plus petite que toute autre surface qui l'enveloppe de toutes parts.*

CYLINDRE.

Théorème V.

722. *La surface latérale d'un cylindre a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la hauteur.*

Inscrivons, à la base AD du cylindre (*fig.* 306), un polygone quelconque ABCDEF ; et prenons ce polygone pour base inférieure d'un prisme droit, dont la surface latérale rencontre celle du cylindre suivant les arêtes AA′, BB′, CC′,..., et dont la base supérieure est A′B′C′D′E′F′.

La surface latérale du prisme se compose d'une série de rectangles qui ont même hauteur que le prisme, et dont les bases sont les côtés de la base du prisme. Donc cette surface prismatique a pour mesure

$$(AB + BC + CD + \ldots) \,.\, AA' \,;$$

c'est-à-dire *le périmètre de la base, multiplié par la hauteur.*

Cela étant, si nous doublons le nombre des côtés de la base du prisme, en prenant les points G, H,... intermédiaires entre A et B, entre B et C, etc., nous obtiendrons un second prisme, inscrit au cylindre, et dont la surface totale, en y comprenant les deux bases, sera plus grande que celle du premier prisme. Si nous continuons ainsi, les aires des prismes successifs tendront vers une limite, laquelle, d'après le principe précédent, est l'aire de la surface *totale* du cylindre. Mais la limite des bases des différents prismes est la base correspondante du cylindre ; donc

$$\begin{aligned}\text{Surface latérale du cylindre} &= \text{lim. périm. ABCD}\ldots \,.\, AA',\\ &= \text{circonfér. AD} \,.\, AA'.\end{aligned}$$

723. *Remarque.* — Dans cette démonstration, rien ne sup-

pose que le cylindre soit à base circulaire ; ainsi, le théorème est vrai pour un cylindre droit à base quelconque ; et, en général,

La surface latérale d'un cylindre droit a pour mesure la longueur de la base multipliée par la hauteur.

724. *Scolie.* — Le cylindre étant droit, à base circulaire, soient R le rayon de cette base, H la hauteur du cylindre, et A l'aire de la surface latérale ; on aura

$$A = 2\pi RH.$$

Théorème VI.

724. *Tout cylindre a pour mesure l'aire de la base, multipliée par la hauteur.*

En effet, le volume du cylindre est la limite des volumes des prismes inscrits.

725. *Scolie.* — Le cylindre étant droit, à base circulaire, soient R le rayon de cette base, H la hauteur du cylindre, et V son volume ; on a

$$V = \pi R^2 H.$$

CONE.

Théorème VII.

726. *La surface latérale d'un cône droit, à base circulaire, a pour mesure la circonférence de la base, multipliée par la moitié de la génératrice du cône.*

A la circonférence AB *(fig.* 307), inscrivons un polygone régulier ACDBEF, et prenons ce polygone pour base d'une pyramide régulière dont la surface latérale rencontre celle du cône suivant les génératrices SA, SC,....

La surface latérale de la pyramide se compose d'une série de triangles isocèles égaux ; donc, en abaissant l'*apothème*

SP perpendiculaire sur AC, nous aurons, pour mesure de cette surface,

$$(AC + CD + DB + \ldots).\ \tfrac{1}{2}SP.$$

Ainsi, *la surface latérale d'une pyramide régulière a pour mesure le périmètre de la base, multiplié par là moitié de l'apothème de la pyramide.*

Cela étant, si nous doublons le nombre des côtés du polygone, et si nous continuons indéfiniment cette opération, nous trouvons, comme limite des aires des pyramides, en y comprenant les bases, l'aire de la surface conique, augmentée de l'aire du cercle AB. Mais la limite des aires des polygones tels que ACDB.. est l'aire du cercle; donc

$$\begin{aligned}\text{Surface latérale du cône} &= \text{lim. périm. ADB} \ldots\ .\ \tfrac{1}{2}\ \text{lim. SP},\\ &= \text{circonfér. AB}\ .\ \tfrac{1}{2}\text{SA}.\end{aligned}$$

727. *Scolie.* — Soient R le rayon de la base, G la génératrice, et A l'aire de la surface latérale d'un cône droit, à base circulaire ; on a

$$A = \pi RG.$$

Théorème VIII.

728. *La surface latérale d'un tronc de cône droit, à bases parallèles, a pour mesure la demi-somme des circonférence des bases, multipliée par le côté du tronc.*

Si l'on inscrit, au *tronc* de cône ABA'B' *(fig.* 307), un tronc de pyramide régulière, la surface latérale de ce polyèdre sera composée d'une série de trapèzes égaux ; donc la surface latérale du tronc de pyramide a pour mesure la demi-somme des périmètres des deux bases, multipliée par l'*apothème* PP'. *Passant à la limite*, comme dans les théorèmes précédents, on trouve la mesure indiquée.

729. *Remarque.* — En regardant la surface latérale d'un tronc de cône comme engendrée par la droite AA' tournant autour de l'axe SO situé dans un même plan avec cette droite,

on peut dire que *la surface latérale d'un tronc de cône droit a pour mesure la circonférence décrite par le milieu du côté du tronc, multipliée par ce côté.*

Théorème IX.

730. *Tout cône a pour mesure le tiers du produit de la base par la hauteur.*

On démontre ce théorème en partant de l'expression du volume de la pyramide, et en appliquant la méthode précédente.

731. *Scolie.* — Soient R le rayon de la base, H la hauteur, et V le volume d'un cône de révolution ; on a

$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Théorème X.

732. *Un tronc de cône, à bases parallèles, est équivalent à la somme de trois cônes ayant pour hauteur commune celle du tronc, et pour bases respectives la base inférieure du tronc, la base supérieure, et une moyenne proportionnelle entre les deux bases. (Voyez n° 564).*

733. *Scolie.* — Soit H la hauteur d'un tronc de cône droit à bases circulaires ; soient R, r les rayons des bases, et V le volume ; on a

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\,(R^2 + r^2 + Rr)\,H.$$

CORPS DE RÉVOLUTION.

734. *Lemme.* — *La surface engendrée par une droite* AB (fig. 308), *tournant autour d'un axe* XY *situé dans un même plan avec* AB, *a pour mesure la circonférence dont le rayon est la perpendiculaire* CD *élevée au milieu de la génératrice et prolongée jusqu'à l'axe, multipliée par la projection* A'B' *de cette génératrice sur l'axe.*

Cette proposition est évidente lorsque la droite génératrice est parallèle à l'axe, car alors la surface engendrée est cylindrique.

Supposons donc que AB prolongée rencontre XY, auquel cas la surface est celle d'un tronc de cône. Menons CE perpendiculaire à XY et AF parallèle à XY. Nous avons trouvé, ci-dessus,

$$\text{surf. AB} = 2\pi \text{CE} \,.\, \text{AB}.$$

Or, les triangles rectangles ABF, CDE, ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables et donnent

$$\frac{\text{AB}}{\text{CD}} = \frac{\text{AF}}{\text{CE}},$$

ou

$$\text{CD} \,.\, \text{AF} = \text{CE} \,.\, \text{AB};$$

donc, à cause de $\text{AF} = \text{A}'\text{B}'$,

$$\text{surf. AB} = 2\pi \text{CD} \,.\, \text{A}'\text{B}'.$$

Il est clair que cette proposition est également vraie lorsque l'une des extrémités de AD se trouve sur l'axe.

Théorème XI.

735. *La surface engendrée par une ligne brisée régulière* ABCD (fig. 309), *tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par la projection de la génératrice sur l'axe.*

On appelle *ligne brisée régulière* celle qui a ses côtés égaux et ses angles égaux. Il est évident qu'une pareille ligne est circonscriptible à une circonférence.

Cela posé, soit O le centre de la ligne brisée, c'est-à-dire le centre de la circonférence inscrite. Menons les apothèmes égaux OM, ON, OP, et projetons les sommets A, B, C, D en A', B', C', D' sur XY.

La surface engendrée par ABCD se compose des surfaces engendrées par AB, BC, CD; donc, par le lemme précédent,

$$\text{surf. ABCD} = 2\pi\text{OM} \cdot \text{A'B'} + 2\pi\text{ON} \cdot \text{B'C'} + 2\pi\text{OP} \cdot \text{C'D'},$$

ou

$$\text{surf. ABCD} = 2\pi\text{OM}\,(\text{A'B'} + \text{B'C'} + \text{C'D'}).$$

736. *Corollaire. — La surface engendrée par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un diamètre du cercle circonscrit, a pour mesure la circonférence inscrite, multipliée par le diamètre du cercle circonscrit.*

Théorème XII.

737. *La surface d'une zone ou d'une calotte sphérique a pour mesure la circonférence d'un grand cercle, multipliée par la hauteur de la zone ou de la calotte.*

Une *zone* est la partie de la surface de la sphère terminée à deux circonférences parallèles ; une *calotte* est la partie de la surface sphérique terminée à une seule circonférence. Ainsi, lorsque la demi-circonférence CABD (*fig.* 310), tournant autour du diamètre CD, engendre la sphère, l'arc AB engendre une zone, et les arcs AC, BD engendrent des calottes sphériques.

La *hauteur* A'B' d'une zone est la distance comprise entre les plans des deux bases ; la hauteur CA' d'une calotte est la distance comprise entre le plan du cercle de base et le pôle de ce cercle.

Cela posé, je dis que la zone engendrée par AB a pour mesure 2πOC . A'B'.

Inscrivons à l'arc AB une ligne brisée régulière AEFB; puis, à la surface conique engendrée par AE, inscrivons la surface d'un tronc de pyramide régulière; et opérons de même pour les surfaces engendrées par EF et FB. Nous formerons ainsi une surface polyédrale ouverte, ayant pour base inférieure un polygone régulier, inscrit à la circonférence décrite par le point B. Si nous faisons croître indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone, et si en même temps nous augmentons indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite à AB, nous obtiendrons une série de surfaces polyédrales dont les aires auront une limite, laquelle sera précisément l'aire de la zone sphérique.

D'abord, en augmentant indéfiniment le nombre des côtés du polygone régulier servant de base à la surface polyédrale, nous trouvons, comme limite, l'aire de la surface engendrée par la ligne brisée AEFB ; c'est-à-dire

$$2\pi OI \,.\, A'B'.$$

En second lieu, en faisant croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, nous obtenons, pour l'aire de la zone sphérique,

$$\text{lim. } 2\pi OI \,.\, A'B'\,;$$

ou

$$2\pi OC \,.\, A'B'.$$

La démonstration serait la même pour la mesure de la calotte décrite par AC.

738. *Scolie.* — Soient R le rayon d'une sphère, H la hauteur d'une zone ou d'une calotte, et A l'aire de cette surface ; on a

$$A = 2\pi RH.$$

739. 1er *Corollaire.* — ***Dans une même sphère, deux zones de même hauteur sont équivalentes.***

740. 2e *Corollaire.* — ***La calotte engendrée par un arc est équivalente au cercle qui aurait pour rayon la corde de l'arc.***

En effet, la corde AC est moyenne proportionnelle entre CD et CA' ; donc

$$\overline{AC}^2 = 2R \,.\, CA'\,;$$

et l'aire de la calotte est

$$A = \pi\overline{AC}^2.$$

THÉORÈME XIII.

741. *La surface de la sphère a pour mesure la circonférence d'un grand cercle, multipliée par le diamètre.*

En effet, la sphère peut être considérée comme une zone dont la hauteur égale le diamètre.

742. *Scolie.* — A étant l'aire d'une sphère de rayon R, on a

$$A = 4\pi R^2.$$

743. 1^er^ *Corollaire.* — *La surface de la sphère est équivalente à 4 fois celle d'un grand cercle.*

* 744. 2^e^ *Corollaire.* — *Tout fuseau sphérique a pour mesure le diamètre de la sphère, multiplié par l'arc correspondant à ce fuseau. (Voyez* n° 664.)

* 745. 3^e^ *Corollaire.* — Soient A, B, C les angles d'un triangle sphérique, l'angle droit étant représenté par 1 ; soient R le rayon de la sphère et T l'aire du triangle ; on a

$$T = \pi R^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - 1\right).$$

En effet, la mesure du triangle est $A + B + C - 2$, quand on prend pour unité le triangle tri-rectangle (671) ; de plus, l'aire de ce dernier triangle est

$$\tfrac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 = \tfrac{1}{2}\pi R^2 ;$$

donc, etc.

Théorème XIV.

746. *Si un triangle* ABC (fig. 311) *tourne autour d'un axe* XY *situé dans son plan et passant par un de ses sommets* C, *le corps engendré a pour mesure la surface décrite par le côté* AB *opposé à ce sommet, multipliée par le tiers de la hauteur* CD *correspondant à ce même sommet.*

1° Supposons qu'un second sommet B soit situé sur l'axe de rotation ; abaissons AA′ perpendiculaire sur XY ; et soit V le volume du corps engendré. Je dis que

$$V = \text{surf. AB} \cdot \tfrac{1}{3}\text{CD}.$$

Le corps dont il s'agit se compose des cônes engendrés par BAA′ et CAA′ ; donc

$$V = \tfrac{1}{3}\pi \overline{AA'}^2 \cdot BC.$$

Mais, dans tout triangle, le produit de la base par la hauteur est constant; donc

$$BC \, . \, AA' = AB \, . \, CD;$$

d'où

$$V = \tfrac{1}{3}\pi AA' \, . AB \, . \, CD.$$

D'un autre côté, $\pi . AA' . AB$ mesure la surface conique décrite par AB; donc enfin

$$V = \text{surf. } AB \, . \, \tfrac{1}{3} CD.$$

2° Si le côté AB (*fig.* 317) prolongé rencontre l'axe, nous aurons

$$\begin{aligned} \text{vol. } ABC &= \text{vol. } ACE - \text{vol. } BCE \\ &= \text{surf.} AE . \tfrac{1}{3} CD - \text{surf.} BE . \tfrac{1}{3} CD; \end{aligned}$$

ou

$$V = \text{surf. } AB . \tfrac{1}{3} \, CD.$$

3° Enfin, si le côté AB (*fig.* 313) est parallèle à l'axe, le corps engendré par ABC se composant du cylindre ABA'B', diminué des cônes ACA' et BCB', le théorème se vérifie encore plus simplement.

* Théorème XV.

747. *Le corps engendré par un triangle* ABC (fig. 314), *tournant autour d'un axe* XY *situé dans son plan, a pour mesure l'aire du triangle, multipliée par la circonférence que décrit le centre O des moyennes distances du triangle.*

Abaissons sur l'axe XY les perpendiculaires

$$AA' = a, \; BB' = b, \; CC' = c;$$

puis désignons A'C' par α et B'C' par β.

Le corps engendré par ABC se compose du tronc de cône ABB'A', diminué de la somme des deux troncs ACC'A' et BCC'B'; donc, en désignant par V le volume cherché, nous aurons (732)

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\pi(a^2+b^2+ab)(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{3}\pi(a^2+c^2+ac)\alpha - \tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2+bc)\beta \\ &= \tfrac{1}{3}\pi[(a^2+b^2+ab)(\alpha+\beta) - (a^2+c^2+ac)\alpha - (b^2+c^2+bc)\beta]. \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèses peut être mise sous la forme

$$(b^2 + ab - c^2 - ac)\alpha + (a^2 + ab - c^2 - bc)\beta,$$

ou

$$(b - c)(b + c + a)\alpha + (a - c)(a + c + b)\beta,$$

ou encore

$$(a + b + c)[(b - c)\alpha + (a - c)\beta];$$

donc

$$V = 2\pi \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{(b - c)\alpha + (a - c)\beta}{2}.$$

Observons actuellement que le triangle ABC se compose du trapèze ABB'A', diminué de la somme des trapèzes ACC'A' et BCC'B' ; donc l'aire de ABC égale

$$\frac{a + b}{2}(\alpha + \beta) - \frac{a + c}{2}\alpha - \frac{b + c}{2}\beta = \frac{(b - c)\alpha + (a - c)\beta}{2}.$$

Cette dernière quantité est le second facteur de V. Quant au premier, il représente évidemment la circonférence décrite par le point O (294); donc, etc.

748. *Remarque.* — Ce théorème renferme, comme cas particulier, le précédent.

Théorème XVI.

749. *Si un secteur polygonal régulier* OABCD *(fig.* 315) *tourne autour d'un axe* XY *situé dans son plan et passant par son centre, le corps engendré a pour mesure la surface décrite par la ligne brisée régulière qui sert de base au secteur, multipliée par le tiers de l'apothème* OE.

En effet, d'après le Théorème XIV,

$$\text{vol. ABO} = \text{surf. AB} \cdot \tfrac{1}{3}\text{OE},$$
$$\text{vol. BCO} = \text{surf. BC} \cdot \tfrac{1}{3}\text{OF},$$
$$\text{vol. CDO} = \text{surf. CD} \cdot \tfrac{1}{3}\text{OG}.$$

Et comme les perpendiculaires OE, OF, OG sont égales entre elles,

$$\text{vol. ABCDO} = \text{surf. ABCD} \cdot \tfrac{1}{3}\text{OE}.$$

750. *Scolies.* — 1° Soient r le rayon du cercle inscrit, p la projection de la ligne ABCD sur l'axe, et V le volume du corps engendré par le secteur :

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 p.$$

2° Si un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tourne autour d'un diamètre du cercle circonscrit, on a, en désignant par R et r le rayon et l'apothème du cercle circonscrit, et par V le volume du corps engendré,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^2 R.$$

Théorème XVII.

751. *Tout secteur sphérique a pour mesure la zone qui lui sert de base, multipliée par le tiers du rayon de la sphère.*

On appelle *secteur sphérique* le corps engendré par un *secteur circulaire* ACC *(fig.* 316) tournant autour d'un axe XY situé dans le plan ACB et passant par le centre C. Lorsque le secteur ACB engendre le secteur sphérique, l'arc AB décrit une zone qui est appelée *base* du secteur.

Cela posé, le théorème qui vient d'être énoncé se déduit du précédent, par le mode de démonstration employé au n° 737. Nous laissons au lecteur le soin de faire les développements nécessaires.

752. *Scolie.* — Soient V le volume d'un secteur sphérique, H la hauteur de la zone qui lui sert de base, et R le rayon de la sphère ;

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Théorème XVIII.

753. *La sphère a pour mesure sa surface, multipliée par le tiers du rayon.*

En effet, la sphère peut être considérée comme un secteur ayant pour base la surface sphérique.

754. *Scolie.* — Le volume V d'une sphère de rayon R ou de diamètre D est

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3.$$

755. Un *onglet* sphérique est le corps limité par un fuseau et par les plans des deux grands cercles qui déterminent le fuseau. On démontre facilement qu'un onglet est à la sphère comme l'angle dièdre correspondant à l'onglet est à 4 dièdres droits ; puis l'on arrive à la conséquence suivante :

Corollaire. — Tout onglet a pour mesure le fuseau qui lui sert de base, multiplié par le tiers du rayon.

Théorème XIX.

756. *L'*ANNEAU *engendré par la révolution d'un segment circulaire* ACBD (fig. 317) *tournant autour d'un axe* XY *passant par le centre, est équivalent aux deux tiers d'un cylindre ayant pour diamètre la corde* AB *du segment, et pour hauteur la projection* A'B' *de la corde sur l'axe.*

Menons les rayons AO, BO : l'anneau ACBD se compose du secteur sphérique ACBO, diminué du corps engendré par le triangle ABO. Donc, en désignant par V le volume qu'il s'agit d'évaluer, nous aurons (746, 751)

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{AO}^2.\,A'B' - \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{OD}^2.\,A'B'$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi\,A'B'\,(\overline{AO}^2 - \overline{OD}^2) = \tfrac{2}{3}\pi\,A'B'.\,\overline{AD}^2;$$

donc, etc.

Théorème XX.

757. *Un segment sphérique à deux bases est équivalent à la demi-somme des cylindres de mêmes bases et de même hauteur que le segment, augmentée de la sphère ayant cette hauteur pour diamètre.*

Le *segment* sphérique engendré par la rotation de ACBB'A' autour de XY (*fig.* 317) se compose de l'anneau qui a pour section méridienne le segment circulaire ACB, plus du tronc de cône ABB'A' ; donc

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\,\overline{AD}^2 .\, A'B' + \tfrac{1}{3}\pi\left[\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + AA' .\, BB'\right] .\, A'B'.$$

Le premier terme est égal à

$$\tfrac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2 .\, A'B',$$

parce que

$$AD = \tfrac{1}{2}AB.$$

Menons, par le point A, la parallèle AE à XY ; nous aurons

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{A'B'}^2 + (BB' - AA')^2$$

$$= \overline{A'B'}^2 + \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 - 2AA' .\, BB'.$$

L'égalité précédente devient donc

$$V = \tfrac{1}{6}\pi\left[\overline{A'B'}^2 + \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 - 2\overline{AA'}^2 .\, BB'\right] .\, A'B'$$

$$+ \tfrac{1}{3}\pi\left[\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + AA' .\, BB'\right] .\, A'B'$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{A'B'}^3 + \tfrac{1}{2}\left(\pi\,\overline{AA'}^2 .\, A'B' + \pi\,\overline{BB'}^2 .\, A'B'\right).$$

758. *Remarque.* — Si le point A est situé sur l'axe, le segment sphérique est à une seule base, et son volume devient

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\,\overline{BB'}^2 .\, A'B' + \tfrac{1}{6}\pi\,\overline{A'B'}^3 .$$

759. *Scolie.* — Soient R, r les rayons des bases d'un segment sphérique, H la hauteur, et V le volume :

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\,(R^2 + r^2)\,H + \tfrac{1}{6}\pi H^3.$$

* Théorème XXI.

760. S*i une ligne plane* CADB (fig. 318), *symétrique par rapport à une droite* AB, *tourne autour d'un axe* XY *parallèle à cette droite et situé dans le plan* CADB, *la surface engendrée a pour mesure la longueur de la génératrice, multipliée par*

la circonférence que décrit un point quelconque M *de la droite* AB.

Inscrivons, à CADB, un polygone quelconque AEG...HFA, ayant AB pour axe de symétrie (592). Lorsque la courbe tourne autour de XY, la ligne polygonale inscrite engendre une série de surfaces appartenant à des cônes ou à des troncs de cônes. Évaluons la somme des aires de ces différentes surfaces.

Soient EG, FH deux côtés du polygone, symétriques par rapport à AB ; nous aurons (729)

$$\begin{aligned} \text{surf. EG} &= \pi\,(\text{EE}' + \text{GG}')\,.\,\text{GE}, \\ \text{surf. FH} &= \pi\,(\text{FE}' + \text{HG}')\,.\,\text{FH}; \end{aligned}$$

d'où, à cause de EG = FH,

$$\text{surf. EG} + \text{surf. FH} = \pi\left(\frac{\text{EE}'+\text{FE}'}{2} + \frac{\text{GG}'+\text{H}'\text{G}}{2}\right).(\text{EG} + \text{FH}).$$

Mais

$$\frac{\text{EE}' + \text{FF}'}{2} = \text{ME}', \quad \frac{\text{GG}' + \text{HG}'}{2} = \text{NG}' = \text{ME}';$$

donc

$$\text{surf. EG} + \text{surf. FG} = (\text{EG} + \text{FH})\,.\,2\pi\text{ME}'.$$

De même,

$$\begin{aligned} \text{surf. AE} + \text{surf. AF} &= (\text{AE} + \text{AF})\,.\,2\pi\text{ME}', \\ \text{surf. GI} + \text{surf. HK} &= (\text{GI} + \text{HK})\,.\,2\pi\text{ME}', \text{ etc.}; \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$\text{surf. AEG} \ldots \text{HFA} = \text{périm. AEG} \ldots \text{HFA}\,.\,\text{circonf. ME}'.$$

Le théorème étant démontré pour la surface décrite par le polygone AEG..., on l'étend, par la *méthode des limites*, à la surface engendrée par la courbe.

* 761. Supposons que la génératrice ACBD (*fig.* 319) soit une circonférence, auquel cas la surface engendrée est celle d'un *tore ;* soient R le rayon de cette circonférence et *a* la

distance OM du centre à l'axe de rotation ; nous aurons, en désignant par A l'aire du tore,

$$A = 4\pi^2 Ra;$$

et si $a = R$, auquel cas la circonférence tourne autour de la tangente,

$$A = 4\pi^2 R^2.$$

Ainsi :

762. *Corollaire.* — *L'aire du tore engendré par une circonférence de rayon* R, *tournant autour de la tangente, est à l'aire de la surface sphérique de rayon* R, *comme* π *est à* 1.

* THÉORÈME XXII.

763. *Si une figure plane, symétrique par rapport à une droite, tourne autour d'un axe parallèle à cette droite et situé dans le plan de la figure, l'anneau ainsi engendré a pour mesure l'aire de la génératrice, multipliée par la circonférence que décrit un point quelconque de la droite.*

Ce théorème se démontre comme le précédent.

764. *Corollaire.* — *Soient* R *le rayon du cercle générateur d'un tore,* a *la distance du centre à l'axe de rotation, et* V *le volume du tore,*

$$V = 2\pi^2 R^2 a;$$

et, si $a = R$,

$$V = 2\pi^2 R^3.$$

COMPARAISON DES AIRES ET DES VOLUMES.

765. Nous avons donné, à la fin du Livre VI, quelques théorèmes sur les rapports qui existent entre les volumes de certains polyèdres. On peut, par analogie, comparer les aires et les volumes des cylindres, des cônes, etc. ; et l'on arrive aux propositions suivantes :

1° *Les surfaces latérales de deux cylindres de même base sont entre elles comme les hauteurs des cylindres ;*

2° *Les surfaces latérales de deux cylindres de même hauteur sont entre elles comme les rayons des bases des cylindres ;*

3° *Deux cylindres de même base sont entre eux comme leurs hauteurs*, etc.;

4° *Si un cône quelconque est coupé par un plan parallèle à la base, les surfaces latérales du cône et de celui qui résulte de la section sont entre elles comme les carrés des hauteurs. Les volumes de ces cônes sont comme les cubes des hauteurs*, etc.;

5° *Les surfaces de deux sphères sont comme les carrés de leurs rayons. Les sphères sont comme les cubes de leurs rayons*, etc.

Théorème XXIII.

766. 1° *La surface d'une sphère est équivalente aux deux tiers de la surface totale du cylindre circonscrit ;*

2° *La sphère est équivalente aux deux tiers du cylindre circonscrit.*

Si le demi-cercle AEB *(fig.* 320) tourne autour d'un diamètre AB, de manière à engendrer une sphère, le rectangle ACDB, *circonscrit* au demi-cercle, engendre un cylindre dont la surface latérale *touche* la sphère suivant la circonférence décrite par le point de contact E, et dont les bases touchent la sphère aux points A, B. Le cylindre est donc *circonscrit* à la sphère.

Soit R le rayon OA, nous aurons

$$\text{surf. sph.} = 4\pi R^2,$$
$$\text{surf. cyl.} = 2\pi R \,.\, 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;$$

donc

$$\frac{\text{surf. sph.}}{\text{surf. cyl.}} = \tfrac{2}{3}.$$

De même,

$$\text{vol. sph.} = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$
$$\text{vol. cyl.} = \pi R^2 \,.\, 2R = 2\pi R^3;$$

donc

$$\frac{\text{vol. sph.}}{\text{vol. cyl.}} = \tfrac{2}{3}.$$

Remarquons, en même temps, que *la surface de la sphère est équivalente à la surface latérale du cylindre circonscrit.*

APPENDICE AU LIVRE HUITIÈME.

767. Nous avons démontré, dans l'Appendice au Livre quatrième, que parmi toutes les figures planes, isopérimètres, le cercle a la plus grande aire. Nous allons maintenant faire voir que, *parmi tous les corps de même surface, la sphère a le plus grand volume.*

Cette proposition repose sur plusieurs lemmes préliminaires.

LEMME I.

768. *Si, par les milieux* a, b, c (fig. 321) *des arêtes latérales d'un prisme triangulaire tronqué, on fait passer un plan :*

1° *Les deux segments du tronc sont équivalents ;*

2° *La section* abc *est généralement plus petite que la demi-somme des bases* ABC, A'B'C' *du tronc.*

1° Le point a étant le milieu de AA', les deux extrémités de cette droite sont également éloignées du plan abc. De même, les extrémités de BB' et de CC' sont respectivement à égales distances de ce plan. Donc, les deux segments du tronc, ayant déjà même base abc, sont équivalents (562).

2° Soient DEF, D'E'F' (*fig.* 322) les projections des bases ABC, A'B'C', faites sur le plan abc. Les droites DD', EE', FF' sont parallèles entre elles, et les points a, b, c en sont les milieux. Conséquemment,

$$abc = \mathrm{DEF} + \mathrm{E}bc\mathrm{F} - \mathrm{E}ba\mathrm{D} - \mathrm{D}ac\mathrm{F},$$
$$abc = \mathrm{D'E'F'} + \mathrm{E'}ba\mathrm{D'} + \mathrm{D'}ac\mathrm{F'} - \mathrm{E'}bc\mathrm{F'}.$$

Les six trapèzes sont équivalents deux à deux, comme ayant des bases égales et des hauteurs égales ; donc

$$abc = \frac{\mathrm{DEF} + \mathrm{D'E'F'}}{2}.$$

Ainsi, *la section* abc *du tronc est équivalente à la demi-somme des projections des bases*. Or, chaque base est au moins équivalente à sa projection (553) ; donc, etc.

Lemme II.

769. *Si l'on mène, dans un corps terminé par une surface convexe, une série de droites parallèles, les milieux de toutes ces droites sont situés sur une surface qui divise le corps en deux parties équivalentes, et qui est plus petite que la moitié de la surface du corps.*

Cette proposition se déduit de la précédente par la méthode des limites.

Lemme III.

770. 1° *Deux surfaces, symétriques par rapport à un plan, sont équivalentes;*

2° *Les corps limités par ces surfaces sont équivalents.*

Cette proposition est vraie pour les polyèdres symétriques (615) ; donc, etc.

Lemme IV.

771. *Une surface qui, avec une aire donnée, renferme un volume maximum, est convexe.*

Si la surface offre une *partie rentrante*, on peut mener un plan qui coupe cette partie suivant une courbe a, et qui coupe ensuite la surface du corps suivant une seconde courbe b, enveloppant la première. Supposons, pour fixer les idées, que la partie rentrante, ayant pour *base* a, soit *au-dessous* du plan. Si l'on construit, sur la même base, une figure qui soit symétrique de cette partie, par rapport au plan, on augmentera le volume du corps, sans augmenter la surface qui le limite (Lemme III); ainsi, la surface non convexe proposée ne renfermerait pas un volume maximum, ce qui est contre l'hypothèse; donc, etc. (*Voyez* n° 403.)

LEMME V.

772. *Tout plan, qui divise en deux parties équivalentes un corps de volume maximum, divise aussi en deux parties équivalentes la surface de ce corps.* (*Voyez* n° 403.)

LEMME VI.

773. *Une surface qui, avec une aire donnée, renferme un corps de volume maximum, a une infinité de plans de symétrie.*

Coupons cette surface par un plan quelconque qui la divise en deux parties équivalentes : le corps terminé par cette surface sera partagé aussi en deux parties équivalentes. Si la moitié supérieure F (*fig.* 323) n'est pas symétrique de la moitié inférieure E, construisons, au-dessus du plan ACBD, une surface E', symétrique de E par rapport à ce plan : les deux surfaces E', F seront équivalentes, et les deux corps renfermés entre ces surfaces et le plan ACBD seront équivalents (770).

Coupons les surfaces E', F par une série de droites parallèles : les milieux de ces droites seront situés sur une surface S, moindre que $\frac{E' + F}{2}$, c'est-à-dire moindre que F (769); de plus, le corps compris entre les surfaces S, E sera équivalent au corps donné ; donc, à cause de

$$S + E < F + E,$$

on pourrait enfermer le corps primitif sous une surface ayant une aire plus petite que l'aire donnée ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lemme VII.

774. *Toute surface qui a une infinité de plans de symétrie, est une sphère.*

Menons, dans la surface, trois cordes parallèles quelconques AA′, BB′, CC′ (*fig.* 324) : elles sont perpendiculaires au plan MN qui passe par les milieux D, E, F.

Par les points A, A′, B, C, faisons passer une sphère : le plan MN, perpendiculaire au milieu de la droite AA′ qui joint deux points de cette surface, divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à AA′ ; donc les points B′, C′ appartiennent à la sphère.

Actuellement, traçons la corde AB′; et menons dans la surface, par les points B,C, deux cordes parallèles AB : les extrémités de ces cordes appartiendront encore à la même sphère.

Il suit de là que si l'on prend arbitrairement, sur la surface, quatre points A, A′, B, C, et que si l'on fait passer une sphère par ces quatre points, on pourra construire une infinité de points communs à la surface et à la sphère ; donc cette surface ne diffère pas de la sphère.

Théorème.

775. *Parmi tous les corps de surfaces équivalentes, la sphère a le plus grand volume.*

Cette proposition résulte évidemment de celles qui précèdent.

PROBLÈMES RELATIFS AU LIVRE HUITIÈME.

Problème I.

Un demi-décagone régulier, dont le côté est c, *tourne autour du diamètre du cercle inscrit. Quel est le volume* V *du corps engendré ?*

Ce corps se compose de celui qui est engendré par le secteur polygonal régulier OBCDEFO (*fig.* 325), augmenté des cônes OAB, OGF.

Or (750),

$$\text{vol. OB... FO} = \tfrac{4}{3}\pi\overline{\text{OA}}^3,$$

$$\text{vol. OAB} = \text{vol. OGF} = \tfrac{1}{3}\pi\overline{\text{AB}}^2 \,.\, \text{OA} \,;$$

donc, en appelant a l'apothème OA :

$$\text{V} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 + \tfrac{1}{6}\pi a c^2.$$

Dans le décagone régulier, le rapport de l'apothème au côté est (343)

$$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5} - 1)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

donc,

$$\text{V} = \tfrac{1}{12}\pi\, c^3 \left[2(5 + 2\sqrt{5}) + 1\right]\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi c^3 (11 + 4\sqrt{5})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

ou, en effectuant,

$$\text{V} = \tfrac{1}{12}\pi c^3 \sqrt{1885 + 842\sqrt{5}}.$$

L'expression du volume, en fonction de l'apothème a, serait bien moins compliquée.

En effet,

$$\text{V} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 + \tfrac{2}{3}\pi a^3 \,.\, \frac{1}{5 + \sqrt{5}} = \tfrac{4}{3}\pi a^3 + \tfrac{2}{15}\pi a^3 (5 - 2\sqrt{5}),$$

ou

$$\text{V} = \tfrac{2}{15}\pi a^3 \left[15 - 2\sqrt{5}\right].$$

PROBLÈME II.

Les angles d'un triangle sphérique sont, respectivement,

$$A = 48^\circ 18', \quad B = 63^\circ 12', \quad C = 73^\circ 24';$$

le rayon de la sphère est $R = 0^m,19$. *Trouver, à moins de* 1 *millimètre carré, la surface du triangle.*

Si l'on prend pour unités d'angle et de surface l'angle droit et le triangle tri-rectangle, la mesure du triangle est

$$T = A + B + C - 2.$$

D'après les données, la somme des trois angles $= 184^\circ 54'$; donc

$$T = \frac{184 + \frac{54}{60}}{90} - 2 = \tfrac{1849}{900} - 2 = \tfrac{49}{900}.$$

Ainsi, le triangle proposé est équivalent aux $\frac{49}{900}$ du triangle tri-rectangle.

D'ailleurs, par rapport au mètre carré, l'aire de la sphère est $4\pi(0,19)^2$; celle du triangle tri-rectangle est donc $\frac{1}{2}\pi\ (0,19)^2$; et, par suite, l'aire du triangle proposé sera

$$a = \tfrac{1}{2}\pi \,.\, (0,19)^2 \,.\, \tfrac{49}{900}.$$

En opérant par logarithmes, on trouve

$$\begin{array}{rcl}
\log \pi & = & 0,4971499 \\
2 \log 0,19 & = & \bar{2},5575072 \\
\log 49 & = & 1,6901961 \\
\log 2 & = & 0,3010300 \ - \\
\log 900 & = & 2,9542425 \ - \\
\hline
\log a & = & \bar{3},4895807 \\
a & = & 0,003087....
\end{array}$$

La surface du triangle est donc d'environ 3087 millimètres carrés.

PROBLÈME III.

Le litre, *qui sert à mesurer les liquides, est un cylindre dans lequel la hauteur est double du diamètre de la base, et dont la* capacité *est 1 décimètre cube. Quelles sont les dimensions de ce corps ?*

Prenons pour unité le décimètre; représentons par h la hauteur du cylindre : nous aurons (725)

$$1 = \pi \left(\frac{h}{4}\right)^2 h;$$

d'où

$$h = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}}.$$

$$\begin{array}{rl} \log 16 = & 1,2041200 \\ \log \pi = & 0,4971499 - \\ \hline & 0,7069701 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{3} = 0,2356567 = \log h,$$
$$h = 1,7205.$$

Ainsi, la hauteur du litre $= 172^{mm},05$; et le rayon de la base $= 43^{mm},01$.

PROBLÈME IV.

Quelle est la longueur d'un fil de platine ayant pour épaisseur $\frac{1}{1200}$ de millimètre, et pesant un gramme?

Le *poids spécifique* [1] du platine, par rapport à l'eau, est à peu près égal à 20; si donc le *centimètre cube* est pris pour unité, le volume du fil sera représenté par $\frac{1}{20}$.

Supposons ce fil cylindrique; nous aurons

$$\frac{1}{20} = \pi \left(\frac{1}{2400}\right)^2 . h,$$

h étant la hauteur du cylindre ou la longueur du fil.

[1] *Voyez* les Traités de Physique.

Cette équation donne

$$h = \frac{1}{\pi}\,120\,.\,2400.$$

$$\begin{aligned}
\log 120 &= 2,0791812 + \\
\log 2400 &= 3,3803112 + \\
\log \pi &= 0,4971499 - \\
\hline
\log h &= 4,9622425, \\
h &= 91673,2....
\end{aligned}$$

Ainsi, la longueur du fil de platine serait d'environ 917 mètres.

Problème V.

Quel serait le rayon d'une sphère d'or valant 20 *francs?*

Le prix du kilogramme d'or est $3444^{\text{f}},45$; donc la sphère pèserait $\frac{20^{\text{g}}}{3,44445}$. D'ailleurs, le poids spécifique de l'or étant à peu près, 19,26, le volume de la sphère sera, en centimètres cubes ,

$$\frac{20}{3,44445\,.\,19,26}.$$

Soit R le rayon inconnu ; nous aurons (754),

$$\frac{20}{3,44445\,.\,19,26} = \tfrac{4}{3}\pi R^3;$$

d'où

$$R = \sqrt[3]{\frac{5}{3,44445\,.\,6,42\,.\,\pi}}.$$

Les logarithmes donnent ensuite

$$\begin{aligned}
\log 5 &= 0,6989700 \\
\log 3,44445 &= 0,5371199 - \\
\log 6,42 &= 0,8075350 - \\
\log \pi &= 0,4971499 - \\
\hline
& \quad \bar{2},8571652
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{3} = 1{,}6190551 = \log R,$$
$$R = 0{,}41595.$$

Le rayon de la sphère serait donc, à peu près, $4^{mm},16$.

Problème VI.

Evaluer le volume de la Terre, supposée sphérique.

D'après la définition du mètre, la longueur du méridien de Paris est, en prenant le myriamètre pour unité,

$$2\pi R = 4000;$$

d'où

$$R = \frac{2000}{\pi},$$

R étant le *rayon de la Terre.*

Cette valeur, substituée dans la formule

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

donne

$$V = \tfrac{4}{3}\frac{(2000)^2}{\pi^2} = \frac{32\ 000\ 000\ 000}{3\pi^2}.$$

Opérant par logarithmes, on trouve :

$$\begin{aligned} \log 32\ 000\ 000\ 000 &= 10{,}505\ 149\ 98\ + \\ 2\log\pi &= 0{,}994\ 299\ 74\ - \\ \log 3 &= 0{,}677\ 121\ 25\ - \\ \hline \log V &= 9{,}033\ 728\ 99. \end{aligned}$$

V = 1 080 759 000 *myriamètres cubes.*

FIN DU LIVRE HUITIÈME ET DERNIER.

EXERCICES SUR LE LIVRE VIII.

1. A une demi-circonférence ADB (*fig.* 325), on mène une tangente DC; après quoi l'on fait tourner la figure AFDC autour de ABC. Comment doit-on diriger la tangente pour que la surface engendrée par cette droite ait un rapport donné m avec la zone ADG?

2. Quelle est l'étendue de la partie de la surface du globe, visible pour un aéronaute placé à une hauteur h au-dessus de cette surface?

3. Par les extrémités de deux rayons OB, OC (*fig.* 327), on mène les tangentes BA, CA, lesquelles se coupent en A. On demande d'exprimer, en fonction du rayon R et de la projection BE de l'arc BFC, les volumes des corps engendrés par le triangle BOC, par le segment BCF et par le triangle BACF, lorsque ces trois figures tournent autour du rayon OB.

4. Calculer le volume d'une lentille biconvexe, connaissant l'épaisseur de la lentille, et les rayons des sphères qui en forment les deux faces.

5. Un cône est circonscrit à deux sphères de rayons R, R′, tangentes extérieurement. Quel est le volume de l'espace compris entre les trois surfaces?

6. Circonscrire, à une sphère donnée, un cône droit dont la surface totale soit équivalente à celle d'un cercle donné.

7. Couper une sphère par un plan, de manière que le segment sphérique ait, avec le secteur sphérique correspondant, un rapport donné.

8. A une sphère donnée, inscrire un cylindre ayant un rapport donné avec la somme des deux segments sphériques adjacents.

9. A une sphère donnée, inscrire un cône équivalent au segment sphérique adjacent.

10. Couper un triangle ABC (*fig.* 328) par une parallèle DE à la base AB, de manière que les corps engendrés par les segments CDE, ABDE, tournant autour de cette base, supposée fixe, soient équivalents.

11. Couper un triangle ABC par une droite AD passant par le sommet A, de manière que les corps engendrés par les segments ABD, ACD, tournant autour d'un axe donné, situé dans leur plan, soient équivalents.

12. D'un point pris sur la surface d'une sphère donnée R, comme centre,

décrire une surface sphérique telle, que la partie comprise entre les surfaces des deux sphères ait un volume donné.

13. Trouver le rayon d'une sphère équivalente à la limite de la somme d'une infinité de sphères dont les rayons décroîtraient en progression par quotient.

14. A un cône droit on inscrit une première sphère O ; puis, dans l'espace compris entre celle-ci et la surface latérale du cône, on inscrit une deuxième sphère O′ ; et ainsi de suite indéfiniment. Quelle est la limite des volumes de toutes ces sphères ?

15. On suppose qu'après avoir formé une pile triangulaire de boulets, on mène trois plans, tangents aux trois faces de cette pile et formant, avec le plan horizontal d'appui, un tétraèdre régulier. Quel est le rapport entre la partie pleine et la partie vide de ce tétraèdre ?

16. Les milieux des arêtes d'un polyèdre régulier sont situés sur la surface d'une sphère à laquelle les arêtes sont tangentes, et dont le centre est celui du polyèdre. De plus, cette sphère est coupée, par les faces du polyèdre, suivant des circonférences inscrites aux faces.

Cela étant admis, on demande d'évaluer, en fonction du côté c du polyèdre, la somme des calottes sphériques ayant pour bases ces circonférences.

17. Diviser une zone en moyenne et extrême raison, par un plan parallèle aux deux bases.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

FIN.

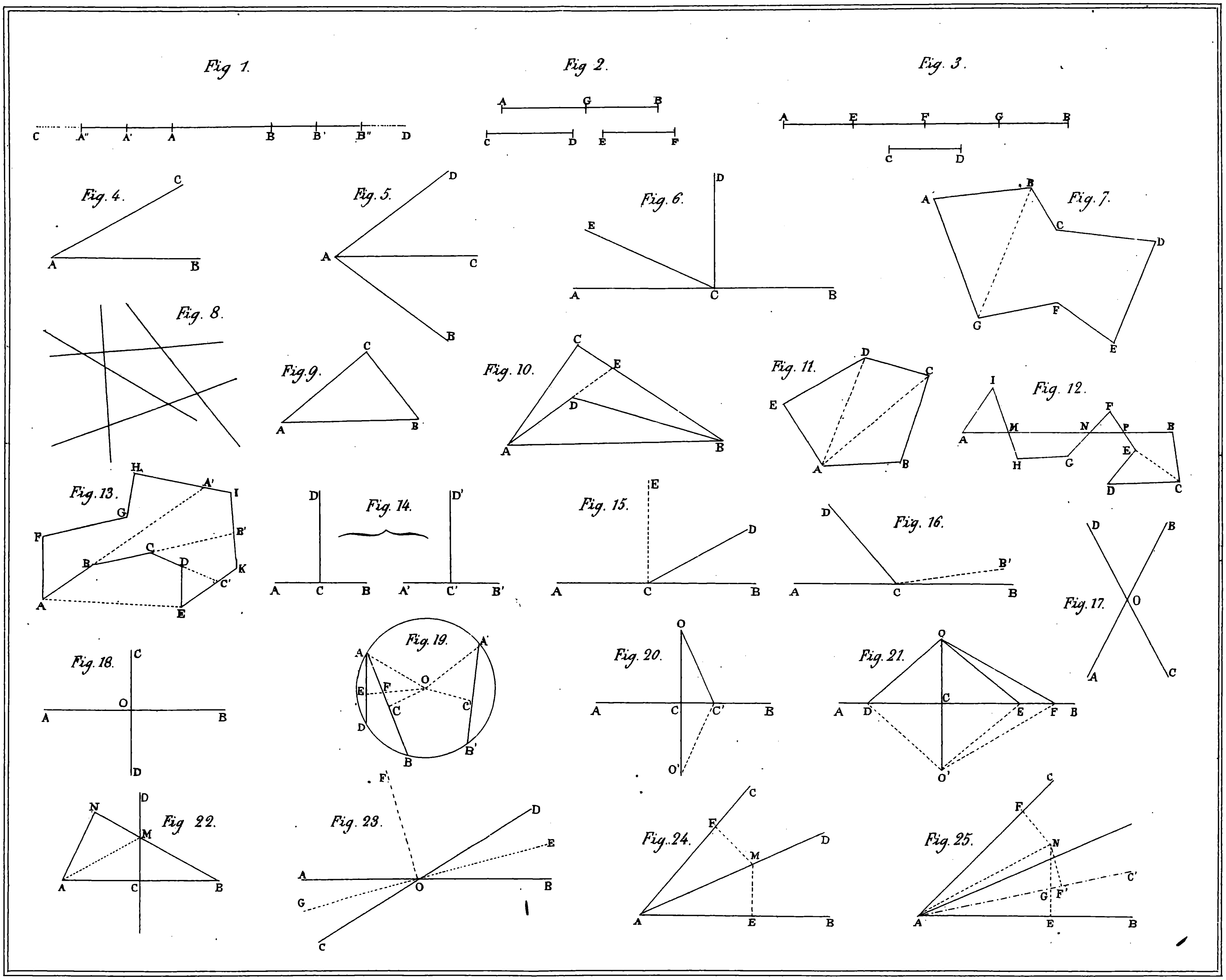


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.

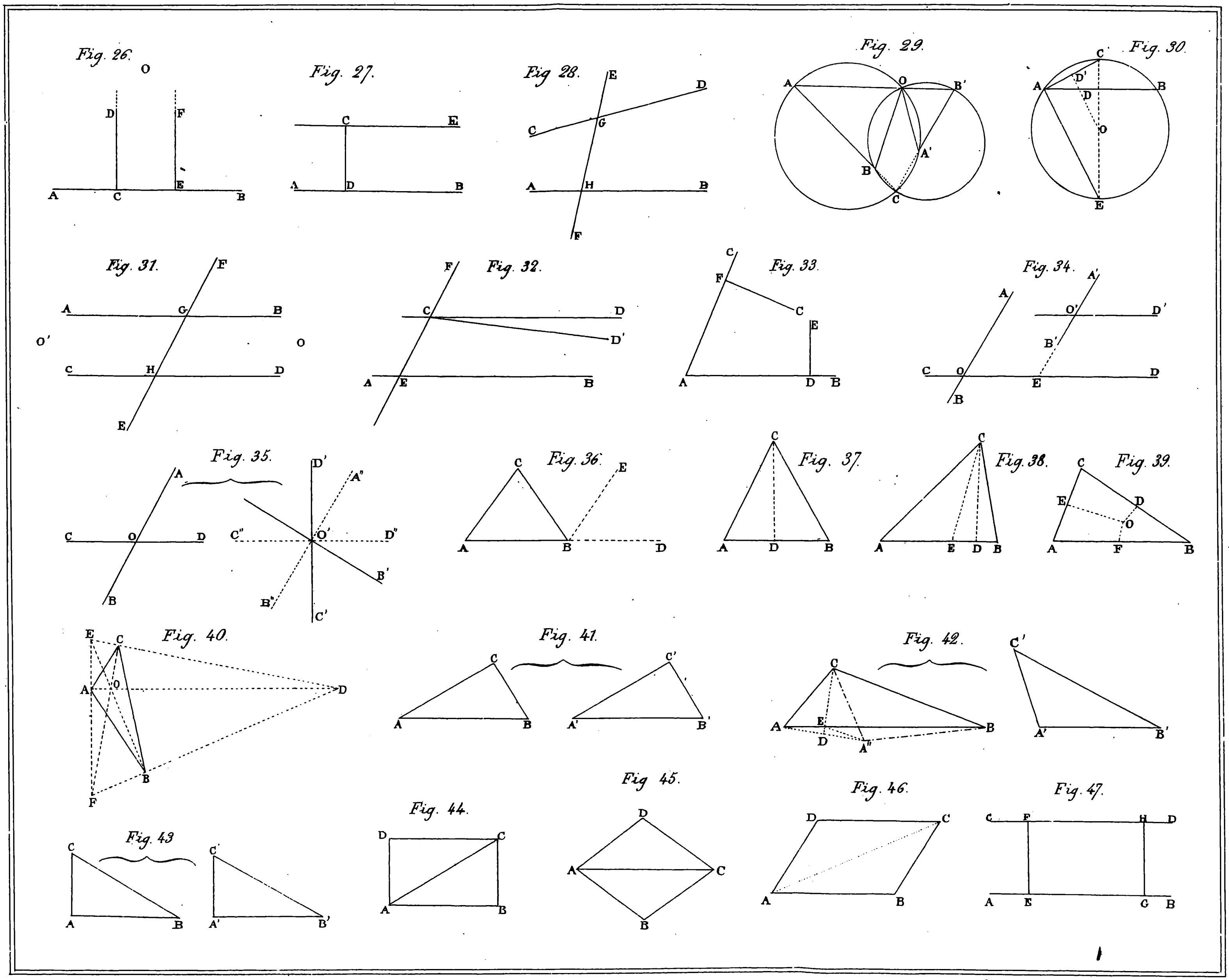
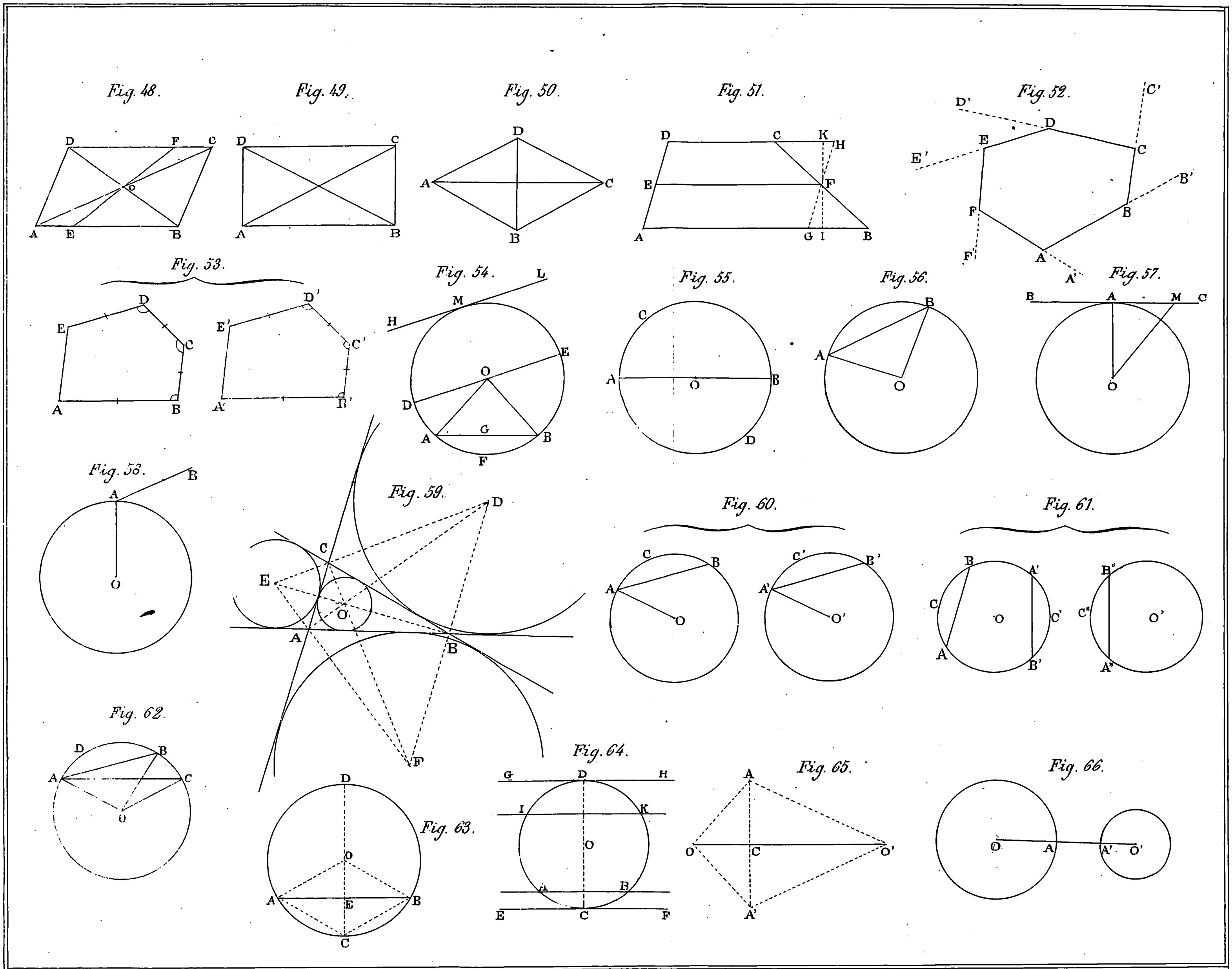
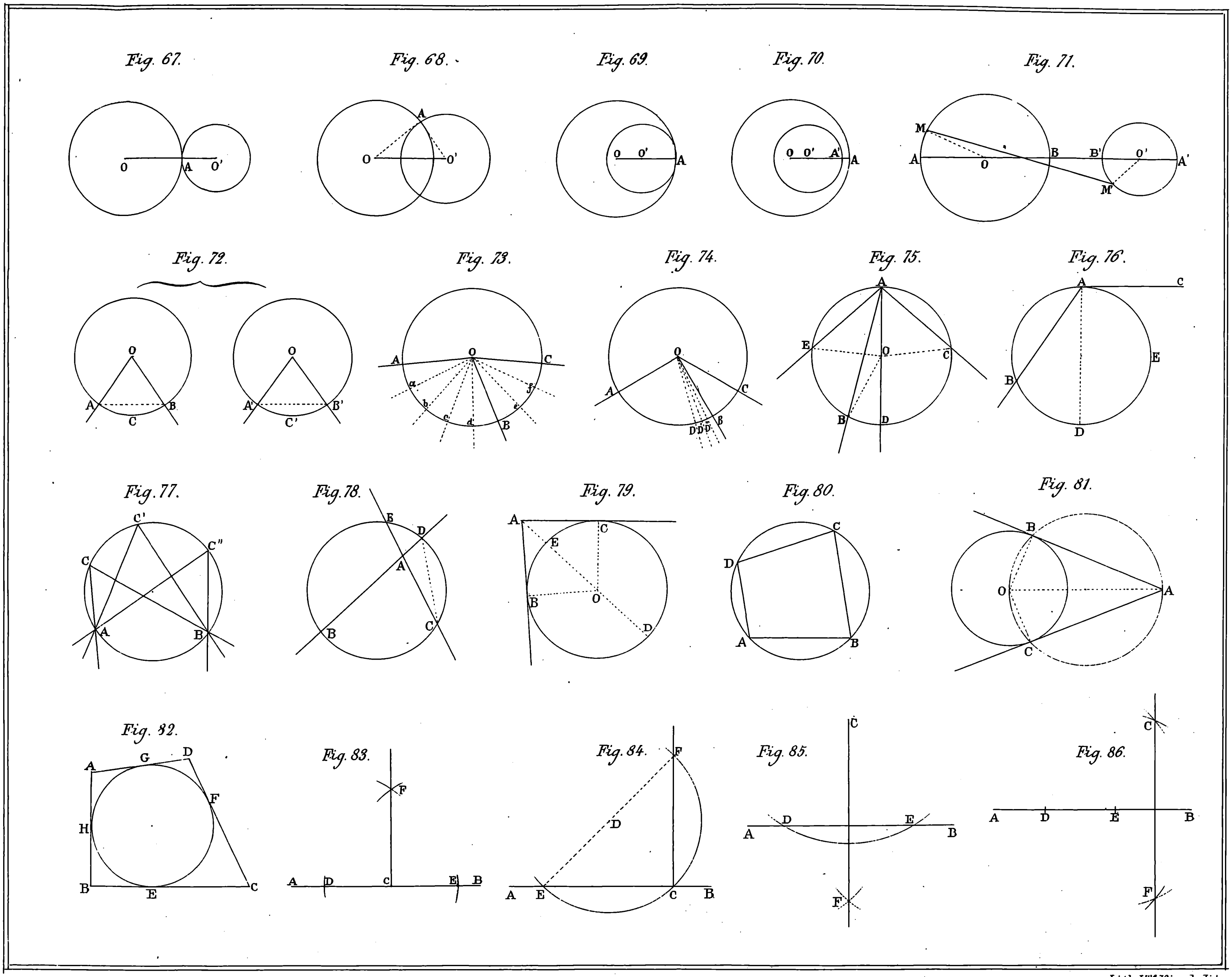


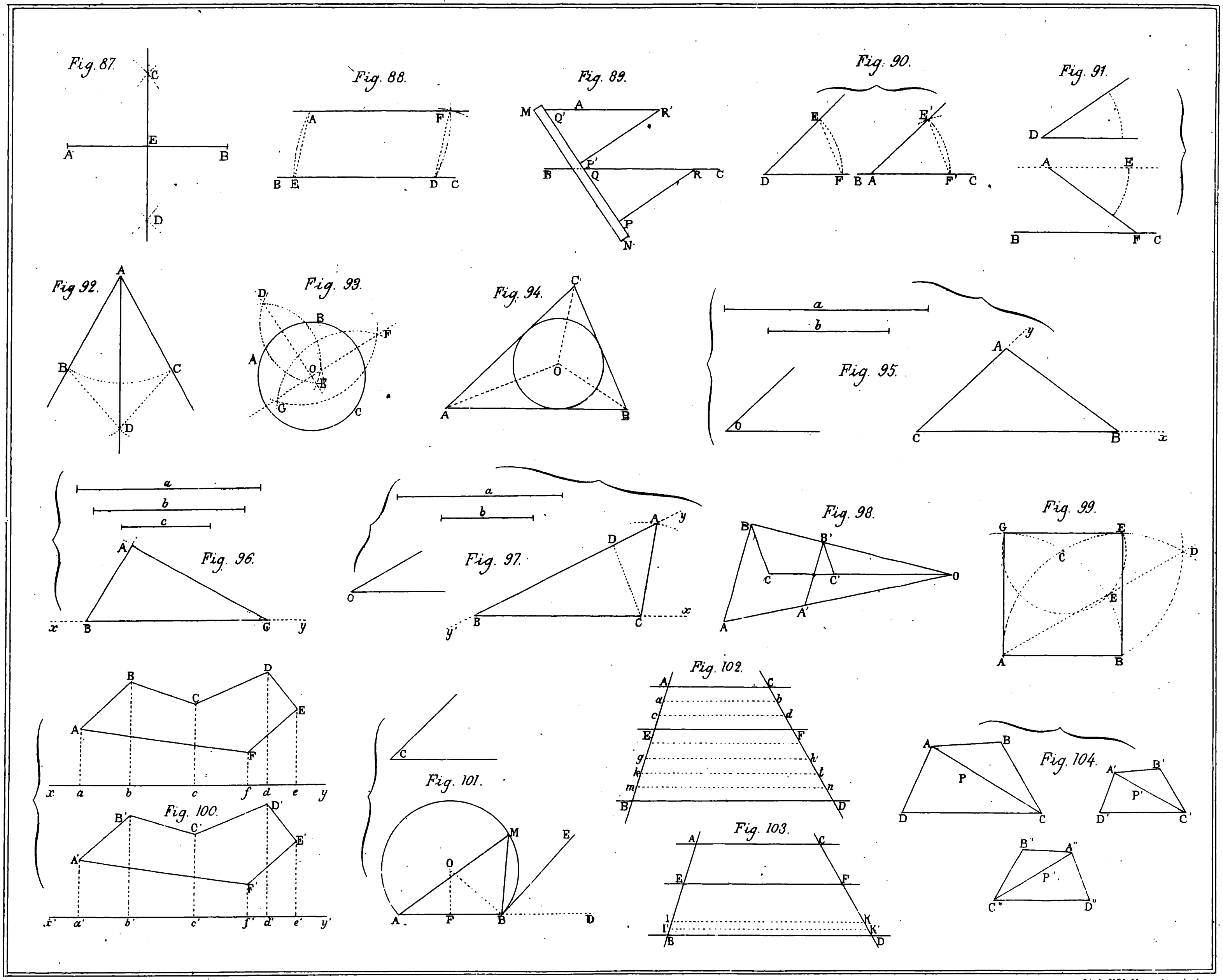
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.



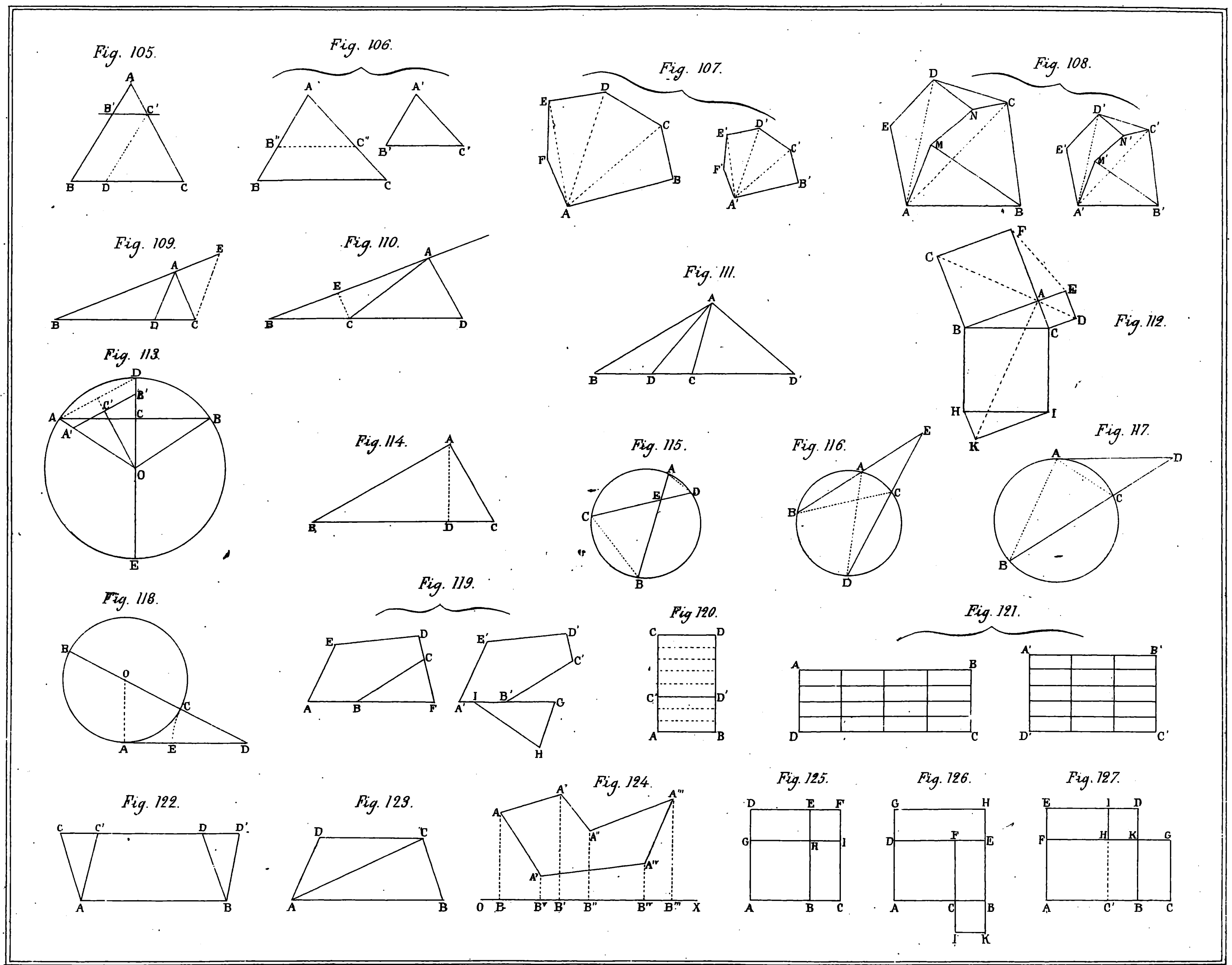
Lith. Vve Kirsch, Liège.



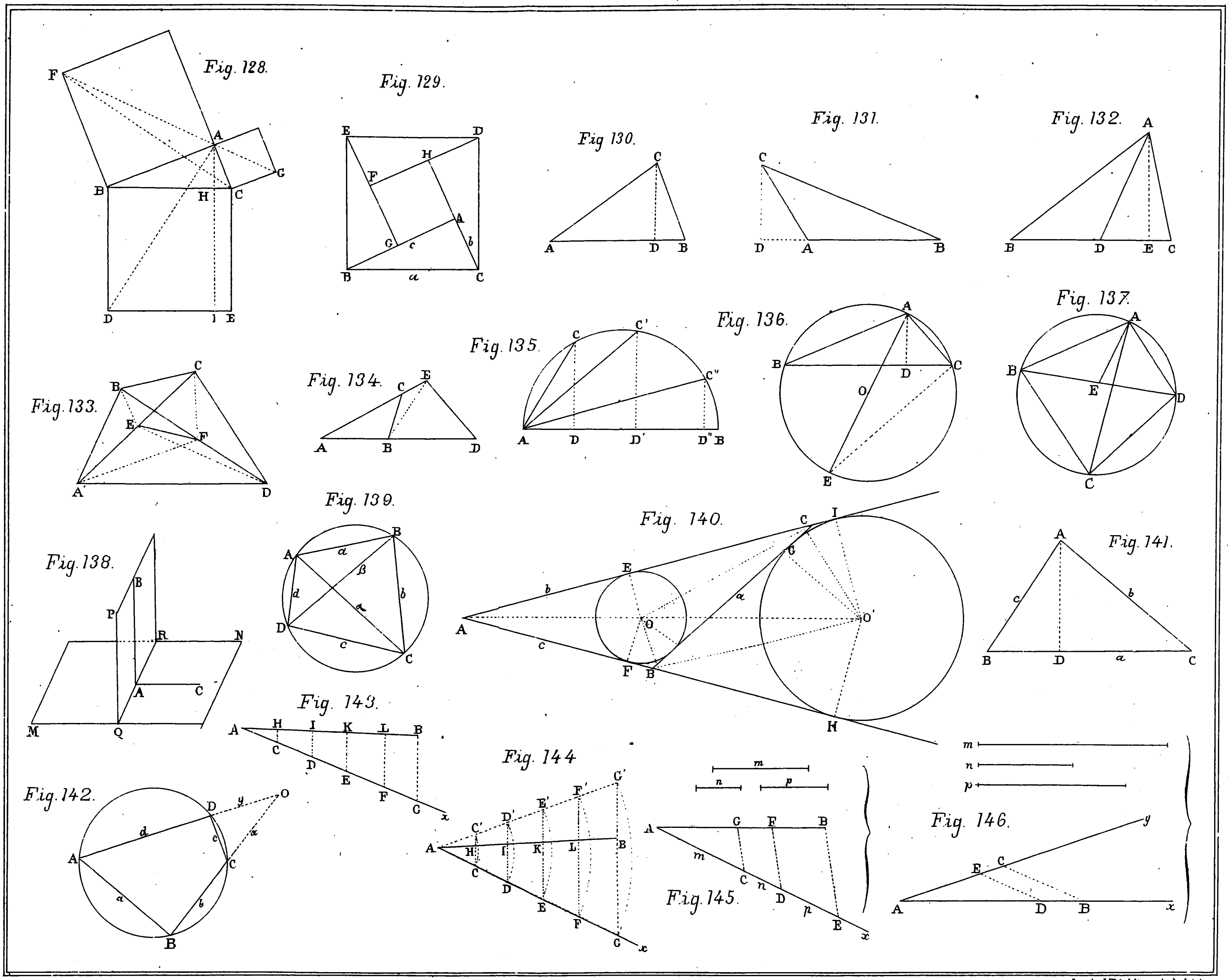
Lith. V^{ve} Kirsch, Liège.



Lith Vve Kirsch à Liège



Lith. V^{ve} Kirsch à Liége.



Lith: V^{ve} Kirsch à Liége.

Fig. 147.

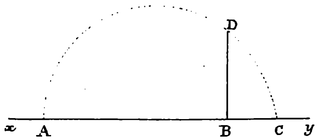


Fig. 148.

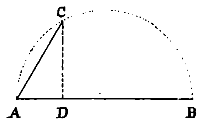


Fig. 149

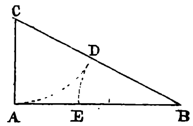


Fig. 150.

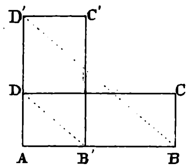


Fig. 151.

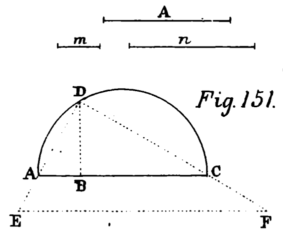


Fig. 152.

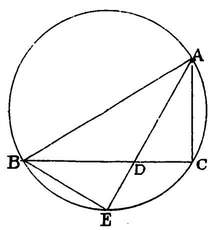


Fig. 153.

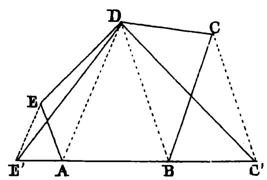


Fig. 154.

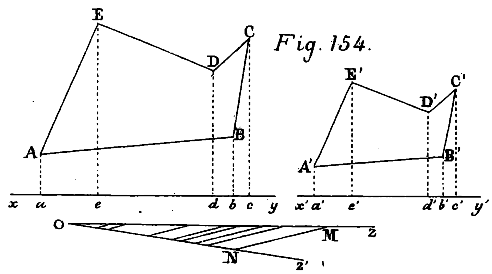


Fig. 155.

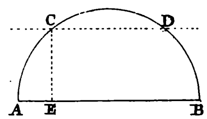


Fig. 156.

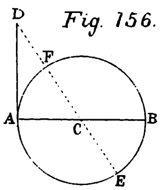


Fig. 157.

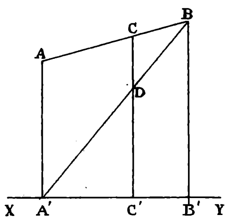


Fig. 158.

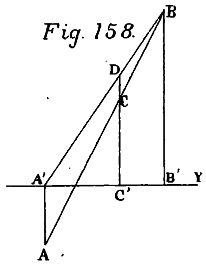


Fig. 159.

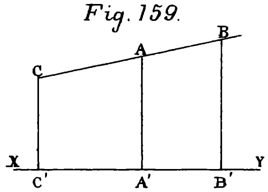


Fig. 160.

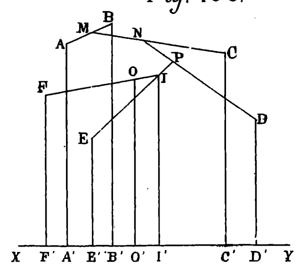


Fig. 161.

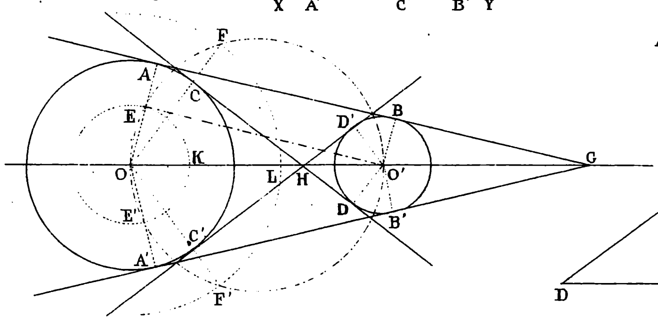


Fig. 161 bis

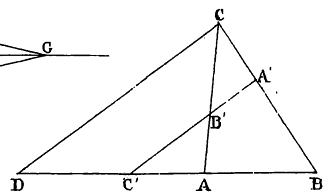


Fig. 162 bis

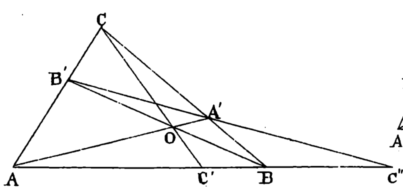


Fig. 162.

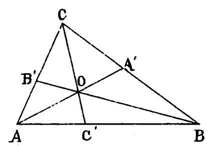


Fig. 163.

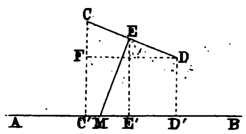


Fig. 164.

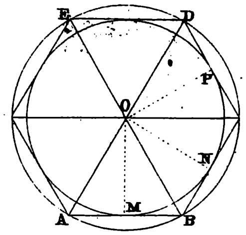


Fig. 165.

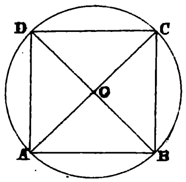


Fig. 166

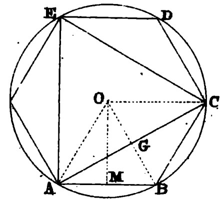


Fig. 167.

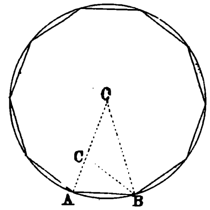


Fig. 168.

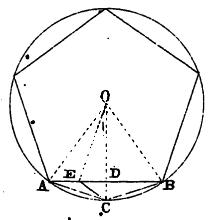


Fig. 169.

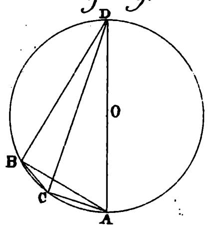


Fig. 170.

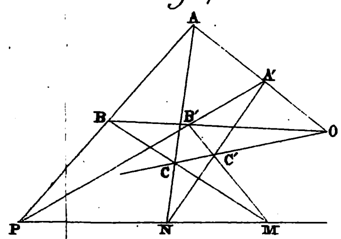


Fig. 171.

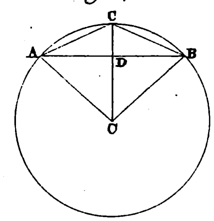


Fig. 172

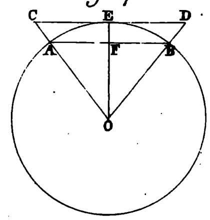


Fig. 173.

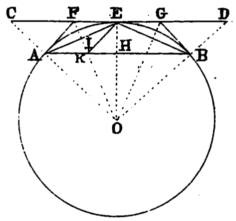


Fig. 174.

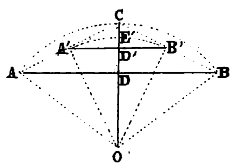


Fig. 175.

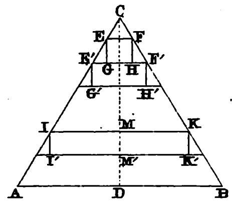


Fig. 176.

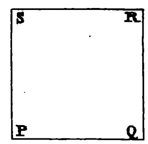


Fig. 177.

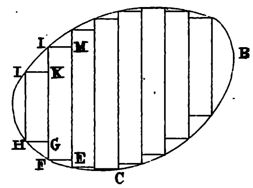


Fig. 178.

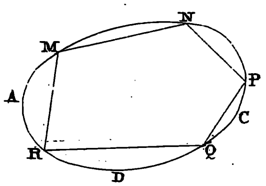


Fig. 179.

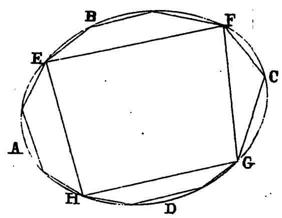


Fig. 180.

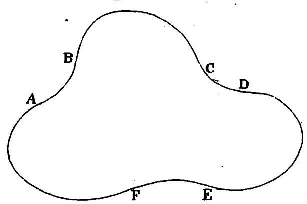
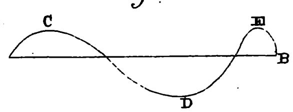
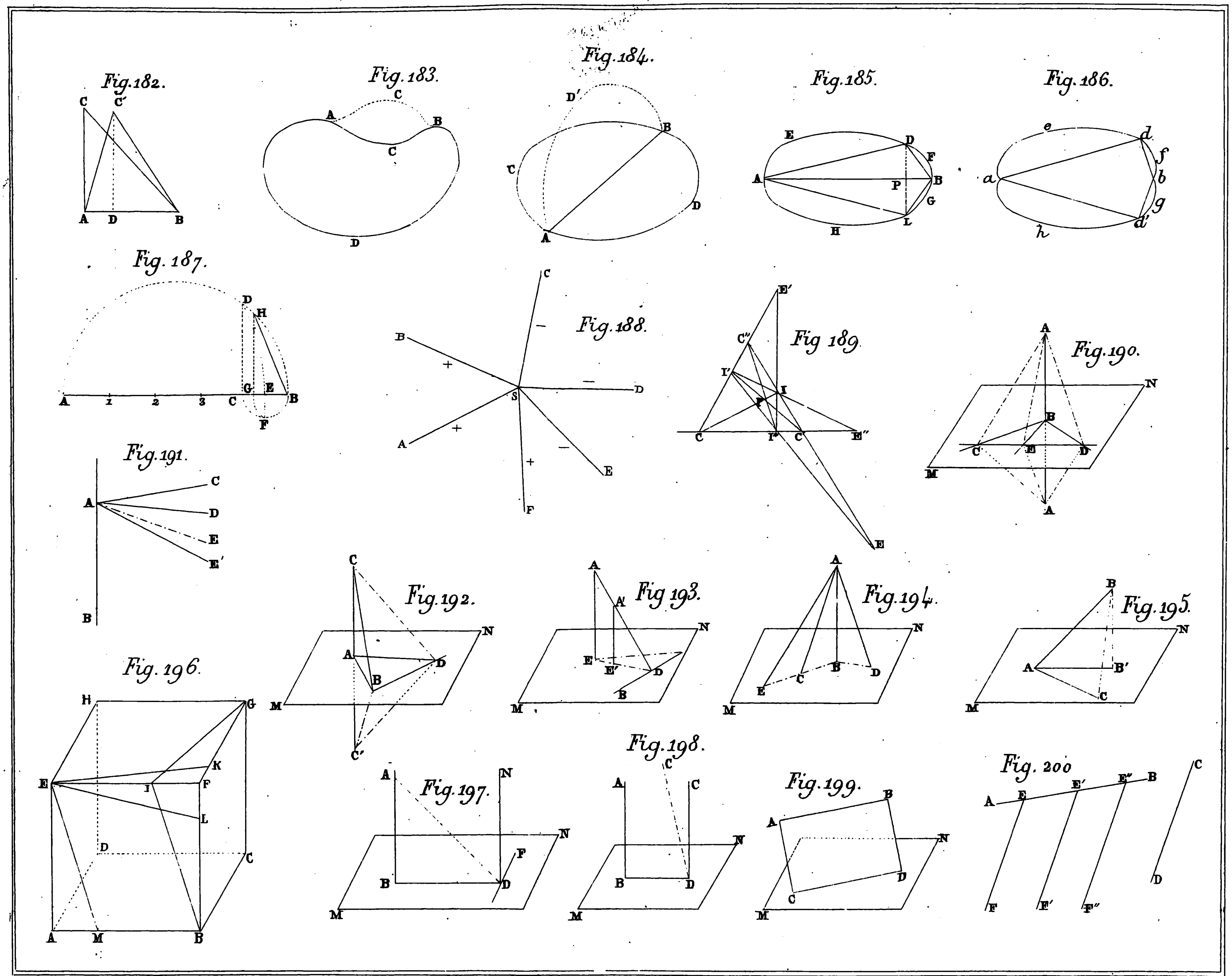


Fig. 181.



Lith. Vᵉ Kirsch à Liége.



Lith. Vᵉ Kirsch, à Liège.

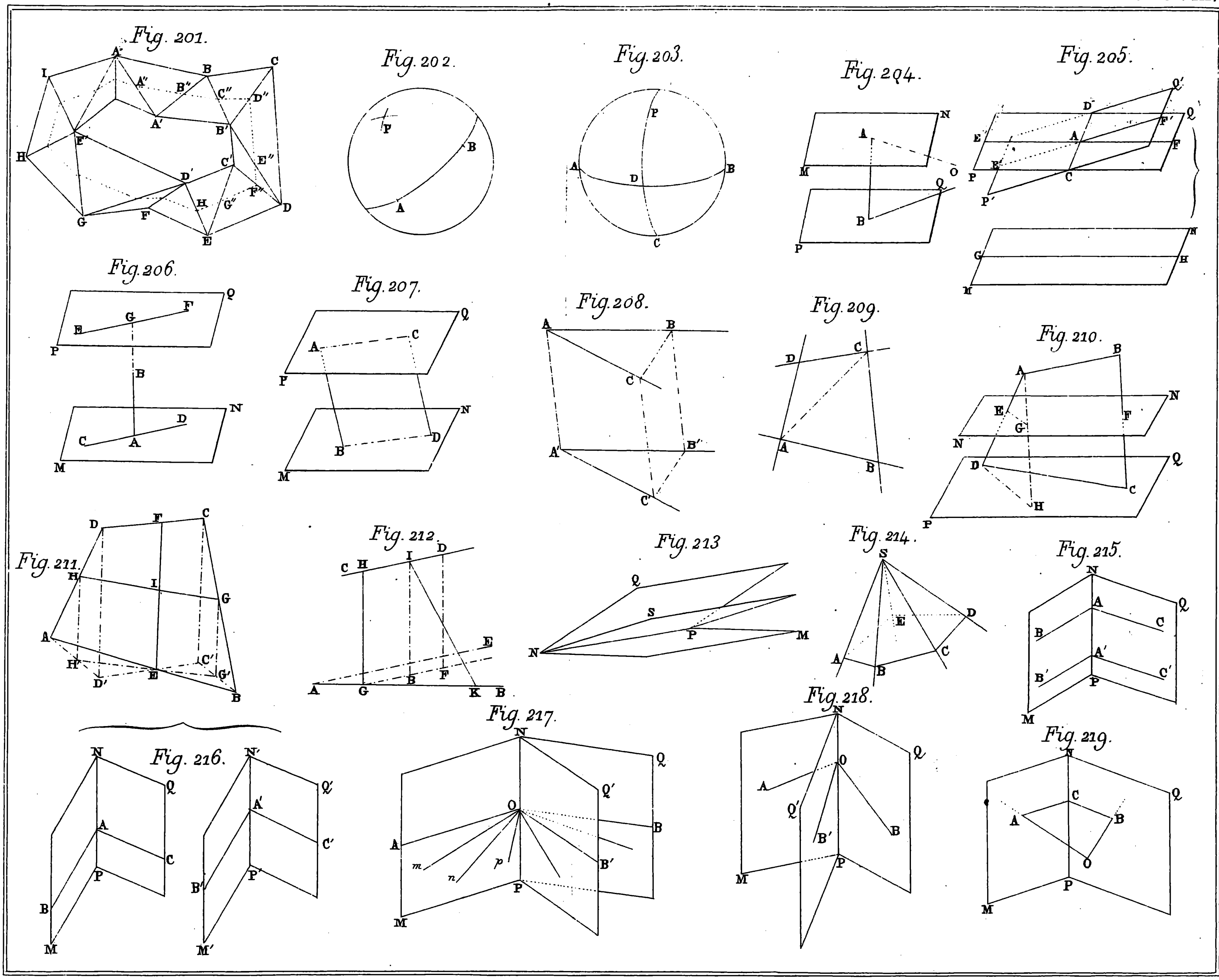
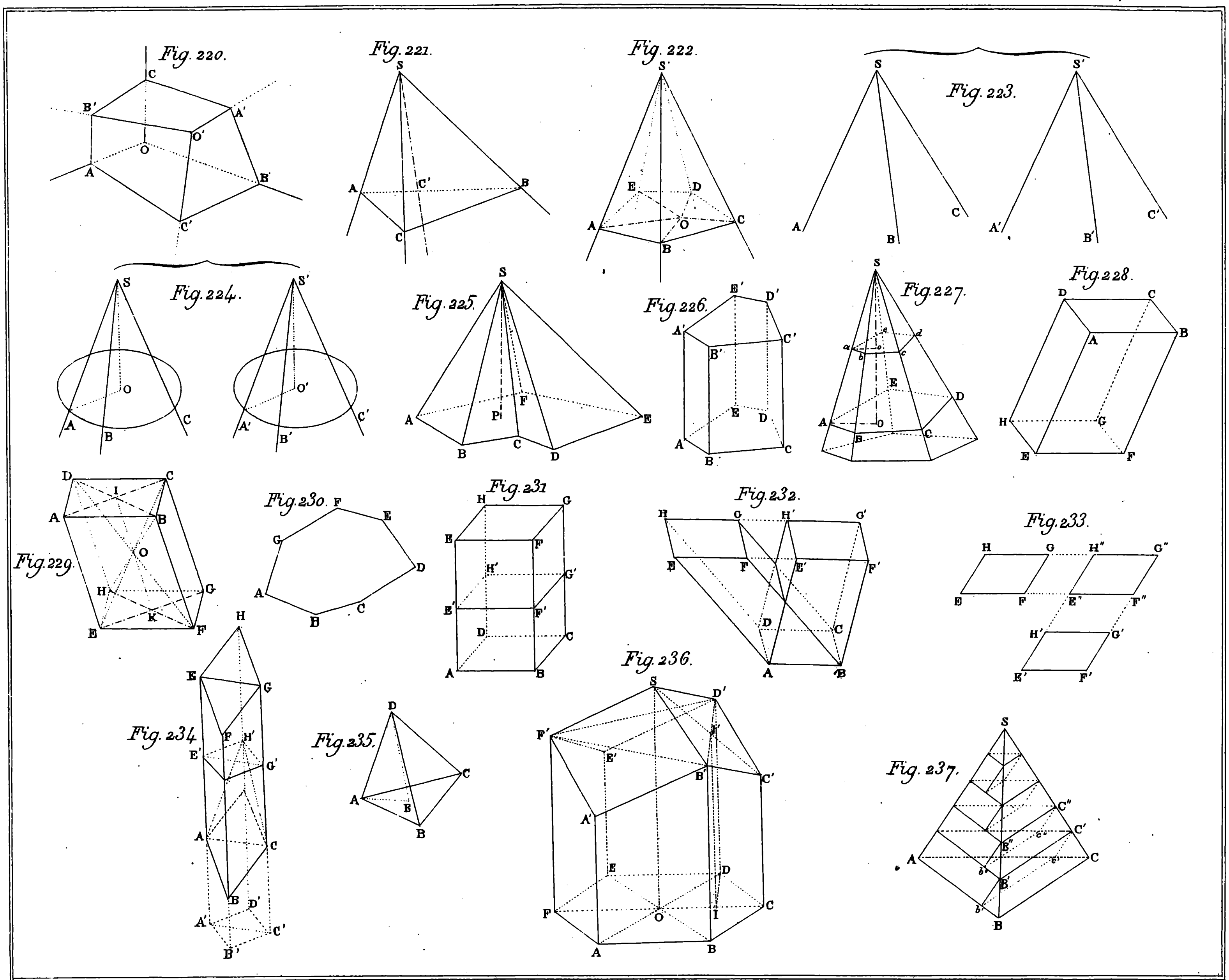
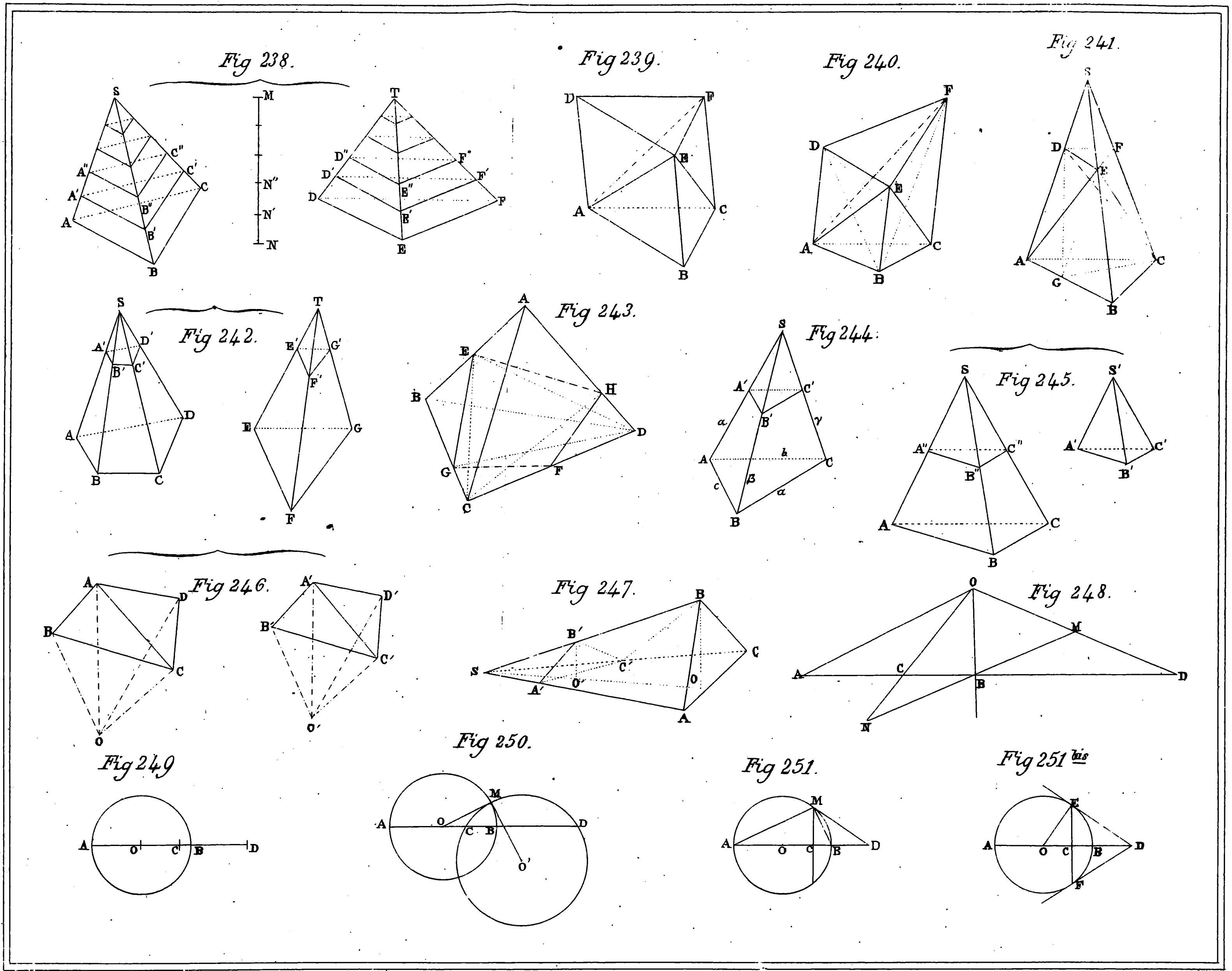


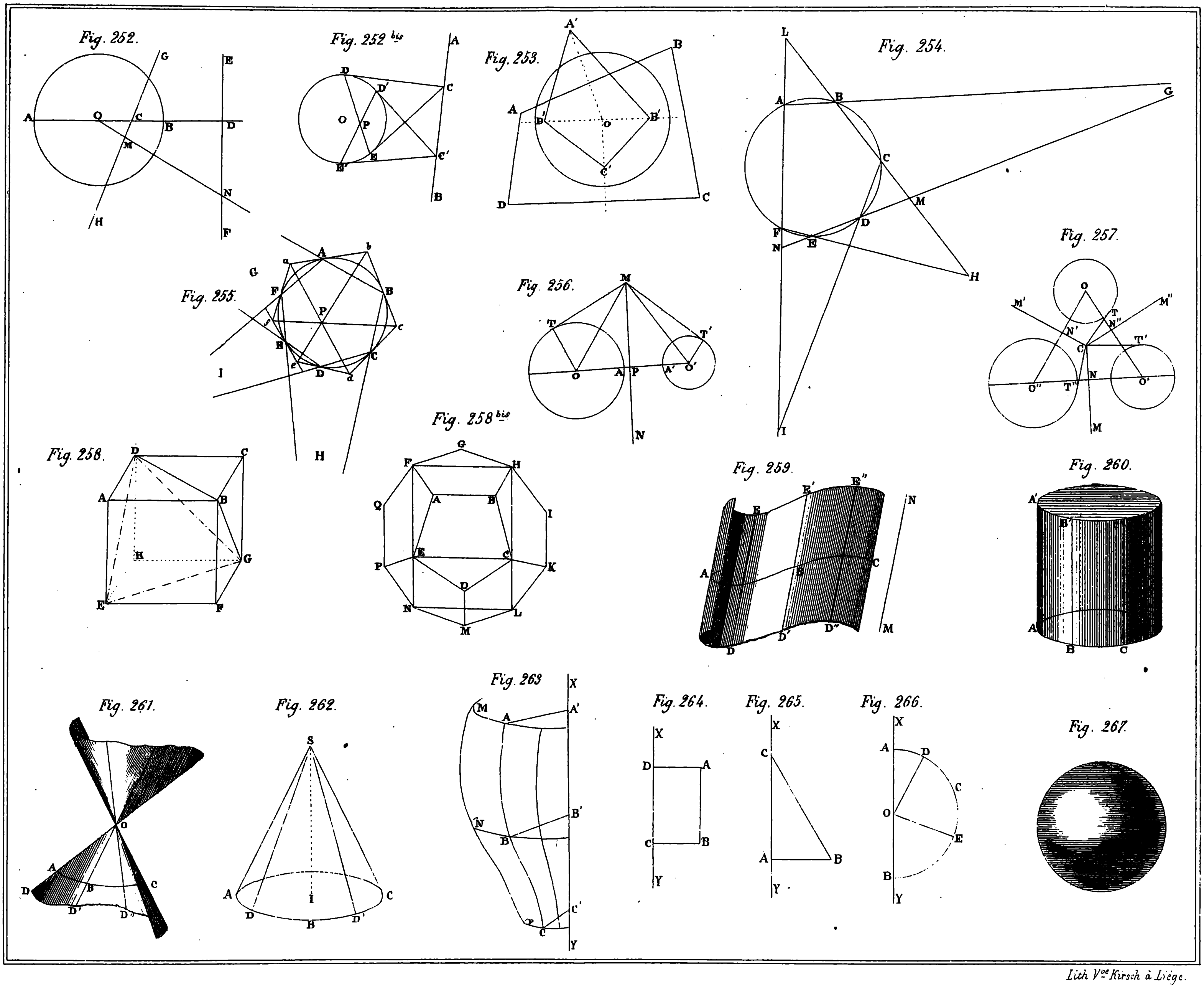
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.
Fig. 211.
Fig. 212.
Fig. 213
Fig. 214.
Fig. 215.
Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.



Lith. Vᵉ Kirsch, Liège.



Lith. V. Kirsch, Liége.



Lith. Vve Kirsch à Liège.

Fig. 268.

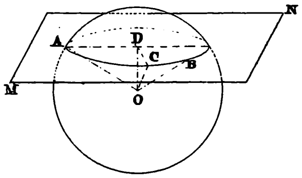


Fig. 269.

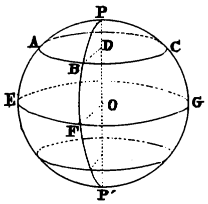


Fig. 270.

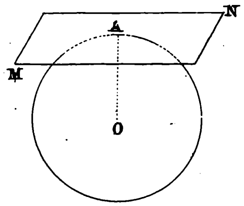


Fig. 271.

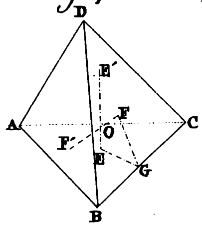


Fig. 272.

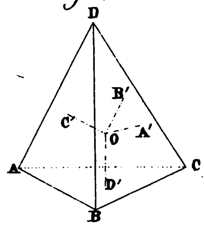


Fig. 273.

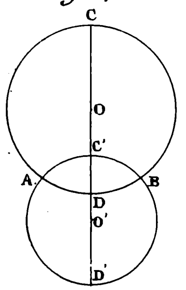


Fig. 274.

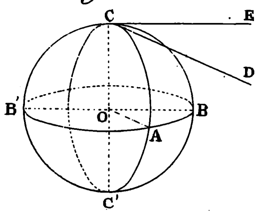


Fig. 275.

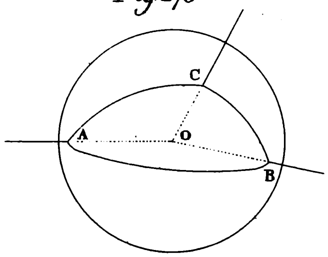


Fig. 276.

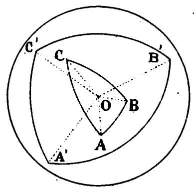


Fig. 277.

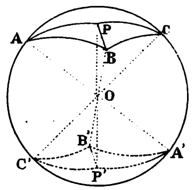


Fig. 278.

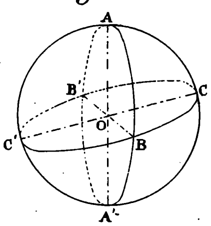


Fig. 279.

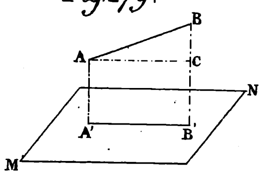


Fig. 280.

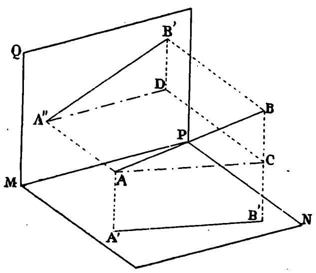


Fig. 281.

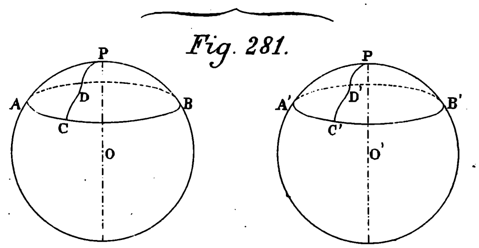


Fig. 282.

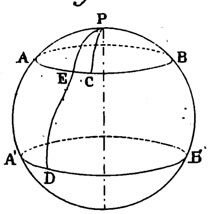


Fig. 283.

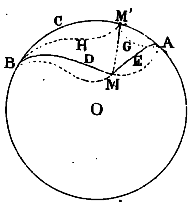


Fig. 284.

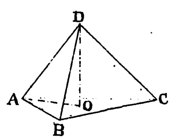


Fig. 285.

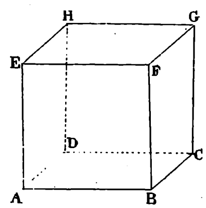
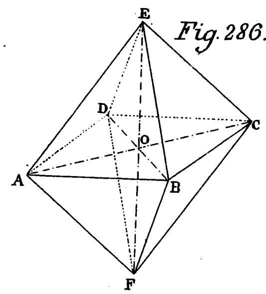


Fig. 286.



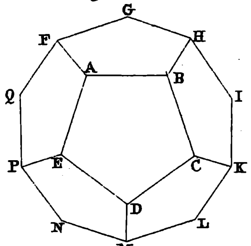


Fig. 287.

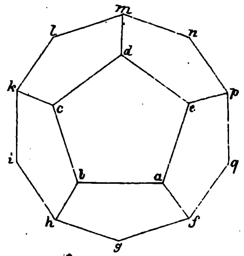


Fig. 288.

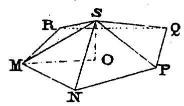


Fig. 289.

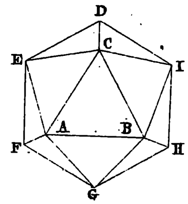


Fig. 290.

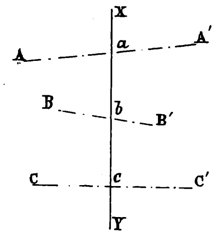


Fig. 291.

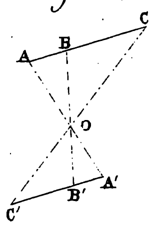


Fig. 292.

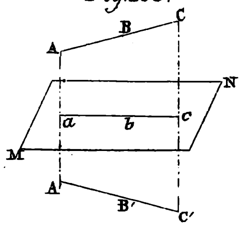


Fig. 293.

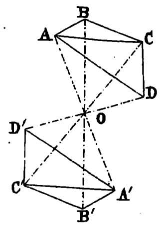


Fig. 294.

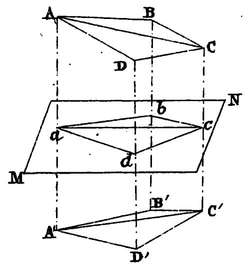


Fig. 295.

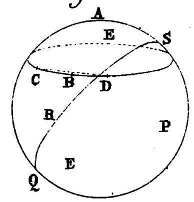


Fig. 296.

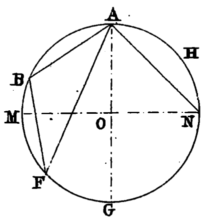


Fig. 297.

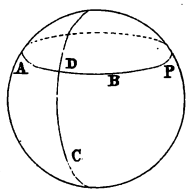


Fig. 298.

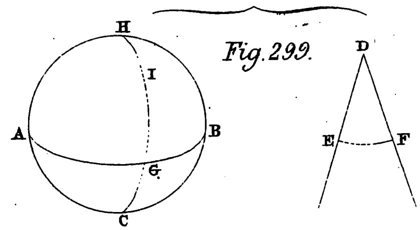


Fig. 299.

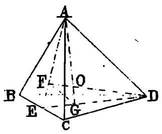


Fig. 300.

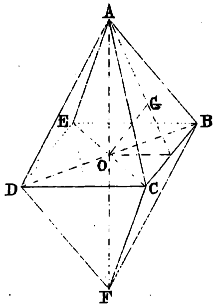


Fig. 301.

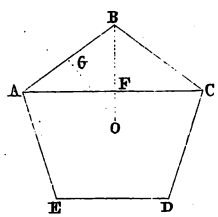


Fig. 302.

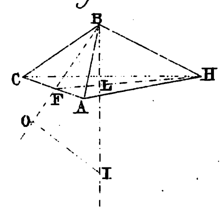


Fig. 303.

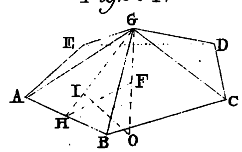


Fig. 304.

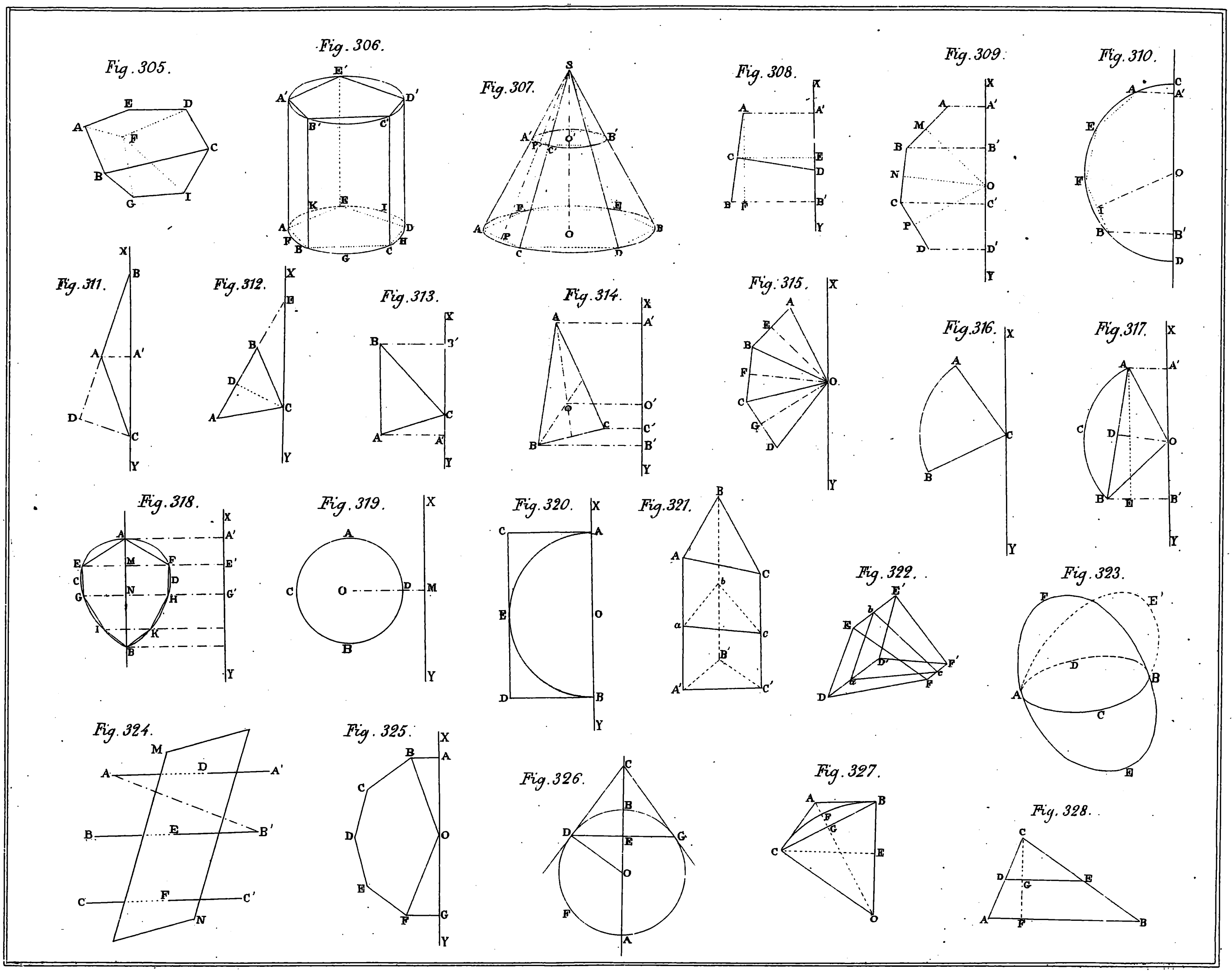


Fig. 305.
Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.
Fig. 314.
Fig. 315.
Fig. 316.
Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319.
Fig. 320.
Fig. 321.
Fig. 322.
Fig. 323.
Fig. 324.
Fig. 325.
Fig. 326.
Fig. 327.
Fig. 328.