SUR UNE IDENTITÉ DE M. BASCHWITZ

M. Catalan, dans une lettre récente, nous a communiqué le théorème suivant, que lui avait fait connaître M. Baschwitz.

La somme de trois carrés impairs est toujours la somme de quatre carrés fractionnaires.

Cette proposition est vraie pour trois carrés quelconques entiers ou fractionnaires, quelle que soit la parité des nombres proposés; et cette transformation peut être effectuée d'une infinité de façons.

C'est ce qu'on vérifie bien simplement de la manière suivante :

Soient d'abord A, B, C trois nombres quelconques, entiers.

Prenons l'identité de Lagrange

$$(A^2+B^2+C^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \equiv (A\beta-B\alpha)^2+(B\gamma-C\beta)^2+(C\alpha-A\gamma)^2 + (A\alpha+B\beta+C\gamma)^2.$$

D'autre part, l'identité

$$(t^2-t''^2)^2+(2tt'')^2 \equiv (t''^2+t^2)^2,$$

lorsqu'on y change t^2 en $t^2+t'^2$, donne,

$$(t^2+t'^2-t''^2)^2+(2tt'')^2+(2t't'')^2 \equiv (t^2+t'^2+t''^2)^2 \qquad (*)$$

En prenant

$$\alpha = t^2+t'-t'', \qquad \beta = 2tt'', \qquad \gamma = 2t't'',$$

l'identité de Lagrange devient

$$A^2+B^2+C^2 \equiv \left[\frac{2Att''-B(t^2+t'^2+t''^2)}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2+\left[\frac{2Bt't''-C(t^2+t'^2-t''^2)}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2$$
$$+\left[\frac{C(t^2+t'^2-t''^2-2At't''}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2+\left[\frac{A(t^2+t'^2-t''^2)+2Btt''+2Ct't''}{t^2+t'^2+t''^2}\right]^2.$$

En donnant aux paramètres t, t', t'' des valeurs *arbitraires*, entières ou même fractionnaires, la transformation indiquée par M. Baschwitz se trouve réalisée.

Si A, B, C étaient fractionnaires, la transformation précédente serait encore possible.

(*) Cette identité évidente doit avoir été, depuis longtemps, observée. On la trouve notamment dans un article de M. Catalan : *Propositions relatives à la théorie des nombres* (*Nouvelles Annales*, 1874, p. 521).

En effet, en posant

$$A = \frac{a}{p}, \qquad B = \frac{b}{p}, \qquad C = \frac{c}{p}.$$

a, b, c, p étant entiers, on aura d'abord, par application de la formule indiquée,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{a'}{d}\right)^2 + \left(\frac{b'}{d}\right)^2 + \left(\frac{c'}{d}\right)^2 + \left(\frac{d'}{d}\right)^2;$$

puis

$$A^2 + B^2 + C^2 = \left(\frac{a'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{b'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{c'}{pd}\right)^2 + \left(\frac{d'}{pd}\right)^2.$$

Remarque. — La transformation est toujours possible, quel que soit le dénominateur D, imposé aux fractions du second membre, *pourvu que* D *soit une somme de trois carrés*.

Le cas où le dénominateur est égal à 2 fait pourtant exception. Dans ce cas, l'équation

$$t^2 + t'^2 + t''^2 = 2,$$

n'est soluble en nombres entiers que si l'on suppose, par exemple, $t = 0$, $t = t' = 1$. Mais alors le second membre de l'identité est $A^2 + B^2 + C^2$; il n'y a pas eu *transformation effective*.

C'est dans ce cas singulier que M. Baschwitz a effectué la transformation d'une somme de trois carrés impairs, en quatre carrés fractionnaires.

Des relations

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \equiv (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2,$$

$$4(a+b+c) \equiv 3(a+b+c) + (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c),$$

$$3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

on déduit

$$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 \equiv \left(a+b+c+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(b+c-a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(c+a-b+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(a+b-c+\frac{1}{2}\right)^2.$$

C'est l'identité de M. Baschwitz. On peut l'obtenir immédiatement en prenant la première identité

$$A^2 + B^2 + C^2 \equiv \left(\frac{A+B+C}{2}\right)^2 + \left(\frac{B+C-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{C+A-B}{2}\right)^3 + \left(\frac{A+B-C}{2}\right)^2,$$

et en changeant : A, en $2a+1$; B, en $2b+1$; C, en $2c+1$.

En terminant, nous ferons observer que l'identité (A), obtenue plus haut peut avoir diverses applications. Par exemple, elle permet de résoudre en nombres entiers l'équation

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 = y^2 + z^2 + u^2 + v^2,$$

dans laquelle a, b, c, sont des nombres entiers donnés, x, y, z, u, v étant des inconnues.

G. L.