This page intentionally left blank.

cette grandeur, en éliminant, pour chaque étoile, la parallaxe, qui est trop peu connue pour qu'on puisse tirer une conclusion un peu certaine des résultats dans lesquels elle intervient.

Le mémoire de M. Ubaghs est très consciencieux ; il a exigé des recherches laborieuses et un travail persévérant; toutes les données et toutes les équations numériques, sur lesquelles l'auteur a fondé ses résultats, y figurent.

Les astronomes pourront donc contrôler l'exactitude de ceux-ci.

Si l'Institut astronomique de Liège était assez riche pour se donner le luxe d'*Annales*, c'est dans celles-ci que serait marquée la place du mémoire de M. Ubaghs.

A leur défaut, j'espère que l'Académie voudra bien en ordonner l'impression dans ses *Mémoires* in-4° et adresser des remerciements à l'auteur pour cette très intéressante communication. »

Les deux autres commissaires, MM. Houzeau et Liagre, tout en se ralliant à la demande d'impression faite par M. Folie, formulent quelques observations.

La Classe décide qu'elles seront communiquées à l'auteur, et vote, en principe, l'impression du travail de M. Ubaghs dans la collection in-4° des Mémoires couronnés et des Mémoires des savants étrangers de l'Académie.

Sur l'étude des événements arithmétiques; par M. E. Cesàro.

Rapport de M. E. Catalan.

« Avant de passer à l'analyse de ce petit travail, je crois utile de communiquer, à la Classe, quelques détails sur l'Auteur.

M. Ernest Cesàro, qui prend le modeste titre d'*Étudiant à l'Université de Rome*, est, parmi les jeunes Géomètres contemporains, l'un des plus féconds, des plus profonds et des plus originaux.

Quant à la *fécondité*, il suffit de rappeler que M. Cesàro, Collaborateur de la défunte *Nouvelle Correspondance mathématique*, de *Mathesis*, des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (A), etc., est imprimé dans les *Comptes rendus*, dans les *Rendi conti* des *Nuovi Lincei*, dans le *Journal de Battaglini*, dans les *Annali di Matematica*, dans les *Annales de l'École normale*, etc.

Son premier Mémoire, intitulé : *Sur diverses questions d'Arithmétique*, a été imprimé par la Société des sciences, de Liège (B). Il constitue un volume de trois cent cinquante pages. Dans le Rapport sur ce remarquable travail, on lit : « Bien des Géomètres seraient embarrassés s'il leur fallait démontrer, directement, les trois ou quatre dernières propositions ». Les mêmes paroles sont applicables aux recherches entreprises, depuis quatre ans, par le jeune Géomètre de *Torre Annunziata*. On en jugera tout à l'heure.

Tous ces travaux sont empreints d'une grande *originalité*. Non seulement l'Auteur se pose des problèmes auxquels, avant lui, personne n'aurait songé peut-être (C); mais, pour les résoudre, il se crée des méthodes particulières.

Abordons l'examen de la Note présentée à l'Académie.

I.

Les inventeurs sont rarement compris. *Dérouté* dès la première page, j'ai demandé, à M. Cesàro, des explications nécessaires, même sur le *titre* de sa Note, lequel me plaisait peu. Sa réponse, dont je donnerai des extraits (D), est, presque toujours, pleinement satisfaisante. La page 1 commence ainsi :

Soit

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\} \text{ (E)}$$

une quantité quelconque, engendrée, au moyen d'opérations données, par des nombres x_1, x_2, ..., x_m, *que nous supposerons entiers,* pour fixer les idées (F). Il existe un principe général, permettant *d'évaluer*, très simplement, *la probabilité que le nombre* X *soit doué d'une propriété* Ω. Après des transformations analytiques assez difficiles à suivre (G), vu l'extrême concision, habituelle à l'Auteur, celui-ci parvient à une formule (1), très générale et très remarquable, qui lui permet de résoudre, presque en jouant, pour ainsi dire, des problèmes tels que celui-ci :

Quelle probabilité y a-t-il que, dans une division quelconque, le quotient le plus approché soit le quotient par défaut?

La réponse est

$$P = \frac{5}{4} - \mathcal{l}.\,2 = 0{,}556\;85\ldots$$

A coup sûr, les théories ordinaires seraient, ici, presque impuissantes. M. le général Liagre, si compétent, sera, je l'espère, de mon avis.

II.

Comme problème transitoire, l'Auteur cherche *ce que devient la fonction*

$$Q_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{n}{1}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right) + \cdots + 1\left(\frac{n}{n}\right)\right],$$

lorsque n *augmente indéfiniment, en supposant que* f(x) *ne puisse jamais devenir infinie.* S'appuyant sur les *transformations asymptotiques*, exposées ou appliquées dans ses précédents Mémoires, il trouve

$$\lim. Q_n = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{f(i) - f(i-1)}{i}.$$

Ici, le contrôle prendrait trop de temps; mais, d'après les antécédents de M. Cesàro, *je le crois sur parole*, bien volontiers.

Au moyen de cette formule, l'Auteur transforme, de diverses manières, la relation (1); après quoi il donne plusieurs applications, très curieuses, celle-ci, par exemple:

Quelle est la probabilité que, si l'on divise un entier, pris au hasard, par la somme de deux autres entiers, pris au hasard, le quotient par défaut soit un nombre impair? La réponse est $\frac{\pi^2}{72}$.

III.

Les pages 5 et suivantes renferment, outre de nouvelles formules, des considérations, très générales, sur ce que l'Auteur appelle *groupes ouverts ou fermés*, considérations qu'il m'est impossible de réduire; puis l'annonce de *futures communications*.

La Note, ou plutôt le Mémoire, se termine par la généralisation d'un théorème sur les déterminants, dû au regretté Smith.

IV.

En résumé, le nouveau travail de M. Ernest Cesàro, autant qu'il m'est possible d'en juger, me paraît digne d'être approuvé par l'Académie, et publié dans les Mémoires *in-quarto*. Si ces conclusions sont admises, je serai très heureux de transmettre, à mon ancien et intéressant Elève, les félicitations qu'il mérite. »

NOTES.

(A) L'un des derniers numéros de ce Recueil contient les énoncés de septante *Questions* (généralement difficiles) proposées par le jeune *Étudiant*. Le 23 octobre, il m'écrivait: « Quatre douzaines de Mémoires, » Notes, Articles attendent que MM. Teixeira, Mansion, Darboux, Brisse, » Brioschi, Battaglini les livrent à la publicité. Je vous signalerai : » *Expressions moyennes asymptotiques; Quelques mesures dans les* » *hyperspaces; Rupture du diamant; Sur une classe de fonctions* » *arithmétiques; Théorie de la vapeur d'eau; Formes polyédriques*, etc.

(B) M. Cesàro est Correspondant de cette Société.

(C) Exemple : « *Quelle est la probabilité que, dans une division quel-* » *conque, le dernier chiffre du quotient est 4 ou 5 ?* (*Excursions arithmé-* » *tiques à l'infini*, p. 76.) Cette probabilité égale $\frac{\pi}{20}$ tg 18°. »

(D) « Les systèmes dont je m'occupe sont constitués par des nombres *pris au hasard*. Lorsqu'*il arrive* qu'un tel système jouit d'une propriété désignée à l'avance, cela constitue, pour moi, *un événement*: c'est ce que j'appelle *un événement arithmétique*. »

(E) A ma question, toute naturelle : « *Comment prononcez-vous ce symbole ?* » l'Auteur répond : « La vérité est que *je ne le prononce point*. » Je ne reconnais pas la nécessité de *nommer* tout ce que l'on *écrit* en » algèbre. Je suis même convaincu qu'un symbole algébrique est d'autant » *plus puissant* qu'il est *moins énonçable*... les symboles ont été inventés, » précisément, dans le but d'abréger le discours, et de condenser, dans une » ligne *visible*, l'œuvre de la pensée. » *Abréger le discours*, soit ; mais *le supprimer* : voilà qui me paraît un peu excessif.

(F) X est donc une certaine *fonction* des nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_m$. Dès lors, pourquoi ne pas employer la notation habituelle?

(G) Voici, pour le cas de $m = 2$, la démonstration contenue dans la lettre de M. Cesàro :

« Il s'agit de chercher la *probabilité que le nombre* $\{x, y\}$ *soit doué de* » *la propriété* Ω. Je pose :

$$\sigma_1(n) = \Omega\{n, 1\} + \Omega\{n, 2\} + \Omega\{n, 3\} + \cdots + \Omega\{n, n\},$$

$$\sigma_2(n) = \Omega\{1, n\} + \Omega\{2, n\} + \Omega\{3, n\} + \cdots + \Omega\{n, n\}.$$

» Il est évident que chacune de ces sommes est comprise entre 0 et 1 ;
» de sorte que si

$$\lim \frac{\sigma_1(n)}{n} = \mathcal{F}_1, \qquad \lim \frac{\sigma_2(n)}{n} = \mathcal{F}_2,$$

» les nombres F_1 et F_2 sont compris entre 0 et 1. Je veux démontrer que » *la probabilité cherchée est*

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2}{2};$$

» ce qui est, certes, très remarquable. Si des nombres x, y sont pris au » hasard, parmi *les* n *premiers nombres naturels*, et que $\mathfrak{P}_n$ soit la pro- » babilité d'avoir $\Omega\left\{x, y\right\} = 1$,
» on a

$$\begin{aligned} n^2\mathfrak{P}_n = {} & \Omega\left\{1,1\right\} + \Omega\left\{1,2\right\} + \Omega\left\{1,3\right\} + \cdots + \Omega\left\{1,n\right\} \\ & + \Omega\left\{2,1\right\} + \Omega\left\{2,2\right\} + \Omega\left\{2,3\right\} + \cdots + \Omega\left\{2,n\right\} \\ & + \Omega\left\{3,1\right\} + \Omega\left\{3,2\right\} + \Omega\left\{3,3\right\} + \cdots + \Omega\left\{3,n\right\} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \Omega\left\{n,1\right\} + \Omega\left\{n,2\right\} + \Omega\left\{n,3\right\} + \cdots + \Omega\left\{n,n\right\}. \end{aligned}$$

» Donc

$$\begin{aligned} (n+1)^2\mathfrak{P}_{n+1} - n^2\mathfrak{P}_n = {} & \Omega\left\{1, n+1\right\} + \Omega\left\{2, n+1\right\} + \cdots + \Omega\left\{n+1, n+1\right\} \\ & + \Omega\left\{n+1, 1\right\} + \Omega\left\{n+1, 2\right\} + \cdots + \Omega\left\{n+1, n+1\right\} \\ = {} & \sigma_1(n+1) + \sigma_2(n+1) - \Omega\left\{n+1, n+1\right\}. \end{aligned}$$

» Changeons d'abord n en $n+1$, $n+2$, ... $n+h-1$, et addition- » nons. Puis remplaçons n par $n\nu$ et h par n. Il vient

$$\begin{aligned} (n\nu+n)^2\mathfrak{P}_{n\nu+n} - (n\nu)^2\mathfrak{P}_{n\nu} = {} & \sigma_1(n\nu+1) + \sigma_1(n\nu+2) + \cdots + \sigma_1(n\nu+n) \\ & + \sigma_2(n\nu+1) + \sigma_2(n\nu+2) + \cdots + \sigma_2(n\nu+n) \\ & - \left\{\Omega\left\{n\nu+1, n\nu+1\right\} + \Omega\left\{n\nu+2, n\nu+2\right\} + \cdots + \Omega\left\{n+n\nu, n\nu+n\right\}\right\}. \end{aligned}$$

» La troisième partie du second membre, composée de n termes égaux » à zéro ou à l'unité, est comprise entre 0 et n : son rapport à n^2 tend

» donc vers zéro. Il en résulte, pour n indéfiniment croissant et ν *con-*
» *stant*,

$$(2\nu+1)\mathcal{P} = \lim \frac{\sigma_1(n\nu+1)+\sigma_1(n\nu+2)+\cdots+\sigma_1(n\nu+n)}{n2}$$
$$+ \lim \frac{\sigma_2(n\nu+1)+\sigma_2(n\nu+2)+\cdots+\sigma_2(n\nu+n)}{n^2}.$$

» Parmi les n quantités *positives*

$$\sigma_1(n\nu+1)+\sigma_2(n\nu+1),\ \sigma_1(n\nu+2)+\sigma_2(n\nu+2),\ldots\ \sigma_1(n\nu+n)+\sigma_2(n\nu+n),$$

» soient, pour des valeurs données de n et ν,

$\sigma_1(n\nu+p)+\sigma_2(n\nu+p)$, *la plus petite,*

$\sigma_1(n\nu+q)+\sigma_2(n\nu+q)$, *la plus grande;*

» et supposons

$$\lim.\frac{p}{n}=\alpha,\quad \lim.\frac{q}{n}=\beta;$$

» α, β étant, nécessairement, des nombres (constants ou fonctions de ν)
» compris entre 0 et 1.

» On a

$$\lim.\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n}+\lim.\frac{\sigma_2(n\nu+p)}{2}<(2\nu+1)\mathcal{P}$$
$$<\lim.\frac{\sigma_1(n\nu+q)}{n}+\lim.\frac{\sigma_2(n\nu+q)}{n}.$$

» Or,

$$\lim.\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n}=\lim.\frac{\sigma_1(n\nu+p)}{n\nu+p}\lim.\frac{n\nu+p}{n}=(\nu+\alpha)\mathcal{F}_1;$$

» donc

$$\frac{\nu+\alpha}{2\nu+1}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2)<\mathcal{P}<\frac{\nu+\beta}{2\nu+1}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2).$$

» Enfin, si ν augmente indéfiniment,

$$\mathcal{P}=\tfrac{1}{2}(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2).$$

Rapport de M. Liagre.

« Je me rallie, bien volontiers, aux conclusions de notre savant confrère.

M. Ernest Cesàro me paraît doué de facultés exceptionnelles pour les recherches arithmétiques, et son Mémoire, bien que la lecture en soit parfois difficile, figurera avec honneur dans les recueils de notre Académie. »

Ces conclusions sont mises aux voix et adoptées.

Sur l'oxydation de l'acide chlorhydrique sous l'influence de la lumière; par Leo Backelandt.

Rapport de M. Donny.

« Lorsqu'on abandonne de l'acide chlorhydrique concentré et pur à la lumière du jour dans un flacon mal bouché, au bout d'un certain temps il jaunit et répand une odeur de chlore. Ce phénomène a été observé par M. Backelandt et fait l'objet de la note qui nous est soumise.

Ce jeune savant a constaté que l'altération de l'acide chlorhydrique est due à un phénomène d'oxydation; l'oxygène de l'air en brûlant l'hydrogène de l'acide chlorhydrique met le chlore en liberté Ce phénomène ne se produit que dans l'acide concentré, ainsi que dans un mélange gazeux d'air et d'acide chlorhydrique, mais aucune altération ne se produit lorsque le réactif est très étendu d'eau