



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

**ser.2:t.25 (1868):** <http://www.biodiversitylibrary.org/item/90109>

Article/Chapter Title: Rapport sur un mémoire concernant la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque par M. Ph. Gilbert

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 180, Page 181, Page 182, Page 183, Page 184

Contributed by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

Sponsored by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

Generated 25 January 2017 10:48 AM  
<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/060918400090109>

This page intentionally left blank.

- 2<sup>o</sup> *Histoire de la poésie en rapport avec la civilisation.*  
 — *La poésie espagnole;* par Ferdinand Loise.  
 — 3<sup>o</sup> *Lettres inédites de Marie-Thérèse et de Joseph II;*  
 publiées par M. le baron Kervyn de Lettenhove.

— La classe reçoit les ouvrages manuscrits suivants,  
 pour l'examen desquels elle nomme des commissaires :

1<sup>o</sup> *Observations sur le terrain silurien de l'Ardenne,*  
 par MM. J. Gosselet, professeur à la faculté des sciences  
 de Lille, et Ch. Malaise, correspondant de l'Académie.  
 (Commissaires : MM. d'Omalius et Dewalque.)

2<sup>o</sup> *Recherches expérimentales sur les lois de la filtration,* par M. Paul Havrez, ingénieur des mines à Verviers.  
 (Commissaires : MM. Donny et Montigny.)

---

## RAPPORTS.

---

*Sur un mémoire concernant la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque;* par M. Ph. Gilbert, associé de l'Académie.

### **Rapport de M. Eug. Catalan.**

« Dans les deux dernières séances, M. Gilbert a soumis, au jugement de l'Académie, un mémoire relatif à la *Théorie des lignes tracées sur une surface quelconque*, puis un supplément à ce premier travail.

A ma prière, notre jeune et savant confrère a bien voulu condenser ces deux manuscrits en un seul, que M. le se-

crétaire perpétuel m'a fait parvenir il y a quelques jours. C'est donc à ce troisième mémoire, ou plutôt à cette nouvelle rédaction, que s'applique le rapport dont j'ai l'honneur de donner lecture à l'Académie, rapport malheureusement trop succinct, eu égard au nombre des questions traitées par M. Gilbert, et au talent avec lequel il les a résolues ; mais le temps pressait.

Avant d'entrer en matière, je dois déclarer que la seconde rédaction ne contient rien qui ne se trouve déjà dans les mémoires présentés le 4 janvier et le 1<sup>er</sup> février : l'auteur a plutôt retranché qu'ajouté. Du reste, si des discussions de priorité étaient soulevées, les textes primitifs, conservés dans les archives de l'Académie, établiraient les droits de notre confrère.

Pour que la classe puisse apprécier la valeur du travail entrepris par M. Gilbert, je citerai d'abord quelques fragments de la préface :

« .... Les notions dont j'ai surtout tiré parti sont : celle  
 » de la *courbure géodésique*, si heureusement introduite  
 » dans la science par M. Liouville; celle des *tangentes conjuguées*, que l'on doit à M. Dupin; et celle de la *déviation* (\*), que M. l'abbé Aoust, à mon insu, avait proposée  
 » déjà, sous le nom de *courbure inclinée*, et qui me paraît  
 » appelée à rendre de vrais services dans ce genre de  
 » questions.

» .... J'obtiens directement, au moyen de considérations géométriques fort simples, une expression de la  
 » *mesure de courbure* en un point d'une surface, qui se

(\*) M. Abel Transon appelle *déviation*, une certaine affection des courbes; mais ce mot n'a pas le sens que lui attribue aujourd'hui M. Gilbert (*Journal de Liouville*, t. VI, p. 195). (E. G.)

» rapporte, comme celle de Gauss, à deux systèmes quelconques de lignes coordonnées, mais qui s'en distingue par la simplicité et par sa forme géométrique.

» .... Dans les paragraphes suivants, j'étudie les propriétés du rayon de déviation d'un système de courbes, et en particulier les relations qui existent entre cet élément nouveau, et ceux que l'on considère habituellement.... Puis, après avoir généralisé l'expression de la courbure géodésique, en fonction des variations des arcs infiniment petits des lignes conjuguées, j'en fais différentes applications. Parmi ces applications, je signalerai une forme nouvelle de l'expression de la mesure de courbure, de laquelle se déduisent des résultats intéressants....

» .... Les paragraphes VI et VII sont consacrés à la recherche des nouvelles propriétés générales des lignes tracées sur une surface... Les suivantes, auxquelles je suis parvenu par une méthode analogue à celle qui m'avait conduit précédemment à la valeur de la mesure de courbure, manifestent de nouveau l'utilité des formules relatives à la déviation. On y trouvera des relations fort générales, soit entre les variations de la flexion suivant les lignes coordonnées, soit entre les variations de la *courbure normale* et de la *torsion géodésique* de ces lignes mêmes.

» .... Je termine ce mémoire par quelques théorèmes sur la construction du rayon de courbure de l'intersection de deux surfaces, théorèmes dont ceux de Hachette et de Meusnier sont des cas particuliers, et par diverses propriétés assez curieuses des sections coniques... »

Les démonstrations imaginées par notre confrère ont une élégance et une simplicité remarquables : au moyen

d'un heureux emploi des infiniment petits, il évite les longs calculs qu'exige, en général, la méthode des *coordonnées rectangulaires*. Non-seulement ce mode d'investigation lui fait retrouver, comme on vient de le voir, la plupart des théorèmes connus, mais encore il lui en fait découvrir de nouveaux, presque tous très-importants. En voici quelques-uns :

*En un point donné, le produit des flexions de la surface, suivant deux directions conjuguées, est égal à la mesure de la courbure;*

*En un même point, les flexions d'une surface, suivant deux directions arbitraires, sont entre elles comme les sinus des angles formés par l'une de ces directions avec la conjuguée de l'autre;*

*Si l'on trace, sur une surface, deux séries de courbes, se coupant sous un angle constant  $\theta$ , la différence de leurs courbures normales en un même point, divisée par la somme de leurs courbures géodésiques, donne un rapport constant, égal à la tangente de l'angle  $\theta$ ;*

*Lorsque deux séries de courbes,  $c_1$  et  $c_2$ , se coupent orthogonalement sur une surface, le carré de la déviation d'une courbe  $c_1$ , est équivalent à la somme des carrés des deux courbures géodésiques de la trajectoire orthogonale  $c_2$  (\*) ;*

(\*) Le beau mémoire de M. Saint-Venant, *Sur les lignes non planes*, contient la démonstration d'un théorème qui a une grande analogie avec celui de M. Gilbert : si  $\frac{ds}{R}$  est l'angle de deux rayons de courbure consécutifs, et que  $\rho$  et  $r$  soient le rayon de courbure et le rayon de torsion, on a

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}.$$

*Si l'on décompose une surface en quadrilatères infiniment petits, par un système de lignes géodésiques et un système de trajectoires obliques, la différence des côtés géodésiques, dans chaque quadrilatère élémentaire, divisée par la différence des deux autres côtés, est égale au cosinus de l'angle d'intersection ; etc.*

Ces extraits donnent une idée incomplète, mais suffisante, du beau travail dont M. Gilbert vient d'enrichir la science. En conséquence, j'ai l'honneur de prier l'Académie de vouloir bien décider que le mémoire de notre confrère sera publié dans le recueil in-4°. »

Conformément aux conclusions précédentes, auxquelles souscrit M. Brasseur, second commissaire, le travail de M. Gilbert sera imprimé dans les mémoires in-4° de l'Académie; et l'auteur est remercié pour sa communication.

---

*Sur les transformations des substances saturées en corps non saturés; par M. le professeur Swarts.*

**Rapport de M. Stas.**

« En présentant sa note préliminaire à l'Académie, M. le professeur Swarts a pour but de faire connaître l'action de l'iodure de potassium sur certaines matières organiques bichlorées ou bibromées, et l'explication qu'il croit devoir donner des résultats particuliers auxquels cette action l'a conduit. Dans un travail antérieur, M. Swarts