Petite apologie de l’analogie en mathématiques

par Jacques Bair

Pour celui qui « fait des maths », le recours à l’analogie s’avère souvent fructueux.

De nombreux mots du langage courant sont polysémiques et sont quelquefois utilisés en mathématiques dans un sens précis, plus ou moins relié à l’acception usuelle, qui peut dépendre du contexte dans lequel ils interviennent. Ainsi en est-il du terme *similitude*, comme en attestent ces deux situations élémentaires et classiques. En géométrie, on a coutume d’appeler *similitude* une transformation obtenue en composant une homothétie et une isométrie. Par ailleurs, en calcul matriciel, deux matrices carrées A et B de même format sont dites semblables lorsqu’il existe une matrice R inversible telle $R^{-1}AR = B$, auquel cas cette relation entre les deux matrices A et B porte également le nom de *similitude*.
Revenons au langage courant. Le mot *similitude* peut être défini comme étant « une relation unissant deux choses exactement semblables » (Le Petit Robert) ; il est encore présenté, comme c’est souvent le cas dans un dictionnaire, par des mots qui ont un grand rapport de sens avec lui : dans ce cas, il s’agit des noms *ressemblance* et *analogie* (Larousse de Poche).
Dans cet article, nous comptons émettre quelques réflexions relatives à l’analogie en mathématiques. Ce travail se base sur divers travaux de Pólya (voir encadré).

Généralement, les mathématiques sont perçues comme formant une science démonstrative dont les théories sont construites progressivement et rigoureusement en suivant la voie historiquement tracée par Euclide dans ses *Eléments* : elles se présentent comme une succession d’hypothèses (axiomes, définitions) admises pour vraies dès le départ et de propositions (théorèmes, corollaires) dont la véracité est démontrée d’après des règles strictes de logique, ces nouveaux résultats une fois prouvés pouvant à leur tour servir d’hypothèses pour en construire de nouveaux. Cette conception des mathématiques convient assurément pour des mathématiques achevées, c’est-à-dire pour la présentation de résultats déjà connus sous une forme définitive et indiscutable : c’est même une des caractéristiques de la « reine des sciences » où tout énoncé est certain, soit parce qu’il s’agit d’une hypothèse admise dès le début, soit parce qu’il se déduit d’hypothèses de manière rigoureuse.
Mais, d’après Pólya, les mathématiques en voie de formation « ressemblent à toute connaissance humaine au même stade de développement » : les raisonnements sont alors non

pas démonstratifs mais plausibles en ce sens que l'essentiel consiste à « distinguer une présomption d'une autre, une présomption plus raisonnable d'une présomption qui l'est moins ».

Pour mener à bien des raisonnements plausibles, il convient d'avoir ce que Pólya appelle une attitude inductive. Une telle attitude « nous conduit à contrôler nos opinions par l'expérience de façon aussi efficace que possible. Elle demande un certain goût pour les faits. Elle demande de savoir s'élever des observations aux généralisations et de savoir redescendre des généralisations les plus hardies aux observations les plus concrètes. Elle demande de pouvoir dire ''peut-être'' avec mille nuances différentes ».

Dans cette optique, il s'avère souvent efficace de recourir à l'une ou l'autre analogie. Toujours en suivant le même auteur, « l'analogie est une sorte de ressemblance. Nous pourrions dire que c'est la ressemblance envisagée de façon précise et sur le plan conceptuel ».

Illustrons cette définition par deux exemples typiques.

En géométrie élémentaire, il existe une analogie entre un segment, un triangle et un tétraèdre, car il s'agit à chaque fois d'une figure qui est la « plus simple possible » (en ce sens qu'elle constitue un ensemble convexe) en dimension 1 pour un segment, en dimension 2 pour un triangle et en dimension 3 pour un tétraèdre. Si l'on dénombre les « éléments-limites » de dimension 0 (à savoir les « sommets »), de dimension 1 (ou les « arêtes ») ou de dimension 2 (c'est-à-dire les « faces »), on forme le tableau suivant :

	Eléments de dimension 0	Eléments de dimension 1	Eléments de dimension 2	Eléments de dimension 3
Segment	2	1		
Triangle	3	3	1	
Tétraèdre	4	6	4	1

Observons que l'on reconnaît ici une partie significative du célèbre triangle de Pascal.

Une telle analogie peut être exploitée de plusieurs manières. Par exemple, on peut conjecturer que le centre de gravité d'un tétraèdre homogène coïncide avec celui de ses sommets, car il en va ainsi pour un segment en dimension 1 et pour un triangle en dimension 2. Au surplus, comme le centre de gravité de deux points divise la distance entre ces deux points dans un rapport 1/1, que le centre de gravité de trois points non colinéaires divise la distance entre l'un de ses points et le milieu des deux autres selon le rapport 2/1, on pourrait conjecturer que le centre de gravité de quatre points non coplanaires divise la distance entre l'un des sommets du tétraèdre correspondant et le centre de gravité de la face opposée selon le rapport 3/1. De telles suppositions, obtenues par une « déduction par analogie », ne sont à ce stade que des résultats plausibles qui devraient être confirmés par des démonstrations rigoureuses.

Par ailleurs, une telle analogie invite à considérer des dimensions supérieures à 3 et dès lors à construire des concepts abstraits plus généraux. C'est ainsi que l'on peut définir, dans un espace euclidien de dimension finie, un *simplexe* de dimension n comme étant l'enveloppe convexe de $n + 1$ points affinement indépendants. On peut même travailler dans un espace vectoriel quelconque (éventuellement de dimension infinie), ou encore définir un *simplexe généralisé* comme étant l'enveloppe convexe d'un nombre minimum de points et de « points à l'infini » (ces concepts étant analysés notamment dans le livre *Etude géométrique des Espaces Vectoriels II – Polyèdres et Polytopes convexes,* par J. Bair et R. Fourneau, Springer-Verlag, 1980). Pour caractériser ces objets généraux, on particularise souvent, c'est-à-dire que l'on se réfère aux cas les plus simples en dimension inférieure ou égale à 3.

Voici une autre analogie qui s'est avérée d'une très grande importance dans le développement des mathématiques. Nous allons en présenter uniquement les idées générales renvoyant le lecteur désireux d'approfondir la question à l'article intitulé « Zêta de deux, zêta des nombres pairs », par H. Lehning, paru dans *Tangente Sup* n° 62 (septembre-octobre 2011, pp. 14 – 16).

Au dix-septième siècle, des mathématiciens réputés, tels que Pietro Mengoli (1626 – 1686), un élève de Cavalieri, et Jacques Bernoulli (1654 – 1783), ont cherché en vain à découvrir la somme de la série des inverses des carrés des nombres entiers, soit

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\cdots$$

C'est Euler (1707 – 1783) qui, environ un siècle plus tard, découvrit que cette somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Pour parvenir à ce résultat, le mathématicien suisse considéra le développement de Mac Laurin de la fonction sinus, c'est-à-dire

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

et plus précisément

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\cdots$$

Il appliqua à cette somme comprenant une infinité de termes une propriété bien connue relative à un polynôme de degré fini dont aucun zéro n'est nul, à savoir que la somme des inverses des zéros du polynôme vaut $-\frac{b}{a}$, où *a* désigne le terme indépendant du polynôme et *b* son coefficient du terme de degré 1. Comme les zéros de $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ sont les nombres $(n\pi)^2$ pour tout *n* entier positif, il en déduisit donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}=-\frac{-\frac{1}{3!}}{1} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Remarquons que recourir à cette analogie, assimilant donc une série comprenant une infinité de termes à un polynôme de degré fini, était à l'époque inhabituel et même fort audacieux car l'on sait maintenant que les règles de calculs sur un nombre fini de termes ne se transposent pas toujours lorsqu'il y a une infinité de termes. D'un point de vue mathématique, l'argumentation d'Euler est même peu acceptable aujourd'hui. Mais elle lui permit de découvrir ce résultat très surprenant dans la mesure où il fait apparaître le nombre transcendant π à partir d'entiers. Avec le raisonnement ci-dessus, l'égalité en question n'est qu'un résultat plausible, cette hypothèse pouvant toutefois être confortée par des calculs numériques de la somme des premiers termes donnant une approximation d'autant meilleure que le nombre de termes est élevé. Actuellement, on peut trouver diverses démonstrations rigoureuses de cette formule qui est assurément une des plus jolies parmi tout ce que les mathématiciens ont produit.

A la lumière de ces deux exemples qui nous paraissent bien mettre en œuvre une analogie dans le but de créer, comprendre ou démontrer des résultats nouveaux., nous pouvons conclure en citant M. Alberti qui a écrit pertinemment : « L'expérimentation, l'analogie et l'intuition ouvrent des voies que la logique va asphalter par la suite et convertir en routes pour lesquelles tout ce que l'on veut pourra transiter.[…] Nous avons identifié ainsi un aspect déterminant de la création mathématique : l'analogie. »

Encadré : György Pólya

G. Pólya est un mathématicien américain, d'origine hongroise, né à Budapest en 1887 et mort aux Etats-Unis (à Palo Alto) en 1985. Il a obtenu de nombreux et importants résultats dans plusieurs disciplines mathématiques, notamment sur les séries, la théorie des nombres, les probabilités. Il est aussi le co-auteur, en 1934 et en collaboration avec les réputés mathématiciens anglais G.P. Hardy et J.E.Littlewood, d'un livre célèbre intitulé *Inequalites*. (second edition, Cambridge University Press, 1952).

Il est également connu pour avoir fait revivre, sous une forme moderne, l'*heuristique* qui avait été abordée antérieurement par d'éminents savants tels que Pappus, Descartes, Leibniz ou Bolzano. L'heuristique, ou « *ars inveniendi* », s'intéresse aux « opérations mentales qui s'avèrent typiquement utiles pour résoudre des problèmes ». En fin de carrière, Pólya a rédigé plusieurs livres particulièrement clairs, accessibles et profonds sur ce sujet, à savoir les ouvrages suivants : *Les mathématiques et le raisonnement ''plausible''* (Gauthier-Villars, 1958), *Comment poser et résoudre un problème* (Dunod, 1965) et *La découverte des mathématiques* (Dunod, 1967).

Pour en savoir plus

- M. Alberti, *La Créativité en mathématiques*, Le monde est mathématique, RBA Coleccionables S.A., Barcelone, 2012.
- J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Bordas, Paris, 1975.
- H. Poincaré , *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1940.