Médiation de fractions et paradoxe du barycentre

Jacques Bair

Mots clés : Fraction, médiation, médiante ou médiane, paradoxe du barycentre, effet de structure, paradoxe de Simpson, suites de Farey, suites de Brocot, arbre de Sterner-Brocot.

Résumé. Dans cette note, nous nous proposons de montrer que l'opération, parfois effectuée par des « cancres », qui consiste à additionner deux fractions en ajoutant entre eux les numérateurs pour obtenir le numérateur du résultat et en faisant de même avec les dénominateurs, n'est nullement dénuée d'intérêt.

1. Introduction

En examinant des copies de mathématiques, à n'importe quel niveau d'enseignement, il n'est pas rare de rencontrer des calculs effectués par des élèves comme suit : pour additionner deux fractions, les numérateurs sont ajoutés entre eux et les dénominateurs sont également ajoutés entre eux ; de la sorte, une « égalité » du type suivant est obtenue :

$$\text{« } \frac{a}{b} \text{ plus } \frac{c}{d} \quad \text{donne} \quad \frac{a+c}{b+d} \text{ »}$$

Bien sûr, la première réaction d'un professeur-correcteur est probablement de constater qu'un tel calcul est l'œuvre d'un « cancre ».

Et pourtant, une telle opération, que nous baptiserons dans un premier temps et selon une appellation donnée par Ferréol [3] *addition des cancres* ([1]), peut donner lieu à des études sérieuses et se révéler efficace dans diverses situations. Donnons-en de suite trois applications relativement classiques.

a) L'enseignant lui-même produit parfois un tel raisonnement, par exemple lorsqu'il corrige un examen organisé en deux parties, la première cotée sur 8 et la seconde sur 12 : par exemple, il lui arrive de penser fort rapidement que « 6 sur 8 plus 10 sur 12 vaut 16 sur 20 ».

b) L'addition des cancres intervient de façon décisive dans la construction de certaines suites particulières de nombres. C'est le cas pour les *suites de Farey* $F_1, F_2, F_3, \ldots$. On définit ces suites en adjoignant aux réels positifs le nombre 0, tout en convenant qu'il s'écrit sous la forme $\frac{0}{1}$, et en ne considérant comme fractions que celles possédant des numérateur et dénominateur entiers et premiers entre eux : la suite F_n comprend toutes les fractions irréductibles de dénominateur inférieur ou égal à n, rangées en ordre croissant et comprises entre 0 et 1 (voir l'article de Cl. Festraets [4], p. 25). Ces suites, qui admettent diverses applications notamment pour approximer des irrationnels par des rationnels (voir le travail de M. Ballieu [1], pp. 11 - 13), possèdent des propriétés remarquables faisant intervenir l'addition des cancres. Ainsi, tout terme non extrême d'une suite de Farey est la somme des cancres de ses deux voisins ; par ailleurs, les suites de Farey

([1]) Son résultat est alors naturellement appelé *somme des cancres*.

peuvent être définies de façon récursive : en effet, la suite F_n s'obtient en plaçant entre chaque couple de termes consécutifs de la suite F_{n-1} leur somme des cancres à la condition que cette dernière possède un dénominateur inférieur ou égal à n. En guise d'illustration, construisons de proche en proche les cinq premières suites de Farey : entre parenthèses sont indiqués les résultats trouvés qui ne figurent pas dans la suite de Farey correspondante car leur dénominateur est supérieur à l'indice de la suite :

F_1	0																1
F_2	0								$\frac{1}{2}$								1
F_3	0				$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$				1
F_4	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\left(\frac{2}{5}\right)$		$\frac{1}{2}$		$\left(\frac{3}{5}\right)$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		1
F_5	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{2}{7}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{3}{8}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{7}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{4}{7}\right)$	$\frac{3}{5}$	$\left(\frac{5}{8}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{5}{7}\right)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1

c) Les suites de Farey forment une « suite infinie de suites finies » pouvant être construites à l'aide de l'addition des cancres. Elles ont été généralisées par A. Brocot, un horloger français qui a créé, en 1862, les *suites de Brocot* dans une étude portant sur les roues dentées et intitulée *calcul des rouages par approximation : nouvelle méthode*. Les suites B_n de Brocot s'obtiennent en procédant comme pour celles de Farey, mais en abandonnant l'exigence d'avoir un dénominateur inférieur ou égal à n et en ajoutant, aux fractions irréductibles et à $0 = \frac{0}{1}$, le symbole $\infty = \frac{1}{0}$; de proche en proche, on peut construire le tableau suivant livrant les suites B_n pour $n \leqslant 5$:

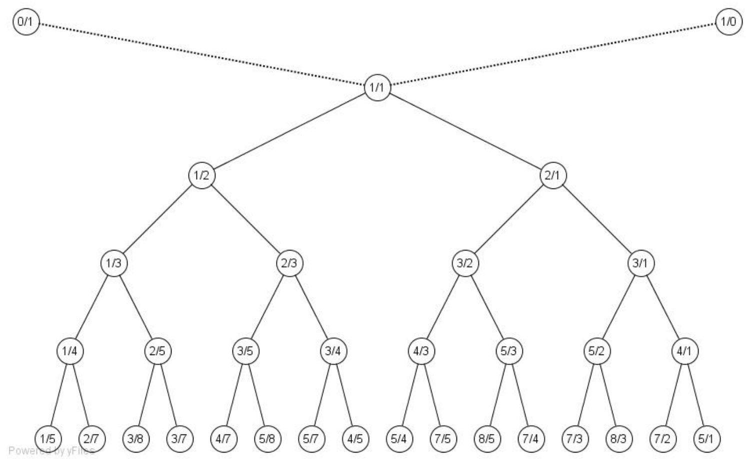
B_1	$0 = \frac{0}{1}$																$\infty = \frac{1}{0}$
B_2	0								1								∞
B_3	0				$\frac{1}{2}$				1				2				∞
B_4	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		3		∞
B_5	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	∞

Ces suites de Brocot jouissent de quelques propriétés remarquables qui peuvent être vérifiées sur le tableau ci-dessus (pour une démonstration ainsi que d'autres propriétés, voir l'article de Ferréol [3]).

Tout terme non extrême d'une suite de Brocot est la somme des cancres de ses deux voisins. De plus, tout nombre rationnel non négatif appartient à une suite de Brocot ; il est possible de disposer toutes les fractions irréductibles à l'aide d'un arbre binaire, appelé l'*arbre de Stern-Brocot* (2), au sein duquel toute fraction irréductible apparaît une et une seule fois. Pour construire l'arbre de Stern-Brocot, on place, sur une ligne initiale située en haut de l'arbre, la fraction $\frac{0}{1}$ à l'extrême gauche et $\frac{1}{0}$ à l'extrême droite ; puis, on construit de proche en proche chaque ligne à l'aide de fractions du type $\frac{m}{n}$ obtenues en faisant la somme des cancres des deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ telles que $\frac{a}{b}$ (resp. $\frac{c}{d}$) est la première fraction rencontrée en parcourant l'arbre vers le haut et la gauche (resp. vers le haut et la droite). Le début de l'arbre se présente comme suit (3) :

(2) Du nom du mathématicien allemand M. Stern qui le décrouvrit trois ans avant Brocot ; la découverte de l'horloger semblait pourtant indépendante des travaux du mathématicien.

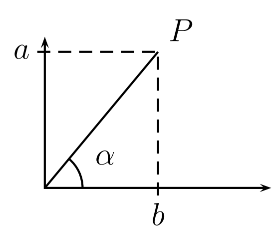
(3) Source : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier :Sternbrocot.jpg.



Dans la suite de cet article, nous allons étudier plus systématiquement cette opération d'addition des cancres et en donner une application décrivant une situation paradoxale pouvant se rencontrer en statistique.

2. Définitions et représentations géométriques

Dans la suite de ce travail, nous allons nous placer dans l'ensemble $\mathscr{F}$ composé de toutes les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres réels strictement positifs ; bien entendu, tout élément $\frac{a}{b}$ de $\mathscr{F}$ est un réel positif qui est évidemment aussi égal à $\frac{k.a}{k.b}$ pour tout $k > 0$; par ailleurs, tout réel positif a peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{1}$ et est donc un élément de $\mathscr{F}$. En fait, la donnée d'une fraction $\frac{a}{b}$ de $\mathscr{F}$ équivaut à celle du couple (b, a) ou encore à celle du vecteur $\vec{OP}$ où O désigne l'origine du plan tandis que P désigne le point (b, a). On peut donc donner une représentation géométrique de $\frac{a}{b}$ dans le plan cartésien à l'aide du point d'abscisse b et d'ordonnée a ; si le repère est orthonormal, la fraction $\frac{a}{b}$ coïncide avec la tangente de l'angle α formé par l'axe horizontal et la demi-droite $\mathscr{D}$ issue par l'origine O et passant par le point P : tous les points de $\mathscr{D}$ correspondent à des éléments de $\mathscr{F}$ qui sont associés au même réel positif tg α.



A l'instar de Ferréol [3], nous noterons $\oplus$ l'opération définie de la façon suivante pour deux éléments quelconques $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ de $\mathscr{F}$:

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

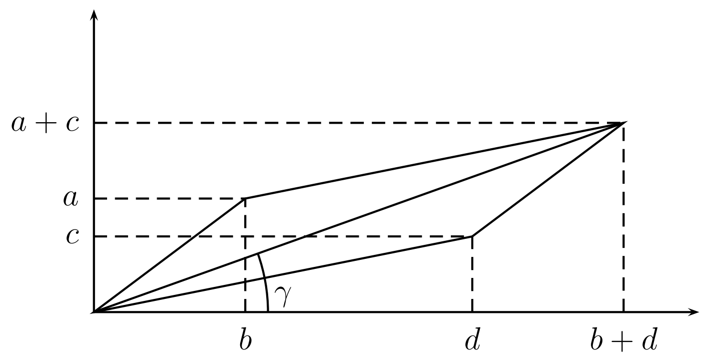
Nous adopterons dans la suite la terminologie donnée par Lucas dans son ouvrage *Théorie des nombres* datant de 1891 (4) : le résultat $\frac{a+c}{b+d}$ de cette opération est appelé la *médiante* (5) des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, tandis que l'opération elle-même est baptisée de *médiation* des fractions.

(4) Cette terminologie semble en effet plus « savante » que celle donnée par Ferréol !
(5) Certains auteurs désignent la médiante par le vocable de *médiane* [4]

Il est possible de donner une représentation géométrique de cette opération en prolongeant celle amorcée ci-dessus. En effet, la médiation de deux éléments de $\mathscr{F}$ correspond à l'addition vectorielle classique à l'aide de la règle du parallélogramme : formellement

$$(b, a) + (d, c) = (b + d, a + c)$$

de sorte que la médiante $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ est égale à la tangente de l'angle γ formé par l'axe des abscisses avec la diagonale, issue de l'origine, du parallélogramme dont les sommets sont les points O, P , (d, c) et $(b + d, a + c)$.



3. Propriétés de l'addition des cancres

Cette médiation doit être manipulée avec prudence. Elle ne peut être confondue avec l'addition usuelle dans $\mathbb{R}$ et fournit des résultats inhabituels, ce qui pourrait évidemment engendrer des erreurs (forcément commises par des « cancres »).

En guise d'exemple, considérons deux entiers naturels n et p ; ils peuvent s'écrire sous la forme de fractions à dénominateur unitaire, ce qui permet d'écrire

$$n \oplus p = \frac{n}{1} \oplus \frac{p}{1} = \begin{cases} \frac{2.n}{2} = n & \text{si } n = p \\ \frac{n+p}{2} & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

Par ailleurs, la médiation de deux mêmes fractions peut fournir des résultats différents selon l'écriture de ces nombres ; ainsi,

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \text{ mais } \frac{2}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{3}{7}$$

Bien entendu, l'unicité du résultat de cette opération est garantie lorsqu'on on travaille avec des fractions dont les numérateur et dénominateur sont des entiers naturels premiers entre eux, mais des « mauvaises surprises » peuvent apparaître lorsque sont possibles des simplifications entre ceux-ci.

Passons en revue quelques propriétés algébriques de cette médiation de fractions : certaines paraîtront « normales » tandis que d'autres sembleront « étonnantes ». Dans la suite de cette note, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'}$ et $\frac{c'}{d'}$ désigneront, sauf mention explicite du contraire, des éléments arbitraires de $\mathscr{F}$.

1. La médiation est clairement commutative :

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \oplus \frac{a}{b}$$

2. La médiation est également idempotente, puisque

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2.a}{2.b} = \frac{a}{b}$$

3. La médiation n'est pas associative, ainsi qu'en atteste notamment l'exemple suivant :

$$\left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}\right) \oplus \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \text{ mais } \frac{1}{2} \oplus \left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \oplus \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$$

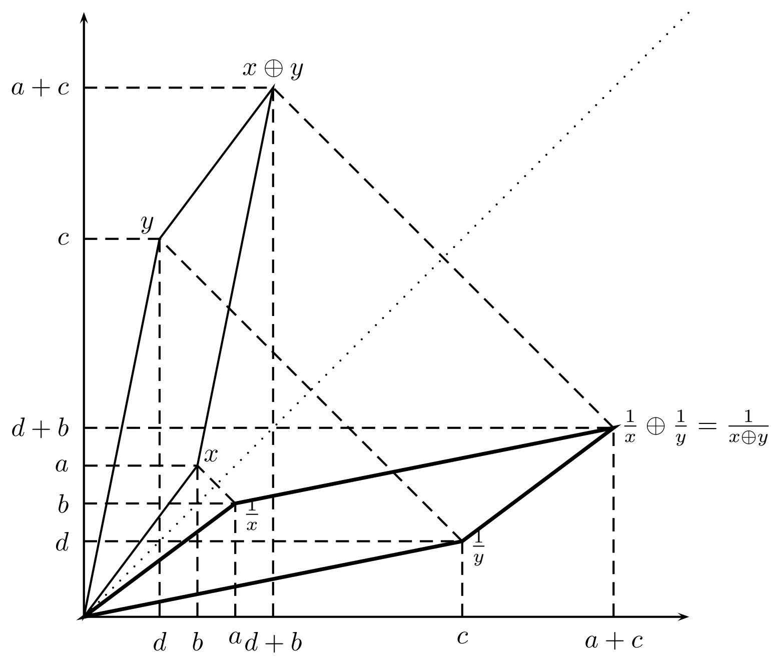
4. La multiplication n'est pas distributive par rapport à la médiation, comme le montre le cas suivant :

$$3.\left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = 3.\frac{2}{5} = \frac{6}{5} \text{ mais } \left(3.\frac{1}{2}\right) \oplus \left(3.\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \oplus 1 = \frac{4}{3}$$

5. La médiation donne lieu à une égalité « simple » quand on ajoute les inverses de deux fractions. De fait, pour $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$, on trouve aisément cette égalité, appelée parfois, à la suite de Ferréol [3], l'*inversion des cancres* :

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{1}{x \oplus y} \text{ puisque } \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c}$$

L'inversion des cancres peut encore être justifiée en observant que l'inverse d'une fraction correspond géométriquement au symétrique, par rapport à la bissectrice du premier quadrant, du point représentatif de la fraction initiale.



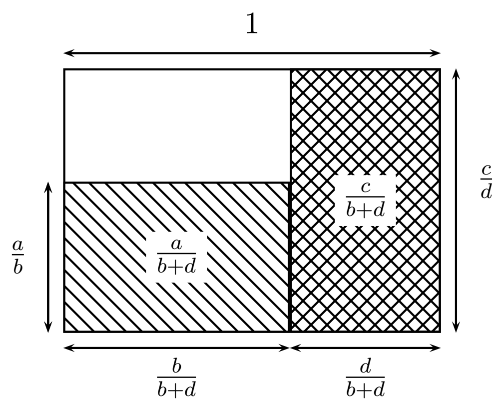
6. Si la médiation de deux fractions ne peut pas être confondue avec l'addition usuelle, elle se comporte néanmoins de manière « sympathique » vis-à-vis de cette dernière ; en effet, elle donne lieu à une sorte de règle de « mise en évidence des cancres » qui se traduit par l'égalité suivante valable pour tout réel positif k :

$$\left(k + \frac{a}{b}\right) \oplus \left(k + \frac{c}{d}\right) = k + \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)$$

De fait, on peut écrire

$$k + \frac{a}{b} = \frac{k.b + a}{b} \quad , \quad k + \frac{c}{d} = \frac{k.d + c}{d} \text{ et } k + \frac{a+c}{b+d} = \frac{k.b + k.d + a + c}{b+d}$$

7. On obtient une propriété similaire vis-à-vis de la soustraction par un réel supérieur ou égal aux deux fractions considérées, c'est-à-dire
$$\left(\frac{a}{b} \leqslant k \text{ et } \frac{c}{d} \leqslant k\right) \Longrightarrow \left(k - \frac{a}{b}\right) \oplus \left(k - \frac{c}{d}\right) = k - \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)$$
La vérification de cette égalité est semblable à celle du cas précédent.
8. La médiante de deux fractions est un barycentre, puisque c'est une moyenne pondérée de ces deux fractions, les poids de pondération étant les dénominateurs considérés ; de fait, pour $\lambda = \frac{b}{b+d}$, on peut écrire
$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{b.\frac{a}{b} + d.\frac{c}{d}}{b+d} = \lambda.\frac{a}{b} + (1-\lambda).\frac{c}{d}$$
9. La médiante de deux fractions se trouve toujours comprise entre les deux fractions en question, ce qui se traduit de la sorte
$$\left(\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}\right) \Longrightarrow \left(\frac{a}{b} \leqslant \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \leqslant \frac{c}{d}\right)$$
Cette propriété, parfois appelée la *règle du nombre moyen de Chuquet* ([6]) découle directement de la propriété précédente qui exprime la médiante comme un barycentre. On peut également en donner une « preuve géométrique » inspirée de la « preuve sans parole » ([7]) produite par Nelse [6] :



10. La médiation ne respecte pas toujours l'ordre classique utilisé pour les nombres réels, en ce sens qu'il est fort possible d'avoir
$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} \text{ et } \frac{c}{d} < \frac{c'}{d'} \text{ mais } \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}$$
ainsi qu'en atteste l'exemple suivant
$$1 < \frac{8}{7} \text{ et } 5 < \frac{21}{4} \text{ mais } 1 \oplus 5 = 3 > \frac{8}{7} \oplus \frac{21}{4} = \frac{29}{11}$$
Cette situation paradoxale, sur laquelle nous reviendrons dans la section suivante, peut être présentée en recourant au calcul matriciel. A cet effet, associons, à deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, la matrice
$$\mathscr{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$$

([6]) Cette règle avait en effet énoncée par Nicolas Chuquet, en 1484, dans son livre *Triparty en la science des nombres*.
([7]) En anglais *proof without words*.

et faisons de même pour les paires de fractions $\frac{c}{d}$ et $\frac{c'}{d'}$ et $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}$; on a visiblement

$$\mathscr{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) + \mathscr{M}\left(\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\right) = \mathscr{M}\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}, \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}\right)$$

Le paradoxe en question se présente donc lorsque les matrices $\mathscr{M}\left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right)$ et $\mathscr{M}\left(\frac{c}{d}, \frac{c'}{d'}\right)$ possèdent toutes deux un déterminant négatif, mais sont telles que leur somme est de déterminant positif.

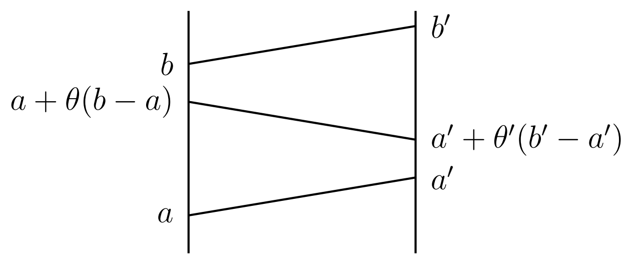
4. Paradoxe du barycentre

Considérons quatre nombres réels positifs ([8]) a, b, a' et b'. Tout barycentre de a et b est de la forme $a + \theta\,(b - a)$ pour un réel θ strictement compris entre 0 et 1, et de même un barycentre de a' et b' peut s'écrire $a' + \theta'\,(b' - a')$ pour un $\theta' \in]0, 1[$.

Il est possible de rencontrer une situation étonnante, baptisée *paradoxe du barycentre* lorsque

$$a < a' \text{ et } b < b' \text{ mais } a + \theta\,(b - a) > a' + \theta'\,(b' - a')$$

ce qui est illustré par la figure suivante :



Ce paradoxe peut être expliqué par le fait que la médiation de deux fractions ne respecte pas l'odre usuel (voir la dernière propriété de la section précédente) ; il se produit en effet lorsque

$$\frac{1-\theta}{1-\theta}.a = a < \frac{1-\theta'}{1-\theta'}.a' = a' \text{ et } \frac{\theta}{\theta}.b = b < \frac{\theta'}{\theta'}.b' = b'$$

mais

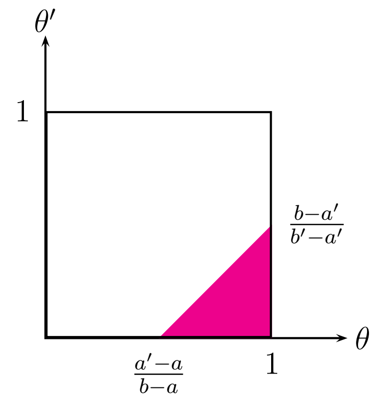
$$a \oplus b = \frac{(1-\theta)\,.a + \theta.b}{(1-\theta) + \theta} > a' \oplus b' = \frac{(1-\theta')\,.a' + \theta'.b'}{(1-\theta') + \theta'}$$

Si nous fixons a, a', b et b', avec $a < a' < b < b'$, le paradoxe du barycentre survient si et seulement si

$$a + \theta\,(b - a) > a' + \theta'\,(b' - a') \Longleftrightarrow \frac{\theta}{b' - a'} - \frac{\theta'}{b - a} > \frac{a' - a}{(b' - a')\,(b - a)}$$

ce qui se produit quand le couple (θ, θ') appartient au triangle magenta sur la figure ci-dessous tracée dans le plan $O\theta\theta'$:

([8]) Le phénomène peut se produire avec des nombres négatifs : il suffit alors d'ajouter à chacun des nombres considérés une même constante positive afin de pouvoir travailler sur des nombres tous positifs.



En supposant que les couples (θ, θ') suivent une distribution uniforme (voir l'article de Petit [7]), le paradoxe peut alors survenir avec une probabilité égale à

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{a'-a}{b-a}\right)\left(\frac{b-a'}{b'-a'}\right)=\frac{1}{2}\frac{(b-a')^2}{(b-a)\,(b'-a')}$$

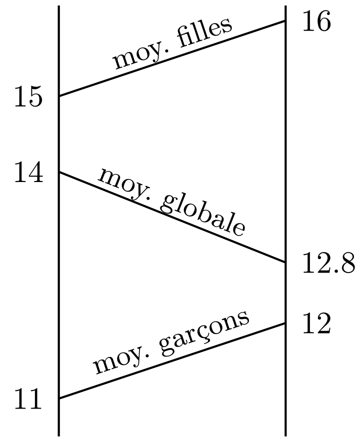
Pareille situation peut être rencontrée en statistique et en calcul des probabilités lorsqu'une population est répartie en sous-polulations et qu'une grandeur évolue dans un sens (par exemple, croît) sur chaque sous-population, mais dans le sens contraire (décroît dans le cas de l'exemple) sur la population globale. Ce paradoxe dépend évidemment de la structure de la population ; c'est pourquoi, il est connu sous le nom d'*effet de structure* (ou *shift and share* en anglais) [2] ou encore de *paradoxe de Simpson* [8] ; une présentation plus détaillée peut être trouvée dans la littérature, notamment dans les travaux [2], [3], [5], [7], [8] cités dans la bibliographie. Contentons-nous ici de donner, en guise d'illustration, un exemple simple se référant à des notes qu'un professeur de mathématiques a enregistré, lors de récents contrôles, dans deux de ses classes A et B ; il a calculé les moyennes des garçons et des filles dans les deux classes et dispose des données suivantes :

sous-populations	filles	garçons	filles	garçons
effectifs	15	5	3	12
notes moyennes	15	11	16	12

Les notes moyennes globales des deux classes A et B sont respectivement fournies par

$$\bar{x}_A=\frac{15\times 15+5\times 11}{20}=14 \text{ et } \bar{x}_B=\frac{3\times 16+12\times 12}{15}=12,8$$

Ainsi, en ce qui concerne les résultats des garçons, ceux de la classe B sont meilleurs que ceux de la classe A ; il en va de même pour les résultats des filles. Pourtant, en réunissant les résultats des garçons et des filles appartenant à une même classe, la moyenne globale enregistrée dans la classe A est supérieure à celle obtenue dans B ; cette situation peut être visualisée sur la figure ci-dessous :



Ce paradoxe s'explique par la composition différente des classes : A comprend un plus grand pourcentage de filles que B et celles-ci sont plus performantes que leurs condisciples masculins.

5. Conclusion

Je tiens à terminer cette note par une mise au point . . . qui, je suppose, paraîtra évidente à tout professeur de mathématiques enseignant les bases de l'algèbre classique.

Malgré le fait que je me suis efforcé de montrer l'intérêt, voire l'utilité pratique, de cette médiation (ou addition des cancres), je ne défends nullement l'idée qu'il faut systématiquement en parler devant de jeunes élèves qui sont en cours d'apprentissage de l'algèbre élémentaire.

Pour en savoir plus

[2] Bair J. - Henry V., *Situations concrètes exploitant des barycentres*, Editions de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, 2008.

[1] Ballieu M., Suites de Farey et quelques applications, *Mathématique et Pédagogie*, n° 75, 1990, pp. 5 - 13.

[3] Ferréol R., Addition des cancres, suites de Brocot et friandises associées, *Quadrature*, Num. 36, 1999, pp. 13-24.

[4] Festraets Cl., Les suites de Farey, *Losanges*, n° 3, 2009, pp. 25 - 30.

[5] Haesbroeck G. - Henry V., *Pratique de la statistique descriptive*, Editions du Céfal et F. Ferrer, Liège et Bruxelles, 2004.

[6] Nelse R.B., Proof without Words : Règle des Nombres Moyens, *Mathematics Magazine*, Vol. 67, No. 1, 1994, p. 34.

[7] Petit J.L., Généralisation du paradoxe de Simpson, *Revue Statistique Appliquée*, XXXX (3), 1992, pp. 47 - 61.

[8] Simpson E.H., The Interpretation of Interaction in Contingency Tables, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodology)*, Vol. 13, n° 2, 1951, pp. 238 - 241.