À propos de la série de Grandi

Jacques Bair

Mots clés : Série divergente, convergence au sens de Cesàro ou d'Abel, sommation par prolongement analytique, sommation lisse, dialectique hégélienne.

Résumé. *La série de Grandi, dont les termes sont alternativement égaux à* 1 *et à* -1*, est une série divergente emblématique. Nous décrivons son histoire qui nous paraît conforme à la dialectique hégélienne. Nous en déduisons quelques constatations générales relatives à l'évolution temporelle de concepts mathématiques, ainsi qu'à la nature surprenante de certains résultats obtenus par des mathématiciens célèbres.*

1. Introduction

L'analyse mathématique occupe une place privilégiée dans l'enseignement des mathématiques, et le chapitre sur les séries y est souvent assez fondamental. Dans une première approche classique, ce sont principalement les séries convergentes qui retiennent l'attention. Rappelons à leur propos des définitions et notations fréquemment adoptées. Lorsque la suite des sommes partielles $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ d'une suite $S = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ converge vers un nombre s, on dit que S est une *série convergente*, qu'elle admet la *somme* s, et l'on convient d'écrire

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Cette notation sommatoire sert aussi à désigner la série elle-même.

Dans cet article, nous allons nous intéresser à une série non convergente, simple et relativement connue, à savoir la *série de Grandi* (1). Elle est définie par $u_n = (-1)^{n-1}$ pour tout entier positif n : il s'agit donc de calculer (si possible) $1-1+1-1+\ldots$.

De nombreux mathématiciens, parmi les plus réputés de leur temps, ont étudié cette « somme infinie » pour laquelle des idées contradictoires ont été émises, avant d'en arriver à une réconciliation des différents points points de vue. Ainsi, l'histoire de cette série peut se décomposer schématiquement en les trois étapes de ce que l'on appelle parfois la *dialectique hégélienne* (2). Nous pouvons remarquer qu'une telle évolution temporelle d'un concept n'est pas rarement rencontrée en mathématiques, ainsi qu'en témoignent, par exemple, les cas des angles corniculaires [1] ou encore des infiniment petits [2]. En ce qui concerne la série étudiée ici, nous distinguons donc trois étapes différentes dans son histoire, à savoir :

a) aux 17^e et 18^e siècles, plusieurs scientifiques ont défendu la *thèse* selon laquelle la « somme alternée et infinie » de $+1$ et de -1 est égale à un nombre, en l'occurence à $\frac{1}{2}$;
b) au 19^e siècle, des mathématiciens célèbres ont cherché à devenir plus rigoureux en présence de séries non convergentes ; ils se sont opposés à l'idée précédente : leur *antithèse* revenait à déclarer que la série en question n'avait aucun sens et n'était dès lors pas égale à $\frac{1}{2}$;
c) aux 20^e et 21^e siècles, certains scientifiques ont dépassé cette opposition : leur *synthèse* consistait à créer des théories rigoureuses au sein desquelles des séries non convergentes, dont celle de Grandi (3), pouvaient être associées à un nombre, ce qui permettait de confirmer et justifier les résultats obtenus intuitivement par les premiers analystes.

(1) S. Trompler a consacré un article aux « Roses de Grandi » dans Losanges, voir [11].
(2) Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) était un philosophe allemand. Son œuvre, imposante, est assez bien résumée par les titres de trois de ses ouvrages, à savoir *Phénoménologie de l'esprit* (1807), *La science de la logique* (3 volumes, 1812-1816) et *Encyclopédie des sciences philosophiques* (1830).
(3) Luigi Guido Grandi était un religieux italien, né en 1671, mort en 1742. Il fut professeur à l'Université de Florence, nommé pour la philosophie en 1700 et pour les mathématiques en 1714.

2. Première étape : la thèse

Grandi est notamment connu pour avoir étudié, dans son livre *Quadratura circula et hyperbolae per infinitas exhibita* (1703) et pour des raisons philosophiques, la série qui porte son nom, à savoir

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.$$

Il soutenait que cette série est égale à $\frac{1}{2}$, en accord avec la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison -1 ; comme les sommes partielles valent 0 lorsque leur nombre de termes est pair, il pensait que cette série valait à la fois 0 et $\frac{1}{2}$, de sorte qu'il croyait avoir ainsi démontré que « le monde a été créé à partir du néant ».

Leibniz (1646-1716), dans une lettre adressée à C. Wolf et publiée dans son ouvrage intitulé, en latin, *Acta eruditorum* (1684), confirma le résultat numérique émis par Grandi et assigna donc la valeur $\frac{1}{2}$ à cette série. Mathématiquement, ce résultat peut être expliqué de diverses manières. Tout d'abord, on peut constater que si l'on effectue formellement le produit de $\left(1-x+x^2-x^3+\ldots\right)$ par $(1+x)$, on trouve 1, car les autres termes « se détruisent » deux par deux ; on a donc

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

d'où le résultat escompté en posant $x=1$ dans l'égalité ci-dessus. Notons que cette dernière formule est un cas particulier, relatif à la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$, du développement d'une fonction selon les puissances de $x-x_0$, avec ici $x_0=0$: la formule générale fut obtenue par Taylor (1685-1731) en 1715, puis reprise par Mac Laurin (1698-1746) en 1742 pour $x_0=0$, en négligeant le problème de la convergence et du reste de la série.

Leibniz trouva également le même résultat sans faire appel à la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}$. En effet, on peut constater que si l'on regroupe les termes de cette somme par deux, on a

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0$$

mais si on isole le premier terme, avant de regrouper par deux les suivants, on arrive intuitivement à

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots=1-0-0-\ldots=1$$

En présence de ces deux résultats différents, on peut être tenté d'en prendre la moyenne arithmétique et d'écrire

$$S=-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

Cet argument fut donné par Leibniz qui le jugeait toutefois plus « métaphysique » que mathématique ; il était aussi suivi par plusieurs Bernoulli, Jacques (1654-1705), Jean (1667 - 1748) et Daniel (1700 - 1782) ([7], p. 308).

Cette même valeur de $\frac{1}{2}$ fut aussi attribuée à cette série par Euler (1707-1783). Comme ce fut souvent le cas pour ce génial mathématicien, il argumentait en recourant à plusieurs raisonnements heuristiques différents. Dans ce cas, il utilisait en substance deux propriétés algébriques des sommes, qualifiées aujourd'hui de *stabilité* et de *linéarité*. Tout d'abord, en isolant le premier terme de la somme, on obtient (par stabilité)

$$S=1-(1-1+1-1+1-1+\ldots)=1-S$$

d'où l'on déduit évidemment que $S=\frac{1}{2}$. Par ailleurs, en ajoutant un premier terme nul, puis en additionnant entre eux les termes homologues, on est conduit (en vertu de la linéarité) à écrire

$$\begin{aligned}S&=1-1+1-1+1-1+\ldots\\S&=0+1-1+1-1+1-1+\ldots\\2S&=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots\end{aligned}$$

De là, le Suisse déduisait évidemment que

$$2S=1\text{ d'où }\ S=\frac{1}{2}$$

D'une certaine manière, on dispose donc de cette formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}\tag{1}$$

([4]) Toutefois, la convergence ou divergence de quelques séries très spéciales avait été démontrée avant le 19e siècle, comme en témoignent ces quelques exemples mentionnés dans [5] : N. Oresme (1325-1382) avait établi la divergence de la série harmonique ; Jacques Bernoulli avait démontré la convergence de la série de terme général $u_n=\frac{1}{n^2}$; J. d'Alembert 1717-1783) avait énoncé le premier critère de comparaison à une série géométrique, tandis que l'on doit à Leibniz un critère relatif à des séries alternées.

3. Deuxième étape : l'antithèse

Au sujet de la convergence ou non des séries étudiées, des mathématiciens du 19e siècle furent plus précautionneux que leurs prédécesseurs, ces derniers ne se préoccupant guère de cette question ([4]). Nous allons ici nous attarder sur le point de vue en la matière d'Eugène CATALAN (1814-1894), car il était, d'après [6] (p. 168), « plus horrifié qu'ABEL et CAUCHY par l'usage peu scrupuleux qu'on faisait, encore de son temps, des séries non convergentes ; Catalan était particulièrement vigilant à cet égard. Habile manipulateur des séries convergentes, il savait, à l'occasion, apporter sa pierre à l'édifice théorique, même dans un ouvrage didactique comme sa *Théorie élémentaire des séries.* » Dans ce petit livre, l'auteur ([3], p. 2) avait constaté que le premier membre de l'égalité (1) ne peut pas être envisagé de la manière classique : de fait, la série en question ne converge pas puisque la suite de ses sommes partielles vaut alternativement 1 ou 0 selon qu'elle contient un nombre impair ou pair de termes. Selon cet auteur, « Les expressions *limite d'une série*, *somme d'une série* n'ont évidemment aucun sens lorsque la série n'est pas convergente. On peut donc s'étonner que de savants géomètres aient énoncé les propositions suivantes :

$$1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

(Lacroix, *Calcul intégral*, t. III, p. 346) »

Dans un cours donné à l'Université de Liège et publié ultérieurement [4], CATALAN classait les séries en trois catégories :

a) les séries *convergentes*, à savoir celles dont la suite des sommes partielles converge vers un nombre réel ;
b) les séries *divergentes* dont la suite des sommes partielles croît (en valeur absolue) au-delà de toute limite ;
c) les séries *indéterminées* dont la suite des sommes partielles, sans croître au-delà de toute limite, n'a pas de limite déterminée.

Comme exemple de la troisième classe, il citait le cas de la série qui fait l'objet de cet article. Il la traitait rapidement et de manière un peu ironique, en affirmant : « Laplace rapporte (*Introduction à la Théorie des Probabilités*) que le P. Grandi en avait conclu la possibilité de la Création ! Ces rêveries étaient excusables dans le siècle dernier. Aujourd'hui, les auteurs qui admettent l'équation

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots$$

ne possèdent pas les premières notions de l'Analyse. » ([4], pp. 3-4).

4. Troisième étape : la synthèse

Des successeurs de CATALAN ne s'en tinrent pas à l'avis net et indiscutable de ce dernier. Ils n'abandonnèrent point le sujet et construisirent diverses théories toutes nouvelles pour justifier rigoureusement la formule (1). En guise d'illustration, voici un aperçu donnant succinctement quelques méthodes utilisées à ce propos.

a) Une justification moderne de (1) consiste à faire appel à la *moyenne de Cesàro* ([5]) des sommes partielles. À cet effet, on considère la limite de la suite obtenue en prenant les moyennes arithmétiques des premiers termes de la suite des sommes partielles. Appliquons ce procédé dans notre cas. En premier lieu, on fait appel à la suite des sommes partielles pour la série de GRANDI, c'est-à-dire

$$1,0,1,0,\ldots,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1},\ldots,1,0,1,0,\ldots$$

Puis, on construit la suite dont le n^{e} terme est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite ci-dessus, soit la nouvelle suite

$$1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2},\frac{k}{2k-1},\frac{1}{2},\ldots$$

Cette dernière suite converge vers la limite $\frac{1}{2}$. Ceci peut être relié à l'égalité (1). En réalité, pour les mathématiciens contemporains, la suite des sommes partielles dont il a été question ci-dessus *converge au sens de Cesàro* vers $\frac{1}{2}$.

b) On peut considérer la *série géométrique* de raison x pour $|x|<1$. On sait alors que

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

Dans cette formule, on peut remplacer formellement x par sa limite par valeurs supérieures, à savoir x tendant vers -1 (en lui étant inférieur), et l'on obtient alors l'égalité (1).
Ce procédé de « passage à la limite », apparemment exploité par LEIBNIZ ([9], p. 134) et par

([5]) Ernesto CESÀRO (1859-1906) était un élève de CATALAN.

EULER ([7], p. 308), préfigurait ce que l'on appelle de nos jours une *sommation par prolongement analytique*. Expliquons cette méthode sur la situation particulière que nous étudions. On peut considérer, pour tout nombre complexe z, la série géométrique $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$: on démontre que cette série converge si le module de z est inférieur à 1, auquel cas la somme vaut $\frac{1}{1-z}$. Or, cette dernière expression $\frac{1}{1-z}$ a un sens pour tout nombre complexe z autre que 1. Dès lors est née l'idée d'associer à la série $1+z+z^2+z^3+\dots$ le nombre $\frac{1}{1-z}$ pour tout complexe z différent de 1, même lorsque la série diverge (c'est-à-dire même lorsque le module de z est supérieur ou égal à l'unité, avec toutefois $z \neq 1$) : on a de la sorte « prolongé analytiquement » la somme de la série en tant que fonction de z. Cette méthode sera exploitée ci-dessous à partir des fonctions η et ζ.

c) Un prolongement analytique dans le cas particulier où z est de module unitaire porte le nom de *méthode abélienne* : on est alors en présence de ce que l'on appelle la *convergence au sens d'Abel*. Plus précisément, cette méthode définit comme valeur associée à une série de terme général u_n la *limite au sens d'Abel* définie, sous réserve d'existence, par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{x\to 1\ ;\ x<1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right)$$

Par exemple, pour la série de GRANDI, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^n = x \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^p = x \frac{1}{1+x}$$

pour $|x| < 1$ ce qui permet de retrouver l'égalité (1) en posant $x = 1$.

d) On peut justifier la valeur de cette série en recourant à la *fonction η de Dirichlet*, ou encore à la *fonction ζ de Riemann*. L'étude complète de ces fonctions sort du cadre de cet article, car elle est assez compliquée. La fonction η correspond à la série alternée des inverses des puissances des entiers, tandis que la fonction ζ est la série des inverses des puissances des entiers. Plus précisément,

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On peut démontrer que ces deux fonctions sont reliées entre elles par cette égalité

$$\eta(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s)$$

En particulier, pour $s = 0$, on retrouve bien les valeurs obtenues précédemment pour la série de GRANDI ; en effet, il est possible de prouver que

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \ \text{d'où} \ \ \eta(0) = (1-2)\,\zeta(0) = \frac{1}{2}$$

e) T. TAO retrouve aussi ce résultat (1) en faisant appel à un procédé de *sommation lisse* qui généralise la méthode de Cesàro. L'idée est de remplacer les sommes partielles de la série, qui sont essentiellement de nature discrète et présentent dès lors des sauts brusques pour chaque valeur entière égale au nombre de termes, par une fonction suffisamment continûment dérivable pour laquelle un développement de MAC LAURIN peut être donné : $\frac{1}{2}$ décrit le comportement asymptotique de cette fonction lisse. Pour des explications plus techniques (et assez sophistiquées), nous renvoyons le lecteur à l'article original [10].

5. En guise de conclusion

En première approche, on pourrait estimer que la série de GRANDI constitue une curiosité mathématique sans grand intérêt intrinsèque. Nous ne partageons guère cet avis, mais nous pensons au contraire que l'histoire de cette série mérite d'être relatée dans la mesure où elle est, selon nous, typique du développement de certains concepts mathématiques et de la nature surprenante de certains résultats mathématiques.

Étayons quelque peu ce point de vue en mettant en évidence les constatations suivantes dégagées de notre petite étude :

- Contrairement à une idée trop souvent répandue, les idées mathématiques ne sont pas toujours définitives, et peuvent être remises en question lorsque les exigences de la rigueur deviennent plus contraignantes. Notons au passage que ces dernières ne sont pas immuables, mais évoluent au fil des ans : une évidence pour des mathématiciens d'une époque peut parfois être contestée par certains de leurs successeurs.
- Les théories mathématiques évoluent sans cesse grâce à l'imagination, qui semble sans borne, de certains mathématiciens. En particulier, lorsque des problèmes paraissent impossibles dans un contexte, une théorie nouvelle est quelquefois créée pour rendre possible le traitement de la question.

- Les sujets d'étude ne résultent pas toujours de simples observations de la réalité physique, et ne concernent pas forcément des objets appartenant au monde sensible. Leur choix peut être dicté, nous semble-t-il, par la curiosité intellectuelle, voire par ce que H. Poincaré appelle une certaine « sensibilité esthétique » ([8], p. 368).
- Les concepts mathématiques émergent fréquemment petit à petit ; ils sont d'abord introduits de façon peu rigoureuse, mais en s'appuyant sur des arguments de type heuristique, éventuellemnt mis de côté pendant un certain temps avant d'être parfois repris puis développés ultérieurement de façon rigoureuse.
- Un même résultat mathématique peut être obtenu et justifié par diverses méthodes pouvant être fort différentes les unes des autres. De la sorte, les théories mathématiques semblent inépuisables, car, même lorsqu'un énoncé est connu et prouvé, il peut être abordé dans un autre contexte, ce qui peut soulever des questions inédites et ainsi ouvrir des voies nouvelles.
- Les découvertes mathématiques sont quelquefois étonnantes, éventuellement contraires à l'intuition. Ainsi, il peut sembler surprenant que le nombre associé à la série de Grandi n'est pas entier, contrairement à tous les termes de cette somme. Dans le même ordre d'idées, il existe des situations plus curieuses. Ainsi, la série composée des nombres 1, à savoir $1 + 1 + 1 + \ldots$ se voit associer un nombre négatif, soit $-\frac{1}{2}$ car on est en présence de $\zeta(0)$. Plus extraordinaires encore sont les cas suivants : la série des entiers $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ vaut $\zeta(-1)$ soit $\frac{1}{12}$ (6), ou encore la série des carrés $1 + 4 + 9 + 16 + \ldots$ est nulle car égale à $\zeta(-2)$ ([10]). On pourrait peut-être se demander comment obtenir un nombre négatif ou nul en ajoutant entre eux des nombres positifs ? Bien sûr, si on additionnait un nombre fini de positifs, le résultat serait également positif ; la « surprise » survient quand on ajoute entre eux une infinité de nombres. Mais, si on y réfléchit un peu, une telle situation est assez souvent rencontrée : les mathématiciens un peu expérimentés ne s'étonnent plus quand ils obtiennent un irrationnel en additionant une infinité de rationnels, par exemple (7)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Bref, les mathématiques peuvent sans cesse nous surprendre... et nous passionner !

Pour en savoir plus

[1] Bair J. - Henry V., Angles corniculaires et nombres superréels, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stévin*, 15, 2008, pp. 77-86.

[2] Bair J. - Henry V., *Analyse infinitésimale, le calculus redécouvert*, Academia - Bruylant, Louvain - la - Neuve, 2008.

[3] Catalan E., *Traité élémentaire des séries*, Leiber et Faraguet, Paris, 1860.

[4] Catalan E., *Cours d'Analyse de l'Université de Liège - Algèbre, Calcul différentiel 1*, Forgotten Books, 2013, publié initialement en 1879.

[5] Hauchecorne B. - Surreau D., *Des mathématiciens de A à Z*, Ellipses, Paris, 1996.

[6] Jongmans F., *Eugène Catalan : Géomètre sans patrie - Républicain sans république*, Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française, Mons, 1996.

[7] Kline M., Euler and Infinite Series, *Mathematics Magazine*, vol. 56, n° 5, 1983, pp. 307-325.

[8] Poincaré H., L'invention mathématique, *L'Enseignement Mathématique*, 10, 1908, pp. 357-371.

[9] Ramis J.P., Les séries divergentes, *Pour la Science*, n° 350, 2006, pp. 132-139.

[10] Tao T., The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation, http://terrytao.wordpress.com/2010/04/10.

[11] Trompler, S., Les roses de Grandi, *Losanges*, n°14, 2011, pp. 32–37, SBPMef.

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège. ✉ j.bair@ulg.ac.be

(6) Ce résultat, pouvant paraître un peu absurde, admet pourtant des applications concrètes, notamment en physique. Ce sujet dépassant le cadre de cet article, nous conseillons au lecteur intéressé par le sujet de consulter, notamment, le site *Science étonnante* (sciencetonnante.wordpress.com/) de David Louapre.

(7) Il existe tout même, d'un point de vue asymptotique, des différences entre tous ces exemples ; voir à ce sujet l'article (assez « technique ») [10].