

UNIVERSITE DE LIEGE
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE METHODES DE FABRICATION

CALCUL DES TRIBUNES DU COLLEGE DE CHAULNES

J.F. DEBONGNIE

Rapport LMF/D21, février 1990

Ministère de l'Education nationale
et de la culture française



Université de l'Etat à Liège

CALCUL
DES TRIBUNES
DU COLLEGE DE CHAULNES

J.-F. DEBONGNIE
Ingénieur Civil
Docteur en Sciences Appliquées
Chargé de Cours C.T.U.

1 - CAS DE CHARGE

Cas de charge n°1 : 5 personnes de 80 kg sur chaque banquette, soit

$$5 \times 800 \text{ N} = 4\,000 \text{ N / banquette}$$

Cas de charge n°2 : 5 personnes de 80 kg debout sur chaque marchepied, soit

$$5 \times 800 \text{ N} = 4\,000 \text{ N / marchepied}$$

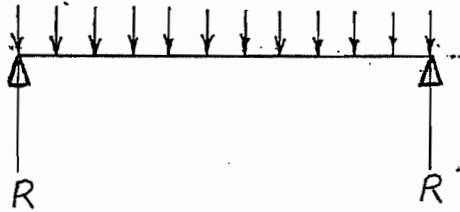
On considère qu'il s'agit de charges uniformément réparties.

Pondération : facteurs 3/2 sur chaque cas de charge. On considérera la somme des deux cas de charge pondérés. L'application des coefficients de pondération donne :

$$\text{- cas de charge n°1 : } \frac{3}{2} \cdot 4\,000 = 6\,000 \text{ N / banquette}$$

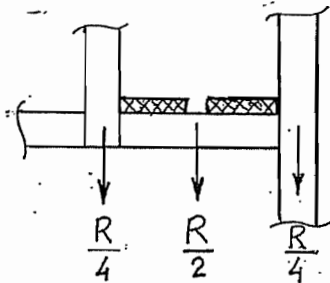
$$\text{- cas de charge n°2 : } \frac{3}{2} \cdot 4\,000 = 6\,000 \text{ N / marchepied}$$

2 - REPARTITION DES CHARGES POUR LES MARCHEPIEDS



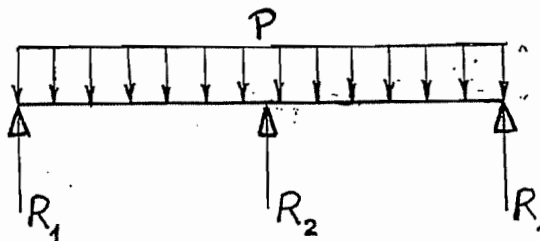
Les réactions sont :

$$R = \frac{1}{2} \cdot 6\,000 \text{ N} = 3\,000 \text{ N}$$



Ces réactions sont réparties comme le montre la figure ci-contre sur la traverse qui les soutient.

3 - REPARTITION DES CHARGES POUR LES BANQUETTES



En l'absence de l'appui central, on aurait une flèche au centre égale à :

$$w = \frac{5}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EI}$$

La réaction R_2 seule donne une flèche opposée

$$w = - \frac{R_2 l^3}{48 EI}$$

La valeur de R_2 s'obtient en exprimant que la flèche centrale s'annule, ce qui donne :

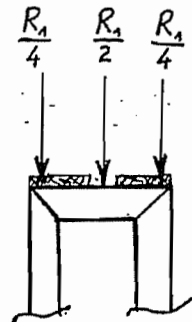
$$R_2 = \frac{5.48}{384} P = \frac{5}{8} P$$

On en déduit :

$$R_2 = \frac{5}{8} \cdot 6\,000 = 3\,750 \text{ N}$$

$$R_1 = \frac{3}{16} \cdot 6\,000 = 1\,125 \text{ N}$$

Ce raisonnement suppose naturellement la structure métallique beaucoup plus rigide que les planches composant la banquette. Ces réactions sont réparties comme le montre la figure ci-contre :



4 - CARACTERISTIQUES DU METAL : E 235

$$\sigma_c = 235 \text{ M P a}$$

5 - CARACTERISTIQUES DES SECTIONS

5.1 - A part les poteaux soutenant la banquette au centre, il s'agit de tube carré 40 x 40, d'épaisseur 3,2 mm. On a donc les caractéristiques suivantes :

Section : $A = 4 \times 40 \times 3,2 = 512 \text{ mm}^2$

Inertie : $I = 2 (I_1 + I_2 + I_3)$, avec

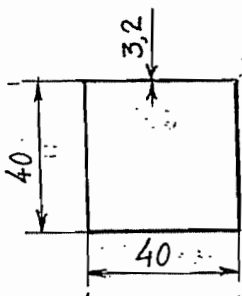
$$I_1 = \frac{3,2 \cdot (40)^3}{12} = 17\,070 \text{ mm}^4 \quad (\text{parties verticales})$$

$$I_2 = 40 \cdot 3,2 \cdot (20)^2 = 51\,200 \text{ mm}^4 \quad (\text{parties hor. / transport})$$

$$I_3 = \frac{40 \cdot (3,2)^3}{12} = 109,2 \text{ mm}^4 \quad (\text{inertie propre parties hor.})$$

$$\text{Somme} = 68\,380 \text{ mm}^4$$

$$I = 2 \cdot 68\,380 = 136\,800 \text{ mm}^4$$



5.2 - Poteaux centraux : tube carré 20 x 35, épaisseur 1,5 mm

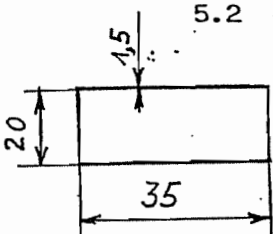
Section : $A = 2 \cdot (20 + 35) \cdot 1,5 = 165 \text{ mm}^2$

Grande inertie : $I_1 = \frac{1,5 \cdot (3,5)^3}{12} = 5\,359 \text{ mm}^4 \quad (\text{partie hor.})$

$$I_2 = 20 \cdot 1,5 \cdot (17,5)^2 = 9\,188 \text{ mm}^4 \quad (\text{transport parties verticales})$$

$$I_1 + I_2 = 14\,550 \text{ mm}^4$$

$$I_g = 2 (I_1 + I_2) = 29\,090 \text{ mm}^4$$



$$\text{Petite inertie : } I_1 = \frac{1,5 \cdot (20)^3}{12} = 1\,000 \text{ mm}^4 (\text{partie verticale})$$

$$I_2 = 35 \cdot 1,5 (10)^2 = 5\,250 \text{ mm}^4 (\text{transport parties horizontales})$$

$$I_1 + I_2 = 6\,250 \text{ mm}^4$$

$$I_p = 2 (I_1 + I_2) = 12\,500 \text{ mm}^4$$

6 - Vérification des poteaux centraux au flambement

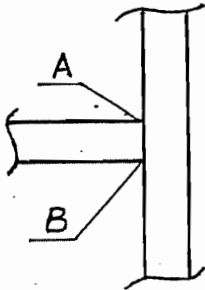
Poteau	petit	moyen	grand
longueur l (mm)	610	860	1110
longueur de flambement = 2l	1220	1720	2220
section A (mm ²) (*)	165	165	165
charge N (N)	3750	3750	3750
contrainte de compression $\sigma = N/A$ (MPa)	22,73	22,73	22,73
inertie (mm ⁴)	12500	12500	12500
module d'Young (MPa)	210000	210000	210000
charge critique d'Euler $N_k = \pi^2 EI / (4l^2)$	17410	8757	5257
contrainte critique d'Euler $\sigma_k = N_k/A$ (MPa)	105,5	53,07	31,86
$x = \frac{\sigma_e}{\sigma_k}$	2,227	4,428	7,376
$y = 0,5 + 0,65 \frac{\sigma_e}{\sigma_k}$	1,948	3,378	5,294
Coefficient de flambement $k = y + \sqrt{y^2 - x}$	3,200	6,021	9,838
$k \sigma$ (MPa)	72,74	136,9	223,6

Ces contraintes sont inférieures à σ_e .

(*) On considère que les planches n'empêchent nullement le flambement, ce qui va dans le sens de la sécurité.

7 - Vérification des structures d'appui latérales

7.1 - Sections réduites aux soudures



Aux soudures, les cordons horizontaux A et B ne peuvent raisonnablement être comptés pour la résistance. On considérera donc des sections réduites correspondant aux seuls cordons verticaux, soit :

$$A_R = \frac{A}{2} = \frac{512}{2} = 256 \text{ mm}^2$$

$$I_R = 2 I_1 = 2 \cdot 17.070 = 34.140 \text{ mm}^4$$

et

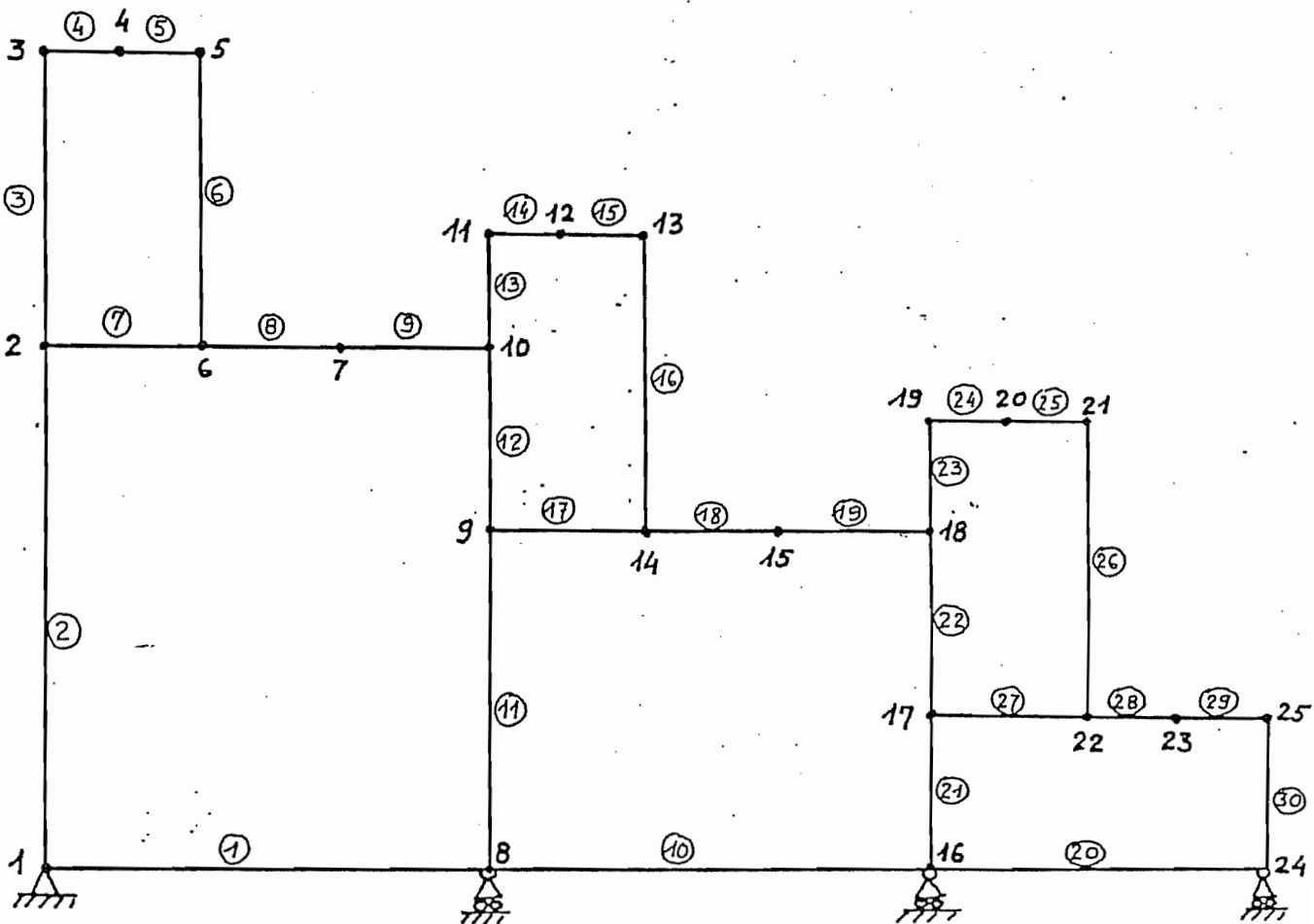
$$\frac{I_R}{v} = \frac{34.140}{20} = 1.707 \text{ mm}^3$$

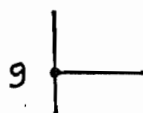
7.2 - Calcul


Le calcul a été effectué à l'aide du programme d'éléments finis SAMCEF (*). Le maillage est représenté ci-dessous. On trouvera, dans les figures suivantes, les déformées (fortement exagérées et tracées en joignant les noeuds par des segments de droite).

On notera que tous les déplacements sont inférieurs au dixième de millimètre.

(*) Système d'Analyse des Milieux Continus par Eléments Finis, développé par le Laboratoire d'Aéronautique de l'Université de Liège et commercialisé par la société SAMTECH, 25 bd Frère Orban, B.4000 LIEGE.



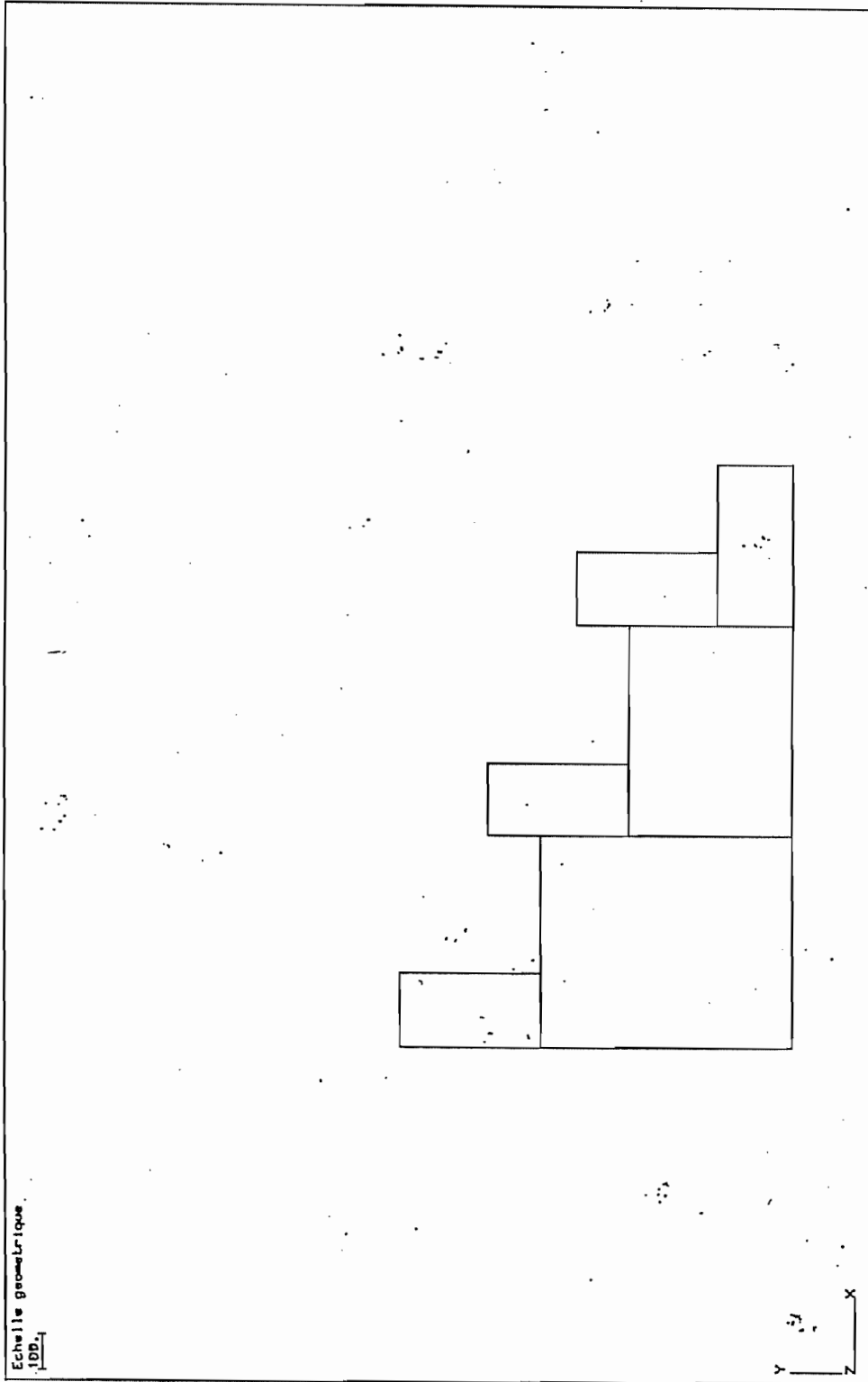

 numéro de noeud


 numéro d'élément

LE MAILLAGE.

SAMCEF - BACON : Version 3.1-2
TRIBUNE

1-FEB-90 15:53:31

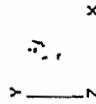
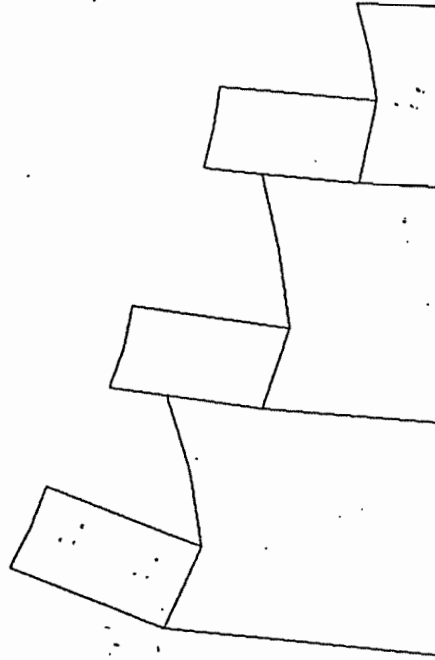


SAMCEF - BACON : Version 3.1-2

1-FEB-90 16:02:32

TRIBUNE

Deplacements nœuds (DX,DY,DZ)
Cas de charges 1
Energ. poten. 62.5822
Echelle geometrique
100
Echelle de la deformation 0.30604

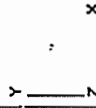
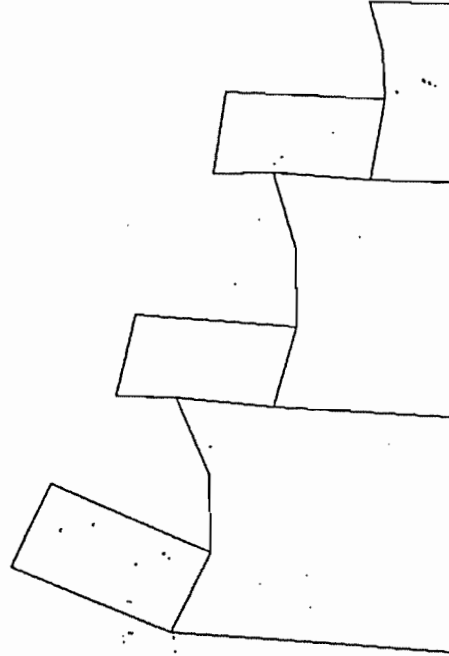


SAMCEF - BACON : Version 3.1-2

1-FEB-90 16:07:22

TRIBUNE

Deplacements nodaux (DX,DY,DZ)
Cas de charges 2
Energ. poten. 529.6503
Echelle geometrique
100.
Echelle de la deformation :944.81



7.3 - Contraintes d'extension

Le programme fournit les éléments de réduction M, N et T en chaque noeud, pour chaque élément. Les contraintes d'extension résultantes sont données ci-dessous. On constate, qu'après recombinaison des deux cas de charge, la contrainte d'extension maximale vaut :

$$\sigma = 127,3 \text{ MPa} < \sigma_e = 235 \text{ MPa}$$

Dans ce tableau, la colonne "Réd" contient un O (oui) si le calcul a été fait avec les sections réduites et un N (non) si la section n'a pas été réduite.

Noeud	Elt	Rid.	Cas de charge 1			Cas de charge 2			1+2
			N (N)	M (Nmm)	σ (MPa)	N (N)	M (Nmm)	σ (MPa)	
1	1	o	22,78	2074	1,304	89,62	10840	6,700	8,004
	2	o	885,2	2074	4,673	768,6	10840	9,353	14,03
2	2	o	885,2	14100	11,72	768,6	52790	33,93	45,65
	3	o	586,1	8921	7,516	56,08	7455	4,586	12,10
	7	o	298,7	23020	14,65	46,93	60240	35,47	50,12
3	3	o	586,1	12140	9,401	56,08	9622	5,856	15,26
	4	o	52,65	12140	7,318	42,69	9622	5,804	13,12
4	4-5	N	52,65	19860	3,006	42,69	3734	0,6293	3,635
5	5	o	52,65	7196	4,421	42,69	2155	1,429	5,850
	6	o	539,0	7196	6,321	56,08	2155	1,482	7,803
6	6	o	539,0	13860	10,22	56,08	19230	11,48	21,70
	7	o	29,87	39790	23,43	46,93	89380	52,51	75,94
	8	o	22,78	53650	31,52	89,62	108600	63,97	95,49
7	8-9	N	22,78	6871	1,049	89,62	112200	16,58	17,63
8	9	o	22,78	1297	0,8488	89,62	6080	3,912	4,761
	10	o	58,34	995,4	0,811	204,4	3867	3,064	3,875
	11	o	120,2	2293	16,039	3316	9948	18,78	24,82
9	11	o	120,2	14060	12,93	3316	42860	37,96	50,89
	12	o	922,1	8208	8,410	2707	9169	15,95	24,36
	17	o	69,46	22270	13,32	438,9	52030	32,19	45,51
10	9	o	22,78	39910	23,47	89,62	176600	103,8	127,3
	12	o	922,1	16680	13,37	2707	90210	63,42	76,79
	13	o	682,2	23230	16,27	475,6	86440	52,50	68,77
11	13	o	682,2	21560	15,30	475,6	51260	32,10	47,40
	14	o	111,2	21560	12,73	234,5	51260	30,95	43,68
12	14-15	N	11,12	20530	2,997	234,5	1317	0,6506	3,648

Noend	Ert	Rtd	o			o			
			N	M	σ	N	M	σ	σ
13	15	o	11,12	3564	2,131	234,5	48630	29,40	31,53
	16	o	442,9	3564	3,818	475,6	48630	30,35	34,17
14	16	o	442,9	884,9	2,248	475,6	45190	28,33	30,58
	17	o	69,46	36550	21,68	438,9	75900	46,18	67,85
	18	o	58,34	35670	21,12	204,4	30710	18,79	39,91
15	18-19	N	58,34	3922	0,6873	204,4	96000	14,43	15,12
16	10	o	58,34	1470	0,8937	204,4	6419	4,559	5,453
	20	o	140,2	1396	1,365	498,5	1836	3,023	4,388
	21	o	1045	7394	4,125	2835	4583	13,76	17,89
17	21	o	1045	17110	14,11	2835	57170	44,57	58,68
	22	o	798,6	2630	4,660	2232	6503	12,53	17,19
	27	o	123,8	19740	12,05	621,7	50670	32,11	44,16
18	19	o	58,34	27820	16,53	204,4	131200	77,66	94,19
	22	o	798,6	13110	10,80	2232	75400	53,12	63,92
	23	o	635,8	14710	11,10	317,2	55810	33,93	45,03
19	23	o	635,8	17170	11,49	317,2	37330	23,09	34,58
	24	o	16,41	17170	10,12	123,2	37330	22,35	32,47
20	24-25	N	16,41	20050	2,963	123,2	4023	0,8288	3,792
21	25	o	16,41	1795	1,116	123,2	29290	17,64	18,76
	26	o	489,3	1795	2,963	317,2	29290	18,40	21,36
22	26	o	489,3	4769	4,705	317,2	20000	12,96	17,67
	27	o	123,8	31940	19,19	621,7	75870	45,67	64,86
	28	o	140,2	36710	22,05	498,5	55810	34,64	56,69
23	28-29	N	140,2	6300	1,195	498,5	77000	12,23	13,43
24	20	o	140,2	5329	3,670	498,5	15370	10,95	14,62
	30	o	243,2	5329	4,072	2080	15370	17,13	21,20

Nom	Elt	Red.	Las de charge 1			Las de charge 2			σ
			N	M	σ	N	M	σ	
25	29	0	140,2	24110	14,67	498,5	89310	54,27	68,9
	30	0	243,2	24110	15,07	2080	89310	60,44	75,5

7.4 - Contraintes de cisaillement

Dé la façon dont est construit notre modèle, l'effort tranchant est constant dans chaque élément. Nous le rapporterons systématiquement à la section réduite pour calculer la contrainte de cisaillement. Les résultats sont :

Elément	Cas de charge 1		Cas de charge 2		1+2
	T (N)	τ (MPa)	T (N)	τ (MPa)	τ (MPa)
1	5,619	0,02195	28,21	0,1102	0,1321
2	22,78	0,08898	89,62	0,3501	0,4391
3	52,65	0,2057	42,69	0,1668	0,3725
4	304,8	1,191	56,08	0,2191	1,410
5	257,7	1,007	56,08	0,2191	1,226
6	52,65	0,2057	42,69	0,1668	0,3725
7	299,1	1,168	712,5	2,783	3,951
8	239,9	0,9371	18,57	0,07254	1,010
9	239,9	0,9371	1481	5,795	6,722
10	4,109	0,01605	17,14	0,06695	0,08300
11	35,56	0,1389	114,8	0,4484	0,5873
12	33,90	0,1324	324,1	1,266	1,398
13	111,2	0,4344	234,5	0,9160	1,350
14	400,9	1,566	475,6	1,858	3,424
15	161,6	0,6313	475,6	1,858	2,489
16	111,2	0,4344	234,5	0,9160	1,350
17	280,1	1,094	609,2	2,380	3,474
18	162,8	0,6359	334,8	1,308	1,944
19	162,8	0,6359	1165	4,551	5,187
20	14,62	0,5711	37,41	0,1461	0,7172
21	81,83	0,08203	294,1	1,149	1,231
22	41,93	0,1638	327,6	1,280	1,443

Élément	Cas de charge 1		Cas de charge 2		1+2
	T (N)	τ (MPa)	T (N)	τ (MPa)	
23	16,41	0,06410	123,2	0,4813	0,5454
24	354,5	1,385	317,2	1,239	2,624
25	208,0	0,8125	317,2	1,239	2,052
26	16,41	0,06410	123,2	0,4813	0,5454
27	246,1	0,9613	602,3	2,353	3,314
28	243,2	0,9500	169,5	0,6621	1,612
29	243,2	0,9500	1330	5,195	6,145
30	140,2	0,5477	498,5	1,947	2,495

C'est dans l'élément 9 que se produit la plus grande contrainte de cisaillement,

$$\tau = 6,722 \text{ MPa}$$

Cette contrainte est très petite.

8 - Vérification des planches

8.1 - Sollicitation des marchepieds

La charge P, uniformément répartie, donne un moment

$$M_{\max} = \frac{Pl}{8}$$

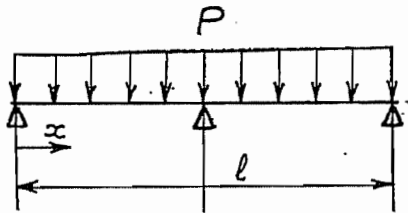
On a : $P = 6\,000 \text{ N}$

$l = 1\,540 \text{ mm}$

donc : $M_{\max} = \frac{6\,000 \times 1\,540}{8} = 1\,155\,000 \text{ Nmm}$

Effort tranchant : $\frac{P}{2} = 3\,000 \text{ N}$

8.2 - Sollicitation des banquettes



C'est une poutre sur 3 appuis, chargée uniformément. En l'absence de l'appui intermédiaire, le moment serait donné par,

$$M_1(x) = \frac{P}{2} \left(x - \frac{x^2}{l} \right)$$

La réaction de l'appui central vaut, comme on sait,

$$R_2 = \frac{5}{8} P$$

Pour $x < l/2$, elle donne un moment opposé,

$$M_2(x) = - \frac{R_2}{2} x = - \frac{5}{16} Px = - \frac{5}{8} \frac{P}{2} x$$

Au total,

$$M(x) = \frac{P}{2} \left(x - \frac{5}{8} x - \frac{x^2}{l} \right) = \frac{P}{2} \left(\frac{3}{8} x - \frac{x^2}{l} \right)$$

Sa dérivée s'annule pour :

$$\frac{dM}{dx} = \frac{P}{2} \left(\frac{3}{8} - \frac{2x}{l} \right) = 0$$

soit,,

$$\frac{2x}{l} = \frac{3}{8} \quad \text{ou encore} \quad \frac{x}{l} = \frac{3}{16}$$

En ce point, le moment vaut ,

$$\frac{P}{2} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{16} l - \frac{9}{256} l \right) = \frac{9}{256} \cdot \frac{Pl}{2} = \frac{9}{512} Pl = 0,01758 Pl$$

Au centre, le moment a un minimum non analytique donné par,

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2} \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right) = \frac{Pl}{2} \left(\frac{3}{16} - \frac{4}{16} \right) = - \frac{Pl}{32} = - 0,03125 Pl$$

Il faut donc effectuer le calcul avec

$$M_{\max} = \frac{Pl}{32}$$

soit ici

$$M_{\max} = \frac{6\,000 \times 1\,540}{32} = 288\,800 \text{ Nmm}$$

L'effort tranchant : aux bords : $\frac{3}{16} P$

$$\text{au milieu : } \frac{P}{2} \left(\frac{3}{8} - 1 \right) = - \frac{5}{16} P = - 1\,875 \text{ N}$$

8.3 - Caractéristiques du matériau

Hêtre. On comptera sur une contrainte de rupture.

$$\begin{aligned} R_m &= 60 \text{ MPa en traction} \\ &= 30 \text{ MPa en compression} \end{aligned}$$

Il est normal de se limiter à la moitié de cette dernière, c'est à dire

$$\sigma_{\text{lim}} = 15 \text{ MPa}$$

En cisaillement, on tolérera $\tau_{\text{lim}} = 0,8 \text{ MPa}$

8.4 - Banquettes

Epaisseur des planches : 30 mm

Largeur : 2 x 100 mm = 200 mm

$$I/v = \frac{200 \cdot (30)^2}{6} = 30\,000 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{288\,800}{30\,000} = 9,627 \text{ MPa} < \sigma_{\text{lim}}$$

Section : 200 x 30 = 6 000 mm²

$$\tau = \frac{1\,875}{6\,000} = 0,3125 \text{ MPa} < \tau_{\text{lim}}$$

Ces contraintes sont admissibles.

8.5 - Marchepieds

Epaisseur des planches : 50 mm

Largeur : 2 x 100 mm = 200 mm

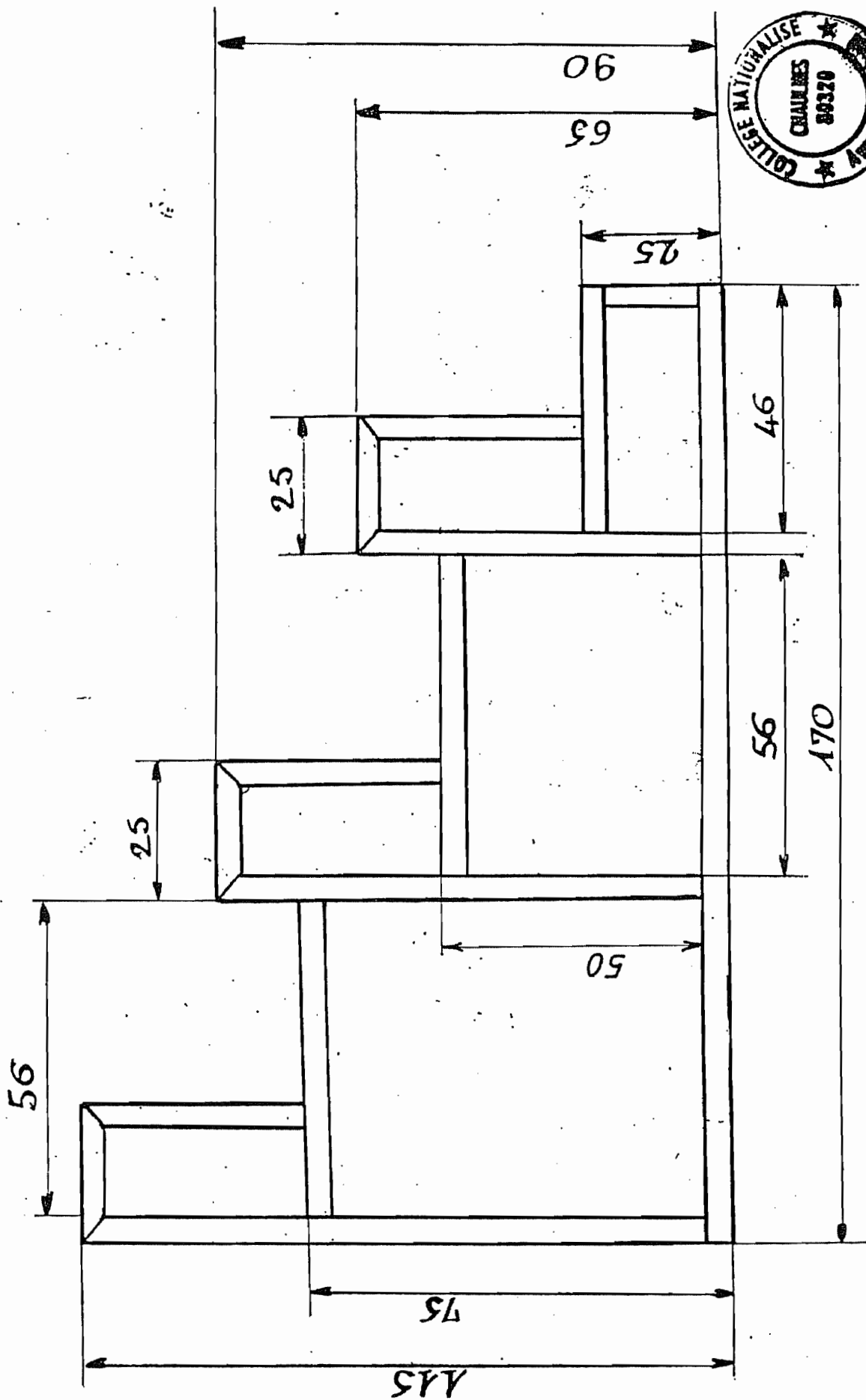
$$I/v = \frac{200 (50)^2}{6} = 83\,333 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{1\,155\,000}{83\,333} = 13,86 \text{ MPa} < \sigma_{\text{lim}}$$

Section : 200 x 50 = 10 000 mm²

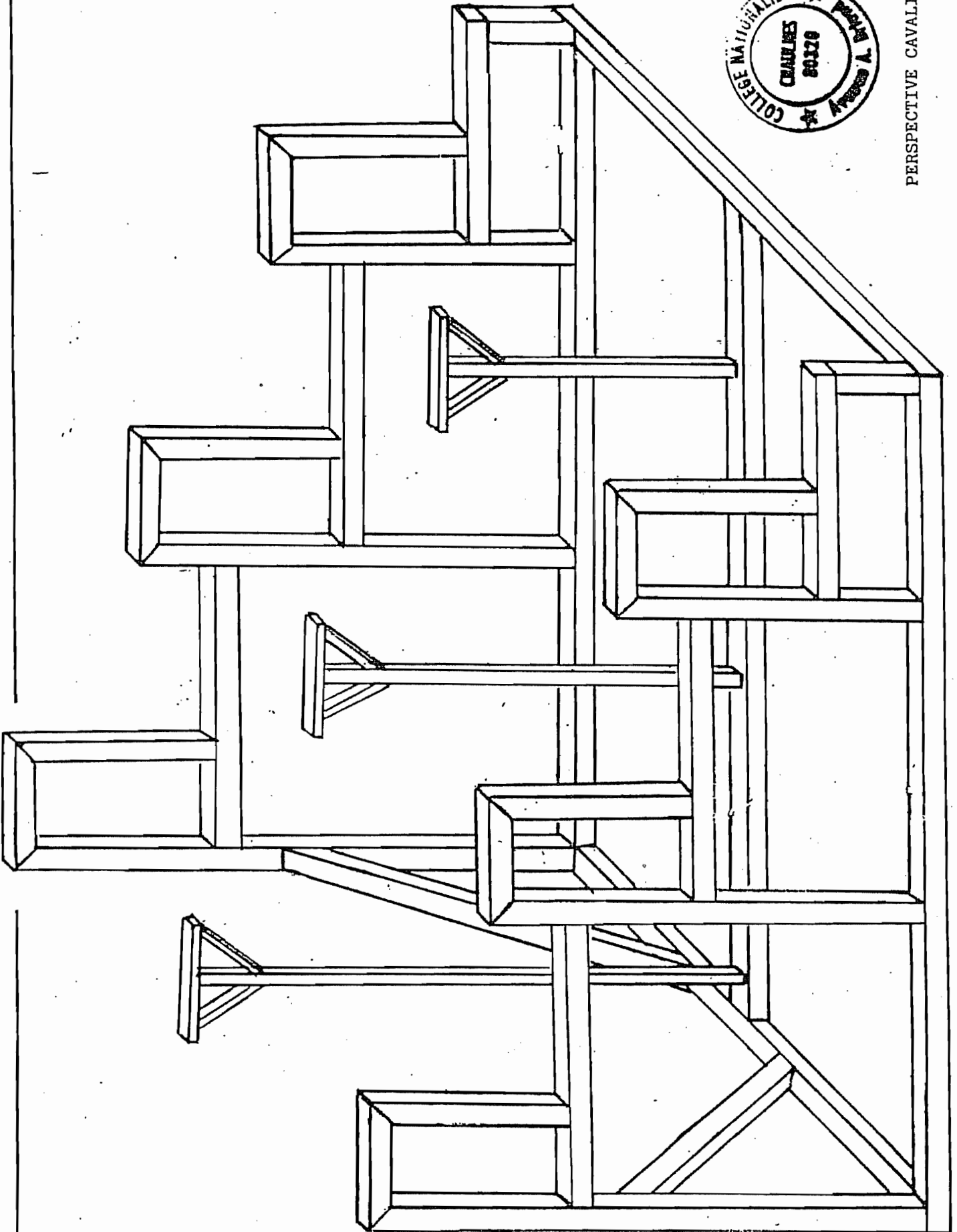
$$\tau = \frac{3\,000}{10\,000} = 0,3 \text{ MPa} < \tau_{\text{lim}}$$

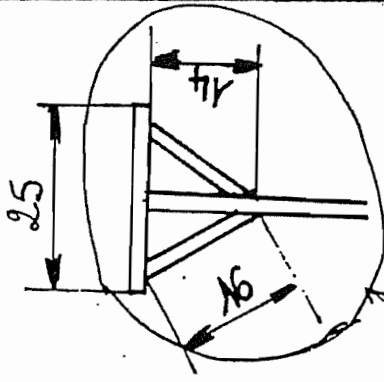
Ces contraintes sont admissibles.



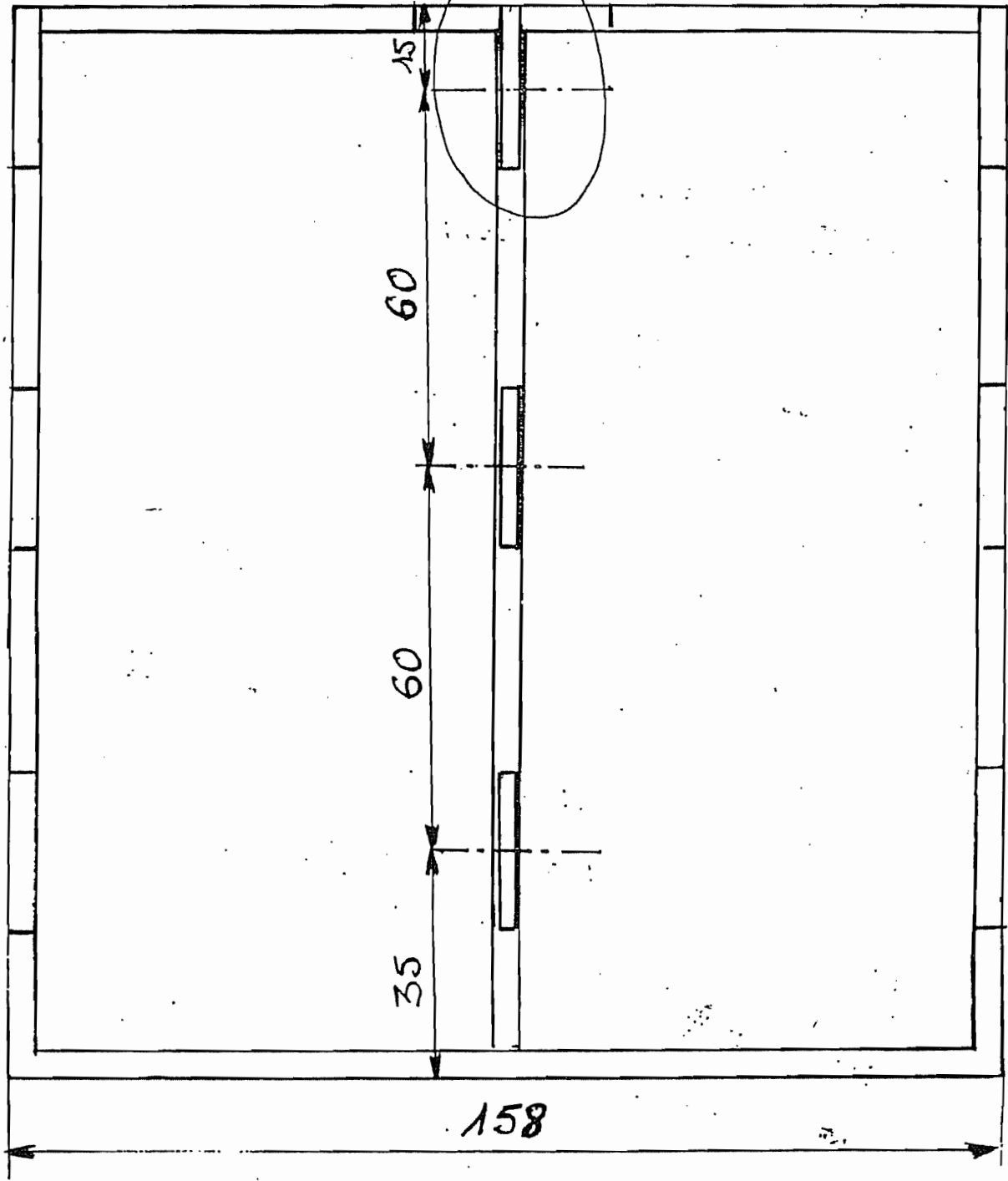


PERSPECTIVE CAVALIERE



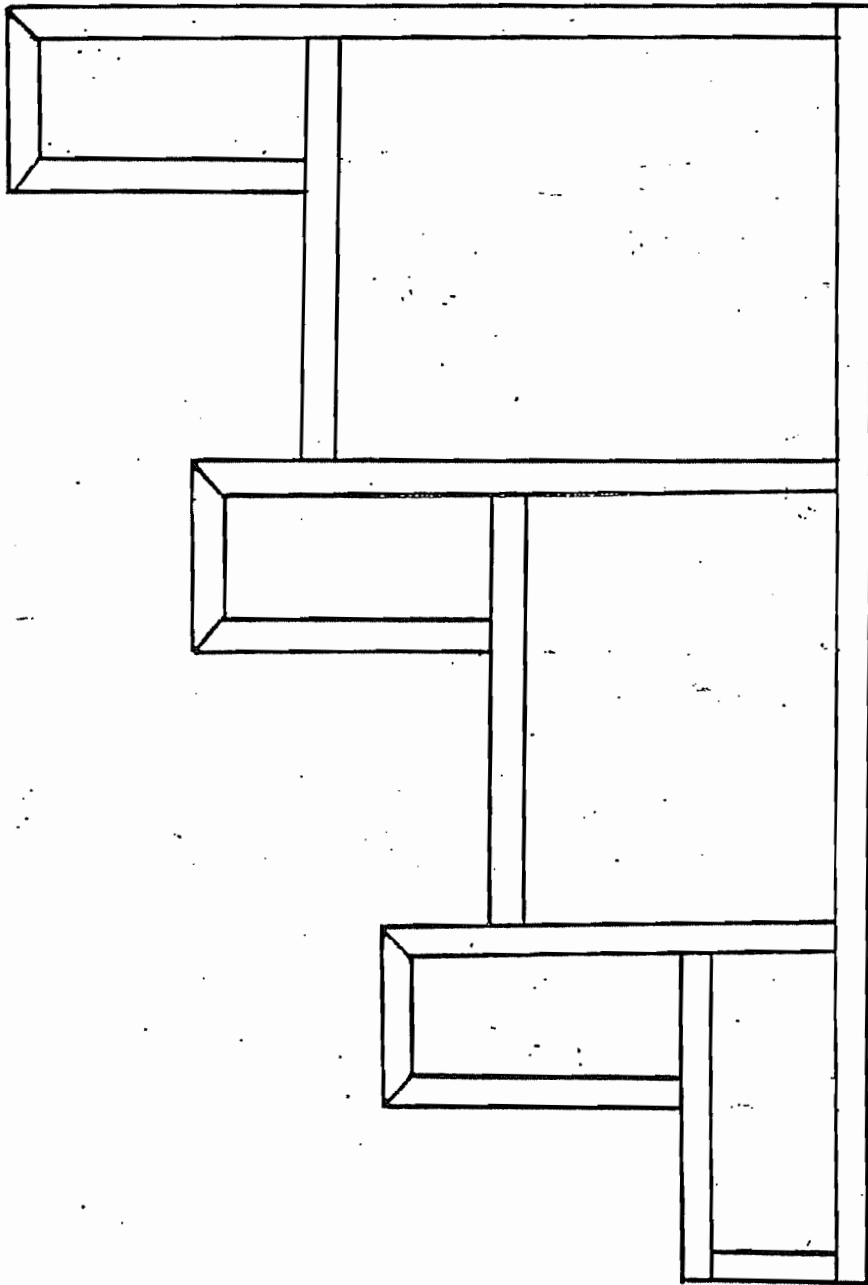


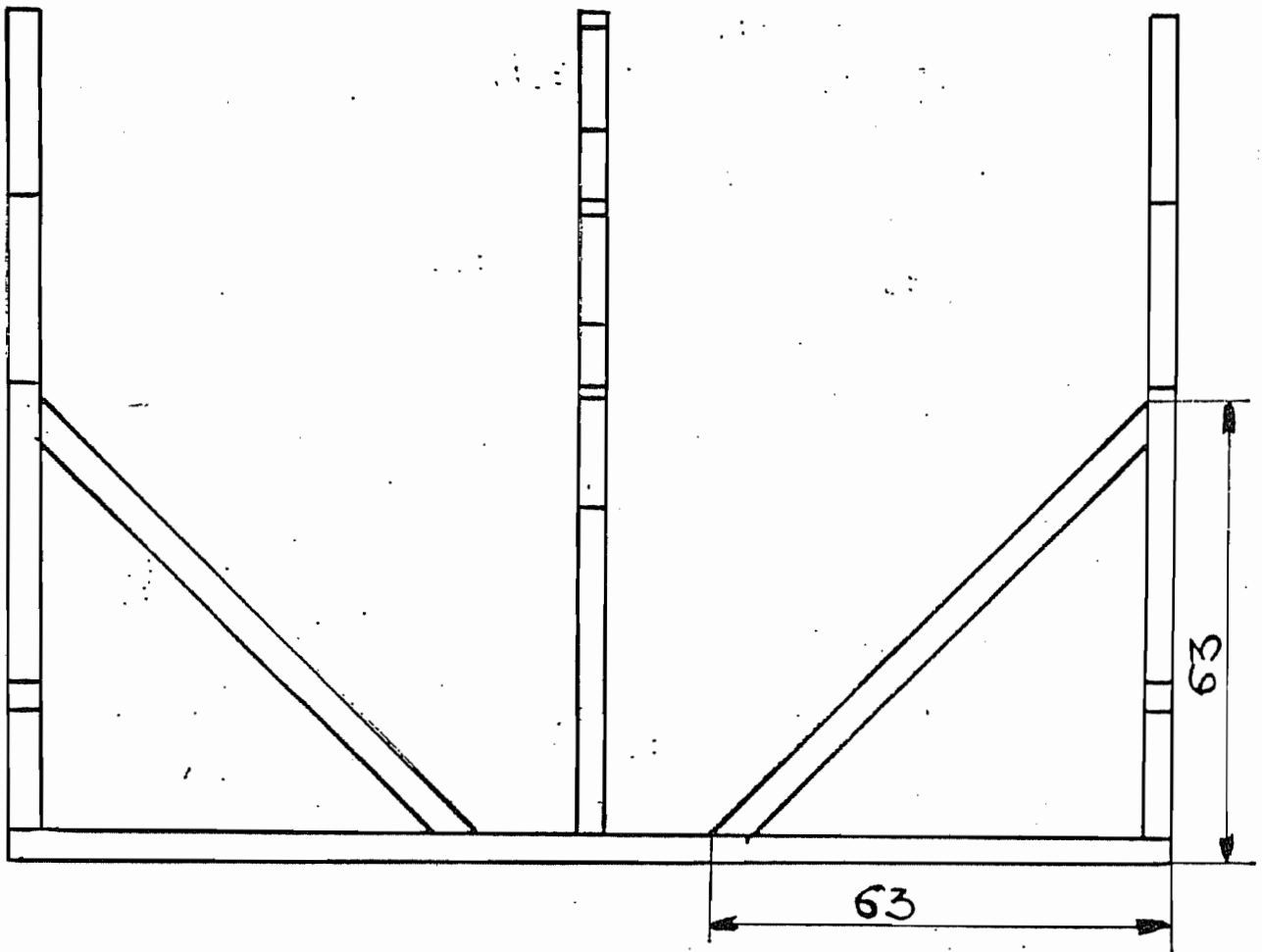
VUE DE DESSUS



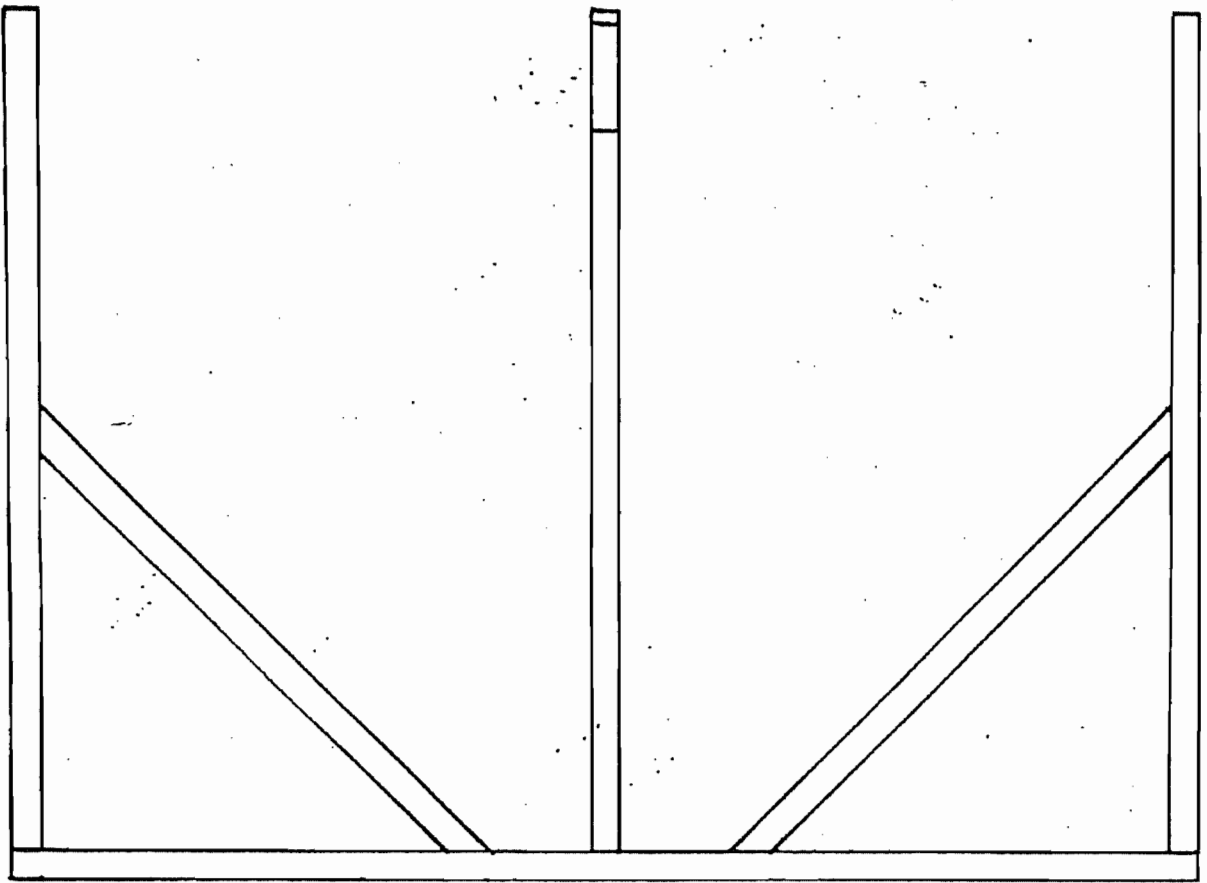


JOUÉ DROITE





VUE DE FACE



VUE ARRIERE