Sur l'emploi de la lettre x en mathématiques

Jacques Bair

Mots clés : notation, variable, inconnue, indéterminée, fonction identité, calcul littéral.

Résumé. *La notation x est souvent perçue comme étant emblématique en mathématiques. Nous montrons comment elle est apparue historiquement dans notre discipline et recensons des situations au cours desquelles un élève peut la rencontrer lors de son parcours scolaire. Ensuite, nous évoquons un travail didactique du réputé mathématicien K.* Menger *(1902 - 1985) sur cette question, avant de conclure par des réflexions personnelles sur le sujet, puis de donner en annexe une brève biographie de cet auteur autrichien.*

Introduction

Dans leurs écrits mathématiques, les élèves, les enseignants et les chercheurs font souvent appel à des symboles particuliers, notamment à la lettre x. C'est pourquoi, nous nous sommes penchés sur cette notation qui est quelquefois considérée comme emblématique ; nous avons décidé d'y consacrer cette note.

Nous allons fixer principalement notre attention sur un article rédigé par le mathématicien autrichien Karl Menger, intitulé « Pourquoi Johnny déteste les maths », paru d'abord dans la revue *The Mathematics Teacher* en 1956, et repris environ vingt ans plus tard et sous une forme un peu modifiée, dans le livre *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics* [7]. Karl Menger, qui fut un éminent mathématicien (voir à ce sujet l'annexe en fin de l'article), s'est intéressé à des élèves tels que Johnny qui serait, d'après l'auteur, un étudiant ordinaire découvrant l'algèbre et l'analyse et y éprouvant des difficultés avec la notation mathématique x. Les réflexions exposées dans cette note ainsi que dans d'autres publications du même auteur dans le domaine de la didactique nous ont semblé intéressantes à exposer, dans la mesure où ces travaux sont profonds, toujours d'actualité, écrits dans un langage clair et simple [1] et, nous semble-t-il, assez peu connus des enseignants car ils ont été publiés pour la plupart dans des revues consultées généralement par des chercheurs et pas forcément par des professeurs du secondaire.

Nous montrerons pourquoi Menger pensait que l'utilisation de la lettre x peut être difficile pour Johnny (et ses camarades) et quelles solutions il proposait pour aider les élèves à franchir certains obstacles potentiels repérés ; nous donnerons également un avis personnel sur la question. Auparavant, nous souhaitons nous attarder sur des généralités relatives aux origines du recours à la lettre x dans notre discipline, puis nous listerons des circonstances dans lesquelles un élève peut rencontrer cette notation.

1. Un peu d'histoire sur l'emploi de x en mathématiques

Les mathématiques constituent essentiellement une construction humaine. Dès lors, il n'est pas surprenant que ses concepts et notations soient généralement le résultat d'une longue maturation à laquelle ont participé plusieurs mathématiciens ayant appartenu à des époques différentes. Cette constatation générale est vérifiée en ce qui concerne l'usage de la lettre x.

Sur ce sujet, on peut remonter aux débuts connus des mathématiques. En effet, le célèbre papyrus égyptien *Rhind* (aux alentours de 1650 avant notre ère) contient des problèmes mathématiques résolus

(1) Sans faire appel à un vocabulaire complexe ou technique, mais en anglais.

faisant intervenir des quantités inconnues, nommées *aha*, dont on connaît la somme de certaines de ses parties.

Près de deux millénaires plus tard, le mathématicien grec DIOPHANTE (environ 150 - 350 après Jésus-Christ) rédigeait un livre intitulé *Arithmétique*, au sein duquel il faisait intervenir des *arithmos* (ce qui signifie « nombres »), c'est-à-dire des inconnues dont seules les valeurs rationnelles étaient alors considérées ; aujourd'hui encore, on qualifie de *diophantienne* une équation à deux ou plusieurs inconnues dont on recherche uniquement les solutions en nombres entiers.

Quelques siècles plus tard, le mathématicien persan AL-KWĀRIZMĪ (environ 780 - 850) faisait aussi intervenir des inconnues, qu'il appelait *shay*, ce mot arabe signifiant « chose » ; ses écrits contribuèrent à faire connaître les mathématiques arabes en Europe. Dans une conférence de son programme *TED Education* (2), T. MOORE avance l'hypothèse selon laquelle le mot arabe *shay* fut transcrit par les Espagnols *xray* pour des raisons de phonétique.

Par ailleurs, d'après certains historiens, la croix de St-André $\times$ fit sa première apparition comme signe de multiplication dans l'ouvrage *Clavis Mathematica* du mathématicien et théologien anglais W. OUGHTRED (1574 - 1660).

Enfin, le géomètre dauphinois J. BUTÉON (1492 - 1572) employa dès 1559 la lettre grecque ρ (qui se lit *Rho*) pour désigner « la chose » (c'est-à-dire donc l'inconnue), tandis que F. VIÈTE (1540 - 1603) introduisit d'une manière systématique les voyelles pour noter des inconnues et des consonnes pour indiquer des paramètres. Dans la foulée de ces deux scientifiques, R. DESCARTES (1596 - 1650) utilisa le symbole x pour désigner une inconnue en algèbre ainsi que la première coordonnée d'un point en géométrie analytique qu'il avait créée ; certains historiens émettent l'hypothèse selon laquelle la lettre « x » a été choisie parce qu'elle figure en tête de la translitération *xray* en espagnol.

Depuis lors, la lettre x intervient couramment en mathématiques, non seulement en algèbre pour désigner une inconnue, mais aussi en analyse, en géométrie, en trigonométrie, en statistique, en probabilités, en logique, ... Ainsi, cette notation possède de nos jours des usages extrêmement variés, comme nous allons le montrer succinctement dans la section suivante.

2. Quelques situations mathématiques où intervient la lettre x

Au cours de son apprentissage des mathématiques, un élève rencontre la lettre x dans de nombreuses situations différentes. En voici une liste qui ne cherche pas à être exhaustive et qui a été inspirée par la lecture de [1] :

- dans des formules, la lettre x peut être généralement remplacée par n'importe quel nombre : par exemple, c'est le cas dans une formule trigonométrique comme $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, ou dans une identité algébrique telle que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$;
- on note fréquemment x une inconnue au sein d'une équation ;
- une indéterminée d'un polynôme s'écrit souvent x ;
- x est une variable (parfois qualifiée d'indépendante) dans l'écriture d'une fonction ;
- en analyse mathématique, on rencontre la lettre x aussi bien en calcul intégral, par exemple lorsque l'on écrit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1$, qu'en calcul différentiel ainsi qu'en attestent ces égalités $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ et $\frac{\partial \sin(xy)}{\partial x} = y\cos(xy)$: x est une variable muette dans le premier cas, tandis qu'elle désigne la variable courante par rapport à laquelle on dérive dans les deux cas suivants ;
- très souvent, x désigne l'abscisse d'un point en géométrie analytique (plane ou dans l'espace) ;
- la partie réelle d'un nombre complexe se note fréquemment x ;
- on utilise habituellement la lettre x pour désigner un élément générique d'un ensemble défini en compréhension ;
- certains auteurs utilisent la lettre x, parfois en gras, pour noter un point d'une courbe ou d'un espace numérique, un vecteur ou encore une matrice.

On peut encore ajouter que la lettre x, minuscule ou majuscule, s'écrit dans certaines polices sous la forme d'une croix : par exemple, x ou $\times$ (pour la lettre minuscule) ou X (pour la majuscule) ; par ailleurs, en grec, il s'agit de la lettre *chi* qui se lit « ki » et se note χ. Un étudiant peut

(2) On peut consulter ce programme sur le blog de l'auteur à l'adresse électronique suivante : https://www.ted.com/talks/terry_moore_why_is_x_the_unknown.

rencontrer ces notations dans la vie courante et même en mathématiques ainsi qu'en témoignent ces exemples additionnels :

- le symbole $\times$ est souvent utilisé pour indiquer une multiplication, par exemple $2 \times 3 = 6$;
- la lettre X représente le nombre dix en chiffres romains ;
- dans la vie de tous les jours, une croix X indique généralement une interdiction (par exemple, de fumer) et est parfois réclamée à une personne devant remplir un formulaire, aussi bien d'ailleurs pour indiquer un bon choix (sélection d'un item dans un questionnaire) qu'un mauvais choix (possibilité à supprimer, par exemple) ;
- certains auteurs utilisent la lettre majuscule X au lieu de la minuscule x dans certains cas évoqués ci-dessus, par exemple pour désigner une indéterminée dans un polynôme, ou encore un point d'un espace numérique, une matrice, une variable aléatoire, ... ;
- la lettre grecque χ est utilisée abondamment en statistique, par exemple lorsqu'on réalise un test du « chi carré » ;
- pour l'anecdote, signalons également que X est le surnom de l'École Polytechnique à Paris.

À la suite de Menger, attardons-nous quelque peu sur les premiers items pour mettre en évidence des difficultés que la notation x pourrait engendrer chez un élève, par exemple Johnny auquel s'intéresse l'Autrichien, lors de son apprentissage des mathématiques.

3. Des difficultés rencontrées par Johnny selon Menger

Lorsque Johnny rencontre une formule algébrique telle que

$$x^3 - 1 \;=\; (x-1)(x^2+x+1) \qquad (1)$$

il sait qu'il peut y remplacer x par n'importe quel nombre réel (et même complexe) ; par exemple, il est certain que $3^3 - 1 = (3-1)(3^2+3+1)$ et que $(-2)^3 - 1 = ((-2)-1)((-2)^2+(-2)+1)$.

Quand il est amené à étudier un polynôme en algèbre, par exemple

$$x^2 + x + 1 \qquad (2)$$

il peut encore remplacer le symbole x par n'importe quel nombre.

Il peut dès lors être perturbé lorsqu'il rencontrera en analyse les fonctions définies par $\frac{x^3-1}{x-1}$ et par x^2+x+1 : une question qu'il pourrait légitimement se poser consiste à savoir si elles coïncident, vu qu'il sait que

$$\frac{x^3-1}{x-1} \;=\; x^2+x+1 \text{ (pour tout } x \neq 1)$$

Par ailleurs, lorsque Johnny doit résoudre une équation telle que

$$x + 1 \;=\; 4 \qquad (3)$$

x désigne l'inconnue qui ne peut évidemment pas prendre n'importe quelle valeur, puisque la seule solution de l'équation précédente est donnée par $x = 3$.

Et s'il rencontre en géométrie analytique plane l'égalité

$$x \;=\; 3 \qquad (4)$$

il doit savoir qu'il s'agit de l'équation d'une droite verticale, celle comprenant tous les points du plan dont l'abscisse vaut 3. Dans l'espace, cette même équation est celle d'un plan vertical.

Au surplus, quand notre élève est amené à travailler avec la droite d d'équation

$$2x + 3y \;=\; 4 \qquad (5)$$

il sait probablement qu'il considère tous les points (x, y) dont les deux coordonnées vérifient l'équation en question. Mais il devrait aussi savoir que d est aussi l'ensemble des couples (y, x) dont les deux éléments obéissent à l'équation

$$2y + 3x \;=\; 4 \qquad (6)$$

Et pourtant, il doit être conscient du fait que ces deux dernières égalités (5) et (6), utilisées sans précaution particulière, déterminent deux droites distinctes !

D'autre part, lorsque Johnny est en présence, en analyse, de la dérivée du sinus écrite comme suit

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad (7)$$

il est peut-être troublé par le fait qu'il peut remplacer le symbole x intervenant dans le membre de droite par n'importe quelle valeur réelle (telle que π), mais qu'il ne peut pas agir de même avec chaque x du membre de gauche.

Enfin, en calcul intégral, il peut notamment se demander pourquoi il est permis d'écrire

$$\int_a^b \sin x\, dx = \int_a^b \sin y\, dy \qquad (8)$$

Bien entendu, un mathématicien chevronné n'est guère troublé par des situations telles que celles décrites par ces quelques exemples élémentaires. Mais un débutant comme Johnny peut éprouver des difficultés pour s'y retrouver, car les problèmes rencontrés se situent dans des contextes fort proches les uns des autres et se présentent de façon assez semblable au niveau de la forme. De plus, le vocabulaire est parfois identique dans des situations différentes ; par exemple, le mot « équation » est utilisé quand il convient de trouver la valeur prise par une inconnue vérifiant une (ou plusieurs) égalité(s) ou lorsqu'on se réfère à une droite du plan (ou un plan de l'espace) en géométrie analytique ; par ailleurs, on peut faire appel à un vocabulaire différent pour désigner des objets mathématiques jouant un même rôle, comme c'est le cas pour certaines variables (numériques) ou une indéterminée.

4. Suggestions de Menger pour réduire des difficultés avec les x

Dans ses travaux à vocation didactique, l'Autrichien suggéra diverses propositions concrètes pour aider des élèves à utiliser adéquatement le symbole x. Nous en retenons ici de deux deux types.

4.1. Distinctions selon le sens

Selon le mathématicien autrichien, le rejet des mathématiques par Johnny pourrait s'expliquer de cette manière (3) : « Alors que Johnny aborde rationnellement des problèmes mathématiques rencontrés dans la vie courante, comme des questions de coût ou de ristourne, l'idée de traiter les problèmes scolaires dans le contexte de l'algèbre ne lui vient même pas à l'esprit. En effet, il considère les mathématiques comme détachées du (mais non opposées au) bon sens, au lieu de se rendre compte qu'elles sont le type même du bon sens. Ainsi, il se trompe en imaginant que les exercices de mathématiques doivent être résolus comme un *abracadabra* et il s'efforce alors de deviner l'incantation appropriée au lieu d'approcher l'algèbre rationnellement. Dans ces circonstances, la présentation de mathématiques doit être absolument et impeccablement rationnelle. Même l'inconsistance la plus légère dans des pratiques ou des termes est intolérable. N'importe quelle contradiction sert seulement à renforcer l'idée fausse de magie qu'a un débutant. La solution du problème grave créé par ce malentendu des mathématiques est l'élimination de tout ce qui ressemble, même de loin, à des absurdités suivie par un appel au bon sens de l'élève. » ([7], pp. 582 - 583).

En substance, Menger conseille aux professeurs d'insister sur la nécessité d'initier les élèves à être capables de reconnaître quand une lettre x est utilisée pour désigner :

a) une variable (4) comme dans la formule (1) ;
b) la fonction identité comme dans (2) ou encore dans les situations décrites dans la sous-section précédente ;
c) une inconnue comme dans (3) ;
d) une coordonnée comme dans (4), (5) et (6).

L'Autrichien va même plus loin en recommandant d'utiliser des symboles distincts pour désigner des concepts différents.

4.2. Suppression des variables

Pour Menger, la façon la plus radicale de réduire les difficultés rencontrées avec l'emploi de la notation x pourrait consister simplement à éviter d'y recourir ! Bien entendu, il serait absurde de supprimer l'emploi de lettres en mathématiques, et en particulier de la lettre x, tant l'usage des notations littérales s'avère efficace. Mais, faire disparaître les symboles x (ainsi que les y et les autres lettres de la fin de l'alphabet, éventuellement indicées) est possible, et peut-être même recommandé, dans certaines situations fréquemment rencontrées en calcul différentiel ou intégral, ce qui pourrait éliminer des difficultés que Johnny avait rencontrées avec les égalités (7) et (8).

Occupons-nous tout d'abord de (7). Le symbole x dans le second membre de l'égalité ainsi que le se-

(3) La citation est donnée dans une traduction assez libre.
(4) Il s'agit ici de *variable numérique* que l'auteur distingue de ce qu'il appelle *variable quantité* telle que l'on trouve notamment dans l'item d) ci-après.

cond x du premier membre désignent la variable dont dépendent les fonctions considérées et peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle (puisque ces fonctions sont partout définies et dérivables). Par contre, le premier x du membre de gauche ne possède pas le même statut que les autres : il n'est présent que pour indiquer la variable par rapport à laquelle on dérive... et, dans ce cas, on pourrait évidemment difficilement imaginer une autre variable de dérivation que x ! Bref, les lettres x de cette formule paraissent assez inutiles et vont être supprimées en mettant en évidence ce qui est ici important, à savoir le fait de transformer une fonction (soit le sinus) en une autre (c'est-à-dire le cosinus) par l'« opération » de dérivée. Faisons dès lors appel à l'*opérateur* de dérivation, qui sera noté dans cet article $\mathscr{D}$: il associe à une fonction f (supposée dérivable) sa dérivée $\mathscr{D}f$. C'est ainsi que l'on dispose notamment de ces formules classiques (qui sont vraies sur l'ensemble de tous les réels, sauf évidemment la cinquième qui n'est pas valable là où le cosinus s'annule) :

$$\mathscr{D}\sin = \cos \quad , \ \mathscr{D}\cos = -\sin$$

$$\mathscr{D}\sinh = \cosh \ , \ \mathscr{D}\cosh \ = \sinh$$

$$\mathscr{D}\,\mathrm{tg} = \frac{1}{\cos^2} \ , \ \ldots$$

Une telle convention d'écriture convient donc bien pour les fonctions trigonométriques ou hyperboliques. Quant aux autres fonctions élémentaires, elles ne donnent pas lieu, en première analyse, à un traitement comparable, mais leur sort peut être réglé par l'adoption de notations adéquates.

Considérons tout d'abord la fonction exponentielle (en base e). Un problème se présente avec elle si on note ses valeurs sous la forme e^x ; en effet, on ne peut pas supprimer les lettres x dans l'égalité donnant la dérivée de e^x à l'aide de la notation $\frac{d}{dx}$, puisque la dérivée de e est nulle. Le problème peut toutefois être aisément réglé : il suffit de désigner la fonction exponentielle à l'aide de la notation exp : on peut alors écrire

$$\mathscr{D}\exp = \exp\,.$$

Passons à présent au cas du logarithme (népérien) et aussi aux fonctions dont les valeurs de x sont les puissances de la variable. La suppression des x paraît également impossible à première vue. Une telle constatation fournit, d'après MENGER, une raison pour laquelle le symbole x est généralement utilisé pour noter des dérivées (et aussi des intégrales définies ou indéfinies, comme nous le verrons ultérieurement). Cet auteur a évoqué à ce sujet « une des grandes curiosités dans l'histoire de l'analyse mathématique » qui peut être comparée à l'absence de symbole pour nommer le nombre « zéro » dans l'ancienne arithmétique ([7], p. xiii).

En effet, il a constaté que, traditionnellement, il n'existait pas de symbole pour désigner la *fonction identité* et il proposa de combler cette lacune en désignant cette fonction par le symbole j de sorte que la valeur de j en x (5) coïncide avec x (quel que soit x). De la sorte, il est possible d'écrire les formules donnant la dérivée de ln qui désigne le logarithme népérien, celle des fonctions puissances, notées successivement j, j^2, j^3, ..., ainsi que celle des autres fonctions élémentaires courantes. De fait, avec les conventions d'écriture décrites ci-dessus, on a par exemple (éventuellement sous réserve d'existence) :

$$\mathscr{D}\ln = \frac{1}{j} \ , \ \mathscr{D}j = 1 \ , \mathscr{D}j^2 = 2j \ , \ \mathscr{D}j^3 = 3j^2$$

$$\mathscr{D}\arctan = \frac{1}{1+j^2} \ , \ \ldots$$

Observons que les règles habituelles du calcul différentiel peuvent être écrites sans faire intervenir de variables ; par exemple, pour dériver la somme de deux fonctions f et g, on peut écrire $(f+g)' = f' + g'$. MENGER, lui, fait appel à l'opérateur de dérivation $\mathscr{D}$, ce qui l'amène à présenter les formules fondamentales relatives aux dérivées comme suit (6) :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(f+g) &= \mathscr{D}f + \mathscr{D}g \\ \mathscr{D}(f.g) &= f.\mathscr{D}g + g.\mathscr{D}f \\ \mathscr{D}(fg) &= (\mathscr{D}f)\,g.\mathscr{D}g\ . \end{aligned}$$

(5) L'Autrichien note la valeur d'une fonction f en x non pas $f(x)$ comme la coutume le veut désormais, mais bien fx sans parenthèses, ce qui est d'ailleurs généralement le cas pour noter la valeur du sinus, par exemple ; cet auteur écrit donc $\exp x$ au lieu de e^x.

(6) On notera que l'auteur indique le produit de deux fonctions par un point, tandis que la succession de deux notations fonctionnelles se réfère au classique produit de composition, en accord avec la note précédente.

Venons-en à présent à l'égalité (8). La lettre x est dans ce cas une variable *muette*, de sorte qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre, et, pourquoi pas, carrément supprimée.

Par exemple, on pourra écrire indifféremment

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \int_0^{\pi} \sin t\, dt = \int_0^{\pi} \sin = [-\cos]_0^{\pi} = 2.$$

La suppression de la lettre x dans des intégrales indéfinies est également possible. De fait, on notera $\int f$ une primitive [7] de f, c'est-à-dire n'importe quelle fonction ayant f pour dérivée. En conséquence, on a

$$\mathscr{D}\left(\int f\right) = f.$$

Mais, comme une fonction primitivable admet plusieurs primitives, on est amené à introduire cette notation nouvelle

$$f \sim g \text{ si et seulement si } \mathscr{D}f = \mathscr{D}g.$$

Dès lors, on a

$$\int f \sim g \text{ si et seulement si } f = \mathscr{D}g \text{ et } \int (\mathscr{D}f) \sim f.$$

Moyennant l'introduction de ce symbole $\sim$ (qui définit bien entendu une relation d'équivalence), ainsi qu'aux notations utilisées ci-dessus, on est capable de construire un formulaire relatif à la primitivation des fonctions élémentaires ; par exemple,

$$\int \cos \sim \sin\ , \quad \int \sinh \sim \cosh$$

$$\int \exp \sim \exp\ , \quad \int j^2 \sim \frac{j^3}{3}\ , \ \ldots$$

Grâce à ce qui précède, les formules usuelles relatives aux primitives peuvent être écrites sans variables, à savoir la primitivation d'une somme de deux fonctions, celle par parties et enfin celle par substitution :

$$\begin{aligned} \int (f+g) &\sim \int f + \int g \\ \int (f.\mathscr{D}g) &\sim f.g - \int (g.\mathscr{D}f) \\ \left(\int h\right) g &\sim \int [hg.\mathscr{D}g]\,. \end{aligned}$$

[7] Parfois appelée antidérivée, notamment par Menger.

Notons que la dernière formule est, d'après Menger, le « test crucial pour une notation sans variables d'une primitivation par substitution : traditionnellement, cette méthode est traitée comme un changement de variables » .

5. Quelques réflexions personnelles en guise de conclusion

Cette petite balade dans certains travaux du réputé mathématicien K. Menger nous a donné une opportunité de nous remémorer cette lapalissade : nous, professeurs de mathématiques, manipulons généralement sans effort et souvent avec une certaine délectation des symboles mathématiques, en particulier des lettres x, mais nous ne devons pas perdre de vue les efforts que nous avons (vraisemblablement) fournis lors de notre formation et (certainement) durant les nombreuses heures de pratique ; cet entraînement nous permet désormais de surmonter des pièges qui peuvent perturber nos élèves, au point de les détourner parfois définitivement de notre discipline. Quant aux suggestions pratiques proposées par cet auteur, il nous a semblé intéressant de les présenter vu leur simplicité et aussi leur pouvoir de susciter chez l'enseignant des réflexions sur ses propres pratiques professionnelles.

Bien entendu, chaque lecteur en retiendra éventuellement ce qu'il jugera opportun pour ses propres cours, en l'adaptant à sa guise aux situations d'enseignement spécifiques qu'il rencontrera.

Pour notre part, nous voudrions retenir avant tout la recommandation de Menger qui insiste sur l'importance pour un enseignant (et pour ses élèves) de toujours utiliser des notations adéquates et très précises. À ce conseil, nous voudrions ajouter quelques réflexions de didactique et avis personnels qui pourraient, nous semble-t-il, intéresser des professeurs de mathématiques.

En premier lieu, nous pensons que les travaux analysés dans cette note ne concernent qu'un petit coin des mathématiques figurant dans les programmes scolaires et ils visent surtout des étudiants de la fin du secondaire ou du début du supérieur étant donné que l'algèbre, l'analyse, la géométrie analytique et la trigonométrie figurent parmi les matières considérées par Menger. Il est fort probable que la haine qu'éprouve Johnny pour les mathématiques s'est installée progressivement lors des études antérieures. Une étape, importante et délicate, dans cette évolution est assurément l'initiation au calcul littéral en début du secondaire, comme le sont d'ailleurs les différents statuts véhiculés par le signe d'égalité et par les signes opératoires. Ces points mériteraient, selon nous, d'être développés ultérieurement dans un autre article.

Le travail de MENGER, rédigé il y a plus d'un demi siècle, était en quelque sorte annonciateur de travaux réalisés ces dernières années par divers didacticiens. Certains de ceux-ci mettent l'accent sur le fait que les mathématiciens travaillent avec des concepts, c'est-à-dire des objets auxquels s'appliquent des procédures (8). L'intérêt et l'efficacité des mathématiques, mais aussi parfois une certaine difficulté lors de leur apprentissage, proviennent (au moins partiellement) de la « pluridimensionnalité conceptuelle et procédurale ». Ces termes un peu abscons peuvent être expliqués assez aisément. En effet, d'une part, il est souvent possible de présenter un même concept sous plusieurs « facettes » différentes ; par exemple, une fonction (d'une variable réelle) est soit définie verbalement, ou bien par un tableau de nombres, ou en recourant à un graphique, soit encore analytiquement à l'aide d'une formule, ou bien de manière ensembliste sous la forme d'un ensemble de couples de nombres. D'autre part, il est facile de construire des cas où plusieurs procédures (par exemple algébriques) appliquées aux mêmes données conduisent à un même résultat (9).

En plus de leur multiplicité potentielle, concepts et procédures sont « indissociables », en ce sens qu'un même concept peut être utilisé tantôt comme un « objet » tantôt comme un « outil » (10) ; par exemple, une fonction peut être vue comme étant un objet mathématique à étudier ou comme définissant une procédure permettant de calculer les valeurs livrées par une loi transformant des nombres en d'autres nombres. Cette « dualité outil-objet » a conduit GRAY et TALL [4] à introduire le terme *procept* (11) pour désigner « l'entité constituée par un concept dans son double rôle d'outil et d'objet, dès qu'un symbole a été choisi pour la désigner » ([2], p. 41).

Comme exemple élémentaire de procept, considérons d'abord la notation x^2 ; elle indique un processus, à savoir le calcul du carré d'un nombre x, mais ne fait référence en première approche à aucun concept. Par contre, l'égalité $f(x) = x^2$ concerne le même processus consistant à calculer le carré d'un nombre x, mais elle définit aussi un concept, à savoir la loi f qui à un nombre arbitraire x associe x^2. Enfin, l'écriture $y = x^2$ suggère une autre procédure, à savoir le tracé d'une parabole définie par l'équation en question, tandis qu'au plan conceptuel, la fonction est ici donnée analytiquement à l'aide d'une égalité faisant intervenir les deux variables x et y. Les différences entre ces trois procepts, pourtant souvent jugés équivalents, sont résumées par le tableau suivant :

Symbole	Procédure	Concept
x^2	Calcul d'un carré	-
$f(x) = x^2$	Calcul d'un carré	Fonction est une loi
$y = x^2$	Dessin d'une parabole	Fonction définie par une équation

Après ces considérations générales de didactique, venons-en aux suggestions pratiques formulées par MENGER pour aider l'élève-type Johnny à mieux maîtriser l'usage des x.

Le premier conseil, recommandant d'utiliser des notations différentes pour noter les lettres x en fonction du sens, nous semble difficile à mettre en pratique par les élèves dans leur cahier ou leurs devoirs, ainsi par le professeur lors de son exposé oral. Nous avouons d'ailleurs que nous n'avons pas suivi ce judicieux conseil dans ce texte puisque nous avons adopté les notations mathématiques proposées par le logiciel LaTeX ! Néanmoins, il nous paraît fort pertinent et son message principal pourrait être simplement appliqué en rappelant qu'il est toujours nécessaire de bien comprendre le sens de ce que l'on fait en mathématiques, par exemple d'être conscient

(8) Une procédure est « une succession d'actions réalisées en vue d'obtenir une résultat (ou *sortie*) à partir de données (des *entrées*) » ([2], p. 40).

(9) Certains auteurs utilisent le terme « processus » pour désigner un ensemble de procédures qui livrent un même résultat à partir de données déterminées.

(10) Cette *dialectique outil-objet* a donné lieu à de nombreuses études par des didacticiens français travaillant dans le sillage de R. DOUADY [3].

(11) C'est donc un néologisme formé à l'aide des deux mots « procédure » et « concept ».

de travailler avec une procédure ou un concept, et même d'être capable de travailler avec un procept ; par ailleurs, il importe également de savoir avec précision dans quel contexte et avec quelles règles l'on travaille.

Quant au second conseil, consistant à supprimer l'usage de certains x en analyse, il nous inspire certains commentaires nuancés.

Prenons avant tout la précaution de signaler que l'idée émise par l'Autrichien d'éliminer certains x et y fait partie d'un enseignement universitaire d'analyse, portant aussi bien sur les fonctions d'une seule variable que de plusieurs variables ; notre présentation, forcément partielle, ne prend pas en compte tous les avantages récoltés par l'auteur sur l'ensemble de son cours.

Selon nous, la notation des dérivées et intégrales sans recours à la lettre x offre l'avantage de travailler exclusivement dans le cadre fonctionnel et de mettre ainsi en évidence des règles générales portant essentiellement sur des fonctions ; de plus sont ainsi bannies les confusions potentielles entre une fonction et les valeurs numériques que celle-ci peut prendre. La suggestion de Menger nous paraît donc pertinente pour certains étudiants entrant à l'Université ([12]). Par contre, elle nous semble moins adaptée à des élèves du secondaire qui ont besoin de concevoir des fonctions avant tout comme des outils (qui donnent donc une image pour chaque réel où elles sont définies) avant de penser à les considérer comme des objets (c'est-à-dire des concepts) ; d'ailleurs, comme l'a dit en substance la didacticienne M. Artigue lors de la conférence inaugurale qu'elle a donnée au récent Congrès de la SBPMef (Mons, 2015) : « une centration trop précoce sur la dimension objet est dangereuse ». En d'autres termes, on pourrait dire que l'apprentissage du procept-fonction, comme celui de tout autre procept d'ailleurs, doit être généralement réalisé progressivement en partant du procédural avant d'en arriver au conceptuel : plus précisément, il se réalise en « une succession, dans un parcours en spirale, de phases qui alternent l'acquisition de nouvelles procédures et celles de nouveaux concepts » ([2], p. 39).

Par ailleurs, la notation fx pour désigner l'image, généralement notée $f(x)$, de x par f n'est pas utilisée dans les applications des mathématiques (par exemple, en physique ou en économie) ; elle peut aussi être particulièrement perturbante quand sont considérées des fonctions composées. À ce propos, il convient de remarquer que Menger était conscient du fait que sa notation inhabituelle pourrait troubler les élèves ; il invitait d'ailleurs ceux-ci à recourir aussi bien aux écritures traditionnelles qu'à celles qu'il préconisait. Au surplus remarquons que l'écriture $\int_a^b f$ pour désigner une intégrale définie est certes dépouillée et bien adaptée dans certaines situations, par exemple pour énoncer les règles générales sur les intégrales, mais qu'elle ne suggère aucune interprétation géométrique de ce que représente une intégrale définie, au contraire de la notation classique $\int_a^b f(x)\ dx$ où le facteur dx de l'intégrand rappelle la présence de termes « infiniment petits » dans la présentation riemanienne classique de l'intégrale en question, ce qui est fort utile pour interpréter graphiquement cette intégrale ([13]).

Enfin, l'introduction du symbole j pour désigner la fonction identité présente assurément des avantages, comme il est indiqué ci-dessus, mais il conduit notamment son créateur à considérer ce qu'il appelle les paraboles j^2 et $j^{\frac{1}{2}}$, qui sont bien sûr reliées aux paraboles définies par les équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$. Toutefois, ces écritures ne sont pas tout à fait équivalentes, car elles ne débouchent pas sur les mêmes portions de courbes.

En résumé, cette notation x n'est peut-être pas aussi simple que nous le croyions avant d'entreprendre la rédaction de cette note. En tout cas, elle peut soulever de multiples questions qui devraient favoriser un travail réflexif des lecteurs qui auront eu le courage de lire l'article en entier.

Pour en savoir plus

[1] Carlier F. - Dardenne A., KEXEXE-TIXLA, *Math-Jeunes*, 7, 30, 1985-86, p. 40.

[2] Cazzaro J.P. - Noël G. - Pourbaix D. - Tilleuil P., *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck, Bruxelles, 2001.

([12]) C'est dans ce contexte que se place l'auteur.

([13]) Pour rappel, lorsque la fonction f n'est pas négative, cette intégrale donne (la mesure de) l'aire de la région comprise entre le graphe de la fonction, l'axe horizontal du plan, ainsi que les deux verticales déterminées par les bornes d'intégration ; par ailleurs, depuis Riemann, on sait (sous réserve d'existence et avec des notations classiques) que : $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty\ ,\ \Delta x_i \to 0} \Sigma_{i=1}^n\ f\,(x_i)\,\Delta x_i$.

[3] DOUADY R., Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 7, 1986, pp. 5 - 31.

[4] GRAY E.M. - TALL D.O., Duality, ambiguity and flexibility : a "proceptual" view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematical Education*, 25, 1994, pp. 116 - 140.

[5] MENGER K., *Calculus, A Modern Approach*, Ginn and Company, Boston, 1955.

[6] MENGER K., *The basic concepts of mathematics : a companion to current textbooks on algebra and analytic geometry*, Volume 1, The Bookstore, Illinois Institute of Technology, 1956.

[7] MENGER K., *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1979.

[8] SFARD A., On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1991, pp. 1 - 36.

[9] TROMPLER S., Quand et où sont apparus les signes mathématiques, *Math-Jeunes*, 10, 41, 1988, pp. 14 - 20.

Annexe : Éléments biographiques sur MENGER

Durant la fin du 19e et le 20e siècles vécurent en Autriche deux grands scientifiques portant le même nom, à savoir MENGER, et deux prénoms proches, soit Carl et Karl.

Le premier, Carl (1840 - 1921), fonda l'École autrichienne d'Économie et fut un des créateurs de la théorie du marginalisme qui attache une attention particulière à la valeur économique provoquée par l'apport d'une unité additionnelle consommée ou produite ; cette théorie est essentielle en microéconomie et utilise abondamment le calcul différentiel.

Le second, Karl (1902 - 1985), le fils de Carl, fut un mathématicien influent du siècle dernier. Il fit ses études à l'Université de Vienne où il obtint le diplôme de docteur en sciences mathématiques (en 1924) ; puis, après un séjour post-doctoral à l'Université d'Amsterdam (de 1925 à 1927), il y fut professeur de géométrie (de 1927 à 1936) ; durant cette période, il intégra le fameux *Cercle de Vienne* (https://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_de_Vienne) qui regroupait des savants d'horizons variés, puisqu'ils étaient des spécialistes en philosophie, en logique, en mathématiques, ainsi qu'en sciences naturelles ou sociales. Parallèlement, il exerça diverses activités éditoriales de 1937 à 1946, et fonda notamment les *Reports of a Mathematical Colloquium, Second Series*. Par après, il fut nommé professeur de mathématiques à l'*Illinois Institute of Technology* de Chicago où il enseigna de 1946 à 1971. Il fut également professeur-visiteur dans plusieurs autres universités (Harvard, Paris, Ankara, Arizona).

Durant sa carrière, longue de six décennies, Karl MENGER publia plus de 230 articles. Ses travaux portèrent principalement sur la géométrie et la topologie ; il y aborda de multiples thèmes fondamentaux en les traitant d'un « point de vue intrinsèque » (Kass, p. 558) : étude des courbes, de la dimension, de la distance, des fondations de la géométrie de Bolyai-Lobachevsky ; son nom est encore associé à l'éponge éponyme qui est l'analogue dans l'espace de ce qu'est le tapis de Sierpinski dans le plan.

Il s'intéressa également à toutes sortes de problèmes conceptuels variés (en logique, analyse, algèbre, éthique, économie, didactique) qui influencèrent fortement divers savants. Par exemple, un de ses articles en économie incita le célèbre J. VON NEUMANN à entreprendre la construction d'une théorie formelle de l'utilité ; dans une autre note, il introduisit le concept de *hasy set* (14) dans lequel il remplaça la relation d'appartenance d'un élément à un ensemble par la probabilité qu'a l'élément d'appartenir à cet ensemble : ceci préfigurait l'étude de ce que l'on appela plus tard un *fuzzy set* (https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_floue) (15) qui fut introduit plus tard (en 1965) par L. ZADEH et qui admet de nos jours des applications technologiques importantes.

Il a notamment rédigé, en anglais, de nombreux articles relatifs à l'enseignement des mathématiques. En plus des livres cités dans la bibliographie, voici les titres de ces travaux rangés chronologiquement en fonction de leur date de publication :

(14) Une traduction française de ces termes est « ensemble vague (ou brumeux) ».
(15) En français, « ensemble (ou sous-ensemble) flou ».

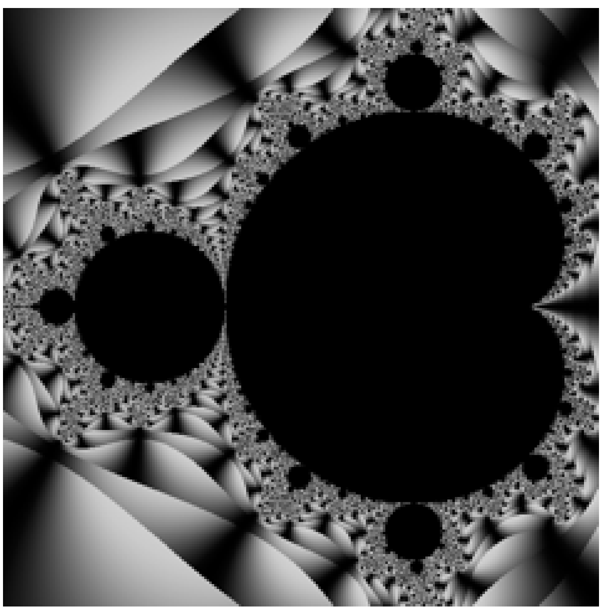
- « What is Calculus of Variations and What Are Its Applications ? », *The Scientific Monthly*, 45 (3), 1937, pp. 250 - 253 ;
- « What is Dimension ? », *Amer. Math. Monthly*, 50 (1), 1943, pp. 2 - 7 ;
- « On the Teaching of Differential Equations », *Amer. Math. Monthly*, 51 (7), 1944, pp. 392 - 395 ;
- « Methods of Presenting e and π », *Amer. Math. Monthly*, 52 (1), 1945, pp. 28 - 33 ;
- « Are Variables Necessary in Calculus ? », *Amer. Math. Monthly*, 56 (9), 1949, pp. 609 - 620 ;
- « Tossing a Coin », *Amer. Math. Monthly*, 61 (9), 1954, pp. 634 - 636 ;
- « Why Johnny hates math », *The Mathematics Teacher*, 49 (8), 1956, pp. 578 - 584 ;
- « What are Variables and Constants ? », *Science, New Series*, 123 (3196), 1956, pp. 547 - 548 ;
- « What are x and y ? », *Mathematical Gazette*, 40 (334), 1956, pp. 246 - 255 ;
- « New Approach to Teaching Intermediate Mathematics », *Science, New Series*, 127 (3310), 1958, pp. 1320 - 1323 ;
- « Gulliver in the Land without One, Two, Three », *Mathematical Gazette*, 43 (346), 1959, pp. 241 - 250 ;
- « Gulliver's Return to the Land Without One, Two, Three », *Amer. Math. Monthly*, 67 (7), 1960, pp. 641 - 648 ;
- « The Geometry Relevant to Modern Education », *Educational Studies in Mathematics*, 4 (1), 1971, pp. 1 - 17.

Pour en savoir plus sur le mathématicien autrichien :

- Kass S., Karl Menger, *Notices of the AMS*, Volume 43, Number 5, 1996, pp. 558 - 561.
- O'Connor J.J. - Robertson E.F., Menger Biography, *JOC/EFR*, MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews, 2014, adresse électronique : http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies.Menger.html.
- *Wikipedia, the free encyclopedia*, Karl Menger, juin 2015, https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Menger.

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège. ✉j.bair@ulg.ac.be

---



L'ensemble de Mandelbrot - variations de couleurs en fonction de la vitesse d'échappement du disque de rayon 2 © Jean-Marc Desbonnez