

Raffinement de l'estimation asymptotique de l'exposant de Hölder

Thomas Kleyntssens
tkleyntssens@ulg.ac.be

En collaboration avec S. Nicolay

Université de Liège

Journées du GDR Analyse Multifractale – Avignon 2016

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Définition (Continuité au sens de Hölder)

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Si $f \in L^\infty_{loc}$ alors $f \in \Lambda^h(x_0)$ s'il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement inférieur à h , une constante $C > 0$ et un voisinage Ω de x_0 tels que

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^h$$

pour tout $x \in \Omega$. Si $h \in]0; 1]$, la condition se réécrit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^h.$$

Définition (Continuité au sens de Hölder)

Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Si $f \in L_{loc}^\infty$ alors $f \in \Lambda^h(x_0)$ s'il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement inférieur à h , une constante $C > 0$ et un voisinage Ω de x_0 tels que

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^h$$

pour tout $x \in \Omega$. Si $h \in]0; 1]$, la condition se réécrit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^h.$$

Définition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f \in L_{loc}^\infty$; l'**exposant de Hölder** de f en x_0 est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{h > 0 : f \in \Lambda^h(x_0)\}.$$

Definition

Le **spectre de Hölder** d'une fonction $f \in L_{loc}^\infty$ est défini par

$$d_f : h \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 : h_f(x_0) = h\}) \in [0; 1] \cup \{-\infty\}$$

où $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff ($\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$).

Intuition

Le nombre de cubes dyadiques de taille 2^{-j} contenant un point d'exposant de Hölder h est approximativement $2^{d_f(h)j}$.

Definition

Le **spectre de Hölder** d'une fonction $f \in L_{loc}^\infty$ est défini par

$$d_f : h \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 : h_f(x_0) = h\}) \in [0; 1] \cup \{-\infty\}$$

où $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff ($\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$).

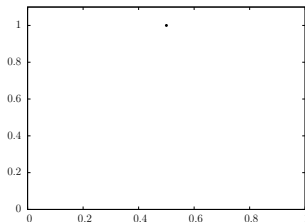
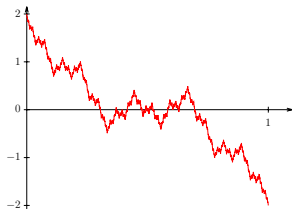


Figure : fonction de Weierstraß et son spectre

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \cos((w^j x)\pi) \quad (\text{avec } \phi \in]0, 1[\text{ et } \phi w > 1).$$

Definition

Le **spectre de Hölder** d'une fonction $f \in L_{loc}^\infty$ est défini par

$$d_f : h \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 : h_f(x_0) = h\}) \in [0; 1] \cup \{-\infty\}$$

où $\dim_{\mathcal{H}}$ est la dimension de Hausdorff ($\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$).

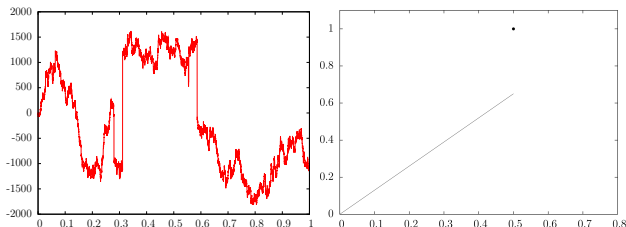


Figure : Processus de Lévy et son spectre

Les ondelettes

Une ondelette est une fonction ψ ayant des hypothèses adéquates telle que si $f \in L^2([0, 1])$ alors

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}} c_\lambda \psi(2^j x - k)$$

où les coefficients d'ondelettes c_λ sont définis par

$$c_\lambda := c_{\lambda(j,k)} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx$$

et $\lambda(j, k) = \frac{k}{2^j} + [0, \frac{1}{2^j}[$.

Les ondelettes

Une ondelette est une fonction ψ ayant des hypothèses adéquates telle que si $f \in L^2([0, 1])$ alors

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}} c_\lambda \psi(2^j x - k)$$

où les coefficients d'ondelettes c_λ sont définis par

$$c_\lambda := c_{\lambda(j,k)} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi(2^j x - k) dx$$

et $\lambda(j, k) = \frac{k}{2^j} + [0, \frac{1}{2^j}[$.

Intuition

Si le point x appartient au cube dyadique λ alors $|c_\lambda| \sim 2^{-h_f(x)j}$.

$$h_f(x) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \inf_k \frac{\log |c_\lambda|}{\log(2^{-j} + |k2^{-j} - x|)} \quad (\text{Jaffard, 1990}).$$

Une méthode classique pour estimer le spectre est de définir les quantités

$$S_f(j, q) = 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^q \quad \text{et} \quad \eta_f(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(S_f(j, q))}{\log 2^{-j}}.$$

Une approximation du spectre est alors donnée par

$$\inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1.$$

Ce formalisme multifractal est relié aux espaces de Besov $B_{p,q}^s$ ($\eta_f(q) = \sup\{s : f \in B_{q,\infty}^{s/q}\}$ - Jaffard, 1997 [7]).

Une méthode classique pour estimer le spectre est de définir les quantités

$$S_f(j, q) = 2^{-j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda^q \quad \text{et} \quad \eta_f(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(S_f(j, q))}{\log 2^{-j}}.$$

Une approximation du spectre est alors donnée par

$$\inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1.$$

Ce formalisme multifractal est relié aux espaces de Besov $B_{p,q}^s$ ($\eta_f(q) = \sup\{s : f \in B_{q,\infty}^{s/q}\}$ - Jaffard, 1997 [7]).

- On ne détecte que la partie croissante du spectre ; en remplaçant c_λ par $d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|$, on obtient la partie décroissante du spectre (WLM).
- Vu l'utilisation d'une transformée de Legendre, le spectre détecté est concave.

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Rappel

$$\#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \sim 2^{-h_f(x)j}\} \sim 2^{d_f(h)j}$$

$$\rho_f(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\epsilon)j} \leq |c_\lambda| < 2^{-(h-\epsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

où Λ_j est l'ensemble des cubes dyadiques λ de taille 2^{-j} . On espère $\rho_f(h) = d_f(h)$.

Rappel

$$\#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \sim 2^{-h_f(x)j}\} \sim 2^{d_f(h)j}$$

$$\rho_f^\psi(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\epsilon)j} \leq |c_\lambda| < 2^{-(h-\epsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

où Λ_j est l'ensemble des cubes dyadiques λ de taille 2^{-j} . On espère $\rho_f(h) = d_f(h)$.

Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0; 1])$ est défini par

$$\nu_f : h \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, h)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-hj}\}$.

Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0; 1])$ est défini par

$$\nu_f : h \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(1, h + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, h)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-hj}\}$.

On a ν_f croissant, continu à droite et il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu_f(h) = -\infty \forall h < h_{\min}$ et $\nu_f(h) \in [0; 1] \forall h \geq h_{\min}$.

Proposition (Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10])

La constante strictement positive 1 est arbitraire.

Definition

Le **profil d'ondelette** d'une fonction $f \in L^2([0; 1])$ est défini par

$$\nu_f : h \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(1, h + \epsilon)(f)}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, h)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-hj}\}$.

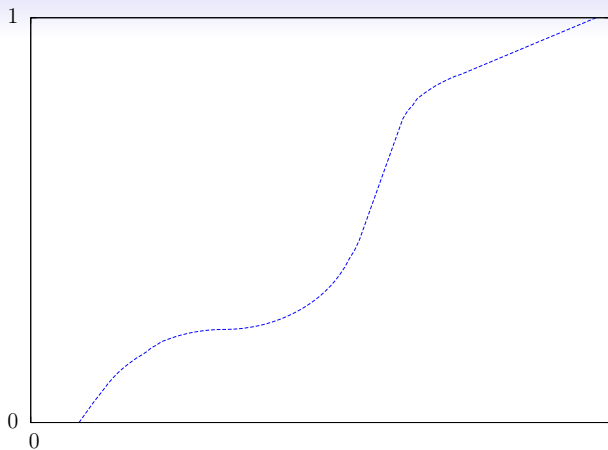
On a ν_f croissant, continu à droite et il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu_f(h) = -\infty \forall h < h_{\min}$ et $\nu_f(h) \in [0; 1] \forall h \geq h_{\min}$.

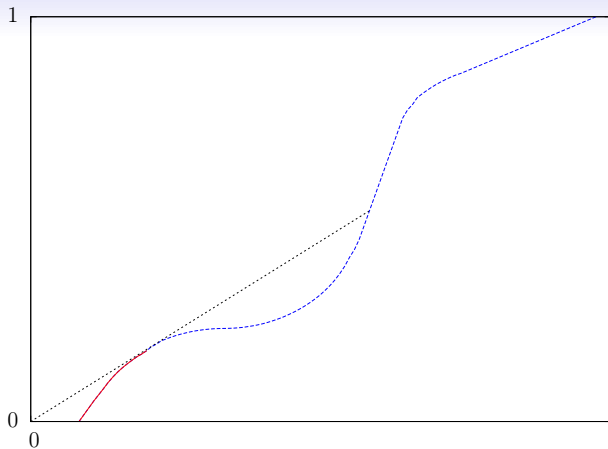
Proposition (Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10])

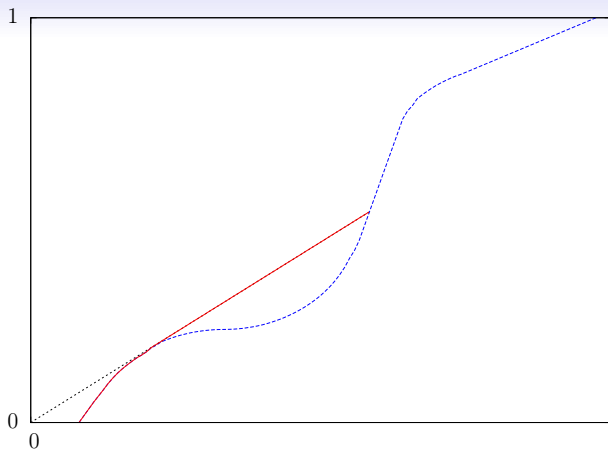
La constante strictement positive 1 est arbitraire.

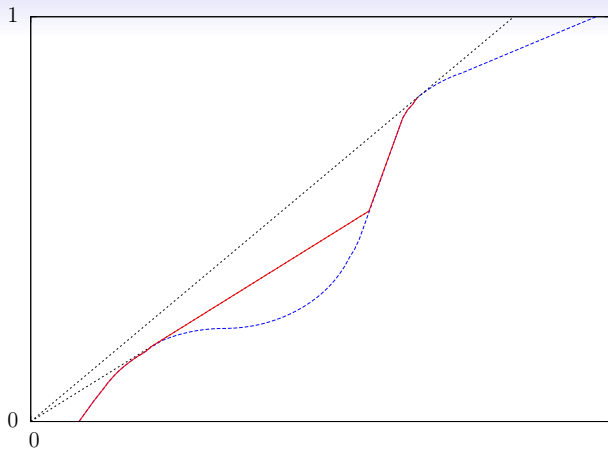
Théorème (Jaffard, 2004 [7])

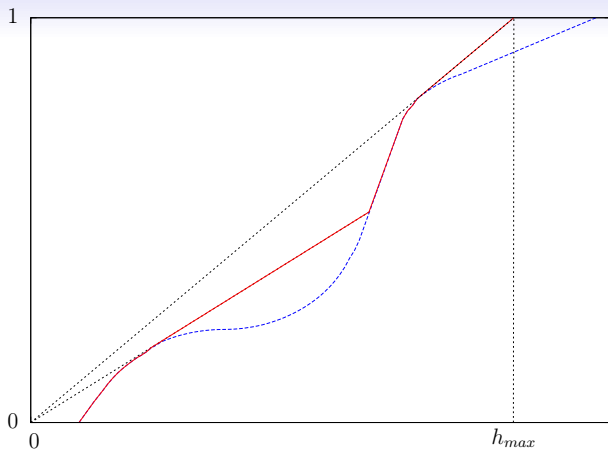
L'enveloppe visiblement croissante $d_f^{\nu_f}$ de la fonction ν_f est une « approximation » du spectre de f .











Soit une fonction ν croissante, cont. à dr., telle qu'il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu(h) = -\infty \forall h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0; 1] \forall h \geq h_{\min}$.

Définition

L'espace S^ν est défini par

$$S^\nu = \{f \in L^2([0; 1]) : \nu_f(h) \leq \nu(h) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}\}.$$

Soit une fonction ν croissante, cont. à dr., telle qu'il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu(h) = -\infty \ \forall h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0; 1] \ \forall h \geq h_{\min}$.

Définition

L'espace S^ν est défini par

$$S^\nu = \{f \in L^2([0; 1]) : \nu_f(h) \leq \nu(h) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème (Aubry, Bastin, Dispa, 2007 [2])

Les ensembles

$$\{f \in S^\nu : \nu(h) = \nu_f(h) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\{f \in S^\nu : d_f(h) = \begin{cases} d_f^\nu(h) & \text{si } h \leq h_{\max} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \}$$

sont prévalents dans S^ν .

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h)$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si ϵ' est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h) + \frac{\epsilon}{2}$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si ϵ' est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h) + \frac{\epsilon}{2}$$

i.e. pour tout $C > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h) + \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} \#E_j(1, h + \epsilon')(f) &= \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 2^{-(h+\epsilon')j}\} \\ &\geq \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-hj}\} \end{aligned}$$

Si $f \in S^\nu$ alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h)$$

i.e. pour tout $\epsilon > 0$, si ϵ' est suffisamment petit,

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h) + \frac{\epsilon}{2}$$

i.e. pour tout $C > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\frac{\log \#E_j(1, h + \epsilon')(f)}{\log 2^j} \leq \nu(h) + \epsilon$$

et

$$\begin{aligned} \#E_j(1, h + \epsilon')(f) &= \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 2^{-(h+\epsilon')j}\} \\ &\geq \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-hj}\} \end{aligned}$$

i.e

$$\#E_j(C, h)(f) \leq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j}.$$

Rappel : la fonction ν est croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0; 1]$ pour tout $h \geq h_{\min}$.

Proposition (Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3])

On a

$$S^\nu = \{f \in L^2([0; 1]) : \forall h > 0 \forall \epsilon > 0 \forall C > 0 \\ \exists J > 0 \forall j \geq J, \#E_j(C, h)(f) \leq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j}\}$$

où $E_j(C, h)(f) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-hj}\}$.

Rappel : la fonction ν est croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0; 1]$ pour tout $h \geq h_{\min}$.

Proposition (Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3] - Jaffard, 2004 [7])

On a

$$S^\nu = \{ \vec{c} : \forall h > 0 \, \forall \epsilon > 0 \, \forall C > 0 \\ \exists J > 0 \, \forall j \geq J, \, \#E_j(C, h)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j} \}$$

où $E_j(C, h)(\vec{c}) = \{ \lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C 2^{-hj} \}$.

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

$$\Lambda^h; h_f(x_0), d_f \longleftrightarrow |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)}$$

$$\Lambda^h; h_f(x_0), d_f \longleftrightarrow \begin{matrix} |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} \\ B_{p,q}^s; (S^\nu, \nu_f) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^h; h_f(x_0), d_f & \longleftrightarrow & \begin{array}{l} |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} \\ B_{p,q}^s; (S^\nu, \nu_f) \end{array} \\
 & & \downarrow \\
 & & |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} |\log 2^{-j}|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^h; h_f(x_0), d_f & \longleftrightarrow & |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} \\
 & & B_{p,q}^s; (S^\nu, \nu_f) \\
 & & \downarrow \\
 & & |c_\lambda| \sim \underbrace{2^{-jh_f(x_0)} |\log 2^{-j}|}_{\sigma_j}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^h; h_f(x_0), d_f & \longleftrightarrow & |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} \\
 & & B_{p,q}^s; (S^\nu, \nu_f) \\
 \downarrow \text{dashed} & & \downarrow \\
 \Lambda^{h,\sigma} & \longleftrightarrow & |c_\lambda| \sim \underbrace{2^{-jh_f(x_0)} |\log 2^{-j}|}_{\sigma_j} \\
 & & B_{p,q}^{s,\sigma};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^h; h_f(x_0), d_f & \longleftrightarrow & |c_\lambda| \sim 2^{-jh_f(x_0)} \\
 & & B_{p,q}^s; (S^\nu, \nu_f) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Lambda^{h,\sigma} & \longleftrightarrow & |c_\lambda| \sim \underbrace{2^{-jh_f(x_0)} |\log 2^{-j}|}_{\sigma_j} \\
 & & B_{p,q}^{s,\sigma}; (S^{\nu,\sigma}, \nu_{f,\sigma(\cdot)})
 \end{array}$$

Rappel : la fonction ν est croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} > 0$ tel que $\nu(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0; 1]$ pour tout $h \geq h_{\min}$.

Proposition (Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3] - Jaffard, 2004 [7])

On a

$$S^\nu = \{ \vec{c} : \forall h > 0 \forall \epsilon > 0 \forall C > 0 \\ \exists J > 0 \forall j \geq J, \#E_j(C, h)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j} \}$$

où $E_j(C, h)(\vec{c}) = \{ \lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C2^{-hj} \}$.

Soit une fonction ν croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0, 1]$ pour tout $h > h_{\min}$.

Définition

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(h)}$ une suite positive et définissons

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} = \{ \vec{c} : \forall h > 0 \, \forall \epsilon > 0 \, \forall C > 0 \\
\exists J > 0 \, \forall j \geq J, \#E_j(C, h)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(h) + \epsilon)j} \}$$

où $E_j(C, \sigma_j^{(h)})(\vec{c}) = \{ \lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(h)} \}$.

Soit une fonction ν croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu(h) \in [0, 1]$ pour tout $h > h_{\min}$.

Définition

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, notons $\sigma^{(h)}$ une suite positive et définissons

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \forall h > 0 \forall \epsilon > 0 \forall C > 0 \#E_j(C, h)(\vec{c}) \preceq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j}\}$$

où $E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C\sigma_j^{(h)}\}$.

Notation : $x_j \preceq_J y_j \equiv \forall j \geq J \ x_j \leq y_j$ et $x_j \preceq y_j \equiv \exists J > 0 \ x_j \preceq_J y_j$
 deux préordres dans l'espace des suites réelles.

Definition

Supposons que pour tout $h < h'$, nous avons $\sigma_j^{(h')} \preceq \sigma_j^{(h)}$. Le **profil généralisé** de $\vec{c}$ est défini par

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)} : h \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \sigma^{(h+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}.$$

Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) \in [0, 1]$ pour tout $h > h_{\min}$.

Definition

Supposons que pour tout $h < h'$, nous avons $\sigma_j^{(h')} \preceq \sigma_j^{(h)}$. Le **profil généralisé** de $\vec{c}$ est défini par

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)} : h \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(1, \sigma^{(h+\epsilon)})(\vec{c})}{\log 2^j}.$$

Cette fonction est croissante, continue à droite et il existe $h_{\min} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$ et $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) \in [0, 1]$ pour tout $h > h_{\min}$.

Proposition

Si pour tout $h < h'$, nous avons $\sigma_j^{(h')}/\sigma_j^{(h)} \rightarrow 0$ si $j \rightarrow +\infty$ alors la constante strictement positive 1 apparaissant dans la définition de $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}$ est arbitraire.

Proposition

Si pour tout $h < h'$, nous avons $\sigma_j^{(h')}/\sigma_j^{(h)} \rightarrow 0$ si $j \rightarrow +\infty$ alors l'espace $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ est un espace vectoriel topologique métrique et

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} = \{\vec{c} : \nu_{\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}}(h) \leq \nu(h) \text{ pour tout } h \in \mathbb{R}\}.$$

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Pour tout $\gamma > 0$, posons

$$w_\gamma(\lambda; \lambda') = \frac{2^{-(\gamma+d+1)|j-j'|}}{(1 + 2^{\inf\{j,j'\}}|2^{-j}k - 2^{-j'}k'|)^{\gamma+d+1}}.$$

Une matrice $A := (A(\lambda; \lambda'))_{\lambda; \lambda'}$ appartient à l'espace $\mathcal{A}_\gamma$ s'il existe $C \geq 0$ tel que

$$|A(\lambda; \lambda')| \leq C w_\gamma(\lambda; \lambda').$$

La borne inférieure de ces constantes est notée $\|A\|_\gamma$.

Définition

La matrice A est dite **presque-diagonale** (resp. **quasi-diagonale**) si $A \in \mathcal{A}_\gamma$ pour tout $\gamma > 0$ (resp. A est inversible et $A, A^{-1} \in \mathcal{A}_\gamma$ pour tout $\gamma > 0$).

La matrice de l'opérateur bijectif qui envoie une base d'ondelettes orthonormal C^∞ sur une autre est quasi-diagonale (Meyer, 1990 [11]).

Définition

Une suite σ de nombres réels positifs est dite **admissible** s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C\sigma_j.$$

Définition

Une suite σ de nombres réels positifs est dite **admissible** s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C\sigma_j.$$

Posons $\underline{\Theta}_j = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}$ and $\overline{\Theta}_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}$.

Les indices de Boyd sont définis par

$$\underline{s}(\sigma) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \underline{\Theta}_j}{\log 2^j} \text{ and } \overline{s}(\sigma) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \overline{\Theta}_j}{\log 2^j}.$$

Dans ce cas, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1}2^{j(\underline{s}(\sigma)-\epsilon)} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq C2^{j(\overline{s}(\sigma)+\epsilon)}.$$

Définition

Une suite σ de nombres réels positifs est dite **admissible** s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C\sigma_j.$$

Posons $\underline{\Theta}_j = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}$ and $\overline{\Theta}_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}$.

Les indices de Boyd sont définis par

$$\underline{s}(\sigma) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \underline{\Theta}_j}{\log 2^j} \text{ and } \overline{s}(\sigma) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \overline{\Theta}_j}{\log 2^j}.$$

Dans ce cas, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1}2^{j(\underline{s}(\sigma)-\epsilon)} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq C2^{j(\overline{s}(\sigma)+\epsilon)}.$$

Les suites 2^{-hj} , $2^{-hj}j$, $2^{-hj}\sqrt{|\log |\log 2^{-j}||}$ sont admissibles mais 2^{2^j} ne l'est pas.

Théorème (Meyer, 1990 [11])

Si $\gamma > |h|$ et $A \in \mathcal{A}_\gamma$ alors il existe une constante C' (dépendant de la dimension) telle que

$$|c_\lambda| \leq C 2^{-hj} \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C' \|A\|_\gamma C 2^{-hj} \text{ pour tout } \lambda.$$

Théorème (Meyer, 1990 [11])

Si $\gamma > |h|$ et $A \in \mathcal{A}_\gamma$ alors il existe une constante C' (dépendant de la dimension) telle que

$$|c_\lambda| \leq C 2^{-hj} \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C' \|A\|_\gamma C 2^{-hj} \text{ pour tout } \lambda.$$

Théorème

Soit une suite admissible σ . Si $\gamma > \max\{-\underline{s}(\sigma) - 1, \bar{s}(\sigma)\}$ et $A \in \mathcal{A}_\gamma$ alors il existe une constante C' (dépendant de la dimension), une constante C'' (dépendant de la suite σ et de γ) telles que

$$|c_\lambda| \leq C \sigma_j \text{ pour tout } \lambda \Rightarrow |(A\vec{c})_\lambda| \leq C' C'' \|A\|_\gamma C \sigma_j \text{ pour tout } \lambda.$$

Théorème

Supposons que $h_{\min} \in \mathbb{R}$ et que pour tout $h \in \mathbb{R}$, la suite $\sigma^{(h)}$ est admissible tels que pour tout $h < h'$, nous avons

$$\sigma_j^{(h')} / \sigma_j^{(h)} \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow +\infty.$$

Si $\vec{c} \in S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$, alors $A\vec{c} \in S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice A presque-diagonale et nous avons $\nu_{\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}} = \nu_{A\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice A quasi-diagonale.

Théorème

Supposons que $h_{\min} \in \mathbb{R}$ et que pour tout $h \in \mathbb{R}$, la suite $\sigma^{(h)}$ est admissible tels que pour tout $h < h'$, nous avons

$$\sigma_j^{(h')} / \sigma_j^{(h)} \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow +\infty.$$

Si $\vec{c} \in S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$, alors $A\vec{c} \in S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice A presque-diagonale et nous avons $\nu_{\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}} = \nu_{A\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}}$ pour toute matrice A quasi-diagonale.

Donc,

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} = \{f \in L^2([0; 1]) : \forall h > 0 \forall \epsilon > 0 \forall C > 0 \\ \#E_j(C, h)(f) \preceq 2^{(\nu(h)+\epsilon)j}\}.$$

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

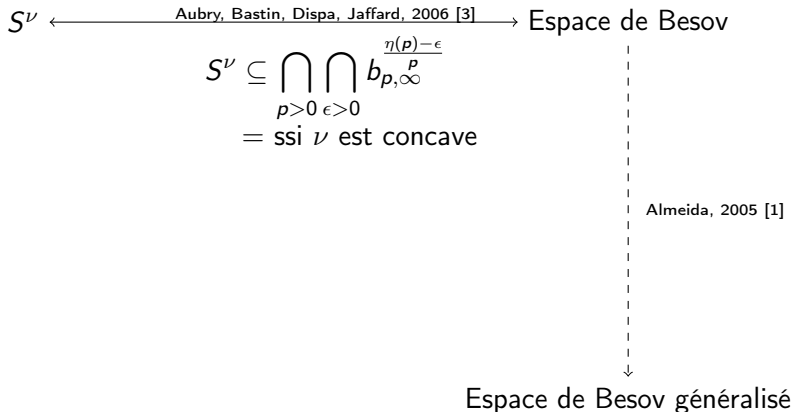
- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

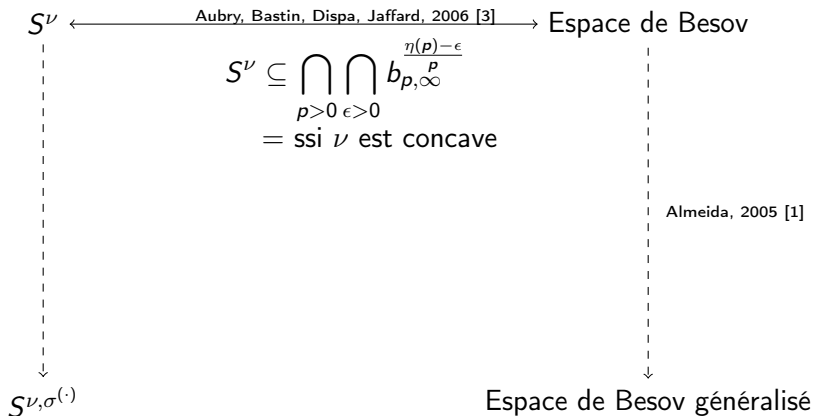
4 Conclusion

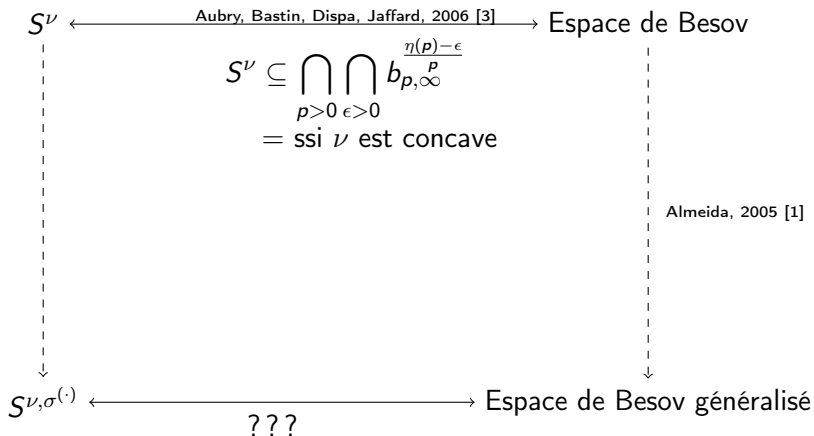
$S^\nu \xleftarrow{\text{Aubry, Bastin, Dispa, Jaffard, 2006 [3]}} \text{Espace de Besov}$

$$S^\nu \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)-\epsilon}{p}}$$

= ssi ν est concave







Définition

Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b_{p,\infty}^s$ si et seulement si

$$\sup_j 2^{(s-1/p)j} \left(\sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Définition

Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b_{p,\infty}^s$ si et seulement si

$$\sup_j 2^{(s-1/p)j} \left(\sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Définition

Soit σ une suite admissible. Une suite $\vec{c}$ appartient à l'espace $b_{p,\infty}^\sigma$ si et seulement si

$$\sup_j \sigma_j 2^{-j/p} \left(\sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Théorème

Supposons que $h_{\min} \in \mathbb{R}$ et que pour tout $h \in \mathbb{R}$, la suite $\sigma^{(h)}$ est admissible et supposons que

- pour tout $h < h'$, nous avons $\sigma_j^{(h')}/\sigma_j^{(h)} \rightarrow 0$ si $j \rightarrow +\infty$;
- $\bar{s}(\sigma^{(h)}) \rightarrow -\infty$ si $h \rightarrow +\infty$.

Pour tout $p > 0$, notons $\theta^{(p)}$ une suite admissible. Nous avons

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p, \infty}^{\theta^{(p)} 2^{-j\epsilon/p}}$$

si et seulement si pour tout $p, \epsilon > 0$ et pour tout $h > h_{\min}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h)/p} (\sigma_j^{(h)})^{-1}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1}$$

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta)})^{-1}$$

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta)})^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{j\nu(h+\eta/2)/p} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} &\leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1} \\
&\Leftrightarrow \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
&\Leftrightarrow 2^{j\nu(h+\eta/2)/p} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
&\Leftrightarrow 2^{j(\nu(h+\eta/2)-\eta)} \preceq 2^j (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} &\leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow 2^{j\nu(h+\eta/2)/p} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow 2^{j(\nu(h+\eta/2)-\eta)} \preceq 2^j (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-p}
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\nu(h) \leq \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \inf_{p > 0} \limsup_{j \rightarrow +\infty} 1 - p \frac{\log(\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})}{\log 2^j} := \tilde{\nu}(h).$$

pour tout $h \geq h_{\min}$. Nous posons $\tilde{\nu}(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$.

$$\begin{aligned}
 \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} &\leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta/2)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow \theta_j^{(p)} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} 2^{-j\nu(h+\eta/2)/p} (\sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow 2^{j\nu(h+\eta/2)/p} 2^{-j\eta/p} \preceq 2^{j/p} (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-1} \\
 &\Leftrightarrow 2^{j(\nu(h+\eta/2)-\eta)} \preceq 2^j (\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})^{-p}
 \end{aligned}$$

i.e.

$$\nu(h) \leq \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \inf_{p > 0} \limsup_{j \rightarrow +\infty} 1 - p \frac{\log(\theta_j^{(p)} \sigma_j^{(h+\eta)})}{\log 2^j} := \tilde{\nu}(h).$$

pour tout $h \geq h_{\min}$. Nous posons $\tilde{\nu}(h) = -\infty$ pour tout $h < h_{\min}$.

Proposition

Cette fonction est croissante, continue à droite et est positive sur $[h_{\min}; +\infty[$. De plus, si $\tilde{\nu} \leq 1$ alors

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} \subset S^{\tilde{\nu}, \sigma^{(\cdot)}}.$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème précédent, si $\tilde{\nu} \leq 1$ et si pour tout $h < h_{\min}$, il existe $p, \epsilon > 0$ tels que $\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \rightarrow +\infty$ si $j \rightarrow +\infty$, alors nous avons

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p, \infty}^{\theta^{(p)} 2^{-j\epsilon/p}} \subseteq S^{\tilde{\nu}, \sigma^{(\cdot)}}.$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème précédent, si $\tilde{\nu} \leq 1$ et si pour tout $h < h_{\min}$, il existe $p, \epsilon > 0$ tels que $\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \rightarrow +\infty$ si $j \rightarrow +\infty$, alors nous avons

$$S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}} \subseteq \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p, \infty}^{\theta^{(p)} 2^{-j\epsilon/p}} \subseteq S^{\tilde{\nu}, \sigma^{(\cdot)}}.$$

Remarquons que si nous avons la précédente inégalité alors pour tout $h < h_{\min}$, il existe $p, \epsilon > 0$ tels que

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} = +\infty.$$

En effet, si on suppose qu'il existe $h < h_{\min}$ tel que pour tout $p, \epsilon > 0$, nous avons

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \in \mathbb{R}$$

alors posons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $c_\lambda = \sigma_j^{(h)}$ pour un et un seul k et $c_\lambda = 0$ pour les autres k .

En effet, si on suppose qu'il existe $h < h_{\min}$ tel que pour tout $p, \epsilon > 0$, nous avons

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \in \mathbb{R}$$

alors posons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $c_\lambda = \sigma_j^{(h)}$ pour un et un seul k et $c_\lambda = 0$ pour les autres k .

- $\vec{c} \notin S^{\tilde{\nu}, \sigma^{(\cdot)}}$ car

$$\nu_{\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}}(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq \sigma_j^{(h+\epsilon)}\}}{\log 2^j} = 0 \not\geq \tilde{\nu}(h) = -\infty$$

En effet, si on suppose qu'il existe $h < h_{\min}$ tel que pour tout $p, \epsilon > 0$, nous avons

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \in \mathbb{R}$$

alors posons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $c_\lambda = \sigma_j^{(h)}$ pour un et un seul k et $c_\lambda = 0$ pour les autres k .

- $\vec{c} \notin S^{\vec{v}, \sigma^{(\cdot)}}$ car

$$\nu_{\vec{c}, \sigma^{(\cdot)}}(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq \sigma_j^{(h+\epsilon)}\}}{\log 2^j} = 0 \not\geq \tilde{v}(h) = -\infty$$

- $\vec{c} \in \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p}}$ car, pour tout $p, \epsilon > 0$,

$$\sup_j \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} 2^{-j/p} \left(\sum_k |c_{\lambda_{jk}}|^p \right)^{1/p} = \sup_j \theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} 2^{-j/p} \sigma_j^{(h)} < \infty.$$

Donc si $\nu = \tilde{\nu}$ alors

$$S^{\nu, \sigma(\cdot)} = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta(p)2^{-j\epsilon/p}}.$$

Donc si $\nu = \tilde{\nu}$ alors

$$S^{\nu, \sigma(\cdot)} = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p}}.$$

Théorème

Sous les hypothèses du théorème précédent, si pour tout $p, \epsilon > 0$ et pour tout $h \geq h_{\min}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{jn/p} 2^{-j\tilde{\nu}(h)/p} (\sigma_j^{(h)})^{-1}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors nous avons

$$S^{\nu, \sigma(\cdot)} = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{(\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p})_j}$$

si et seulement si $\nu = \tilde{\nu}$.

Dans le cas des espaces S^ν , $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$, nous devons trouver une suite admissible $\theta^{(p)}$ telle que

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h)/p} (\sigma_j^{(h)})^{-1},$$

i.e.

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j(1-\nu(h)+hp)/p}.$$

Dans le cas des espaces S^ν , $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$, nous devons trouver une suite admissible $\theta^{(p)}$ telle que

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h)/p} (\sigma_j^{(h)})^{-1},$$

i.e.

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j(1-\nu(h)+hp)/p}.$$

Nous pouvons prendre $\theta_j^{(p)} = 2^{j\eta(p)/p}$ où

$$\eta(p) = \inf_{h \geq h_{\min}} \{hp - \nu(h) + 1\}.$$

Dans ce cas, $\tilde{\nu}(h) = \inf_{p>0} \{1 + hp - \eta(p)\}.$

Dans le cas des espaces S^ν , $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$, nous devons trouver une suite admissible $\theta^{(p)}$ telle que

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j/p} 2^{-j\nu(h)/p} (\sigma_j^{(h)})^{-1},$$

i.e.

$$\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p} \leq C 2^{j(1-\nu(h)+hp)/p}.$$

Nous pouvons prendre $\theta_j^{(p)} = 2^{j\eta(p)/p}$ où

$$\eta(p) = \inf_{h \geq h_{\min}} \{hp - \nu(h) + 1\}.$$

Dans ce cas, $\tilde{\nu}(h) = \inf_{p>0} \{1 + hp - \eta(p)\}$. Nous avons donc

$$S^\nu = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{(\theta_j^{(p)} 2^{-j\epsilon/p})_j} = \bigcap_{p>0} \bigcap_{\epsilon>0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)-\epsilon}{p}}$$

si et seulement si $\nu = \tilde{\nu}$, i.e. ν est concave.

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- ▶ Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.
- ▶ Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]).

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- ▶ Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.
- ▶ Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]).
- ▶ Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(1, h + \epsilon)(\vec{c})}{\log 2^j}$$

$$\text{où } E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(h)}\}.$$

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- ▶ Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.
- ▶ Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]).
- ▶ Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(\textcolor{red}{C}, h + \epsilon)(\vec{c})}{\log 2^j}$$

$$\text{où } E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(h)}\}.$$

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- ▶ Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.
- ▶ Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]).
- ▶ Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = \lim_{\substack{\nearrow 0^+ \\ \nearrow 0^+}} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(\vec{c}, h + \epsilon)(\vec{c})}{\log 2^j}$$

$$\text{où } E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(h)}\}.$$

Kleyntssens, Esser, Nicolay, 2016 [10, 5]

- ▶ Nous ne connaissons qu'un nombre fini de points du signal.
- ▶ Nous utilisons les ondelettes de Daubechies et l'algorithme de Mallat pour calculer un nombre fini de coefficients d'ondelettes $(c_\lambda)_\lambda$ (Daubechies, 1992 [4]).
- ▶ Nous devons approximer

$$\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h) = \lim_{\substack{\nearrow 0^+ \\ \nearrow}} \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \# E_j(\vec{c}, h + \epsilon)(\vec{c})}{\log 2^j}$$

où $E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) = \{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(h)}\}$.

Ce qui signifie que, pour j suffisamment grand,

$$\# E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c}) \sim 2^{-\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h)j}.$$

Donc, nous pouvons approximer $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}(h)$ par la pente de

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \# E_j(C, \sigma^{(h)})(\vec{c})}{\log 2}$$

pour j suffisamment grand. Cette pente est notée $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h)$.

Fixons h ; le principal problème est de déterminer une constante C adéquate parce qu'en pratique, nous n'avons qu'un nombre fini de coefficients d'ondelettes :

- ▶ Si C est trop petit, $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h)$ sera égale à 1.
- ▶ Si C est trop grand, $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h)$ sera égale à $-\infty$.

Fixons h ; le principal problème est de déterminer une constante C adéquate parce qu'en pratique, nous n'avons qu'un nombre fini de coefficients d'ondelettes :

- ▶ Si C est trop petit, $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h)$ sera égale à 1.
- ▶ Si C est trop grand, $\nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h)$ sera égale à $-\infty$.

Nous construisons la fonction

$$C \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(h).$$

Vu qu'en théorie la constante est arbitraire, en pratique cette fonction devrait se stabiliser si $h \geq h_{min}$ (Esser, Kleyntssens, Nicolay, 2016 [5]).

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq \textcolor{red}{C} \sigma_j^{(h)}\}}{\log 2}$$

Mouvement Brownien

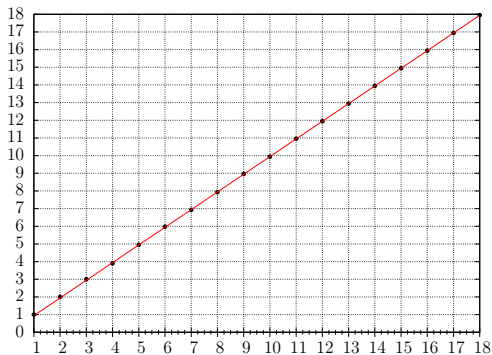
Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq C \sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 5\sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

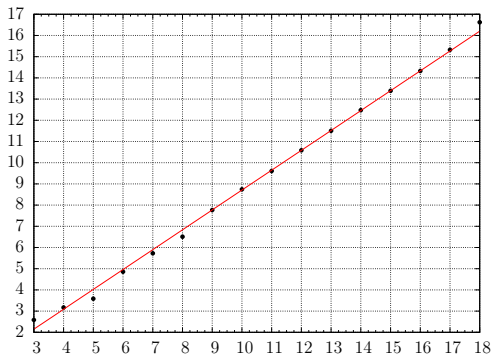


$$\text{pente} = \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^5(h) = 0.999681$$

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 100 \sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

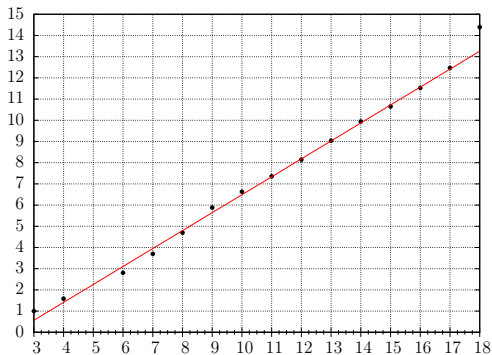


$$\text{pente} = \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^{100}(h) = 0.937016$$

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 200 \sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

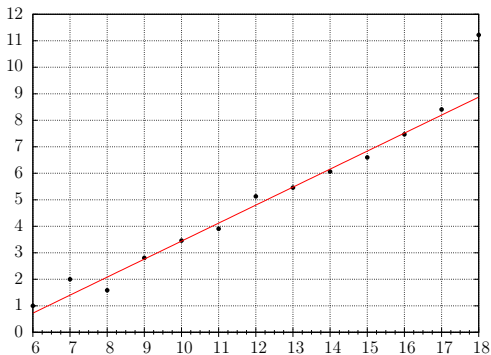


$$\text{pente} = \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^{200}(h) = 0.846159$$

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

$$j \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : |c_\lambda| \geq 300 \sigma_j^{(0.45)}\}}{\log 2}$$

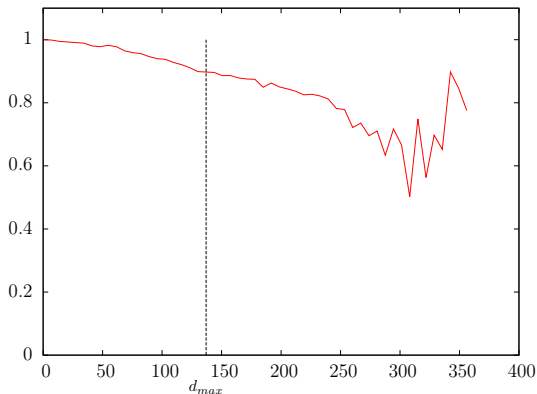


$$\text{pente} = \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^{300}(h) = 0.679259$$

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

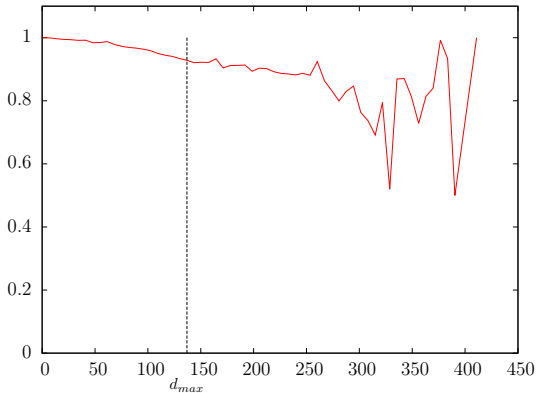
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.45)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

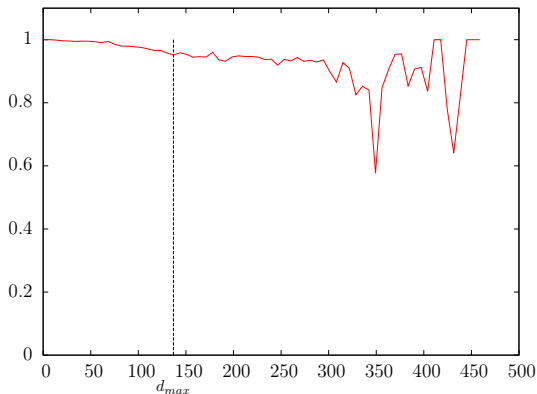
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.46)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

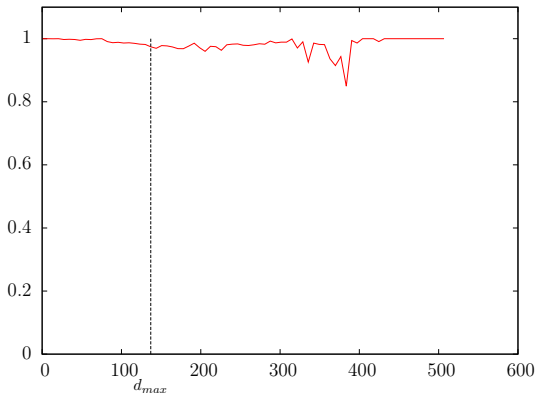
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(\mathbf{0.47})$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

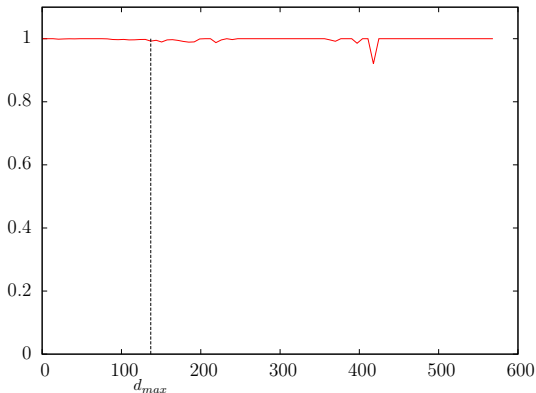
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.48)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

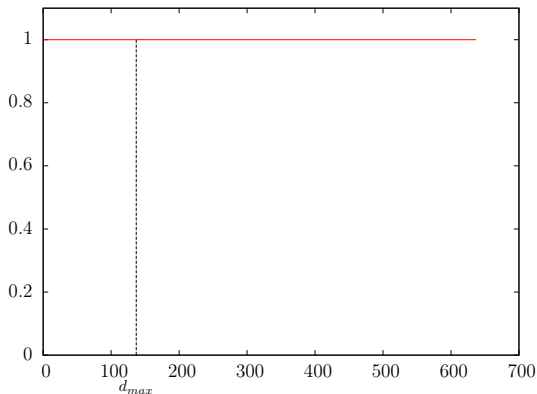
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.49)$.



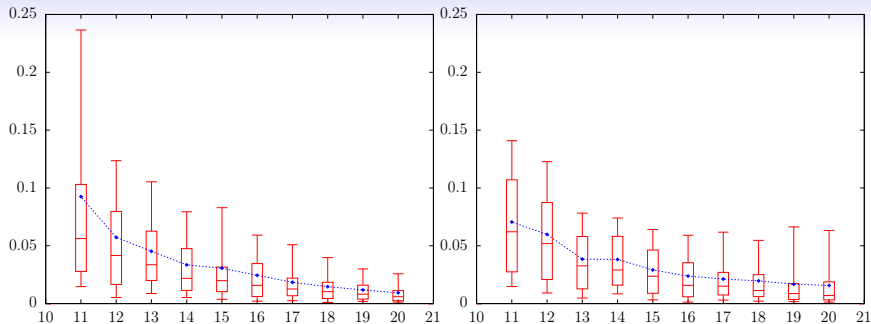
Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = 2^{-hj}$.

Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.50)$.



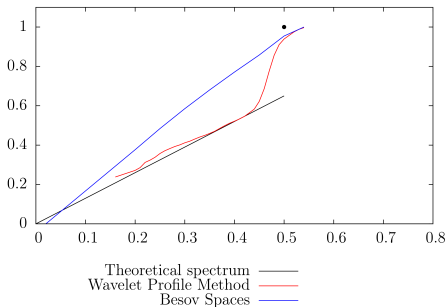
Mouvement Brownien fractionnaire



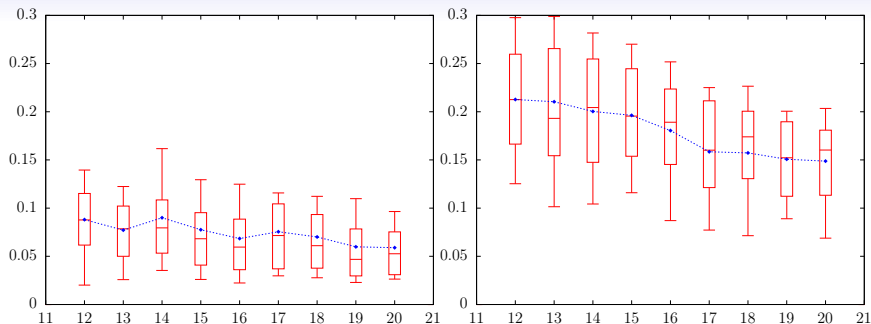
Pour tout j , on représente la boxplot des distances entre H et l'exposant détecté avec la méthode basée sur les espaces S^ν (gauche) et la WLM (droite) sur des signaux de taille 2^j . La moyenne est représentée en bleu.

(Esser, Kleyntssens, Nicolay, 2016 [5])

Processus de Lévy



Processus de Lévy



Pour tout j , on représente la boxplot de la RMSE avec les espaces S^ν (gauche) et la WLM (droite) sur des signaux de taille 2^j . La moyenne est représentée en bleu.
(Esser, Kleytssens, Nicolay, 2016 [5])

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

- Avec les précédentes méthodes (WLM, S^{ν}), il est possible de détecter l'exposant de Hölder H , i.e. $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj}$. Mais elles ne permettent pas de savoir si, par exemple, on a exactement le comportement $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj}$ ou plutôt $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$ ou $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log |\log 2^{-j}||}$ ou ...

- Avec les précédentes méthodes (WLM, S^{ν}), il est possible de détecter l'exposant de Hölder H , i.e. $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj}$. Mais elles ne permettent pas de savoir si, par exemple, on a exactement le comportement $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj}$ ou plutôt $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$ ou $|c_{\lambda}| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log |\log 2^{-j}||}$ ou ...
- La connaissance de ce comportement permet de distinguer deux signaux ayant le même exposant de Hölder mais des comportements asymptotiques différents.

- Avec les précédentes méthodes (WLM, S^ν), il est possible de détecter l'exposant de Hölder H , i.e. $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$. Mais elles ne permettent pas de savoir si, par exemple, on a exactement le comportement $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$ ou plutôt $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$ ou $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log |\log 2^{-j}||}$ ou ...
- La connaissance de ce comportement permet de distinguer deux signaux ayant le même exposant de Hölder mais des comportements asymptotiques différents.
- Qu'apporte, en pratique, la nouvelle théorie des espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ par rapport à ce problème ?

- En pratique, nous n'avons qu'un nombre fini d'échelles ; par conséquent, il devrait être possible, par exemple, de détecter une différence entre des comportements $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$ et $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$.

- En pratique, nous n'avons qu'un nombre fini d'échelles ; par conséquent, il devrait être possible, par exemple, de détecter une différence entre des comportements $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$ et $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$.
- Par exemple, Khintchine, 1924 [9] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c}_1$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

- En pratique, nous n'avons qu'un nombre fini d'échelles ; par conséquent, il devrait être possible, par exemple, de détecter une différence entre des comportements $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$ et $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$.
- Par exemple, Khintchine, 1924 [9] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c}_1$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

- Donc, numériquement, si on utilise l'espace $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ avec $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$, nous ne devrions voir aucune différence avec l'espace S^ν .

- En pratique, nous n'avons qu'un nombre fini d'échelles ; par conséquent, il devrait être possible, par exemple, de détecter une différence entre des comportements $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$ et $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$.
- Par exemple, Khintchine, 1924 [9] a montré que les coefficients d'ondelettes $\vec{c}_1$ d'un mouvement Brownien se comportent comme du

$$(2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^{1/2}.$$

- Donc, numériquement, si on utilise l'espace $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ avec $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$, nous ne devrions voir aucune différence avec l'espace S^ν .
- Par contre, numériquement, on devrait voir une différence avec les fonctions de Weierstraß (par exemple) car pour celles-ci, on a exactement $|c_\lambda| \sim 2^{-Hj}$.

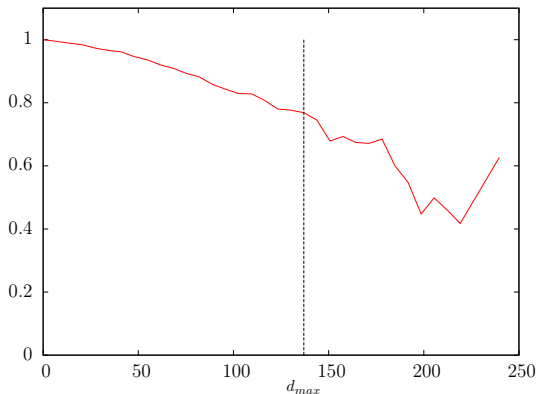
Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

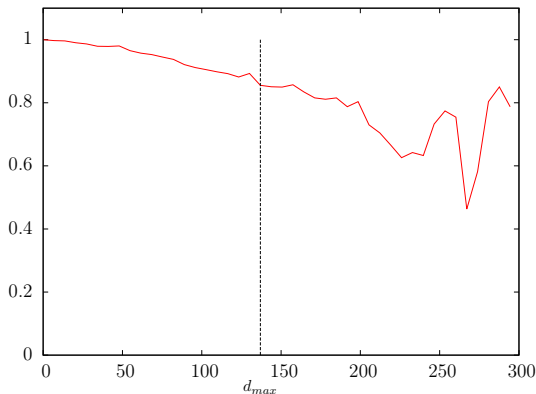
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.45)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

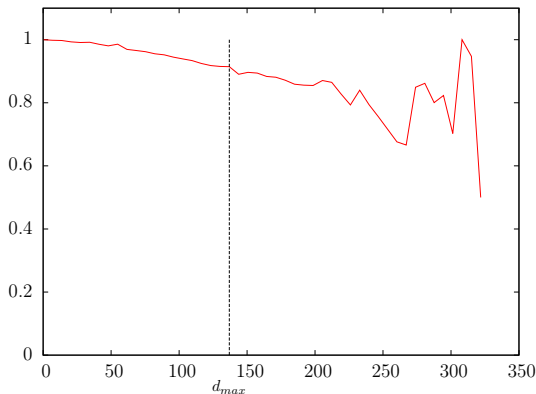
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.46)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

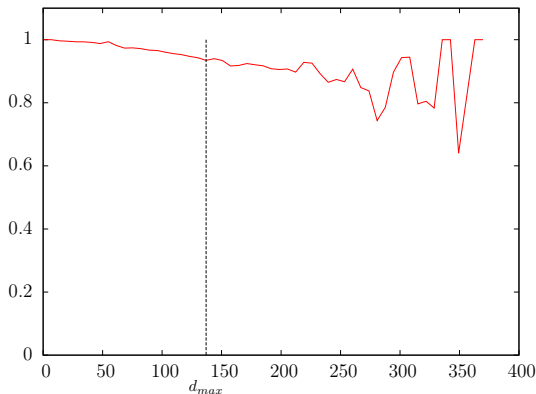
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.47)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

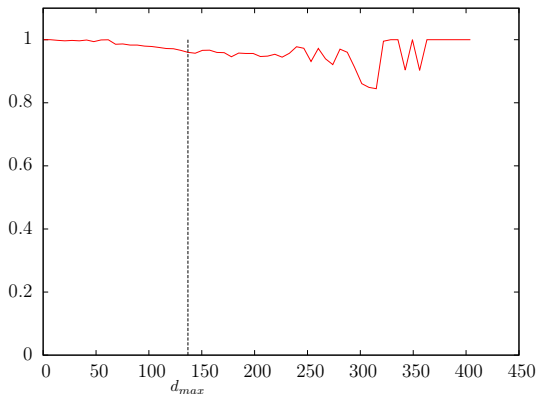
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.48)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

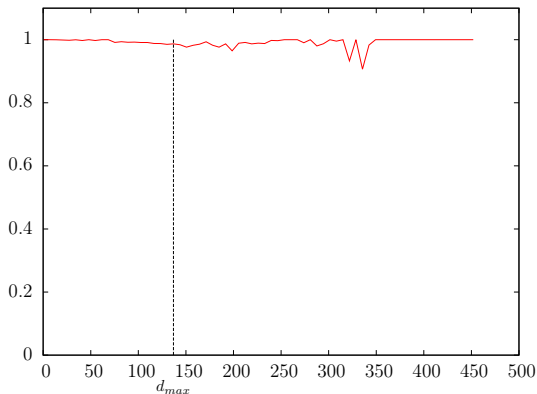
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.49)$.



Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

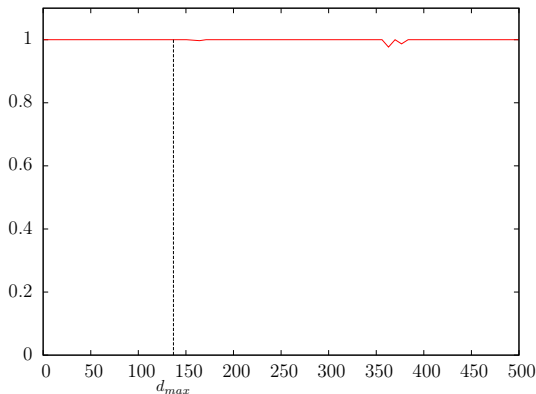
Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C(0.50)$.



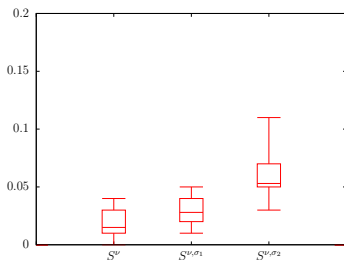
Mouvement Brownien

Prenons $\sigma_j^{(h)} = (2^{-j} |\log |\log 2^{-j}||)^h$.

Fonction $C > 0 \mapsto \nu_{\vec{c}, \sigma(\cdot)}^C$ (0.51).

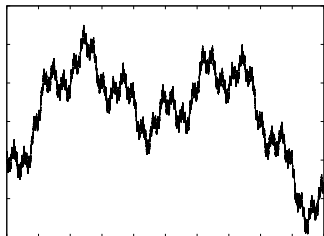
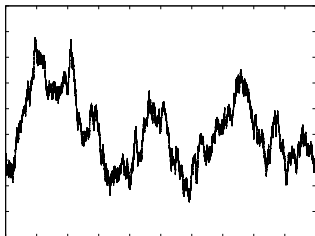
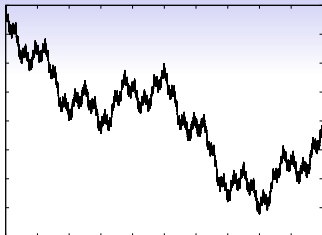


Mouvement Brownien

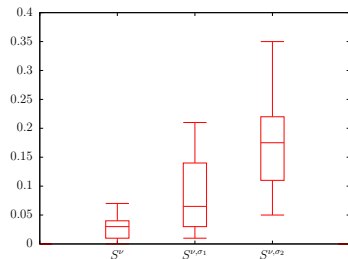
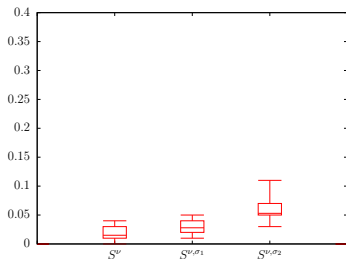


Boxplot de la distance entre l'exposant théorique et l'exposant détecté avec

$$\sigma_1^{(h)} = 2^{-jh} \sqrt{|\log |\log 2^{-j}||} \text{ et } \sigma_2^{(h)} = 2^{-jh} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$$



$$x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \cos((w^j x + U_j)\pi) \text{ où } U_j \sim^{i.i.d.} U \quad (\text{Hunt, 1996 [6]})$$



A gauche : mouvement Brownien - A droite : fonction de Weierstraß avec loi uniforme.

$$\sigma_1^{(h)} = 2^{-jh} \sqrt{|\log |\log 2^{-j}||} \text{ et } \sigma_2^{(h)} = 2^{-jh} \sqrt{|\log 2^{-j}|}$$

Plan

1 Introduction

- Analyse multifractale
- Les espaces S^ν

2 Une généralisation des espaces S^ν

- Motivation et définition
- Robustesse
- Lien avec les espaces de Besov généralisés

3 Et en pratique ?

- Explication de la méthode
- Exemple avec S^ν
- Raffinement de l'estimation avec $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$

4 Conclusion

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces permettent de raffiner le comportement asymptotique de certains processus.

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces permettent de raffiner le comportement asymptotique de certains processus.

Dans le futur,

- Cette nouvelle méthode permet d'aider à conjecturer/donner des pistes sur certains comportement asymptotique de processus théoriques.

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces permettent de raffiner le comportement asymptotique de certains processus.

Dans le futur,

- Cette nouvelle méthode permet d'aider à conjecturer/donner des pistes sur certains comportement asymptotique de processus théoriques.
- Elle permettra également de tester la validité de certains modèles théoriques utilisés pour modéliser des phénomènes réels.

Conclusion

- En mettant des hypothèses adéquates sur les suites $\sigma^{(h)}$, les nouveaux espaces $S^{\nu, \sigma^{(\cdot)}}$ sont robustes.
- Ces espaces peuvent être mis en relation avec les espaces de Besov généralisés.
- Ces espaces permettent de raffiner le comportement asymptotique de certains processus.

Dans le futur,

- Cette nouvelle méthode permet d'aider à conjecturer/donner des pistes sur certains comportement asymptotique de processus théoriques.
- Elle permettra également de tester la validité de certains modèles théoriques utilisés pour modéliser des phénomènes réels.
- Théoriquement, on est en train de généraliser ce travail en remplaçant la valeur absolue sur les coefficients d'ondelettes par d'autres normes.

Merci pour votre attention

- [1] **A. Almeida,**
Wavelet bases in generalized Besov spaces,
J. Math. Anal. Appl. 304, 198-211, 2005.

- [2] **J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa**
Prevalence of multifractal functions in S^ν spaces,
The Journal of Fourier Analysis and Applications, 2007.

- [3] **J.-M. Aubry, F. Bastin, S. Dispa and S. Jaffard,**
Topological properties of the sequence spaces S^ν ,
J. Math. Anal. Applic., 2006.

- [4] **I. Daubechies,**
Ten lectures on wavelets,
CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1992.

- [5] **C. Esser, T. Kleyntssens, and S. Nicolay.**
A multifractal formalism for non-concave and non-increasing spectra : The
leaders profile method.
Applied and Computational Harmonic Analysis, 2016.

- [6] **B.R Hunt,**
The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions,
Proceedings of the American Mathematical Society, **126**, 3, 791–800, 1996

- [7] **S. Jaffard,**
Beyond Besov Spaces, part I : Distribution of wavelets coefficients,
J. Fourier Anal. Appl. **10**, 3, 221-246, 2004.

- [8] **S. Jaffard,**
Multifractal formalism for functions part I : Results valid for all functions,
SIAM J. Math. Anal. **28**, 944-970, 1997.

- [9] **A. Khintchine,**
Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung,
Fund. Math **6**, 9-20, 1924.

- [10] **T. Kleyntssens, C. Esser and S. Nicolay,**
A multifractal formalism based on the S^ν spaces : from theory to practice,
Submit.

- [11] **Y. Meyer,**
Ondelettes et opérateurs II,
Hermann, 1990.