

UNIVERSITE DE LIÈGE 4969

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
MÉCANIQUE ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUÉES

no inventaire 69F014

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE

**NOTES ET EXERCICES
DE MECANIQUE DES FLUIDES**

2^{ème} partie

SOCIETE COOPERATIVE DE L'A.E.E.S.

III. Ecoulements isentropiques d'un gaz parfait.

I. Equation d'état d'un gaz parfait.

L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit :

$$p = R\rho T \quad (3.1)$$

quand on fait usage de la masse molaire m^* , nombre sans dimensions défini de la façon suivante :

$$m^* = \frac{\text{masse moyenne d'une molécule}}{\text{masse de la molécule d'oxygène}} \times 32$$

la constante

$$R^* = Rm^* = 8,31 \cdot 10^7 \text{ (cm/sec)}^2 \text{ par } ^\circ \text{ centig.}$$

devient universelle. Une des conséquences importantes de cette équation d'état est que l'énergie interne ne dépend que de la température. En effet pour une petite variation de l'état on a suivant (2.34) et (2.35)

$$dU = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (3.2)$$

Considérons dans cette relation U comme une fonction de la température et de la masse volumique, ce qui revient à considérer l'entropie comme une fonction implicite de ces variables à travers (2.34). Si donc nous remplaçons dans (3.2)

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial \rho} d\rho$$

il viendra

$$\frac{\partial U}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{p}{\rho^2} + T \frac{\partial S}{\partial \rho} \quad (3.4)$$

Éliminons l'entropie entre ces relations

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right)$$

ce qui se réduit à

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right) = 0$$

mais d'après l'équation d'état

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{\rho^2 T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K}{\rho} \right) = 0$$

ce qui entraîne $\partial U / \partial \rho = 0$, U ne dépend que de la température. Dès lors l'enthalpie spécifique

$$I = U + \frac{p}{\rho} = U + R T \quad (3.5)$$

ne dépend aussi que de la température.

Les grandeurs

$$\frac{dU}{dT} = c_v(T) \quad (3.6)$$

$$\frac{dI}{dT} = c_p(T) \quad (3.7)$$

sont les chaleurs spécifiques respectivement à volume constant et à pression constante; elles ne dépendent aussi que de la température. En vertu de (3.5) elles sont liées par

$$c_p = c_v + R \quad (3.8)$$

Enfin puisque $\partial U/\partial p = 0$, les relations (3.3) et (3.4) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T} \frac{dU}{dT} = \frac{c_v}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial p} = - \frac{p}{p^2 T} = - \frac{R}{p}$$

soit encore

$$dS = c_v \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (3.9)$$

Sous cette forme l'entropie spécifique est directement intégrable

$$S - S_0 = \int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} - R \ln \frac{p}{p_0} \quad (3.10)$$

on obtient aussi directement son expression comme fonction de la pression et de la température au moyen de la transformation

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

déduite de la relation d'état. Moyennant une intégration par parties et utilisation de (3.8) il vient

$$S - S_0 = - R \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \frac{T}{T_0} - \int_{T_0}^T \frac{dc_v}{dT} \ln \frac{T}{T_0} dT$$

2. Célérité du son.

L'équation (2.35) constitue une relation

$$p = p(\rho, S)$$

dont on peut déduire la grandeur

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.11)$$

qui a les dimensions du carré d'une vitesse. Il apparaîtra par la suite que cette vitesse est en fait la célérité avec laquelle se propagent les perturbations infinitésimales de pression; c'est la célérité du son. Pour en établir une expression explicite transformons (3.9) par la différentielle logarithmique de l'équation d'état :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (3.12)$$

Eu égard à (3.8) il vient

$$dS = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho} \quad (3.13)$$

Par conséquent, à entropie constante,

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT \quad (3.14)$$

$$\text{où} \quad \gamma = c_p / c_v \quad (3.15)$$

La dernière des relations (3.14) montre bien que la célérité du son ne dépend que de la température.

3. La relation pression-vitesse pour une particule conservant son enthalpie totale et son entropie.

En négligeant les échanges de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction entre une particule et son voisinage, il vient par (2.40)

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

l'entropie de la particule est conservée. Dès lors, par (2.64) et (2.36)

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (3.16)$$

Supposons encore le champ des pressions permanent ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$) et nous aurons en vertu de (2.79)

$$\frac{DH}{Dt} = 0$$

c'est-à-dire conservation de l'enthalpie totale de cette particule :

$$H = I + \frac{v^2}{2} + \Omega = \text{constante particulaire}$$

Examinons le cas où les forces dérivant du potentiel Ω sont négligeables ou absentes

$$I + \frac{v^2}{2} = I_0 = \frac{1}{2} v_1^2 \quad (3.17)$$

La valeur I de la constante est l'enthalpie d'arrêt ($V = 0$) à laquelle correspond une pression d'arrêt p_0 . La constante est alors reliée aux conditions où l'enthalpie totale est sous forme uniquement thermodynamique. Quand elle est uniquement sous forme cinétique, la vitesse atteint une valeur limite V_1 pour laquelle la température de la particule est tombée (en principe) à zéro, ainsi dès lors que sa pression.

Le diagramme pression-vitesse qui s'étend de $(p_0, 0)$ à $(0, V_1)$ possède les caractéristiques qualitatives suivantes : par différentiation de (3.17) et eu égard à (3.16)

$$V \frac{DV}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (3.18)$$

ce qui donne pour pente de diagramme

$$\frac{Dp}{DV} = -\rho V \quad (3.19)$$

Cette pente est toujours négative et vaut en module la quantité de mouvement par unité de volume; elle s'annule aux extrémités du diagramme car la masse volumique tend vers zéro avec la pression.

De plus la quantité de mouvement passe par un maximum et donc la pente par un minimum. Ce point d'inflexion du diagramme s'obtient en calculant

$$\frac{D^2p}{DV^2} = -\rho - V \frac{D\rho}{DV} = -\rho - V \frac{D\rho}{Dp} \frac{Dp}{DV}$$

Mais, l'entropie étant constante

$$\frac{D\rho}{Dp} = \frac{1}{a^2}$$

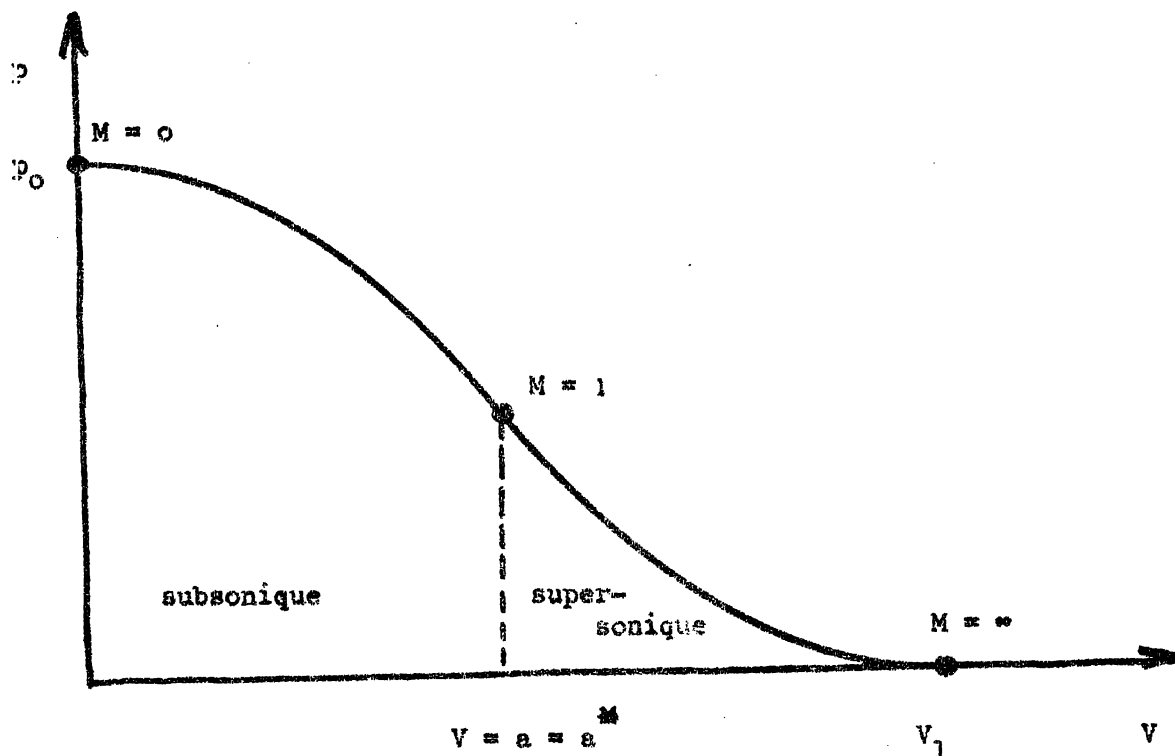
et, utilisant encore (3.19)

$$\frac{D^2p}{DV^2} = -\rho \left(1 - \frac{V^2}{a^2} \right) \quad (3.20)$$

Ce résultat fait apparaître le nombre de Mach local

$$M = \frac{V}{a} \quad (3.21)$$

rapport de la vitesse locale de l'écoulement à la célérité locale du son. Comme par suite de la conservation de l'enthalpie totale, l'enthalpie thermodynamique et donc la température et la célérité du son décroissent quand la vitesse croît, la condition sonique locale $M = 1$ est atteinte entre la condition d'arrêt et la vitesse limite. Elle correspond au point d'inflexion du diagramme et le divise en une région subsonique $M < 1$ et une supersonique $M > 1$.



La valeur commune de V et de a dans les conditions soniques est notée a^* . Il est à noter que pour un fluide incompressible la célérité du son est infinie et que le diagramme pression-vitesse résultant de

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} = \frac{1}{2} V_1^2$$

a une forme simplement parabolique.

4. Gaz caloriquement parfaits.

Les chaleurs spécifiques $c_v(T)$ et $c_p(T)$, d'ailleurs liées par (3.8), peuvent être obtenues par des calculs de mécanique statistique. Pour le modèle moléculaire le plus simple d'un gaz monoatomique : la sphère élastique, ce calcul donne

$$c_p = \frac{5}{2} R \quad \text{et donc} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

Ces valeurs sont en bon accord avec l'expérience pour les gaz monoatomiques nobles (hélium, argon ...) dans un intervalle de température limité inférieurement par le voisinage de la liquéfaction et supérieurement par le voisinage de l'ionisation.

La sphère n'a que trois degrés de liberté de translation entre lesquels se produit l'équipartition de l'énergie. Plus généralement si le nombre de degrés de liberté est n l'équipartition de l'énergie demande

$$c_p = \frac{2+n}{2} R \quad \text{et donc} \quad \gamma = 1 + \frac{2}{n}$$

Pour le modèle du type "haltère" d'une molécule de gaz diatomique $n = 5$ (trois translations, deux rotations). L'intervalle d'accord avec l'expérience est ici réduit. D'une part aux basses températures les degrés de liberté de rotation peuvent être "gelés" sensiblement avant la liquéfaction (H_2 par exemple), d'autre part vers les hautes températures il y a tendance à équipartition de l'énergie avec les degrés de liberté supplémentaires dus aux vibrations de la molécule.

Les méthodes de la mécanique statistique quantique fournissent alors pour les gaz diatomiques l'expression plus précise

$$c_p = R \left(\frac{7}{2} + \left(\frac{\theta_v/2T}{\sinh(\theta_v/2T)} \right)^2 \right)$$

où θ_v est une température caractéristique pour les effets vibratoires.

Dans ce qui suit nous ferons l'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait, c'est-à-dire dont les chaleurs spécifiques peuvent être considérées comme constantes. Ceci sera donc plus ou moins correct pour un intervalle approprié de température

Pour un gaz caloriquement parfait on peut écrire

$$U = c_v T \quad (3.18)$$

$$I = c_p T \quad (3.19)$$

et, par intégration de (3.13)

$$\frac{S - S_0}{c_v} = \ln \frac{p}{p_0} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.20)$$

Il en résulte dans le cas d'une évolution isentropique d'une particule les relations utiles

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.21)$$

qu'il est encore intéressant de considérer sous la forme différentielle

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a} \quad (3.22)$$

5. Ecoulement isentropique permanent d'un gaz caloriquement parfait.

L'écoulement est isentropique si

$$\text{grad } S = 0 \quad \text{et} \quad \frac{DS}{Dt} = 0$$

Ceci est réalisé si à un instant donné toutes les particules ont la même entropie et la conservent ensuite par suppression des effets de viscosité et de conduction. Dans ces conditions on a vu que pour le mouvement permanent

$$\text{rot } \vec{V} \times \vec{V} = - \text{grad } H$$

et que par conséquent le long d'une ligne de courant (ici aussi une trajectoire)

$$H = \text{constante}$$

Prenons encore $\Omega = 0$ et développons cette relation du type Bernoulli en tenant compte de (3.19). En vertu de l'équation d'état (3.1) et de la valeur (3.14) de la célérité du son elle prendra l'une ou l'autre des formes suivantes

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_1^2 \quad (3.23)$$

On en déduit en particulier

$$a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} (V_1^2 - v^2) \quad (3.24)$$

et pour la célérité dans les conditions d'arrêt

$$a_0^2 = \frac{\gamma - 1}{2} V_1^2 \quad (3.25)$$

Divisant (3.24) par (3.25) membre à membre

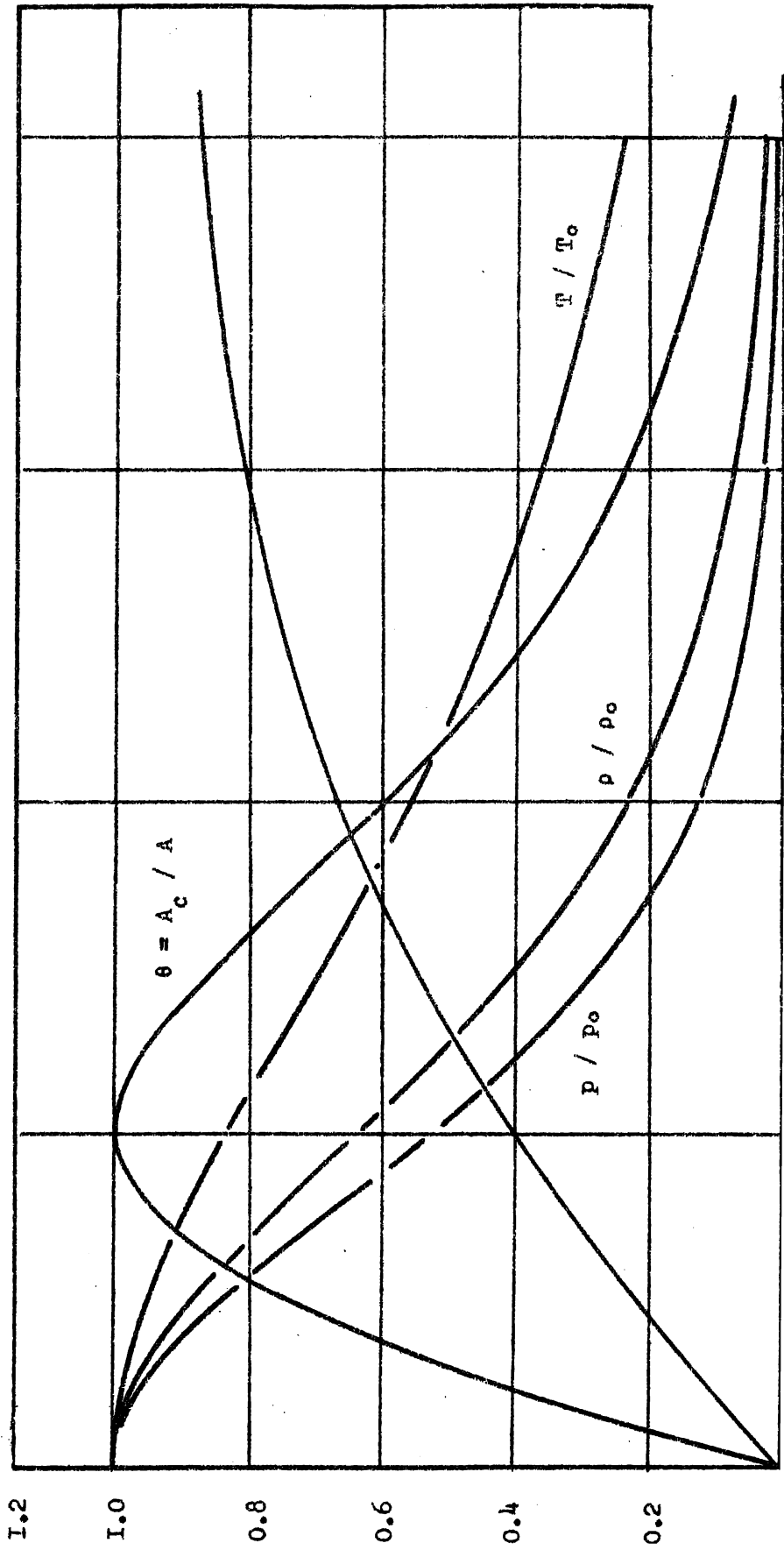
$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{v}{V_1}\right)^2 \quad (3.26)$$

C'est une forme non-dimensionnelle du diagramme donnant l'évolution de la célérité avec la vitesse de l'écoulement. Il suffit alors de prendre en considération les relations (3.21) pour obtenir l'évolution de toutes les grandeurs thermodynamiques avec la vitesse. On trouve en particulier la formule de "de Saint-Venant-Wantzel"

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \left(\frac{v}{V_1}\right)^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.27)$$

Ces évolutions sont illustrées sur la figure ()

Écoulement isentropique $\gamma = 1.4$



Dans la condition sonique, les relations entre les valeurs des variables thermodynamiques et les valeurs correspondantes à l'arrêt ($V = 0$) sont les suivantes :

faisant $V = a = a^*$ dans (3.24)

$$\frac{a^*}{V_1} = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

ensuite par (3.26)

$$\frac{a^*}{a_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Dès lors par les relations (3.21)

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.30)$$

Au lieu de mesurer la vitesse de l'écoulement par la variable non-dimensionnelle V/V_1 , on utilise habituellement le nombre de Mach $M = V/a$. La relation entre les deux découle de (3.24) en divisant cette équation par V^2 :

$$\left(\frac{V}{V_1} \right)^2 = \frac{(\gamma - 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (3.31)$$

La relation de de Saint-Venant-Wantzel s'écrit alors

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.32)$$

Prenons par exemple le cas d'un écoulement uniforme de vitesse V_∞ , pression p_∞ , masse volumique ρ_∞ où la célérité du son est donnée par

$$a_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (3.33)$$

Ce courant est perturbé par la présence d'un obstacle et on désire connaître la valeur de la masse volumique ρ_0 correspondant à l'arrêt d'une particule fluide par l'obstacle.

Des relations (3.32) et (3.21)

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Prenant pour ρ et M les valeurs ρ_∞ et $M_\infty = V_\infty / a_\infty$ pertinentes aux conditions non perturbées à l'infini amont :

$$\frac{\rho_0}{\rho_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.34)$$

Si l'obstacle est un avion, V_{∞} est sa vitesse de vol par rapport au fluide considéré comme immobile à l'infini.

Le rapport M_{∞} de cette vitesse à la célérité du son dans le fluide au repos est le "nombre de Mach de vol". Pour des nombres de Mach de vol pas trop élevés et en tous cas suffisamment subsoniques pour qu'il ne se produise pas d'ondes de choc autour de l'obstacle, l'expression (3.34) est représentée avec assez d'exactitude par les premiers termes de son développement binomial

$$\frac{\rho_0}{\rho_{\infty}} = 1 + \frac{1}{2} M_{\infty}^2$$

Pour $M_{\infty} = 0.4$ par exemple, $\rho_0 = 1.08 \rho_{\infty}$.

La célérité du son étant approximativement 330 m/sec à 3000 mètres d'altitude dans l'atmosphère, ces conditions représentent déjà une vitesse de vol de 132 m/sec ou 475 km/heure. La faible variation de masse volumique, même dans les conditions d'arrêt, justifie le développement de l'aérodynamique subsonique classique dans le cadre de la théorie des fluides incompressibles. La mesure de la pression d'arrêt est un moyen classique d'évaluer la vitesse de vol. Une application de la formule (3.32) donne immédiatement

$$\frac{p_0}{p_{\infty}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

soit, en développant le binôme :

$$\frac{p_0}{p_{\infty}} = 1 + \frac{\gamma}{2} M_{\infty}^2 + \frac{\gamma}{8} M_{\infty}^4 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{48} M_{\infty}^6 \dots \quad (3.35)$$

Pour un fluide incompressible l'application de l'équation de Bernoulli fournirait simplement

$$\frac{V_{\infty}^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = \frac{p_0}{\rho_{\infty}}$$

c'est-à-dire une pression dynamique

$$p_0 - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2$$

Conservant cette grandeur comme unité de mesure, il est usuel de former un coefficient de pression non-dimensionnel

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \quad (3.36)$$

Eu égard à (3.33) cette définition est aussi

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \frac{2p_{\infty}}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \quad (3.37)$$

Pour un fluide incompressible le coefficient de pression dans les conditions d'arrêt est par définition égal à l'unité. Pour un fluide compressible il vaut suivant (3.35) et (3.37)

$$\left(\frac{C_p}{p}\right)_0 = 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + \frac{2 - \gamma}{24} M_\infty^4 \dots \quad (3.38)$$

6. Variations de la section droite d'un tube de courant.

Prenons un tube de courant de dimensions suffisamment réduites pour que la vitesse et les variables thermodynamiques puissent être considérées comme constantes pour les points d'une même section droite A.

Le mouvement étant permanent la conservation de la masse s'exprime par la constance du débit massique

$$\rho V A = m \text{ (constante)} \quad (3.39)$$

Il en résulte que la section droite A passe alors par une valeur minimum (un col) A_c . Ceci est confirmé par une relation due à Hugoniot, dont la démonstration est similaire. Par différentiation logarithmique de (3.39)

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.40)$$

Le premier terme est transformé comme suit

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} dp = \frac{dp}{\rho a^2}$$

Mais par différentiation de l'équation de Bernoulli

$$VdV + dI = VdV + \frac{dp}{\rho} = 0$$

d'où

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{VdV}{a^2}$$

Ce résultat, substitué dans (3.40) livre la relation d'Hugoniot

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} \left(\frac{V^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \quad (3.41)$$

Par conséquent en régime subsonique $M < 1$, toute augmentation de vitesse de l'écoulement résulte en une diminution de la section droite; en régime supersonique à une augmentation de cette section. Le minimum de la section a lieu pour $M = 1$.

Pour un gaz caloriquement parfait, nous pouvons établir une relation quantitative plus précise.

Calculons le rapport

$$\frac{\rho V}{\rho a} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{V}{V_1} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{V_1}{a}$$

Au second membre, les deux derniers rapports sont connus par (3.28) et (3.30), les deux premiers ont été calculés déjà en fonction du nombre de Mach. Il vient après simplification

$$\frac{\rho V}{\rho a} = M \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M^2 \right)^{-\frac{\phi + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (3.42)$$

La constante du débit massique, évaluée dans les conditions soniques, vaut

$$m = \rho a A_c$$

Par conséquent la conservation du débit massique peut s'écrire

$$\frac{A_c}{A} = \frac{\rho V}{\rho a} \quad (3.43)$$

ce qui, associé à (3.42), fournit une relation explicite entre section droite du tube de courant et nombre de Mach.

7. L'onde de choc normale stationnaire.

Considérons un écoulement unidimensionnel permanent $u = u(x)$, $v = 0$, $w = 0$, où toutes les grandeurs thermodynamiques ne dépendent que de x .

Le seul élément du tenseur des vitesses de déformation qui ne soit pas nul a priori est

$$\theta_{xx} = \frac{du}{dx}$$

auquel sont associées des tensions de viscosité

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad (3.44)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

L'équation (2.14) de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (3.45)$$

Nous supposons qu'il n'y a pas de forces massiques ($\rho = 0$) et les équations (2.21) de conservation de la quantité de mouvement se réduisent à

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\sigma_{xx} - p) \quad (3.46)$$

Pour l'équation de conservation de l'énergie, utilisons par exemple (2.32) et (2.33) avec la loi de Fourier (2.43)

$$\rho u \frac{d}{dx} \left(U + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} (u (\sigma_{xx} - p)) + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \quad (3.47)$$

Chacune de ces équations de conservation est intégrable.

Rapportons les constantes d'intégration à une section en amont où l'écoulement est supposé uniforme $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{dT}{dx} = 0$ et caractérisée par l'indice 1.

Par (3.45)

$$\rho u = \rho_1 u_1 \quad (3.48)$$

Par (3.46)

$$p + \rho u^2 - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.49)$$

C'est aussi la conclusion à laquelle aboutirait une application de la forme intégrale (2.22) à un tube de courant limité aux sections transversales x_1 et x . Enfin par (3.47)

$$\rho u \left(U + \frac{u^2}{2} \right) + pu - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} - k \frac{dT}{dx} = \rho_1 u_1 \left(U_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right)$$

soit encore, moyennant introduction de l'enthalpie spécifique totale

$$H = U + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} .$$

$$\rho u H - \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} - k \frac{dT}{dx} = \rho_1 u_1 H_1 \quad (3.50)$$

C'est aussi la conclusion que fournirait la forme intégrale (2.51) appliquée au tube de courant.

Posons-nous la question de savoir si l'écoulement peut redevenir uniforme en aval. Dès lors faisant de nouveau $\frac{du}{dx} = 0$ et $\frac{dT}{dx} = 0$ dans une section d'indice 2 en aval, nous aurons à vérifier les lois de conservation

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (3.51)$$

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.52)$$

$$H_2 = H_1 \quad (3.53)$$

Cette dernière, qui exprime la conservation de l'enthalpie totale du fluide, est une simplification par (3.51) de ce que donne (3.50); utilisant une des formes (3.23) de l'enthalpie totale d'un gaz caloriquement parfait nous l'écrivons

$$\frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} \quad (3.54)$$

Supposant les conditions (u_1, p_1, ρ_1) données en amont, les équations (3.51), (3.52) et (3.54) fournissent les conditions (u_2, p_2, ρ_2) en aval. Divisons (3.52) par (3.51)

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} \quad (3.55)$$

et éliminons les rapports pression à masse volumique par (3.54)

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_1^2$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} u_2^2$$

il vient une relation entre les seules vitesses

$$u_2 - u_1 = (u_2 - u_1) \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{a^{*2}}{u_1 u_2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right) \quad (3.56)$$

La solution $u_2 = u_1$ est triviale; elle entraîne en définitive que les conditions en aval sont les mêmes qu'en amont; nous avons affaire à un simple écoulement uniforme. En dehors de cette solution (3.56) est aussi satisfaite par

$$\frac{u_1}{a^{*}} \cdot \frac{u_2}{a^{*}} = 1 \quad (3.57)$$

Par conséquent un écoulement supersonique en amont ($u_1 > a^{*}$) devient subsonique en aval ($u_2 < a^{*}$). Nous verrons que le cas réciproque d'un passage de subsonique à supersonique est à écarter comme violent le second principe de la thermodynamique.

L'utilisation des formules (3.28) et (3.31) permet de transformer (3.57) en une relation entre les nombres de Mach amont et aval

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)} \quad (3.58)$$

L'équation de conservation (3.51) fournit alors le rapport des masses volumiques

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \left(\frac{u_1}{a^{*}} \right)^2 = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (3.59)$$

Pour avoir le rapport des pressions, multiplions (3.55) par $(u_1 + u_2)$

$$u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

et éliminons le premier membre par (3.54); il vient

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-1} \quad (3.60)$$

$$= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (3.61)$$

La relation (3.60) est due à Rankine et a été redécouverte par Hugoniot. Elle diffère de la relation d'évolution isentropique telle que découlant de (3.21)

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma \quad (3.62)$$

et il y a une modification de l'entropie d'amont en aval qui ne peut être qu'un accroissement correspondant à une dégradation de l'énergie. Si u_2 diffère peu de u_1 et donc ρ_2 de ρ_1 , posons $\rho_2/\rho_1 = 1 + \epsilon$ où ϵ est petit. La relation de Rankine-Hugoniot devient

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \left(1 + \epsilon \frac{\gamma+1}{2} \right) \left(1 - \epsilon \frac{\gamma-1}{2} \right)^{-1} \\ &= 1 + \gamma \epsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \epsilon^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)^2}{4} \epsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

tandis que la relation isentropique donne

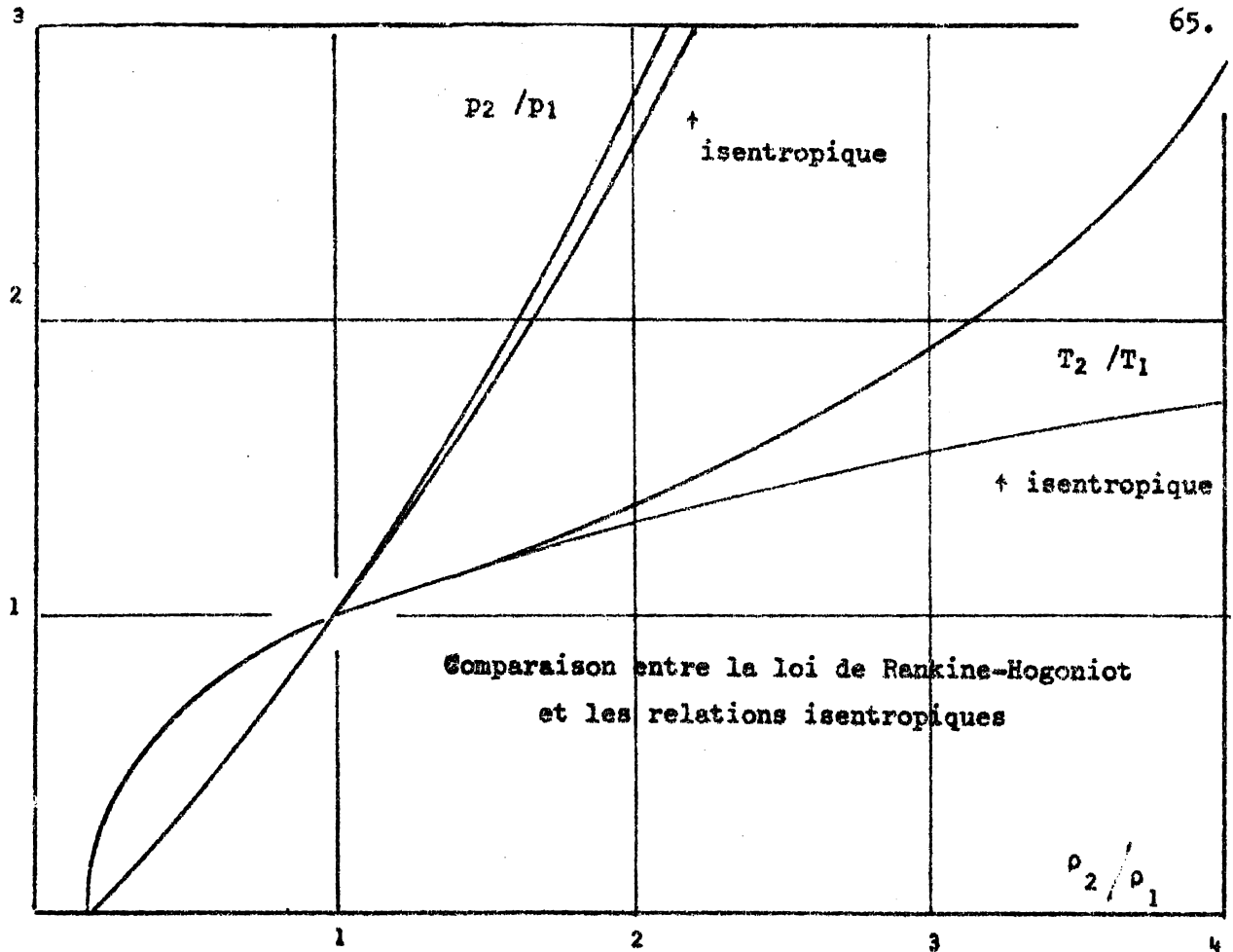
$$\frac{p_2}{p_1} = (1 + \epsilon)^\gamma = 1 + \gamma \epsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \epsilon^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{6} \epsilon^3 + \dots$$

Les deux développements ne diffèrent qu'à partir du terme en ϵ^3 . Il y a donc au point (1, 1) un contact du second ordre entre les courbes exprimant les relations (3.60) et (3.62).

Le rapport des températures découle immédiatement de l'équation d'état du gaz et des résultats précédents

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Les équations de conservation (3.51), (3.52) et (3.53) s'appliquent directement à un fluide non visqueux et non conducteur. Dans ce cas la solution qui vient d'être développée apparaît comme une véritable discontinuité mathématique entre deux écoulements permanents et uniformes : c'est l'onde de choc normale et stationnaire. L'épaisseur réelle de l'onde de choc est effectivement très faible et le siège de gradients de température et de vitesse élevés qui ne permettent pas de négliger les effets de viscosité et de conduction. Ceux-ci sont d'ailleurs indispensables pour expliquer la dégradation de l'énergie associée à l'accroissement d'entropie.



8. Accroissement de l'entropie et diminution de la pression d'arrêt au passage à travers l'onde de choc.

Le calcul du changement d'entropie peut se faire par application de la relation (3.20)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{P_2}{P_1} - \gamma \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Substituant (3.59) et (3.6I) on l'obtient en fonction du nombre de Mach amont

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \left(\frac{2}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) - \gamma \ln \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (3.63)$$

La dérivée de cette expression par rapport à M_1^2 vaut, après réduction

$$\frac{2 \gamma (\gamma - 1) (M_1^2 - 1)^2}{M_1^2 \{2 + (\gamma - 1) M_1^2\} (2 \gamma M_1^2 - \gamma + 1)}$$

Elle possède un zéro double pour $M_1 = 1$, ce qui est conforme au caractère osculateur entre le diagramme de Rankine-Hugoniot et le diagramme isentropique. Elle est positive quand on descend de $M_1 = 1$ jusqu'à $M_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}$ où il est clair

que $S_2 - S_1$ tend vers l'infini négatif. Elle est positive aussi quand on remonte de $M_1 = 1$ à l'infini. Par conséquent la condition $S_2 - S_1 \geq 0$ posée par le second principe est satisfaite par $M_1 \geq 1$; l'onde de choc normale est nécessairement une onde de compression transformant un écoulement supersonique en écoulement subsonique.

Pour les chocs faibles, correspondant à un écoulement faiblement supersonique en amont, on peut poser $M_1^2 = 1 + m$

et le développement de (3.63)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{3(\gamma + 1)} m^3 + \dots \quad (3.64)$$

débutte comme il fallait s'y attendre par le terme du troisième degré en m . Pour les chocs faibles la variation d'entropie est négligeable.

Une mesure de la dégradation d'énergie est fournie par la diminution de la pression d'arrêt.

Imaginons l'écoulement amont ralenti isentropiquement jusqu'à vitesse nulle. L'état du fluide est caractérisé par S_1 et les valeurs d'arrêt $(p_0)_1$, $(\rho_0)_1$, $(T_0)_1$; l'enthalpie totale passe entièrement sous la forme thermodynamique $c_p(T_0)_1$.

De même en aval un ralentissement isentropique donne un état S_2 , $(p_0)_2$, $(\rho_0)_2$, $(T_0)_2$ avec une enthalpie totale $c_p(T_0)_2$.

Comme l'enthalpie totale est conservée par le choc, il en est de même des températures d'arrêt :

$$(T_0)_1 = (T_0)_2 = T_0 \quad (3.65)$$

Appliquant aux deux états d'arrêt l'équation d'état du gaz

$$\frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} = \frac{R(\rho_0)_2(T_0)_2}{R(\rho_0)_1(T_0)_1} = \frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1}$$

puis l'équation (3.20)

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} - \gamma \ln \frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1} = (1 - \gamma) \ln \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1}$$

et notant que $c_v(\gamma - 1) = R$, il vient finalement grâce à (3.63)

$$\frac{(\rho_0)_2}{(\rho_0)_1} = \frac{(p_0)_2}{(p_0)_1} = e^{-\frac{S_2 - S_1}{R}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \\
&= 1 - \frac{2\gamma}{3(\gamma + 1)} M_1^3 + \dots \quad (3.66)
\end{aligned}$$

Les changements d'entropie et de pression d'arrêt sont illustrés à la figure ().

A titre d'application considérons la pression $(p_o)_2$ qui serait mesurée par un tube de Pitot dans un écoulement supersonique uniforme de caractéristiques

$$p_\infty, \rho_\infty, M_\infty = U/a_\infty.$$

L'écoulement est d'abord ralenti par une onde de choc normale qui se forme devant le nez du tube; il est ensuite ralenti isentropiquement jusqu'à l'arrêt complet. La relation entre les pressions d'arrêt de part et d'autre de l'onde de choc est une application de la formule (3.66) dans laquelle il suffit de remplacer

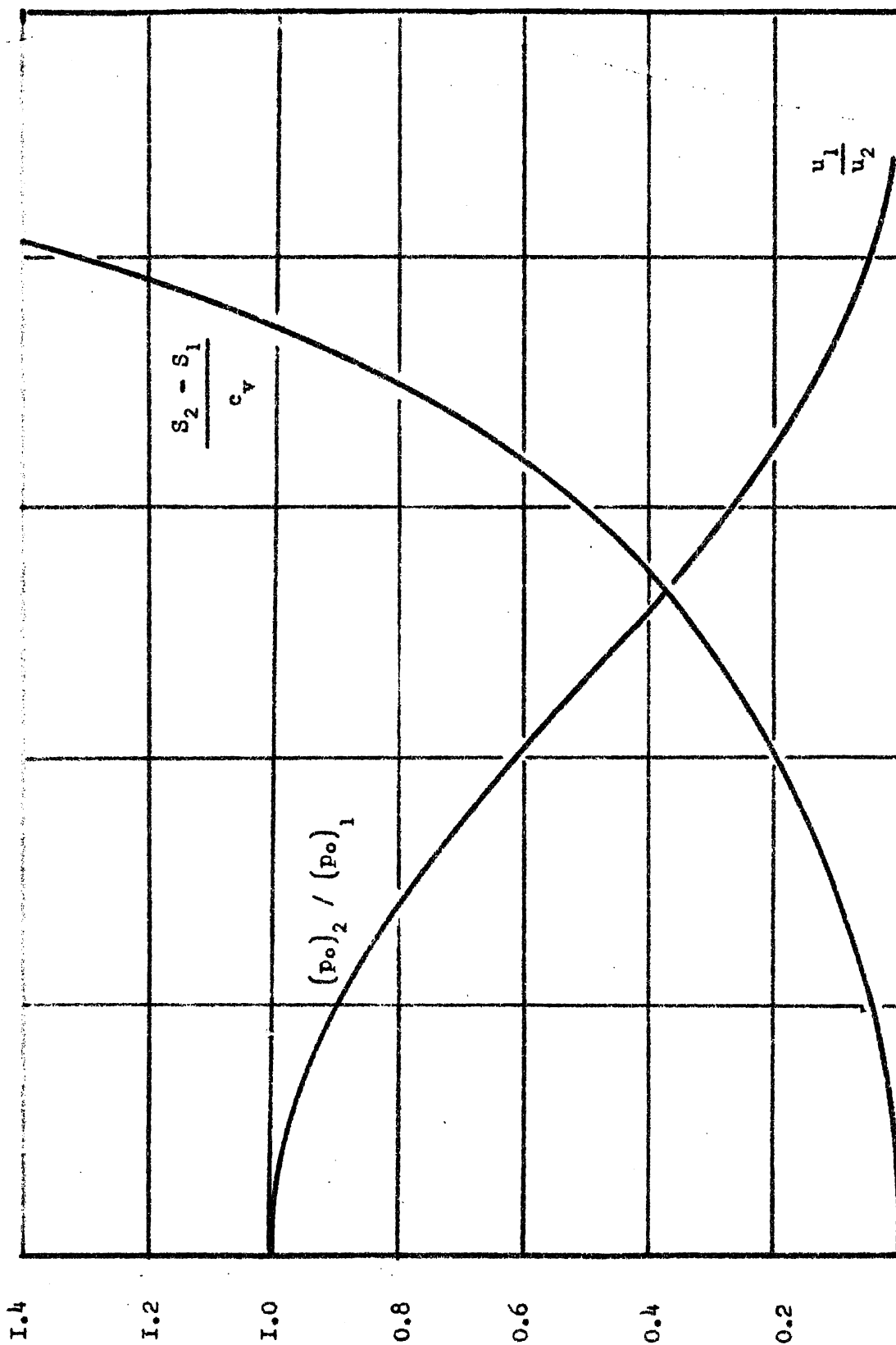
$$(p_o)_1 \text{ par } (p_o)_\infty \text{ et } M_1 \text{ par } M_\infty.$$

Ensuite la relation isentropique entre p_∞ et $(p_o)_\infty$ est une application de la formule (3.32)

$$\frac{(p_o)_\infty}{p_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Multipliant les deux formules membre à membre, on trouve la formule de Rayleigh :

$$\frac{(p_o)_2}{p_\infty} = \left(\frac{\gamma + 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[\frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right]^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (3.67)$$



Accroissement d'entropie
 Rapport des pressions d'arrêt
 au passage à travers une onde de choc normale

$\gamma = 1.4$

9. Vitesse de propagation normale d'un front d'onde.

Au régime d'écoulement avec onde de choc normale superposons une vitesse de translation uniforme u_1 de façon à rendre le fluide immobile en amont. L'onde choc avance vers la région amont avec la célérité a_1 , laissant derrière elle une vitesse résiduelle $u_1 - u_2$. Cette vitesse résiduelle, comparée à la célérité du son a_1 dans le fluide au repos, peut être calculée comme suit. De (3.57) et (3.54)

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= a_1^2 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} \gamma \frac{p_1}{\rho_1} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} a_1^2 \end{aligned}$$

Relation qui peut s'écrire

$$\frac{u_1 - u_2}{u_1} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{a_1^2}{u_1^2} \right) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (3.68)$$

Par la relation (3.61) on relie directement la vitesse de propagation à la mesure de la différence relative de pression qui propulse l'onde

$$M_1^2 = 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2 - p_1}{p_1} \quad (3.69)$$

Quand l'onde est faible $(p_2 - p_1)/p_1 \ll 1$, la vitesse de propagation tend vers a_1 et simultanément la perturbation de vitesse $u_1 - u_2$ tend vers zéro. Ces faits justifient a posteriori l'appellation de célérité du son accordée à la grandeur a définie par (3.II). C'est la limite inférieure de la vitesse avec laquelle les perturbations de pression se propagent relativement au milieu fluide.

10. Structure de Navier Stokes de l'onde de choc.

Pour une étude de la structure même de l'onde de choc il y a lieu d'utiliser les équations de conservation (3.48) et (3.50) comportant les effets de viscosité et de conductibilité thermique. Nous les réécrivons comme suit :

$$\rho u = m \quad (3.70)$$

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = p - p_1 + m \cdot (u - u_1) \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) u \frac{du}{dx} + \frac{k}{m} \frac{dT}{dx} = H - H_1$$

Introduisons le nombre de Prandtl longitudinal

$$Pr = \frac{c_p}{k} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)$$

qui permet encore de mettre la relation de conservation de l'énergie sous la forme

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \left(u \frac{du}{dx} + \frac{1}{Pr} c_p \frac{dT}{dx} \right) = H - H_1 \quad (3.72)$$

Pour un gaz caloriquement parfait c_p est indépendant de la température et vaut

$$c_p = \frac{2 + n}{2} R \quad \text{et} \quad c_v = c_p - R = \frac{n}{2} R$$

n étant le nombre de degrés de liberté de la molécule entre lesquels s'établit l'équipartition d'énergie. Si pour la conductibilité nous utilisons l'approximation d'Eucken

$$k = \left(c_v + \frac{9}{4} R \right) \mu = R \left(\frac{n}{2} + \frac{9}{4} \right) \mu$$

et pour λ l'approximation zéro, le nombre de Prandtl longitudinal a pour valeur

$$Pr = \frac{8(2+n)}{3(9+2n)}$$

Pour un gaz monoatomique ($n = 3$) on trouve $8/9$, pour un gaz diatomique dont le degrés de liberté de vibration sont excités ($n = 7$) $72/69$, non excités ($n = 5$) $56/57$. On voit donc que $Pr = 1$ est une bonne approximation. Cette approximation est très heureuse car elle transforme finalement (3.72) en

$$\frac{1}{m} \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{dH}{dx} = H - H_1$$

Une intégrale particulière de cette équation est visiblement

$$H = H_1 \quad (3.73)$$

C'est précisément celle qui, eu égard à (3.53), convient aux conditions aux limites en amont et en aval.

Ainsi, même à travers l'onde de choc, il y a conservation de l'enthalpie totale. Il reste à intégrer le profil des vitesses à travers l'onde.

Transformons pour cela le second membre de (3.71).

Mettons le résultat (3.73) sous la forme

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^2$$

et résolvons pour la pression en remplaçant $\rho = m/u$:

$$p = m \left(\frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{a^2}{u} - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} u \right)$$

Avec la formule similaire pour p_1 le second membre de (3.71) devient toutes réductions faites

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} (u_1 - u) \left(\frac{a^2}{uu_1} - 1 \right)$$

ou encore, compte tenu de la relation des vitesses (3.57) de part et d'autre de l'onde

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - u)(u_2 - u)}{u}$$

Au premier membre de (3.71) il faut encore tenir compte du fait que la viscosité augmente théoriquement proportionnellement à la racine carrée de la température absolue. Nous pouvons écrire

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Par suite de la conservation de l'enthalpie totale ceci est encore

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{v_1^2 - u^2}{v_1^2 - u_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

En définitive, introduisant la vitesse non-dimensionnelle

$$\omega = u/v_1$$

et la longueur caractéristique

$$e_1 = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \frac{1}{\rho_1 a_1} \quad (3.74)$$

qui ne dépend que des conditions en amont, il faut effectuer la quadrature

$$dx = \frac{e_1}{M_1} \left(\frac{1 - \omega^2}{1 - \omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega d\omega}{(\omega_2 - \omega)(\omega_1 - \omega)} \quad (3.75)$$

L'intégrale a été trouvée par L.H. Thomas

$$M_1 \frac{x}{e_1} = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \ln \frac{\omega_1 - \omega}{1 - \omega\omega_1 + \{(1 - \omega_1^2)(1 - \omega^2)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \left(\frac{1 - \omega_2^2}{1 - \omega_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\omega - \omega_2}{1 - \omega\omega_2 + \{(1 - \omega_2^2)(1 - \omega^2)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \left(\frac{1 - w^2}{1 - w_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{w_1 + w_2}{(1 - w_1^2)^{\frac{1}{2}}} \sin^{-1} w \quad (3.76)$$

Le profil des vitesses se raccorde asymptotiquement aux valeurs u_1 et u_2 des écoulements uniformes.

L'épaisseur effective de l'onde de choc pourrait être définie comme la distance sur laquelle les valeurs de u_1 et de u_2 sont réalisées à 99 %.

Ce calcul peut être fait à partir de l'expression (3.76). Pour trouver une formule plus maniable nous allons intégrer de façon approchée l'équation différentielle

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} = m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - u)(u_2 - u)}{u} \quad (3.77)$$

Observons que le membre de droite prend une valeur minimum pour $u^2 = u_1 u_2 = a^{*2}$, c'est-à-dire dans la section où l'écoulement est exactement sonique.

Dans les mêmes conditions

$$\frac{\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)}{\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^*}{a_1} = \frac{a^*}{V_1} \frac{V_1}{u_1} \frac{u_1}{a_1}$$

que les formules (3.28) et (3.31) mettent finalement sous la forme

$$\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right)_1 \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Intégrons alors (3.77) de u_1 à u_2 comme si le coefficient de du/dx conservait cette valeur et le membre de droite son minimum

$$m \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \frac{(u_1 - a^*)(u_2 - a^*)}{a^*}$$

Compte tenu de la relation (3.57) le résultat final pour l'épaisseur est

$$e = e_1 \frac{2 \gamma}{\gamma + 1} \frac{z(1 + z)}{1 - z} \quad \text{avec} \quad z = \frac{1}{M_1} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La longueur caractéristique e_1 est évidemment en relation simple avec le libre parcours moyen dans les conditions amont. En fait ce libre parcours moyen L_1 peut être estimé par la théorie cinétique des gaz à la valeur

$$L_1 = \frac{m}{\pi \rho_1 r_0^2}$$

où m est la masse d'une molécule et r_0 son rayon effectif. Chassant le rapport m/r_0^2 avec la valeur théorique

$$\mu = \frac{5m}{16r_0^2} \left(\frac{RT}{\pi} \right)^{1/2}$$

il vient

$$L_1 = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \frac{\mu_1}{\rho_1 (RT_1)}^{1/2} = \frac{16}{5} \left(\frac{\gamma}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\mu_1}{\rho_1 a_1} \quad (3.78)$$

de sorte que, avec l'approximation correspondante $\lambda = 0$, on trouve

$$e_1 = \frac{5}{12} \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{1/2} L_1$$

Comme l'épaisseur approximative a été calculée sur la base de la variation de la vitesse de l'écoulement dans les conditions soniques, il est également plus logique de la comparer avec le libre parcours moyen calculé dans les mêmes conditions. Puisqu'il a été admis que μ varie tout comme a proportionnellement à la racine carrée de la température, on aura selon (2.78) et selon la constance du débit massique

$$\frac{L_1}{L^{**}} = \frac{\rho^{**}}{\rho_1} = \frac{u_1}{a^{**}} = M_1$$

Par conséquent

$$\frac{e}{L^{**}} = \frac{e}{e_1} \frac{e_1}{L_1} \frac{L_1}{L^{**}} = \frac{e}{e_1} \frac{5}{12} \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{1/2} M_1$$

Les valeurs de z , e/e_1 et e/L^{**} ont été tabulées ci-dessous en fonction de M_1 pour $\gamma = 1,4$

M_1	z	e/e_1	e/L^{**}
1,05	0,960481	55,59	36,43
1,1	0,924862	27,64	18,98
1,3	0,812257	9,15	7,42
1,5	0,732828	5,55	5,19
2,0	0,612372	2,97	3,71
3,0	0,509175	1,83	3,42
4,0	0,467707	1,50	3,76
5,0	0,447213	1,37	4,26
"	1/16	1,13	"

On voit que, spécialement entre les nombres de Mach 1,5 et 5, le nombre de libre parcours moyen paraît trop faible pour justifier une structure exacte de l'onde de choc sur la base d'un équilibre thermodynamique local.

II. L'onde de choc oblique stationnaire.

Prenons l'axe ox perpendiculaire à l'onde de choc, l'écoulement permanent possède deux composantes de vitesse $u(x)$ et $v(x)$ qui, en amont, ont les valeurs constantes u_1 et v_1 . Les seules composantes non identiquement nulles du tenseur des vitesses de déformation sont

$$\theta_{xx} = \frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \theta_{xy} = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx}$$

auxquelles correspondent les tensions de viscosité

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \frac{du}{dx} \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{dv}{dx} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

La conservation de la masse reste exprimée par

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0$$

la conservation de la quantité de mouvement (eqs. 2.21) par

$$\rho u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} (\sigma_{xx} - p)$$

$$\rho u \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \sigma_{xy}$$

la conservation de l'énergie (eqs. 2.30, 2.31, et 2.43) par

$$u \frac{d}{dx} \left(U + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} \left(u (\sigma_{xx} - p) + v \sigma_{xy} \right) + \frac{d}{dx} k \frac{dT}{dx}$$

Les intégrales de ces équations sont exprimées en fonction des conditions uniformes en amont par

$$\rho u = \rho_1 u_1$$

$$p + \rho u^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 + \sigma_{xx}$$

$$\rho uv = \rho_1 u_1 v_1 + \sigma_{xy}$$

$$\rho u \left(U + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho_1 u_1 \left(U_1 + \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) + u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy}$$

$$+ k \frac{dT}{dx}$$

Nous discuterons seulement les relations entre les valeurs des variables en amont et les mêmes variables en aval de l'onde (indice 2) où les conditions sont redevenues uniformes ($\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$ et $dT/dx = 0$). Ces relations s'écrivent

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1 \quad (3.79)$$

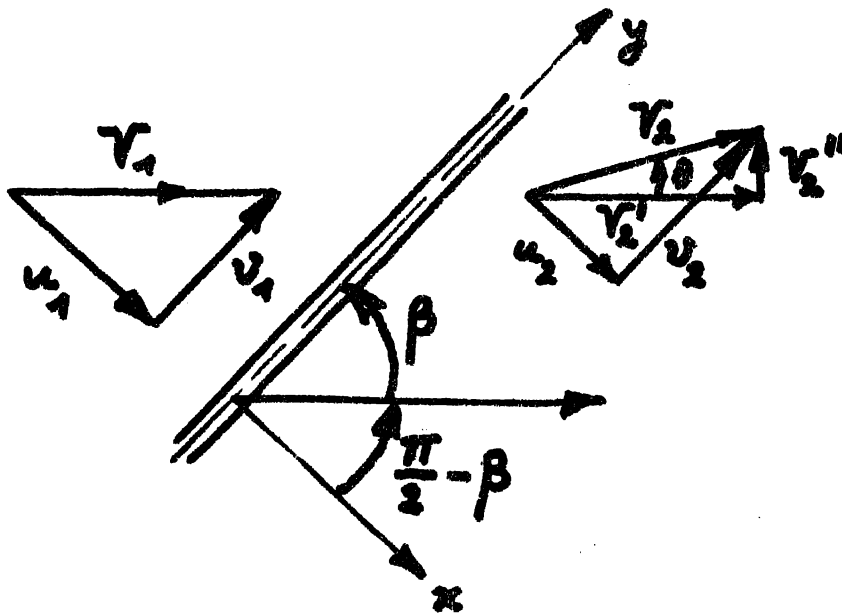
$$P_2 + \rho_2 u_2^2 = P_1 + \rho_1 u_1^2 \quad (3.80)$$

ensuite, utilisant déjà le résultat (3.79)

$$v_2 = v_1 = v \quad (3.81)$$

enfin, observant que $f = U + \frac{P}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho}$ et utilisant aussi (3.79),

$$\frac{u_2^2 + v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \quad (3.82)$$



$$\frac{v}{u_2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \theta\right) = \frac{\cos(\theta - \beta)}{\sin(\theta - \beta)}$$

Les relations (3.79) et (3.80) sont les mêmes que celles (3.51) et (3.52) de l'onde de choc normale. Le résultat simple (3.81), provenant de la conservation de la quantité de mouvement parallèlement à l'onde, permet de mettre la conservation de l'enthalpie totale (3.82) sous une forme qui rappelle celle (3.54) de l'onde normale :

$$\frac{u_2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{u_1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left(a^*{}^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^2 \right) \quad (3.83)$$

On voit donc que les lois gouvernant les composantes normales u_1 et u_2 sont les mêmes que celles de l'onde normale à condition de remplacer le carré de la vitesse critique par l'expression figurant entre parenthèses au second membre

de (3.83). La transposition de la relation de vitesse (3.57) en particulier fournit

$$u_1 u_2 = a^{\#2} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v^2 \quad (3.84)$$

Cette relation est commode pour calculer l'angle de déflexion du courant aval quand on connaît le nombre de Mach amont M_1 et l'angle β que fait l'onde de choc avec le courant en amont. En effet les relations géométriques

$$u_1 = V_1 \sin \beta \quad (3.85)$$

$$v = V_1 \cos \beta \quad (3.86)$$

transforment (3.84) en

$$u_2 = \frac{V_1}{\sin \beta} \left[\left(\frac{a^{\#}}{V_1} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cos^2 \beta \right]$$

On déduit également de l'expression suivante pour l'enthalpie totale

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{a_1^2}{\gamma - 1} = a^{\#2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right)$$

que

$$\left(\frac{a^{\#}}{V_1} \right)^2 = \frac{1}{\gamma + 1} \left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2} \right)$$

et par conséquent

$$u_2 = \frac{V_1}{\sin \beta} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \sin^2 \beta + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2} \right) \quad (3.87)$$

Une autre relation géométrique est

$$u_2 = v \tan(\beta - \theta) = V_1 \cos \beta \tan(\beta - \theta) \quad (3.88)$$

Egalant les deux valeurs de u_2 et résolvant pour $\tan \theta$

$$\tan \theta = 2 \cot \beta \frac{\sin^2 \beta - 1/M_1^2}{(\gamma + 1) \cos^2 \beta + (\gamma - 1) \sin^2 \beta + 2/M_1^2} \quad (3.89)$$

c'est la relation cherchée pour la déviation considérée comme fonction de M_1 et de β .

Pour sa discussion il est utile de l'associer à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} \\ &= 1 + \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

déduite de (3.87) et (3.85).

La déviation θ apparaît dans (3.89) comme une fonction impaire de β ; ceci exprime simplement la symétrie du phénomène par rapport à la direction du courant amont et permet de limiter la discussion aux angles β positifs.

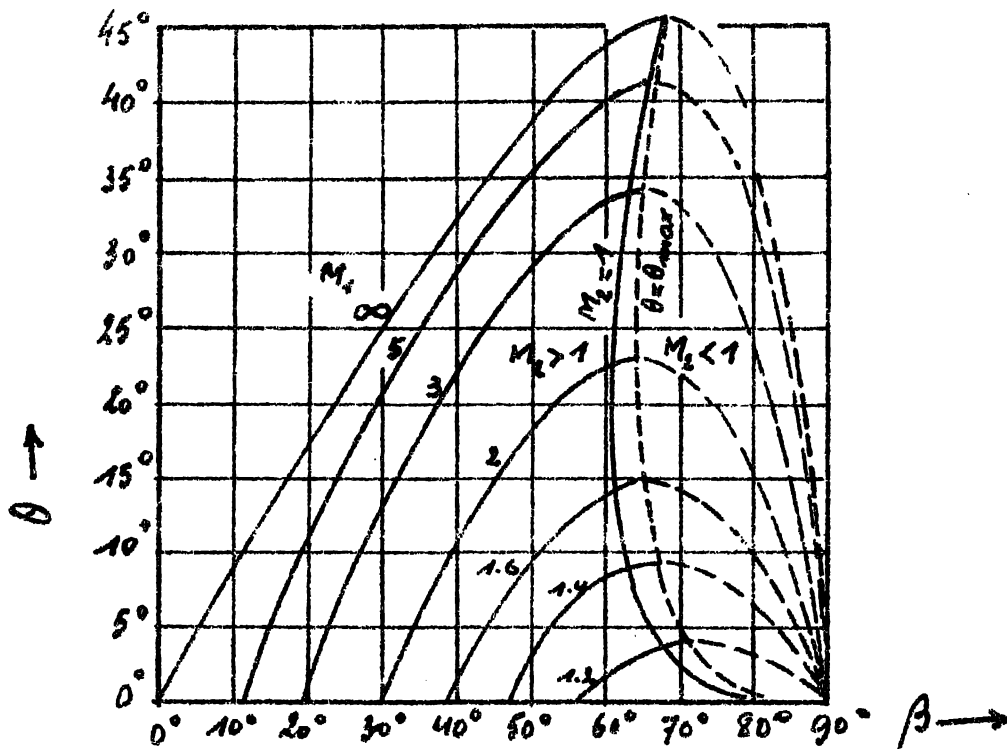
Pour $\sin \beta < 1/M_1$, la déviation est négative mais ces valeurs petites de β sont à rejeter car selon (3.90) elles entraînent $u_2 > u_1$ et, comme on l'a vu, il en résulterait une diminution de l'entropie du courant.

Pour $\sin \beta > 1/M_1$, la déviation devient positive croissante, passe par un maximum puis redevient nulle pour $\beta = \pi/2$, auquel cas on retrouve une onde de choc normale.

Le maximum a lieu pour un angle β solution de

$$\gamma \sin^2 \beta = \frac{\gamma + 1}{4} - \frac{1}{M_1^2} + (\gamma + 1)^{1/2} \left(\left(\frac{\gamma - 1}{4} + \frac{1}{M_1^2} \right)^2 + \frac{\gamma(3 - \gamma)}{16} \right)^{1/2}$$

La figure () montre pour $\gamma = 1,4$ les déviations que l'on peut obtenir en fonction du nombre de Mach en amont. On voit qu'une déviation inférieure au maximum peut être réalisée par deux ondes de choc d'inclinaisons différentes.



Pour les valeurs de $\sin \beta$ voisines de $1/M_1$, c'est-à-dire pour les chocs faibles donnant de faibles déviations une approximation satisfaisante consiste à remplacer au dénominateur de (3.89) $\sin^2 \beta$ par $1/M_1^2$ et conduit à la formule simplifiée

$$\theta = \frac{\sin 2\beta}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{1}{(M_1 \sin \beta)^2} \right) \quad (3.91)$$

Pour la suite il est également intéressant d'établir dans le cas des chocs faibles la correspondance entre la petite variation du module de la vitesse de l'écoulement et la petite déflexion.

Tout d'abord pour le rapport des carrés des modules, utilisant les relations géométriques

$$u_1 = v \tan \beta \quad u_2 = v \tan (\beta - \theta)$$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{u_1^2 + v^2}{u_2^2 + v^2} = \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 (\beta - \theta)} = \frac{\cos^2 (\beta - \theta)}{\cos^2 \beta}$$

soit encore le résultat rigoureux

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos (\beta - \theta)}{\cos \beta} \quad (3.92)$$

Si l'angle de déviation est faible

$$\cos (\beta - \Delta \theta) \approx \cos \beta + \Delta \theta \sin \beta$$

et pour le choc faible

$$V_2 = V_1 + \Delta V$$

Ces approximations substituées dans (3.92) donnent

$$\frac{\Delta V}{V_2} = - \Delta \theta \tan \beta$$

Au même ordre d'approximation on peut encore substituer au premier membre V_1 à V_2 et au second membre considérer que l'angle β est défini par $M_1 \sin \beta = 1$ il vient finalement

$$\frac{\Delta V}{V_1} = - \frac{\Delta \theta}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad (3.93)$$

Le rapport des masses volumiques à travers une onde de choc oblique est gouverné par l'équation de conservation de la masse (3.79). Une comparaison entre (3.59) et (3.90) montre immédiatement que la formule (3.59) de l'onde normale reste valable à condition d'y substituer $M_1 \sin \beta$ à M_1 . La même remarque s'applique à la formule (3.61) du rapport des pressions, puisque la relation (3.60) de Rankine reste valable.

Pour les chocs faibles on trouve

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \theta \quad (3.94)$$

Enfin, la même remarque s'applique aussi à la formule (3.63).

Pour les chocs faibles on trouve que l'accroissement d'entropie est proportionnel à θ^3 .

12. La polaire de choc.

Une autre présentation graphique du choc oblique est un diagramme polaire reliant la composante V_2'' de la vitesse aval, perpendiculaire au courant amont, à la composante V_2' qui lui est parallèle. La relation géométrique

$$V_2' = u_2 \sin \beta + v \cos \beta$$

multipliée par V_1 fournit, eu égard à (3.85) et (3.86)

$$V_1 V_2' = u_1 u_2 + v^2$$

et permet de remplacer (3.84) par

$$V_1 V_2' = a^{*2} + \frac{2}{\gamma+1} v^2 = a^{*2} + \frac{2}{\gamma+1} V_1^2 \cos^2 \beta \quad (3.94)$$

On peut y éliminer l'angle β par la relation

$$v = V_1 \cos \beta = V_2' \cos \beta + V_2'' \sin \beta$$

qui fournit la tangente. Le résultat, résolu par rapport à V_2'' , est l'équation de la polaire de choc

$$q_2 = (M_1^{*2} - p_2)^2 \frac{M_1^{*2} p_2 - 1}{1 + \frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^{*2} p_2} \quad (3.95)$$

où l'on s'est servi des variables réduites

$$M_1^{*2} = V_1^2 / a^{*2}$$

$$p_2 = V_2' / a^{*2}$$

$$q_2 = V_2'' / a^{*2}$$

La courbe est une strophoïde ou "folium de Descartes" (figure).

Comme

$$(p_2^2 + q_2^2)^{1/2} = V_2 / a^{*2} = M_2^{*2} \quad p_2 / q_2 = \tan \theta$$

le nombre de Mach étoilé et la déflexion en aval se lisent directement en joignant à l'origine le point représentatif sur la courbe. Il y a deux points correspondant à $q_2 = 0$; le point double A pour lequel $p_2 = M_1^{*2}$ et l'écoulement est continu sans choc; le point B pour lequel $p_2 = 1/M_1^{*2}$ qui représente le choc normal.

Une déflexion imposée θ du courant aval peut en général être réalisée par trois chocs différents. Cependant le point représentatif E correspond visiblement à un nombre de Mach aval supérieur à celui en amont: c'est une onde d'expansion à rejeter puisqu'elle entraînerait une diminution d'entropie; les branches de la strophoïde à droite de A sont donc à éliminer.

Au point C correspond une onde de compression faible, le courant en aval restant supersonique ($M_2^{*2} > 1$).

Au point D correspond une onde de compression forte se rapprochant d'une onde normale avec courant subsonique en aval.

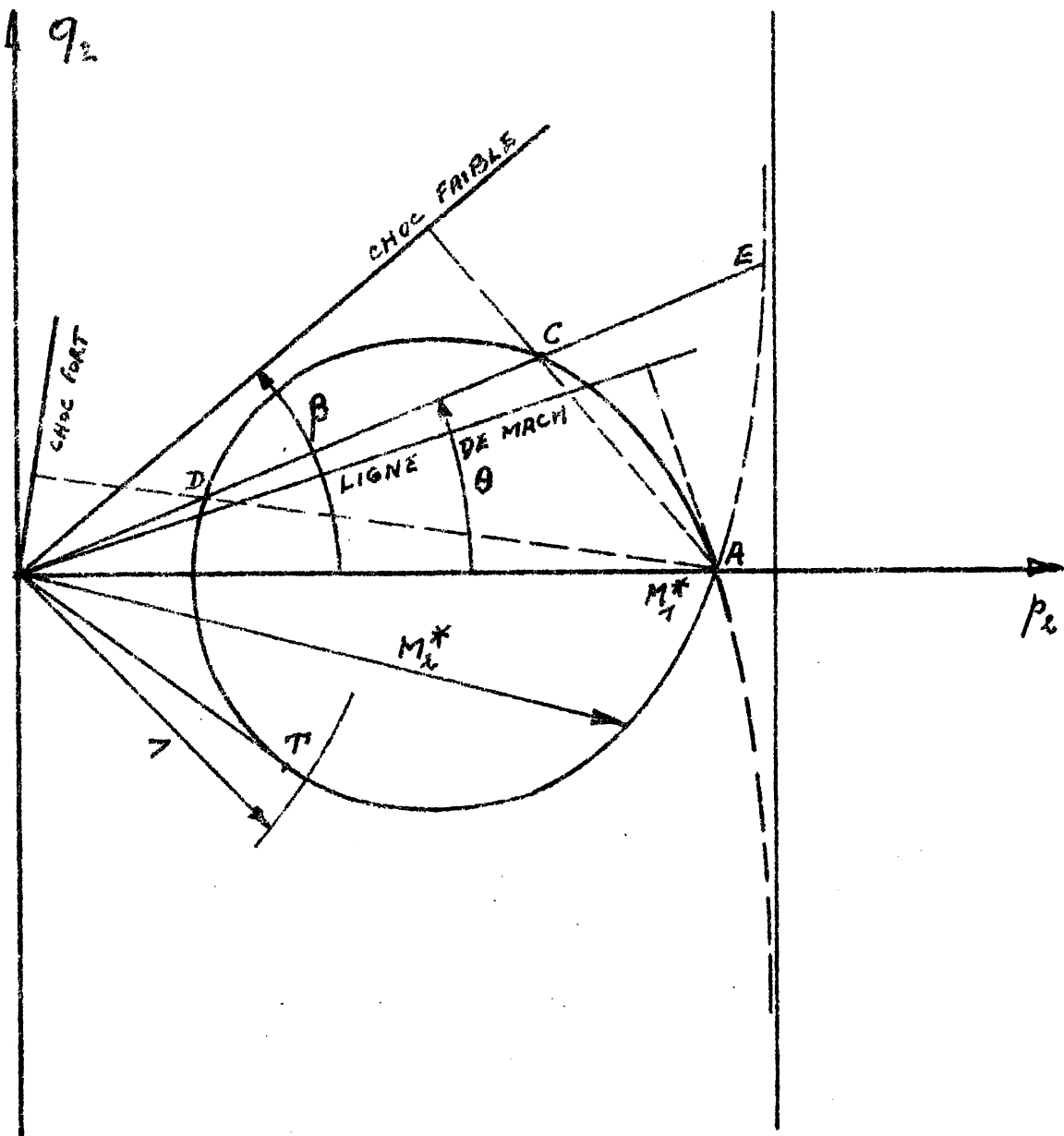
On constate aussi qu'à tout nombre de Mach amont correspond une déflexion maximum réalisable par un choc. Dans le voisinage immédiat de cet angle limite les chocs possibles entraînent tous deux des conditions subsoniques en aval car les points de tangence "T" sur la strophoïde ont un rayon polaire légèrement

inférieur à l'unité. L'inclinaison de l'onde de choc se laisse construire par la relation

$$\tan \beta = \frac{V_1 - V_2}{V_2} = \frac{M_1^* - p_2}{q_2}$$

Par conséquent la droite joignant le point A au point représentatif fait l'angle β avec l'axe des q_2 . Menant de l'origine une perpendiculaire à cette droite on obtient l'orientation de l'onde de choc par rapport au courant amont.

Plus le choc est fort (M_2^* petit) plus l'onde se redresse et tend à devenir normale.



POLAIRE DE CHOC

13. Lignes de Mach. Dièdre et cône de Mach.

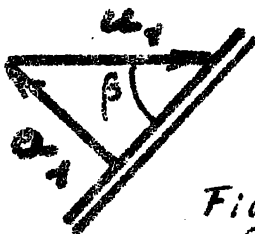
Sur la polaire du choc, l'orientation limite des chocs infiniment faibles s'obtient en menant une perpendiculaire à la tangente au folium en $A(q_2 = 0)$. Faisant $V_2' = V_1$ dans (3.94) et divisant par V_1^2 on trouve

$$1 = \frac{1}{M_1^2} + \frac{2}{\gamma + 1} \cos^2 \beta \quad \text{soit} \quad \sin^2 \beta = \frac{1}{M_1^2} \quad (3.96)$$

confirmant un résultat précédent. Les deux ondes de choc infiniment faibles et symétriques par rapport au courant s'appellent "lignes de Mach" et l'équation (3.96) exprime que la composante de la vitesse normale à ces ondes est exactement égale à la célérité du son ($\pm V_1 \sin \beta = a_1$).

Pour les chocs finis cette composante est nécessairement supersonique en amont et subsonique en aval.

Le même résultat peut être obtenu en observant que pour rendre stationnaire un front d'onde très faible (et qui se propage donc suivant la normale avec la célérité du son) en lui superposant une vitesse u_1 qui fait avec l'onde un angle β , il faut que



$$u_1 = a_1 \frac{1}{\sin \beta}$$

Fig. 3.8.

la vitesse résultante étant alors parallèle à l'onde.

Enfin les lignes de Mach peuvent être envisagées comme les enveloppes des fronts d'onde cylindriques émis par une faible perturbation dans un courant uniforme. En effet considérons d'abord (fig. 3.9.a) les perturbations émises par une ligne de trace P dans le fluide au repos.

Une perturbation émise à l'époque $t = 0$ se propage avec la célérité a dans toutes les directions et donne lieu, à l'époque t et dans le plan du mouvement, à un front circulaire de rayon at . Superposons alors un courant uniforme de vitesse V . Pendant que son rayon croît avec le temps la circonférence est entraînée avec la vitesse V du courant. Tant que cette vitesse est inférieure à a on aura la situation représentée à la figure (3.9.b).

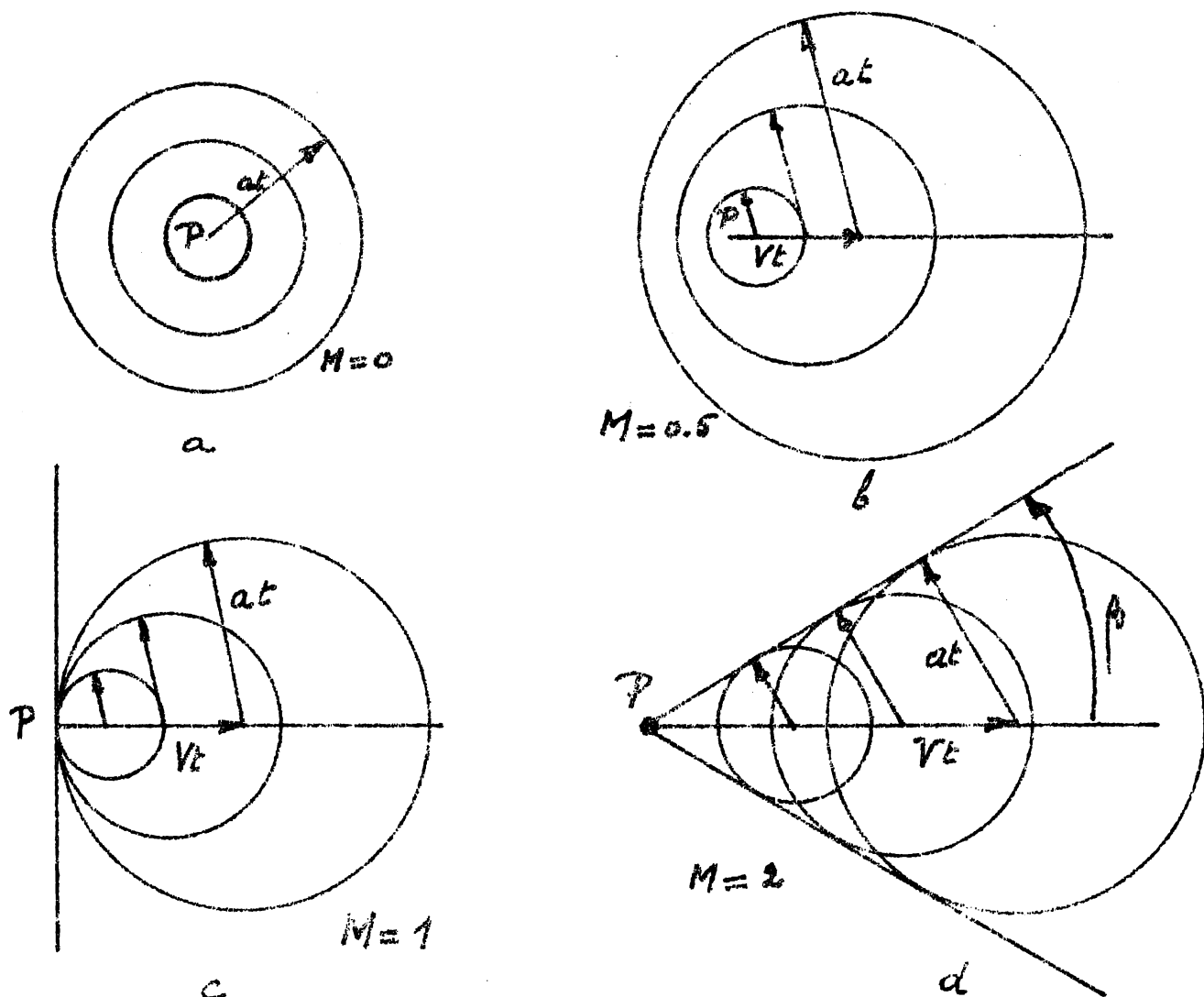
N'importe quel point peut encore être atteint par un front d'onde, pourvu que l'intervalle de temps soit suffisamment grand.

Quand la vitesse du courant atteint celle du son, on a le cas représenté à la figure (3.9.c). Plus aucun point situé à gauche de la transversale par P ne peut être atteint par une perturbation infiniment faible.

Enfin quand l'écoulement uniforme est supersonique on a le cas de la figure (3.9.d). L'enveloppe des fronts d'ondes émises à différentes époques est un dièdre dont la trace est constituée des deux lignes de Mach.

L'extérieur de ce dièdre est inaccessible aux perturbations infinitésimales, c'est la "règle des signaux interdits".

Si la perturbation émane d'un point isolé, les fronts d'ondes sont sphériques. Le dièdre de Mach se transforme en cône de Mach.



Figs. 3.9.

Tout comme le cône de Mach est le lieu des points qui peuvent être atteints par les perturbations infinitésimales issues de P , l'anticône de Mach est le lieu des points dont les perturbations peuvent être ressenties en P .

14. Expansion de Prandtl-Meyer.

La formule (3.93) fournit la relation entre la diminution de vitesse et le changement infinitésimal de direction du courant provoqués par un choc évanescent. En cas de modification graduelle de l'orientation du courant, telle que provoquée par une paroi incurvée (fig. 3.10),

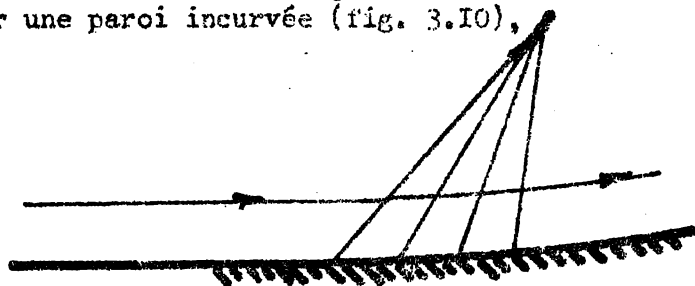


Fig. 3.10

l'évolution isentropique résultent d'une suite de chocs infinitésimaux s'accompagne d'une interférence entre les lignes de Mach successives. En effet celles-ci se redressent sous le double effet du changement d'orientation et de la diminution du nombre de Mach. Il en résulte la formation d'un choc fini à une certaine distance de la paroi.

Au contraire, lors d'une expansion du courant (Fig. 3.II), les lignes de Mach sont séparées par le changement d'orientation du courant et l'accroissement du nombre de Mach.

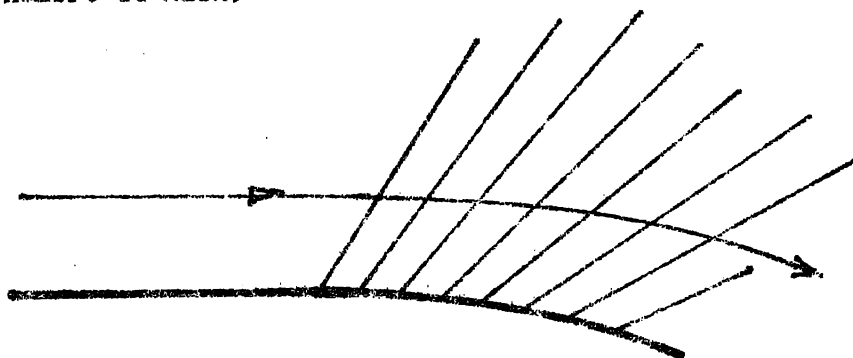


Fig. 3.II

Cette expansion a été étudiée par Prandtl et Meyer. La relation entre nombre de Mach et direction du courant s'obtient par intégration de l'équation (3.93) avec évolution isentropique. Changeant le signe de $d\theta$ pour compter θ positivement dans le sens d'une expansion

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (3.93)$$

Pour intégrer il faut lier M à V par la condition d'une évolution isentropique. Par différentiation de la dernière égalité dans (3.93), par exemple :

$$VdV + \frac{2}{\gamma - 1} a da = 0 \quad (3.97)$$

Mais aussi :

$$\text{de } V = a M \quad \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{dM}{M} \quad (3.96)$$

Eliminant da et dV entre (3.93), (3.97) et (3.96) il vient

$$d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1} dM}{M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} \quad (3.99)$$

et le problème se ramène à une quadrature. Celle-ci s'effectue facilement en utilisant la variable auxiliaire

$$\omega = \tan \alpha = \cot \beta = \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.100)$$

L'angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ est celui que fait la ligne de Mach avec la perpendiculaire au vecteur vitesse local, il croît avec le nombre de Mach. L'équation (3.99) se transforme en

$$d\theta = - \frac{d\omega}{1 + \omega^2} + \frac{d\omega}{1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \omega^2} \quad (3.101)$$

Dans l'expression

$$\theta = - \arctan \sqrt{M^2 - 1} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \quad (3.102)$$

qui en résulte, la constante d'intégration a été choisie de telle façon que

$$\theta = 0 \quad \text{pour} \quad M = 1$$

et le second membre $f(M)$ s'appelle alors "fonction de Prandtl-Meyer", dont il existe plusieurs tables. Si la déviation est à mesurer à partir d'un courant amont de nombre de Mach supersonique M_1 , on utilisera la formule

$$\Delta\theta = \theta - \theta_1 = f(M) - f(M_1).$$

Le nombre de Mach correspondant à une déviation donnée s'obtient par interpolation dans la table; les changements corrélatifs de pression, de masse volumique, de température, sont alors obtenus par application des formules d'évolution isentropique.

La déviation maximum qui peut être atteinte en théorie à partir d'un écoulement sonique, correspond à $M = \infty$ dans (3.102). Elle vaut

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

Pour $\gamma = 1,4$, cette valeur représente environ 130 degrés.

L'expansion de Prandtl-Meyer, étant un phénomène isentropique, peut être développée indépendamment de l'étude des ondes de choc et poussée jusqu'à la détermination des lignes de courant. Prenons le cas d'une expansion autour d'un point anguleux (fig. 3.12).

Le courant amont est supposé sonique, on utilise les coordonnées polaires r et ϕ (mesuré à partir de la ligne de Mach de l'écoulement amont). Comme il n'y a pas de dimension linéaire caractéristique dans le problème on supposera que dans l'éventail séparant les deux écoulements uniformes les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent que de l'angle ϕ

$$\begin{aligned} u &= u(\phi) & \text{vitesse radiale} \\ v &= v(\phi) & \text{vitesse tangentielle} \\ \rho &= \rho(\phi) \end{aligned}$$

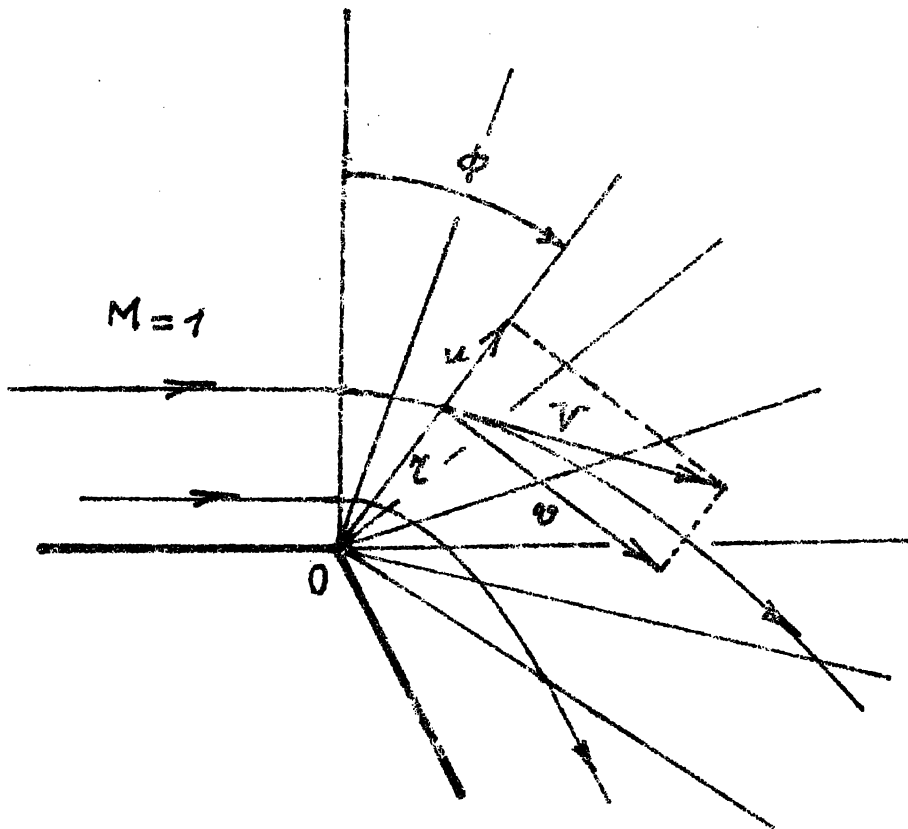


Fig. 3.I2

L'équation de conservation de la masse, obtenue par exemple en annulant le débit massique sortant d'un élément de surface ($r \leq r \leq r + dr$, $\phi \leq \phi \leq \phi + d\phi$) se réduit à

$$\rho \left(u + \frac{dv}{d\phi} \right) + v \frac{d\rho}{d\phi} = 0 \quad (3.I03)$$

L'écoulement uniforme amont étant irrotationnel et l'évolution isentropique, la région dans l'éventail est également irrotationnelle. Par annulation de la circulation sur le contour bordant l'élément de surface, on trouve simplement

$$v = \frac{du}{d\phi} \quad (3.I04)$$

Enfin, par suite de la conservation de l'enthalpie totale,

$$u \, du + v \, dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

Comme $a^2 = dp/d\rho$ cette relation s'écrit aussi

$$u \frac{du}{d\phi} + v \frac{dv}{d\phi} + \frac{a^2}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} = 0 \quad (3.I05)$$

tirant du/d ϕ de (3.104), $dv/d\phi$ de (3.103) et substituant dans (3.105), il vient

$$(a^2 - v^2) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\phi} = 0$$

On vérifie facilement que la solution $\rho = \text{constante}$ est triviale, elle ne fournit qu'un prolongement du courant uniforme en amont. L'autre solution

$$v = a \quad (3.106)$$

exprime que les rayons issus du point anguleux sont des lignes de Mach. Les résultats (3.104) et (3.106), portés dans l'équation de conservation de l'enthalpie :

$$\frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} V_\infty^2$$

fournissent une équation différentielle

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (u^2 - v_\infty^2) = 0$$

qui a pour solution ($u = 0$ pour $\phi = 0$)

$$u = V_\infty \sin(\lambda\phi) \quad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad (3.107)$$

Ensuite, par (3.104)

$$v = \lambda V_\infty \cos(\lambda\phi) \quad (3.108)$$

Les lignes de courant résultant d'une intégration de

$$\frac{dr}{u} = \frac{r d\phi}{v}$$

soit

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} = \lambda \tan(\lambda\phi)$$

Elles sont donc obtenues sous la forme polaire

$$r = r_0 \left(\cos(\lambda\phi) \right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (3.109)$$

Notant (fig. 3.13) qu'entre ϕ , β et θ existe la relation

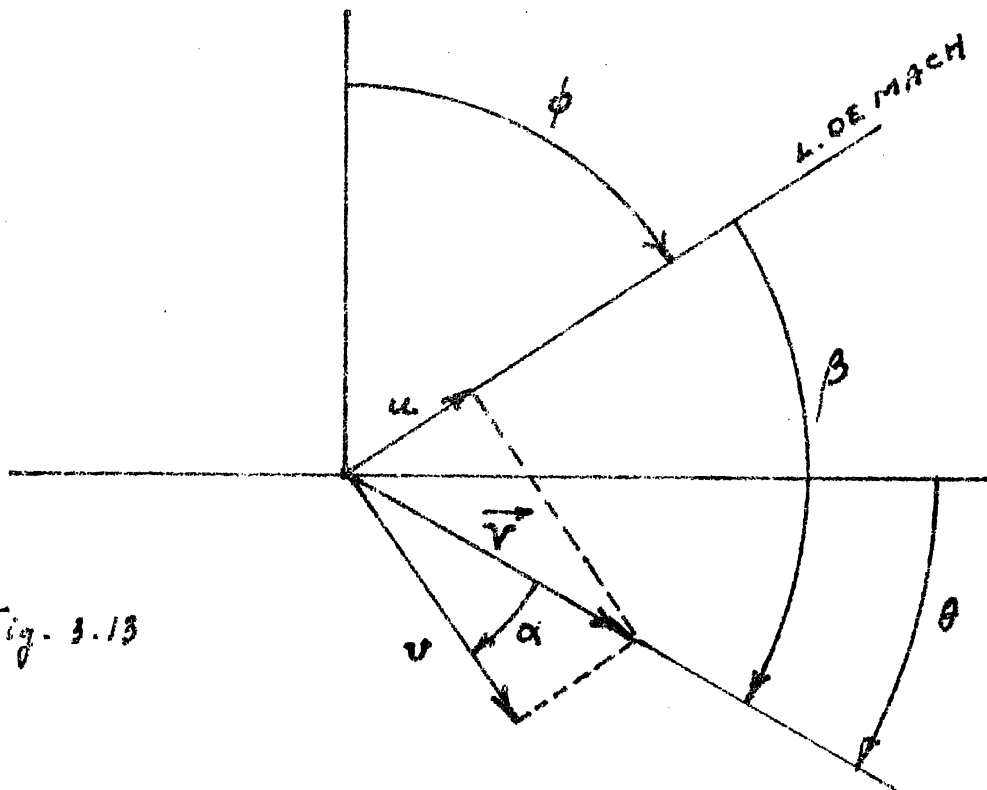


Fig. 3.13

$$\phi = \theta + \frac{\pi}{2} - \beta = \theta + \alpha$$

et que

$$\tan \alpha = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \phi \right)$$

il vient en tirant ϕ de cette dernière relation

$$\theta = \phi - \alpha = -\alpha + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \tan \alpha \right)$$

Suivant (3.100) ce résultat est bien identique à (3.102).

15. Développements en série des coefficients de pression en fonction de la déviation du courant.

Le calcul exact de la pression correspondant à une déviation connue du courant supersonique amont ne peut se faire qu'indirectement.

Dans le cas d'une déviation par un choc oblique, par exemple, on tire de (3.61) en remplaçant M_1 par $M_1 \sin \beta$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \quad (3.110)$$

où $\sin \beta$ doit être trouvé par interpolation de la relation (3.89).

Dans le cas d'une déviation isentropique, le nombre de Mach M_2 en aval doit d'abord être obtenu par interpolation de la fonction de Prandtl-Meyer; ensuite le rapport des pressions peut être réduit de la relation de de Saint-Venant-Wantzel (3.32)

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \quad (3.III)$$

Pour de faibles déviations il est intéressant de construire des développements en série de puissances de θ , ce qui permet notamment de comparer directement les pressions dues à une déviation par choc (indice c) à celles résultant d'une évolution isentropique (indice a). Nous chercherons les coefficients (fonctions de M_1 et de γ) des développements des coefficients de pression

$$C_P = \frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad (3.II2)$$

Pour le cas du choc nous poserons

$$\left(C_P \right)_c = x = A_c \theta + B_c \theta^2 + C_c \theta^3 + \dots \quad (3.II3)$$

Pour le cas isentropique

$$\left(C_P \right)_a = y = A_a \theta + B_a \theta^2 + C_a \theta^3 + \dots \quad (3.II4)$$

I°) Cas du choc :

De (3.II0) nous tirons

$$x = \frac{4}{\gamma+1} \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

et éliminons $\sin \beta$ avec l'équation (3.89). Le résultat peut se mettre sous la forme

$$(x + a) (2 - x)^2 \tan^2 \theta = + x^2 (a(M_1^2 - 1) - x) \quad (3.II5)$$

où

$$a = \frac{4}{(\gamma + 1) M_1^2}$$

Cette équation du troisième degré en x a trois racines correspondant pour un θ donné aux trois solutions de la polaire de choc. Seule la racine correspondant au choc faible nous intéresse. Nous l'obtenons automatiquement en posant le développement du type (3.II3) qui donne $x = 0$ pour $\theta = 0$. La structure de l'équation (3.II5) incite cependant à poser, pour la facilité des calculs, le développement préliminaire

$$x = M \tan \theta + N \tan^2 \theta + P \tan^3 \theta + \dots$$

Substituant dans (3.II5) et identifiant les puissances de $\tan \theta$ on trouve

$$M = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad N = \frac{(\gamma+1) M_1^4 - 4 (M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2}$$

$$P = \frac{(\gamma+1)^2 M_1^8 + 4(\gamma+1)(\gamma-5) M_1^6 + 6(\gamma+3\gamma) M_1^4 - 64 M_1^2 + 32}{16 (M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Enfin, notant le développement

$$\tan \theta = \theta + \frac{1}{3} \theta^3 + \dots$$

il vient pour les coefficients de (3.II3)

$$A_c = M \quad B_c = N \quad C_c = P + \frac{1}{3} M$$

c'est-à-dire

$$A_c = \frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad B_c = \frac{(\gamma+1) M_1^4 - 4(M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2}$$

$$C_c = \frac{\frac{3}{4} (\gamma+1)^2 M_1^8 - (7 + 12\gamma - 3\gamma^2) M_1^6 + 13(\gamma+1) M_1^4 - 24 M_1^2 + 16}{12 (M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Les calculs requis pour trouver les coefficients suivants deviennent extrêmement longs.

2°) Cas de l'évolution isentropique.

Il est avantageux ici de préparer le travail par la recherche préliminaire de l'expansion

$$w = w_1 + a \theta + b \theta^2 + c \theta^3 + \dots \quad (3.II6)$$

La variable ω est celle définie précédemment par (3.I00).

Sa valeur en amont, au lieu d'être supposée nulle comme pour la recherche de la fonction de Prandtl-Meyer, est ici

$$\omega_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

On substitue le développement dans l'équation différentielle (3.I01)

$$\omega^2 \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{Y+1}{2} (1 + \omega^2) (1 + \lambda^2 \omega^2) \quad \text{où} \quad \lambda^2 = \frac{Y-1}{Y+1}$$

Il vient par identification des puissances de ω

$$a = \frac{Y+1}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_1^2}\right) (1 + \lambda^2 \omega_1^2)$$

$$b = \frac{Y+1}{2} \frac{\lambda^2 \omega_1^4 - 1}{\omega_1^3} a$$

$$c = \left(\frac{Y+1}{2}\right)^2 \frac{5 + 3\omega_1^2 + 3\lambda^2 \omega_1^2 + \lambda^2 \omega_1^6 + \lambda^4 \omega_1^6 + 3\lambda^4 \omega_1^6}{3\omega_1^6} a$$

Notons ensuite que le coefficient de pression cherché peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{2}{Y M_1^2} \left(Y - \frac{Y}{Y-1} - \dots \right)$$

$$Y = \frac{1 + \lambda^2 \omega^2}{1 + \lambda^2 \omega_1^2} = 1 + m \theta + n \theta^2 + p \theta^3 + \dots$$

A partir de (3.II6) les coefficients m , n et p se trouvent facilement :

$$m = \frac{(Y-1) M_1^2}{\omega_1}$$

$$n = \left(\frac{Y+1}{2}\right)^2 M_1^2 \lambda^2 \frac{-2 + 2\lambda^2 + M_1^2 - 5\lambda^2 M_1^2 + 3\lambda^2 M_1^4}{\omega_1^4}$$

$$p = \left(\frac{Y+1}{2}\right)^3 M_1^2 \lambda^2 \frac{\frac{4}{3}(\lambda^2-1)^2 - 8\lambda^2(\lambda^2-1) M_1^2 + 8\lambda^2(2\lambda^2-1) M_1^4 + \frac{8}{3}\lambda^2(1-5\lambda^2) M_1^6 + 4\lambda^4 M_1^8}{\omega_1^7}$$

Enfin par un développement binomial de la puissance $\gamma/(1-\gamma)$ de γ

$$A_a = -2 \frac{m}{(\gamma-1) M_1^2}$$

$$B_a = -\frac{2}{(\gamma-1) M_1^2} \left(n - \frac{2\gamma-1}{2(\gamma-1)} m^2 \right)$$

$$C_a = -\frac{2}{(\gamma-1) M_1^2} \left(p - \frac{2\gamma-1}{\gamma-1} mn + \frac{(2\gamma-1)(3\gamma-2)}{6(\gamma-1)^2} m^3 \right)$$

Il vient finalement

$$A_a = -\frac{2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} = -A_c$$

$$B_a = \frac{(\gamma+1)M_1^4 - 4(M_1^2 - 1)}{2(M_1^2 - 1)^2} = B_c$$

$$C_a = \frac{-(\gamma+1)M_1^8 + (5 + 7\gamma - 2\gamma^2)M_1^6 - 10(\gamma+1)M_1^4 + 12M_1^2 - 8}{6(M_1^2 - 1)^{7/2}}$$

Ces résultats concordent avec ceux obtenus par des voies différentes (voir par exemple Edward R.C. Miles, *Supersonic Aerodynamics*, McGraw-Hill, 1950).

Compte-tenu des deux définitions du sens positif de la déviation du courant on constate que, comme il fallait s'y attendre, les coefficients de pression en gas de choc ou d'évolution isentropique ne diffèrent qu'à partir des termes en θ^3 . En ne retenant que les termes en θ^3 , la différence entre une compression par choc et une compression isentropique s'avère être égale à

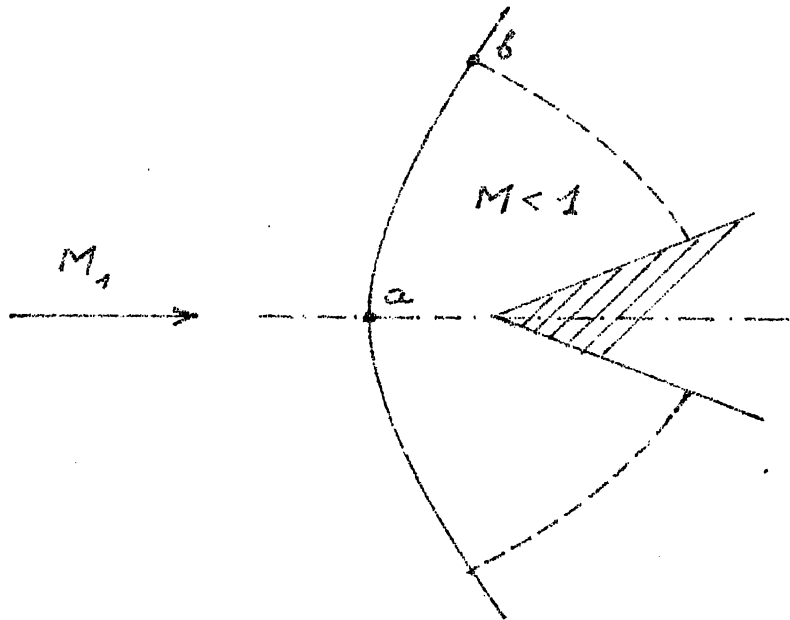
$$(C_p)_c - (C_p)_a = \frac{(\gamma+1) M_1^4}{12(M_1^2 - 1)^{7/2}} \left(\frac{3\gamma-5}{4} M_1^4 + (3-\gamma)M_1^2 - 2 \right) \theta^3$$

Par exemple pour $\gamma = 1,4 = 7/5$ on obtient en première approximation que pour de faibles déviations, la compression par choc est plus grande que la compression isentropique dans l'intervalle

$$1,55 = 4 - \sqrt{6} < M_1 < 4 + \sqrt{6} = 6,45$$

16. Ondes de choc détachées et réfléchies.

Si l'angle de déflexion demandé par le biseau introduit dans un écoulement supersonique uniforme dépasse la valeur θ_{\max} dont l'écoulement peut être dévié par un choc oblique attaché, il se produit devant l'obstacle une onde de choc détachée (fig. 3.14)



(fig. 3.14)

Entre a et b l'inclinaison (variable) de l'onde implique un écoulement subsonique en aval. Au delà de b l'écoulement aval demeure supersonique. Il y a donc une enclave subsonique entre l'obstacle et l'onde de choc dans laquelle l'écoulement est compliquée du fait qu'il doit être rotationnel. En effet, d'une part la traversée de l'onde conserve l'enthalpie totale H du courant amont, d'autre part l'accroissement d'entropie est variable avec l'inclinaison du choc qui est en rapport avec son intensité. La formule (2.74) de Crocco-Vaszhonyi en mouvement permanent

$$T \operatorname{grad} S - \operatorname{grad} H = \operatorname{rot} \vec{V} \times \vec{V}$$

montre que, puisque $\operatorname{grad} H = 0$ en aval du choc mais $\operatorname{grad} S \neq 0$, $\operatorname{rot} \vec{V}$ ne peut être nul.

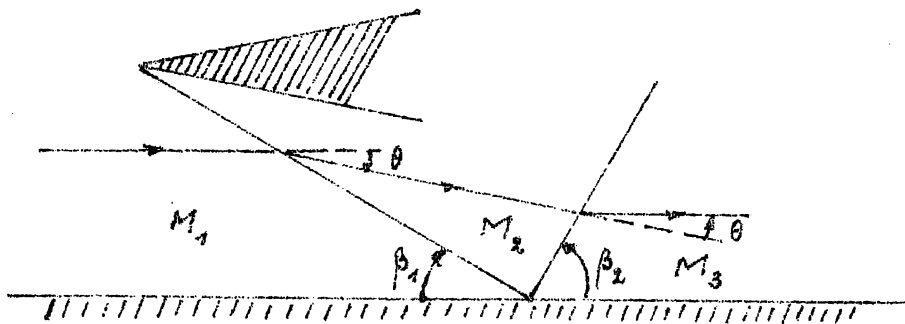
Un obstacle émoussé (bord d'attaque arrondi) donne bien entendu toujours lieu à une onde de choc détachée.

La réflexion d'une onde de choc par une paroi se présente généralement comme le montre la figure (3.15)

La déflexion θ imposée au courant amont est suffisamment faible pour que l'écoulement en aval de l'onde oblique soit de nombre de Mach supersonique M_2 assez élevé pour tourner à nouveau l'écoulement dans la direction primitive par un second choc oblique.

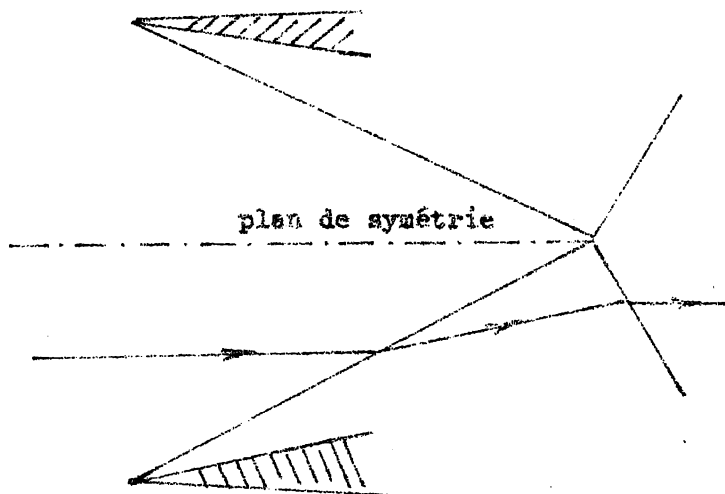
En d'autres termes l'angle de déviation θ est inférieur au θ_{\max} associé à M_2 . C'est le cas de réflexion simple.

Il se produit également par symétrie à l'entrée d'un diffuseur sous forme d'une interaction entre chocs (fig. 3.16 a, b)

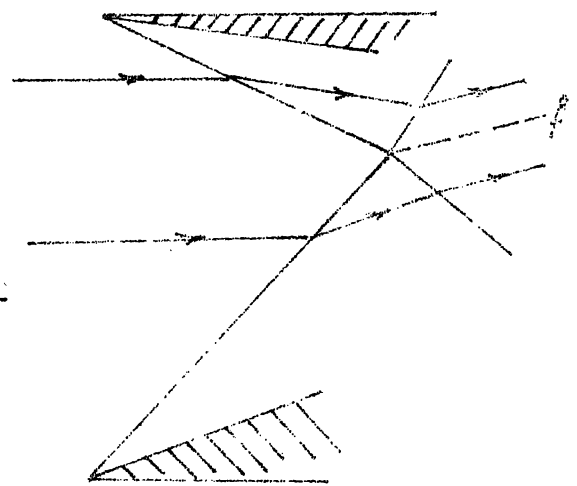


(fig. 3.15)

La figure 3.16 b montre ce qui se produit en cas de dissymétrie dans le diffuseur. L'inclinaison des chocs réfléchis est alors gouvernée par la condition d'égalité de la pression de part et d'autre de la frontière f entre les écoulements redevenus parallèles. Cependant comme les lignes de courant ont traversé des chocs d'intensités différentes, ni la température, ni la densité, ni la vitesse ne seront les mêmes de part et d'autre de f . Cette frontière est une nappe de discontinuité à travers laquelle se produiront des échanges thermiques et des échanges de quantité de mouvement liés à la conductibilité et à la viscosité du fluide.

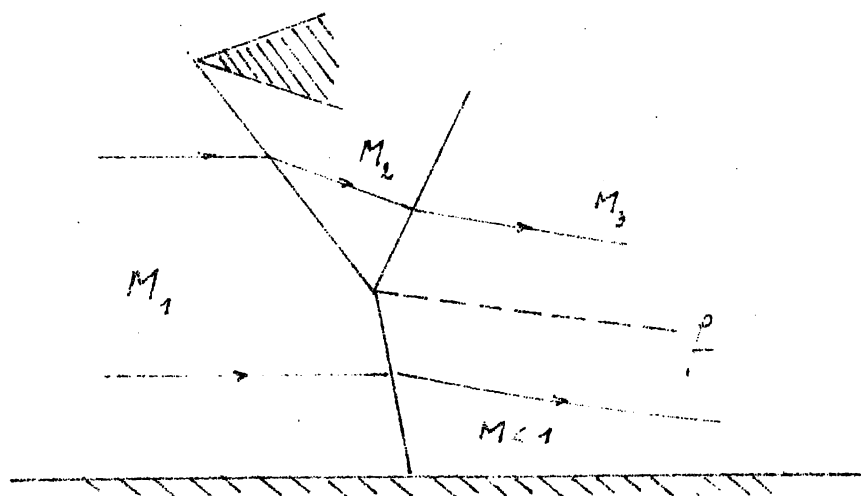


(fig. 3.16 a)



(fig. 3.16 b)

Si θ est supérieur au θ_{\max} associé à M_2 , il se produit une "réflexion de Mach", illustrée à la figure (3.17)



(fig. 3.I7)

L'écoulement incident se divise en deux parties. L'une traverse le choc oblique fixé par la présence du biseau puis une onde réfléchie qui ne la redresse que partiellement. L'autre partie traverse une onde presque normale et devient subsonique. La détermination du point triple 'O' n'est pas entièrement fixée par la condition d'égalité des pressions et orientation des vitesses de part et d'autre d'une frontière f . Une infinité de solutions est possible. Celle qui se réalise dépend des conditions en aval qui peuvent perturber la partie subsonique de l'écoulement.

17. Théorie unidimensionnelle de l'écoulement dans une tuyère de Laval.

La géométrie de la tuyère est décrite par sa section droite A , variable. Elle passe par un minimum, le col, où sa valeur est notée A_c .

En régime permanent, la constance du débit massique m est exprimée par la relation

$$\rho V A = m$$

valable pour chaque section, en particulier pour la section du col, où

$$\rho_c V_c A_c = m$$

Depuis le réservoir à pression p_0 , où la vitesse est en principe nulle, l'écoulement est d'abord accéléré isentropiquement par la réduction de la section droite et, suivant la relation (3.41) d'Hugoniot, ne peut passer du régime subsonique au régime supersonique avant le col. Il peut éventuellement atteindre la condition sonique $M = 1$, au droit du col.

Dans ce cas le débit atteint son maximum, le "débit de saturation"

$$m^* = \rho^* a^* A_c$$

En effet on a vu que dans une détente isentropique le rapport

$$\frac{\rho V}{\rho^* a^*} = f(M) \quad (3.42)$$

atteint son maximum, l'unité, pour $M = 1$.

Ceci conduit à distinguer les deux cas

$$1) \text{ débit non saturé} \quad \frac{m}{m^*} = \frac{\rho_c V_c}{\rho^* a^*} < 1$$

2) débit saturé.

Si le débit n'est pas saturé, le régime d'écoulement au niveau du col est subsonique et l'augmentation subséquente de la section droite ralentit de nouveau isentropiquement le courant qui reste donc subsonique jusqu'à la sortie.

La pression relative dans une section est déterminée par les rapports A/A_c et m/m^* . En effet

$$\frac{m}{m^*} = \frac{\rho_c V_c}{\rho V} \quad \frac{\rho V}{\rho^* a^*} = \frac{A}{A_c} \quad \frac{\rho V}{\rho^* a^*}$$

et ce dernier rapport dépend uniquement du nombre de Mach, selon la formule (3.42), ou du rapport de la pression locale à la pression du réservoir à travers la formule de de Saint-Venant et Wantzel (3.32). Plus directement, revenant aux formules (3.21), (3.27), (3.28) et (3.30)

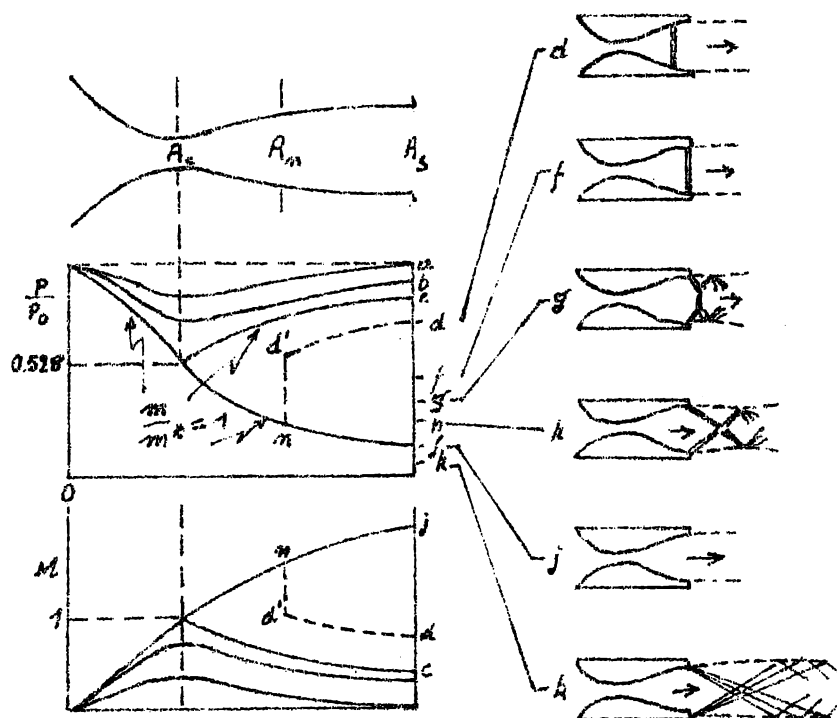
$$\frac{\rho V}{\rho^* a^*} = f(p/p_0) \quad \text{avec}$$

$$f(p/p_0) = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et la relation entre pression relative et section droite relative est fournie par

$$\frac{A}{A_c} f\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{M}{M^*}$$

Ceci conduit aux courbes supérieures de la figure (3.18)



(fig. 3.18)

Les débits non saturés, avec régime entièrement subsonique, sont réalisés avec de faibles différences de pression entre la sortie et le réservoir.

Quand le débit atteint la saturation et que le régime reste subsonique après le col, la pression relative de sortie est représentée par le point c.

Un autre régime isentropique est alors possible, celui où l'écoulement devient supersonique en aval du col et où dès lors, des deux rapports de pression correspondant à une même valeur de $f(p/p_0)$ on prend le plus faible. Ceci correspond à la seconde branche de la courbe $m/m^* = 1$, aboutissant à une faible pression de sortie représentée par le point j.

La question qui se pose alors est de savoir à quels régimes d'écoulement correspondent les pressions de sortie représentées par les points situés entre c et j et en-dessous de j.

Si la pression du milieu extérieur dans lequel débouche la tuyère est inférieure à celle représentée par j, la détente isentropique se prolonge à l'extérieur de

la tuyère par un système d'ondes d'expansion (cas k de la figure). Si cette pression est comprise entre celles représentées par c et j il y a apparition d'ondes de choc.

Soit une onde de choc normale dans la section AA_1 de la tuyère (cas d de la figure). Elle ne modifie pas la valeur de a^* .

($a^* = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2$ est une mesure de l'enthalpie totale qui est conservée)

mais modifie la valeur de ρ^* qui devient $\bar{\rho}^*$. En fait

$$\frac{\bar{\rho}^*}{\rho^*} = \frac{\bar{p}_0}{p_0} = \frac{\bar{p}_0}{p_0} = e^{-\Delta S/R}$$

est une mesure de l'accroissement d'entropie provoqué par l'onde. Appliquant l'équation de continuité du débit en aval de l'onde de choc

$$\rho V A = \rho^* a^* = \bar{\rho}^* a^* A_c$$

Il vient

$$\frac{A}{A_c} = \frac{\bar{\rho}^* a^*}{\rho^* V} = \frac{\bar{\rho}^* a^*}{\rho^* V} \cdot \frac{\rho^*}{\bar{\rho}^*}$$

ou encore

$$\frac{A}{A_c} f\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{p_0}{\bar{p}_0} > 1$$

Pour chaque valeur de $A/A_c > p_0/\bar{p}_0$ existent deux rapports p/\bar{p}_0 et donc deux rapports p/p_0 vérifiant cette relation.

La courbe p/p_0 a deux branches dont la supérieure (subsonique) est utilisée aval du choc. Le rapport de pression à la sortie prend ainsi une valeur dépend de la position du choc (point e de la figure). Quand le choc atteint la section de sortie, le point figuratif de la pression de sortie, juste en arrière du choc atteint f .

Pour des rapports de pression de sortie entre f et j , la recompression de j à g est absorbée par un choc oblique donnant lieu à multiples réflexions (cas g et h de la figure).

IV. Écoulements irrotationnels et isentropiques.

Linéarisation par petites perturbations.

I. L'équation aux dérivées partielles de l'écoulement isentropique irrotationnel.

Négligeant la viscosité, la conservation de la quantité de mouvement peut être exprimée par la relation

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (4.1)$$

Si de plus les échanges d'énergie par conductibilité thermique sont négligés et que l'entropie demeure la même pour toutes les particules et à chaque instant, on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} I = \text{grad} \frac{a^2}{\gamma-1} \quad (4.2)$$

De sorte que $a^2/(\gamma-1)$ apparaît comme un potentiel des accélérations. Introduisons maintenant l'idée que l'écoulement, irrotationnel à une époque donnée, le demeure, ce qui est précisément justifié par l'existence d'un potentiel des accélérations. Avec

$$\vec{v} = \text{grad} \phi \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{v} = 0$$

et la relation (4.2), la conservation de la quantité de mouvement prend la forme simple

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Le fluide est supposé illimité. Pour analyser les perturbations introduites par la présence d'un obstacle se déplaçant avec une vitesse moyenne \vec{U} par rapport au fluide au repos à l'infini, adoptons le principe du mouvement relatif. Les axes relatifs sont choisis de telle façon que les coordonnées des points de l'obstacle sont, soit fixes s'il est en translation de régime, soit constantes en moyenne. Par contre à très grande distance l'état de repos du fluide est transformé en écoulement uniforme avec une vitesse constante U que nous pouvons supposer orientée suivant l'axe ox (qui devient ainsi une direction privilégiée). Les valeurs des variables thermodynamiques du fluide à très grande distance sont notées $(p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, a_\infty \dots)$. L'intégrale de (4.3) peut toujours s'écrire

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} \phi \cdot \text{grad} \phi + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{1}{2} U^2 + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1} \quad (4.4)$$

En effet le second membre doit être une fonction du temps seulement. Mais le potentiel des vitesses n'est défini qu'à une fonction additive du temps près; un choix convenable de cette fonction additive permet en principe de transformer le second membre de (4.4) en n'importe quelle fonction du temps, en particulier dans la constante indiquée. Ce choix est tel que, si l'on distingue dans ϕ la partie Ux qui rend compte de l'écoulement uniforme et une partie ϕ qui rend compte des perturbations

$$\phi = U(x + \phi) \quad (4.5)$$

la relation (4.4) se trouve vérifiée par un potentiel de perturbation nul. En principe la relation (4.4) sera utilisée pour calculer la célérité locale du son, connaissant le potentiel du mouvement. Il ne reste à exprimer que la conservation de la masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \phi + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Dans une évolution isentropique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(a^2)}{a^2}$$

Ce qui permet de mettre finalement la conservation de la masse sous la forme

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{(\gamma-1)a^2} \frac{D a^2}{Dt} = 0 \quad (4.6)$$

Le problème est ramené à l'étude des deux équations aux dérivées partielles (4.4) et (4.6) pour les deux inconnues (ϕ et a). En principe la seconde peut être tirée de (4.4) et substituée dans (4.6), exhibant ainsi l'équation aux dérivées partielles fondamentale gouvernant le potentiel :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2 \frac{uv}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{vw}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ & - 2 \frac{wu}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2u}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{2v}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \frac{2w}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. Le coefficient de pression en fonction du potentiel de perturbation.

Des relations

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left(\frac{a^2}{a_{\infty}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad a_{\infty}^2 = \gamma \frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}}$$

on déduit pour le coefficient de pression

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2}$$

la formule exacte

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left(\frac{a^2}{a_{\infty}^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.8)$$

Notant que par la définition (4.5) du potentiel de perturbation ϕ

$$\text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi = U^2 \left(1 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi \right)$$

la célérité locale du son déduite de (4.4) peut s'écrire en fonction du potentiel de perturbation

$$a^2 = a_{\infty}^2 - (\gamma - 1) U^2 h \quad (4.9)$$

$$\text{où} \quad h = \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \phi \quad (4.10)$$

et, le coefficient de pression

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left\{ \left(1 - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 h \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.11)$$

L'équation de conservation de la masse

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + U \nabla^2 \phi = 0$$

peut encore être transformée par la relation isentropique

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{en} \quad \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} + \gamma U \nabla^2 \phi = 0$$

ou encore

$$\frac{D(p - p_\infty)}{Dt} + \gamma U (p - p_\infty) \nabla^2 \phi + \gamma U p_\infty \nabla^2 \phi = 0$$

Divisant par $\frac{1}{2} \rho_\infty U^3$ et utilisant de nouveau $a_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$ il vient

$$\frac{1}{U} \frac{D}{Dt} C_p + \gamma C_p \nabla^2 \phi + \frac{2}{M_\infty^2} \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.12)$$

Tout comme la paire d'équations aux dérivées partielles (4.4) et (4.6) gouvernait la paire d'inconnues a^2 et ϕ , la paire (4.11) et (4.12), associée à la définition (4.10), gouverne les inconnues d'intérêt plus direct C_p et ϕ .

Eliminant C_p on obtiendrait l'équation équivalente à (4.7) pour le potentiel de perturbation^P ϕ .

$$\text{Si} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (4.13)$$

est l'équation d'une surface mobile à laquelle l'écoulement est tangent, la condition aux limites vérifiée par le potentiel de perturbation exprime que les coordonnées $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ d'une particule vérifient l'équation de la surface durant un certain temps :

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$\text{Mais} \quad dx/dt = U \left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \quad \frac{dy}{dt} = U \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{dz}{dt} = U \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

et la condition aux limites exacte est

$$\left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{U} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \text{sur (4.13)} \quad (4.14)$$

3. Linéarisation.

La linéarisation est basée sur une double hypothèse

I°) Les vitesses de perturbation sont faibles comparées à la vitesse de l'écoulement amont. Ceci revient à écrire

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| \quad \text{et} \quad \frac{1}{U} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (4.15)$$

et a notamment pour conséquence

$$|h| \ll 1 \quad (4.16)$$

$$2^{\circ}) \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|, \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|, \quad M_{\infty}^2 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| \quad \text{et} \quad \frac{M_{\infty}^2}{U} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (4.17)$$

$$\text{Ce qui entraîne} \quad M_{\infty}^2 |h| \ll 1 \quad (4.18)$$

La célérité locale du son diffère très peu de sa valeur non perturbée (voir eq. (4.9)) et la perturbation relative de pression est faible (cfr (4.11))

$$\left| \frac{p - p_{\infty}}{p_{\infty}} \right| \ll 1 \quad (4.19)$$

Dans ces conditions, le développement binomial de (4.11) fournit l'approximation

$$C_p = -2h + M_{\infty}^2 h^2 \quad (4.20)$$

Substituant h et retenant seulement les termes du premier degré dans les vitesses de perturbation :

$$(C_p)_1 = -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (4.21)$$

Retenant tous les termes du second degré :

$$\begin{aligned} (C_p)_2 = & -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \\ & + (M_{\infty}^2 - 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + M_{\infty}^2 \left(\frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

L'équation complètement linéarisée gouvernant le potentiel de perturbation s'obtient à partir de (4.12) par les trois étapes suivantes :

1) En appliquant l'hypothèse des faibles perturbations relatives de pression (4.18) qui entraîne

$$|M_{\infty}^2 C_p| \ll 1$$

et permet de négliger le second terme de (4.12) devant le troisième;

2) En remplaçant dans le premier terme l'opérateur dérivation particulaire par son approximation

$$\frac{D}{Dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

Ce qui revient à négliger la convection par les vitesses de perturbation elles-mêmes;

3) En remplaçant le coefficient de pression par son approximation linéarisée (4.21).

Il vient alors l'équation aux dérivées partielles

$$\nabla^2 \phi = M_\infty^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi \quad (4.23)$$

La linéarisation de la condition aux limites dépend de la nature de la surface mobile à laquelle l'écoulement est tangent. Dans le cas général, la seule simplification qui puisse être apportée à (4.14) consiste à négliger $\partial\phi/\partial x$ devant l'unité :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \right) F + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{sur (4.13)} \quad (4.24)$$

Il est intéressant d'observer que si l'on choisit pour le coefficient de pression l'approximation complète $(C_p)_2$, le principe variationnel

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int (C_p)_2 \, dx dy dz \, dt = 0 \quad (4.25)$$

où l'intégrale de volume est étendue à la partie extérieure à la surface fermée d'un corps perturbateur fixe, fournit l'équation linéarisée (4.23) comme coefficient de la variation $\delta\phi$. La condition aux limites que l'on obtient en annulant le coefficient de $\delta\phi$ sur la surface est

$$\ell \left(1 + (1 - M_\infty^2) \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{M_\infty^2}{U} \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) + m \frac{\partial\phi}{\partial y} + n \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (4.26)$$

Les cosinus directeurs (ℓ, m, n) de la normale à la surface stationnaire $F(x, y, z) = 0$, sont proportionnels à $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ et $\partial F/\partial z$ respectivement. La condition (4.26) est alors variationnellement cohérente avec l'approximation (4.23).

Le cas particulier relatif au corps fixe ($\partial F/\partial t = 0$) de l'approximation (4.24) ne diffère d'ailleurs de (4.26) que par des termes négligeables en principe, en vertu de (4.17).

4. Ondes acoustiques.

L'équation (4.23) est une forme déguisée de l'équation de l'acoustique. Dans un système d'axes (ξ, η, ζ, t) , au repos par rapport au fluide à l'infini, le potentiel perturbateur devient

$$\phi(\xi + U t, \eta, \zeta, t) = \phi^{\text{ac}}(\xi, \eta, \zeta, t)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi^{\text{ac}}}{\partial\xi} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi^{\text{ac}}}{\partial\eta} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi^{\text{ac}}}{\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial\phi^{\text{ac}}}{\partial t} = U \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

et le potentiel perturbateur obéit dans les nouvelles coordonnées, à l'équation des ondes

$$\nabla^2 \phi^{\infty} = \frac{M_{\infty}^2}{U^2} \frac{\partial^2 \phi^{\infty}}{\partial t^2} = \frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \phi^{\infty}}{\partial t^2}$$

La solution fondamentale, ou solution de Green, de l'équation des ondes possède la symétrie sphérique :

$$\phi^{\infty} = \phi^{\infty}(r, t)$$

$$\vec{r} = (\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0)$$

Comme dans ces conditions

$$\nabla^2 \phi^{\infty} = \frac{\partial^2 \phi^{\infty}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi^{\infty}}{\partial r}$$

on peut mettre l'équation des ondes sous la forme de celle des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi^{\infty}) = \frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi^{\infty})$$

et en déduire la solution de d'Alembert

$$r \phi^{\infty} = f\left(t - \frac{r}{a_{\infty}}\right) + g\left(t + \frac{r}{a_{\infty}}\right)$$

En principe l'intérêt est centré sur le corps perturbateur comme source de rayonnement d'énergie acoustique.

La condition de rayonnement est satisfaite en rejetant la solution $g(t + r/a_{\infty})$ qui représente au contraire un apport d'énergie venant de l'infini.

Nous verrons plus tard comment transformer la solution de Green

$$\phi^{\infty} = \frac{f(t - r/a_{\infty})}{r} \quad (4.27)$$

pour une source acoustique fixe par rapport au fluide à l'infini dans celle d'une source fixe dans un écoulement à vitesse uniforme.

5. Règles de similitude pour les écoulements linéarisés permanents.

En régime permanent subsonique ou supersonique linéarisé, l'équation du potentiel de perturbation se réduit à

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.28)$$

avec la condition de tangence à la surface

$$f(x, y, z) = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (4.30)$$

Considérons un autre écoulement, de potentiel de perturbation ψ , dans un espace (X, Y, Z) lié au précédent par les affinités

$$X = \alpha x \quad Y = \beta y \quad Z = \beta z \quad (4.31)$$

de sorte que entre deux points homologues, les valeurs des potentiels soient liés par

$$\psi(X, Y, Z) = \gamma \phi\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}, \frac{Z}{\beta}\right) \quad (4.32)$$

Des relations

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \gamma \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \gamma \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \gamma \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} = \frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{etc ...} \quad (4.33)$$

on déduit que dans l'espace (X, Y, Z) le potentiel ψ satisfait à l'équation

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) = 0$$

Cette équation peut être ramenée à la forme (4.28) en modifiant le nombre de Mach M_∞ en \bar{M}_∞ par la relation

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) = \beta^2 (1 - \bar{M}_\infty^2) \quad (4.34)$$

Ainsi les affinités (4.31) et (4.32) permettent, dans le cas linéarisé, une correspondance biunivoque entre deux écoulements de nombre de Mach différents. Cependant on observera sur (4.34) que M_∞ et \bar{M}_∞ sont nécessairement simultanément subsoniques ou simultanément supersoniques; il est impossible d'obtenir une correspondance biunivoque entre un écoulement subsonique et un écoulement supersonique.

Supposons maintenant que la surface $f(x, y, z) = 0$ subisse la même affinité que celle de l'espace et se transforme dans l'espace (X, Y, Z) en

$$F(X, Y, Z) = f\left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta}, \frac{Z}{\beta}\right) = 0$$

Par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z}$$

et ceci, porté dans (4.30) en même temps que (4.33), transforme la condition de tangence en

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial Y} + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \frac{\partial F}{\partial Z} \right) = 0$$

On en déduit que la surface f , transformée par affinité dans la surface F , reste tangente au nouvel écoulement, à condition que

$$\gamma = \beta^2 / \alpha \quad (4.35)$$

et ceci fixe le coefficient d'affinité entre les deux potentiels.

Basant le calcul du nouveau coefficient de pression en régime permanent par les approximations du second degré

$$\bar{C}_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - (1 - M_\infty^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

$$\bar{C}_p = -2 \frac{\partial \psi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} \right)^2 - (1 - \bar{M}_\infty^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \right)^2$$

on peut constater que tous les termes homologues sont, en vertu de (4.35) et (4.34), dans le même rapport

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2} \frac{\alpha^2}{\gamma^2}$$

De la sorte

$$C_p = \frac{\alpha}{\gamma} \bar{C}_p \quad \text{ou encore}$$

$$(1 - M_\infty^2) C_p = (1 - \bar{M}_\infty^2) \bar{C}_p \quad (4.36)$$

Cette règle d'invariance de similitude est connue sous le nom de règle de Prandtl-Göethert.

Un autre invariant fondamental de similitude est celui du rapport δ entre une dimension transversale caractéristique du corps (suivant oy ou oz) et une dimension longitudinale caractéristique (suivant ox).

Ce rapport étant modifié dans le nouvel espace par multiplication par α/β on obtient l'invariant de similitude

$$\delta \sqrt{1 - M_\infty^2} = \bar{\delta} \sqrt{1 - \bar{M}_\infty^2} \quad \text{en subsonique}$$

$$\delta \sqrt{M_\infty^2 - 1} = \bar{\delta} \sqrt{\bar{M}_\infty^2 - 1} \quad \text{en supersonique}$$

6. Cas de l'écoulement autour d'une surface quasi-plane.

Si la surface à laquelle l'écoulement doit être tangent peut être représentée par l'équation

$$z = h(x, y, t) \quad (4.37)$$

la condition de tangence devient

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}$$

soit

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t}$$

à vérifier sur la surface (4.37).

Pour une surface quasi-plane

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial y} \right| \ll 1$$

on obtient en négligeant au second membre les grandeurs petites du second ordre

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.38)$$

Une nouvelle simplification peut être introduite en développant

$$w(x, y, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

en série de Taylor au voisinage de $z = 0$

$$w = w(x, y, 0, t) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} h(x, y, t) + \dots \quad (4.39)$$

Cette possibilité peut être justifiée a posteriori en établissant le caractère différentiable de $w(x, y, z, t)$ au voisinage de $z = 0$. Ceci a lieu si, par exemple, l'écoulement est représenté par une nappe de singularités placées sur la projection P de la surface dans le plan $z = 0$.

Dès lors, pourvu que la surface s'écarte peu du plan $z = 0$, le second terme de (4.39) est négligeable devant le premier et la condition de tangence peut être complètement linéarisée sous la forme

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{sur } z = 0 \quad (4.40)$$

$(x, y) \in P$

Dans ces problèmes on dispose d'un degré de liberté supplémentaire dans les règles de similitude. En effet la condition (4.35) devient caduque. Elle est remplacée par une condition faisant intervenir un nouveau paramètre d'affinité (indépendant) ϵ , tel que dans le nouvel espace (cas stationnaire)

$$H(X, Y) = c h \left(\frac{X}{\alpha}, \frac{Y}{\beta} \right)$$

Dès lors la nouvelle condition de tangence

$$\frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\partial H}{\partial X} \quad Z = 0$$

$$(X, Y) \in \bar{P}$$

est satisfaite, pourvu que

$$\varepsilon \beta = \alpha \gamma \quad (4.41)$$

Conservant α et ε comme paramètres d'affinité indépendants, M_∞^2 et \bar{M}_∞^2 étant donnés :

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \quad \gamma = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \quad (4.42)$$

Pour la corrélation entre les coefficients de pression on peut, dans le cas de surfaces quasi-planes, limiter les développements à

$$C_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \bar{C}_p = -2 \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4.43)$$

et on en déduit

$$\bar{C}_p = C_p \frac{\varepsilon}{\alpha} \sqrt{\frac{1 - M_\infty^2}{1 - \bar{M}_\infty^2}} \quad (4.44)$$

7. Ecoulement transsonique.

Quand le nombre de Mach de vol est très voisin de l'unité, l'équation linéarisée (4.23) devient singulière par disparition du terme en $\partial^2 \phi / \partial x^2$. Dans ce cas on ne peut plus négliger les termes en $\partial^2 \phi / \partial x^2$ qui proviendraient d'approximations supérieures et qui seraient du même ordre de grandeur que $(1 - M_\infty^2)$.

Le nouveau calcul peut être mené à partir de l'équation exacte (4.12).

Il vient

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} (1 - M_\infty^2 - (\gamma+1) M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - M_\infty^2 (\gamma - M_\infty^2) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t}) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$= M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \quad (4.45)$$

Le même résultat se retrouve à partir du principe variationnel

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \int (C_P)_3 dt dx dy dz = 0$$

où $(C_P)_3$ est une approximation meilleure où figurent tous les termes du troisième degré soit en $(\frac{\partial \phi}{\partial x})^3$ ou $(\frac{\partial \phi}{\partial x})^2 \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

On peut les trouver en étendant d'abord le développement (4.20)

$$C_P = -2h + M_\infty^2 h^2 - \frac{2-\gamma}{3} M_\infty^4 h^3$$

puis en y substituant h et retenant les termes mentionnés :

$$\begin{aligned} (C_P)_3 &= -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) \\ &+ M_\infty^2 \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \frac{1}{U} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &- \frac{2-\gamma}{3} M_\infty^4 \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 + \frac{3}{U} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Soit, en regroupant les termes,

$$\begin{aligned} (C_P)_3 &= -2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \left(1 - M_\infty^2 + M_\infty^2 \left(M_\infty^2 \frac{2-\gamma}{3} - 1 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &- \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles qui en découle par annulation du coefficient de la variation $\delta \phi$ sous le signe intégrale est

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left\{ 1 - M_\infty^2 + M_\infty^2 \left(M_\infty^2 (2-\gamma) - 3 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} + M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\}$$

$$+ 2 M_\infty^2 \left((2-\gamma) M_\infty^2 - 1 \right) \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} = M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \quad (4.46)$$

L'équivalence entre (4.45) et (4.46) peut être établie en faisant $M_\infty^2 = 1$ dans les termes non-linéaires, ce qui ne modifie pas sensiblement l'approximation. Seul apparaît le terme non-linéaire additionnel en

$$\frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Par exemple dans le cas stationnaire, le potentiel vérifie l'équation transsonique

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (4.47)$$

Dans l'espace affine (X, Y, Z) le potentiel ψ vérifiera

$$\frac{\alpha^2}{\gamma} (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\beta^2}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) = (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\alpha^3}{\gamma^2} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2}$$

Pour que ceci constitue une équation transsonique correspondant à un autre nombre de Mach \bar{M}_{∞} , il faudra à la fois

$$\alpha^2 (1 - M_{\infty}^2) = \beta^2 (1 - \bar{M}_{\infty}^2)$$

et $\alpha^3 M_{\infty}^2 = \gamma \beta^2 \bar{M}_{\infty}^2$

Par conséquent, du moment que \bar{M}_{∞} est donné ainsi que le rapport α des dimensions longitudinales, les deux autres paramètres d'affinité sont fixés

$$\beta = \alpha \sqrt{\frac{1 - M_{\infty}^2}{1 - \bar{M}_{\infty}^2}} \quad (4.48)$$

$$\gamma = \alpha \frac{1 - \bar{M}_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \frac{M_{\infty}^2}{\bar{M}_{\infty}^2}$$

La condition de tangence ne peut être conservée que pour une surface quasi-plane.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{sur } z = 0 \quad (x, y) \in P$$

se transforme avec $H = \epsilon h$ en

$$\frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{\partial h}{\partial X} \quad \text{sur } Z = 0 \quad (X, Y) \in \bar{P}$$

et le paramètre ϵ est maintenant fixé par

$$\epsilon = \frac{\alpha \gamma}{\beta} = \alpha \frac{M_{\infty}^2}{\bar{M}_{\infty}^2} \left(\frac{1 - \bar{M}_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} \right)^{3/2} \quad (4.50)$$

Si donc δ est un rapport caractéristique entre une dimension transversale et une dimension longitudinale, la variable réduite fondamentale conservée (paramètre de similitude transsonique) est

$$\frac{\delta M_{\infty}^2}{(1 - M_{\infty}^2)^{3/2}}$$

ou, encore, ce qui a l'avantage de mettre en évidence le signe associé aux régimes transsoniques subsoniques ou supersoniques (qui ne sont comparables entre eux que s'ils sont de même espèce) :

$$\frac{1 - M_{\infty}^2}{(\delta M_{\infty}^2)^{2/3}} \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.51)}$$

Pour la pression on trouve sur la base de $C_p = -2 \frac{\partial \phi}{\partial x}$ le paramètre de similitude

$$\frac{M_{\infty}^2}{1 - M_{\infty}^2} C_p \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.52)}$$

Toute fonction des paramètres de similitude est un paramètre de similitude. Combinant (4.51) et (4.52) on a par exemple

$$\left(\frac{M_{\infty}}{\delta}\right)^{2/3} C_p \quad \text{paramètre de similitude transsonique (4.53)}$$

8. Écoulement hypersonique.

Nous entendons ici par écoulement hypersonique non pas celui où commencent à se produire des effets de gaz réels (modifications de chaleurs spécifiques, dissociations) mais simplement celui où, les perturbations de vitesse restant faibles, celles de pression ne le sont plus.

On doit alors se borner à simplifier l'équation générale (4.7) en la multipliant par a^2 et en y remplaçant

$$a^2 = a_{\infty}^2 - (\gamma - 1) U^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (4.54)$$

qui découle de (4.9) par réduction de h à ses termes les plus importants dans les perturbations de vitesse. De plus on peut, toujours à cause de l'hypothèse des faibles perturbations de vitesse, remplacer

$$u^2 = U^2 \left(1 + 2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad v^2 = 0 \quad w^2 = 0$$

L'équation hypersonique du potentiel de perturbation est alors, après division par a_{∞}^2

$$\begin{aligned} & \left(1 - M_{\infty}^2 - (\gamma + 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ & + \left(1 - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ & - 2 M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - 2 M_{\infty}^2 \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = M_{\infty}^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \end{aligned}$$

Comme, par hypothèse le nombre de Mach est grand, on peut encore négliger dans le coefficient de $\partial^2 \phi / \partial x^2$ les termes en $\partial \phi / \partial x$ et $\partial \phi / \partial t$, ce qui donne finalement

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - (\gamma - 1) M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{1}{U} \frac{\partial \phi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - 2 M_\infty^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) = M_\infty^2 \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{2}{U} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} \right) \quad (4.55)$$

Dans le cas stationnaire

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - (\gamma - 1) M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 2 M_\infty^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right)$$

L'équation est conservée par l'affinité si

$$\alpha M_\infty^2 = \gamma \overline{M}_\infty^2$$

$$\alpha^2 (1 - M_\infty^2) = \beta^2 (1 - \overline{M}_\infty^2)$$

La condition de tangence à une surface quasi-plane est conservée si

$$\epsilon \beta = \alpha \gamma$$

Des paramètres de similitude hypersoniques sont

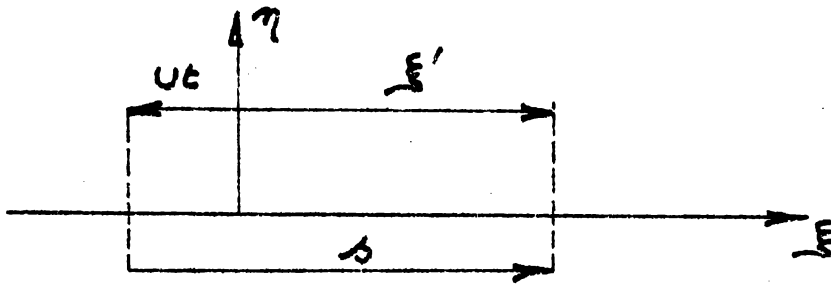
$$\frac{\delta M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad C_p M_\infty^2 \quad (4.56)$$

9. Solution fondamentale du cas linéarisé. Potentiel de perturbation d'une source variable en translation uniforme.

On a vu que dans les axes (ξ, η, ζ, t) au repos par rapport au fluide à l'infini, le potentiel d'une source fixe mais d'intensité variable rayonnant de l'énergie vers l'infini, pouvait s'écrire

$$\phi^* (\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{f(t - r/a_\infty)}{r}$$

Considérons une file de sources sur l'axe $o\xi$ qui commencent à débiter quand elles sont atteintes par un "front d'allumage" se déplaçant à la vitesse U dans la direction des ξ négatifs.



La position d'une source par rapport au front d'allumage est donnée par

$$s = U t + \xi'$$

ξ' étant son abscisse. Il en résulte que, à l'époque t , l'âge de la source (temps écoulé depuis qu'elle a commencé son débit) est

$$\tau = t + \frac{1}{U} \xi'$$

Considérons également l'histoire du débit en un point situé à une distance s fixe en aval du front d'allumage, c'est une fonction du temps t et de la coordonnée s ou de l'âge $\tau = s/U$

$$m(t; \tau) = m(t; t + \xi'/U)$$

Pour une abscisse ξ' déterminée, $m(t; t + \xi'/U)$ est l'histoire du débit de la source fixée en ξ' . Elle est responsable d'un potentiel de perturbation

$$\frac{m(t - r/a_\infty; t + \xi'/U - r/a_\infty)}{r}$$

où
$$r = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Le potentiel dû à l'ensemble des sources est, par superposition,

$$\phi^* (\xi, \eta, \zeta, t) = \int \frac{m(t - r/a_\infty; t + \xi'/U - r/a_\infty) d\xi'}{r}$$

l'intégrale étant étendue aux abscisses ξ' des sources dont le premier front d'onde a atteint ou dépassé le point $P(\xi, \eta, \zeta)$ à l'époque t considérée. Ceci peut s'exprimer en disant que l'âge de la source ξ' par rapport au point P

$$\sigma = \tau - r/a_\infty = t + \xi'/U - r/a_\infty \quad (4.57)$$

doit être positif. Cet âge σ est le temps écoulé au point P depuis le passage du premier front d'onde émis en ξ' .

Ceci suggère de changer la variable d'intégration de ξ' en σ , (ξ, η, ζ, t) étant maintenant constants. Différentions la relation

$$a_\infty^2 (t + \frac{1}{U} \xi' - \sigma)^2 = (\xi - \xi')^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad (4.58)$$

déduite de (4.57)

$$a_{\infty}^2 \left(t + \frac{1}{U} \xi' - \sigma \right) \left(\frac{1}{U} d \xi' - d \sigma \right) = - (\xi - \xi') d \xi'$$

On en tire

$$\frac{d \xi'}{a_{\infty}^2 \left(t + \xi'/U - \sigma \right)} = \frac{d \xi'}{a_{\infty}^2 r} = \frac{U d \sigma}{a_{\infty}^2 \left(t - \xi'/U - \sigma \right) + U (\xi - \xi')} \quad (4.59)$$

et, au dernier membre, l'abscisse ξ' de la source correspondant à un âge déterminé de la source en P doit encore être déterminée. A cet effet résolvons (4.58) par rapport à ξ' . Cette équation du second degré peut s'écrire

$$(1 - M_{\infty}^2)(\xi')^2 + 2 \xi' \left(U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi \right) + U^2(t - \sigma)^2 - M_{\infty}^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0$$

Son discriminant, après réduction, prend la forme

$$M_{\infty}^2 \left((U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2) \right)$$

Par conséquent

$$(1 - M_{\infty}^2) \xi' = - U(t - \sigma) - M_{\infty}^2 \xi \pm M_{\infty} \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.60)$$

et pour la valeur correspondante de r réduite de (4.57)

$$(1 - M_{\infty}^2) r = - M_{\infty} \left(U(t - \sigma) + \xi \right) \pm \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.61)$$

Il faut maintenant distinguer entre le cas du nombre de Mach de vol subsonique et supersonique.

Cas subsonique.

$$1 - M_{\infty}^2 > 0$$

$$M_{\infty} < 1$$

La valeur du radical dans (4.61) étant supérieure à la valeur absolue du premier terme et r devant être positif, seul le signe + convient. Dès lors, selon (4.60), ξ' a une valeur minimum pour $\sigma = 0$

$$\xi_1 = \frac{1}{1 - M_{\infty}^2} \left\{ - Ut - M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} \sqrt{(Ut + \xi)^2 + (1 - M_{\infty}^2)(\eta^2 + \zeta^2)} \right\}$$

Il y a correspondance biunivoque entre σ et ξ' et, à des valeurs croissantes de l'âge σ , correspondent des abscisses ξ' croissantes : $\xi' \rightarrow \infty$ pour $\sigma \rightarrow \infty$. Substituant la valeur générale de ξ' dans (4.59)

$$\frac{d \xi'}{r} = \frac{U d \sigma}{R}$$

$$\text{où } R = \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 + (1 - M_\infty^2)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

et le potentiel prend la forme

$$\phi^{\text{st}}(\xi, \eta, \zeta, t) = \int_0^\infty \frac{U d\sigma}{R} m \left(t + \frac{M_\infty (U(t - \sigma) + \xi) - R}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} ; \sigma \right)$$

Particularisons maintenant ce résultat en supposant que les sources ont un débit impulsif déclenché au moment du passage du front d'allumage :

$$m(t; \tau) = m(t) \delta(\tau)$$

On obtient l'image d'une source de débit variable $m(t)$ se déplaçant avec le front d'allumage. Son potentiel sera

$$\begin{aligned} \phi^{\text{st}}(\xi, \eta, \zeta, t) &= \int_0^\infty \frac{U d\sigma}{R} m \left(t + \frac{M_\infty (U(t - \sigma) + \xi) - R}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right) \delta(\sigma) \\ &= U \frac{m \left(t + \frac{M_\infty (Ut + \xi) - R_0}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right)}{R_0} \end{aligned}$$

$$\text{où } R_0 = \sqrt{(Ut + \xi)^2 + (1 - M_\infty^2)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

Finalement, dans un système de coordonnées qui se déplace avec le front d'allumage :

$$x = Ut + \xi \quad y = \eta \quad z = \zeta$$

$$\phi(x, y, z, t) = U \frac{m \left(t + \frac{M_\infty x - \Lambda}{a_\infty (1 - M_\infty^2)} \right)}{\Lambda} \quad (4.62)$$

$$\Lambda = \sqrt{x^2 + (1 - M_\infty^2)(y^2 + z^2)}$$

Ce potentiel est la solution singulière fondamentale de l'équation linéarisée (4.23) pour $M_\infty < 1$.

Cas supersonique.

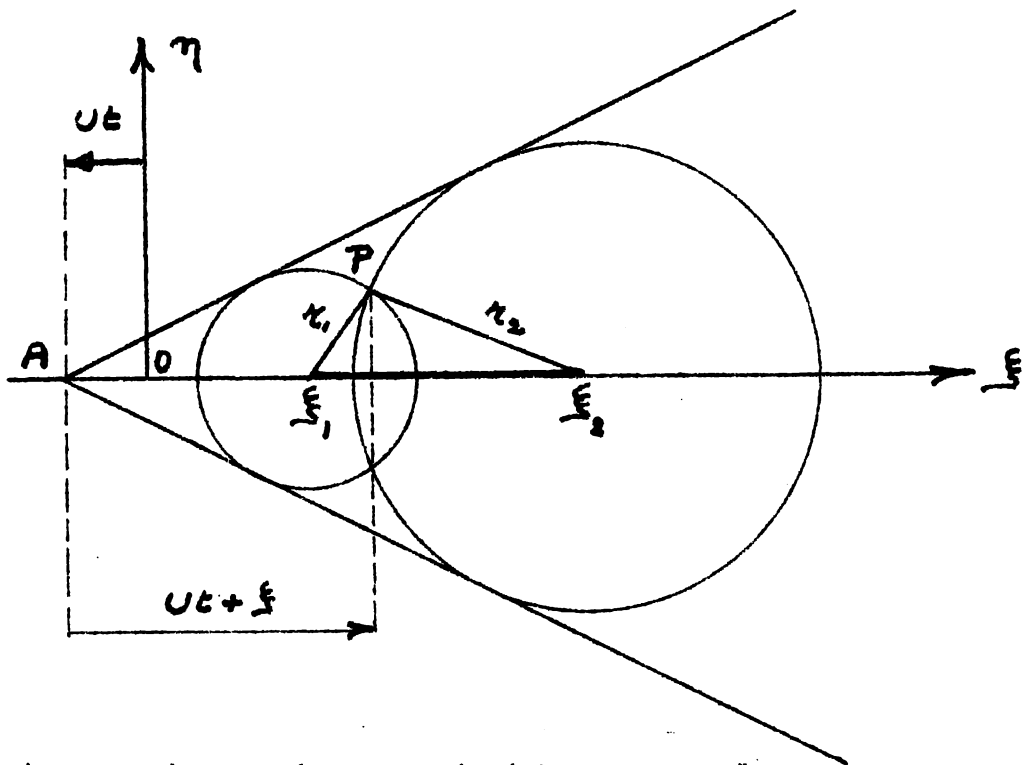
$$M_{\infty}^2 - 1 > 0$$

$$M_{\infty} > 1$$

Il faut écrire (4.61) sous la forme

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} \left(U(t - \sigma) + \xi \right) \pm \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)} \quad (4.63)$$

Le lieu des premiers fronts d'onde émis par les sources est un cône de Mach issu du front d'allumage A et de demi-angle d'ouverture $\sin \beta = M_{\infty}^{-1}$. Il n'y a d'âge positif des sources pour un point P que si celui-ci est intérieur à ce cône.



En particulier on voit que si P est intérieur, $Ut + \xi > 0$.

Alors pour $\sigma = 0$, (4.63) donne deux valeurs positives r_1 et r_2

$$(M_{\infty}^2 - 1) r_1 = M_{\infty} (Ut + \xi) - R_0$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r_2 = M_{\infty} (Ut + \xi) + R_0$$

$$R_0 = \sqrt{(Ut + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

auxquelles correspondent les abscisses de sources ξ_1 et ξ_2

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi_1 = Ut + M_{\infty}^2 \xi - M_{\infty} R_0$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi_2 = Ut + M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} R_0$$

Il y a une valeur maximum de σ pour laquelle R s'annule

$$U \sigma_{\max} = Ut + \xi - \sqrt{M_{\infty}^2 - 1} \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$$

et à laquelle correspond une abscisse de source ξ_0

$$\xi_0 = \xi + \frac{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}{M_{\infty}^2 - 1}$$

Pour la partie $\xi_1 < \xi' < \xi_0$ on aura

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi' = U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi - M_{\infty} R$$

$$R = \sqrt{(U(t - \sigma) + \xi)^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(\eta^2 + \zeta^2)}$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} (Ut + \xi) - R$$

et
$$\frac{d \xi'}{r} = U \frac{d\sigma}{R}$$

Pour la partie $\xi_0 < \xi' < \xi_2$

$$(M_{\infty}^2 - 1) \xi' = U(t - \sigma) + M_{\infty}^2 \xi + M_{\infty} R$$

$$(M_{\infty}^2 - 1) r = M_{\infty} (Ut + \xi) + R$$

$$\frac{d \xi'}{r} = - U \frac{d\sigma}{R}$$

De sorte que le potentiel pourra s'écrire

$$\begin{aligned} \phi^* (\xi, \eta, \zeta, t) = & U \int_0^{\sigma_{\max}} \frac{d\sigma}{R} m \left(t - \frac{M_{\infty} (Ut + \xi) - R}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} ; \sigma \right) \\ & - U \int_{\sigma_{\max}}^0 \frac{d\sigma}{R} m \left(t - \frac{M_{\infty} (Ut + \xi) + R}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} ; \sigma \right) \end{aligned}$$

Particularisant ce résultat au cas de sources impulsives et passant aux axes (x, y, z, t) , il vient

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{U}{\Lambda} \left\{ m \left(t - \frac{M_{\infty} x - \Lambda}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} \right) + m \left(t - \frac{M_{\infty} x + \Lambda}{a_{\infty} (M_{\infty}^2 - 1)} \right) \right\} \quad (4.64)$$

$$\Lambda = \sqrt{x^2 - (M_{\infty}^2 - 1)(y^2 + z^2)}$$

C'est la solution fondamentale de (4.63) dans le cas supersonique pour une singularité à l'origine.

EXERCICES DE MECANIQUE
DES FLUIDES

x x
x

EXERCICES DE MECANIQUE DES FLUIDES.
=====

Méthode des singularités.

Cas de l'hydrodynamique $\rho = \text{constante}$.

La conservation de la masse se réduit à la relation (géométrique)

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

Pour une source de débit massique Q on aura par isotropie

$$4 \pi r^2 \rho V = Q \quad \text{avec une vitesse radiale}$$

$\vec{r} = (x - a, y - b, z - c)$ si la source est centrée au point de coordonnées (a, b, c) . D'où le champ

$$u = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{x - a}{r^3} \quad v = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{y - b}{r^3} \quad w = \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{z - c}{r^3}$$

Il existe un potentiel ϕ pour l'écoulement

$$\vec{V} = \text{grad } \phi \quad \phi = - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r}$$

C'est une solution fondamentale (de Green) de l'équation

$$\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

La source dans un courant uniforme.

Supposons la à l'origine et V la vitesse du courant uniforme suivant ox .

Le potentiel complet est

$$\phi = V x - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r} \quad \text{r (x, y, z)}$$

Dans le plan méridien $y = 0$ on prend ϕ en coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta$$

$$\phi = V r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r}$$

$$\text{vitesse radiale totale : } V \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho r^2}$$

$$\text{tangentielle : } -V \sin \theta$$

Equation différentielle des lignes de courant :

$$\frac{dr}{V \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho r^2}} = - \frac{r d\theta}{V \sin \theta}$$

Elle s'intègre par séparation des variables en éliminant r au profit de z

$$z = r \sin \theta \quad dz = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta$$

et l'équation différentielle devient

$$Vz dz + \frac{Q}{4\pi\rho} \sin \theta d\theta = 0$$

Son intégrale générale est

$$Vz^2 = \frac{Q}{2\pi\rho} (\cos \theta + C)$$

Le point d'arrêt de l'écoulement, d'où part la surface de révolution séparant l'écoulement externe de l'écoulement interne est obtenu en faisant $z = 0$ et $\theta = \pi$. Ceci satisfait l'équation des lignes de courant pour $C = 1$.

L'équation de la courbe méridienne du corps de révolution est

$$z^2 = \frac{Q}{2\pi\rho V} (1 + \cos \theta)$$

A l'infini aval ($\theta = 0$) le rayon du corps tend asymptotiquement vers

$$z = \sqrt{\frac{Q}{\pi \rho U}}$$

exprimant que tout le débit de la source traverse l'aire πz^2 avec la vitesse uniforme U .

Fonction de courant.

On exprime le flux à travers un élément d'arc de méridienne (dx, dz)

$$d\psi = \rho (w \cdot 2\pi z dx - u \cdot 2\pi z dz)$$

$$\text{d'où} \quad u = -\frac{1}{2\pi\rho z} \frac{\partial\psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{2\pi\rho z} \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

et les lignes de courant sont données par

$$\psi = \text{constante}$$

Les conditions d'existence pour ψ sont assurées par $\text{div } \vec{V} = 0$ en coordonnées cylindriques.

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 + z^2 d\omega^2$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} (z u) + \frac{\partial}{\partial z} (z w) + \frac{\partial}{\partial \omega} v \right)$$

Ici $v \equiv 0$ et la relation

$$\frac{\partial}{\partial z} (z w) + \frac{\partial}{\partial x} (z u) = 0$$

est automatiquement satisfaite par $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}$

Dans le cas de la source dans un courant uniforme on trouve par intégration

$$\psi = -\rho \pi z^2 U + \frac{Q}{2} \left(\frac{x}{r} + C \right)$$

(la constante ne jouant aucun rôle peut être supprimée).

En coordonnées polaires

$$\psi = -\rho \pi r^2 \sin^2 \theta U + \frac{Q}{2} \cos \theta$$

Répartition des pressions sur le corps de révolution.

Par la loi de Bernoulli du régime permanent

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

ou

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2}$$

$$v^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\rho} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{Q U \cos \theta}{2 \pi \rho r^2} + U^2$$

$$\frac{v^2}{U^2} - 1 = \left(\frac{Q}{4\pi\rho U} \right)^2 \frac{1}{r^4} + \frac{Q \cos \theta}{2 \pi \rho U} \frac{1}{r^2}$$

Mais, sur la surface du corps,

$$r^2 = r^2 \sin^2 \theta = \frac{Q}{2 \pi \rho U} (1 + \cos \theta)$$

relation qui permet de remplacer r au profit de θ .

On trouve

$$4 C_p = (1 + 3 \cos \theta)(\cos \theta - 1)$$

La pression statique ($C_p = 0$) est atteinte localement pour $\cos \theta = -1/3$ et asymptotiquement en aval pour $\theta = 0$. La pression totale ($C_p = 1$) est atteinte au point d'arrêt $\theta = \pi$. La dépression maximum est atteinte localement pour $\cos \theta = 1/3$ ($C_p = -1/3$).

Écoulement autour d'une sphère. Doublet de sources.

Soit en général $\phi(x - a, y - b, z - c)$ le potentiel d'une singularité localisée au point (a, b, c) et d'intensité I . Plaçons une seconde singularité d'intensité opposée $-I$ en $(a + da, b, c)$. Le potentiel combiné vaut

$$I \{ \phi(x - a, y - b, z - c) - \phi(x - a - da, y - b, z - c) \}$$

$$= I da \frac{\partial \phi(x - a, y - b, z - c)}{\partial (x - a)} + \dots$$

Passant à la limite

$$\lim_{da \rightarrow 0} I da = M \quad (\text{moment du doublet})$$

le potentiel du doublet vaut

$$M \frac{\partial \phi}{\partial x} = - M \frac{\partial \phi}{\partial a}$$

On obtient donc pour un doublet de sources obtenu en plaçant derrière la source Q en $(c, 0, 0)$, une source $-Q$ en $(da, 0, 0)$ et passant à la limite un potentiel

$$- \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{M}{4\pi\rho} \frac{x}{r^3} = \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Dans un courant uniforme le potentiel total est

$$\phi = U r \cos \theta + \frac{M}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

La vitesse radiale totale

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \left(U - \frac{M}{2\pi\rho} \frac{1}{r^3} \right)$$

est nulle sur la sphère de rayon R défini par

$$M = 2 \pi \rho U R^3$$

Cette sphère est alors la surface de séparation fermée entre l'écoulement extérieur et l'écoulement intérieur.

Sur la sphère la vitesse est tangentielle et vaut

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \sin \theta \left(U + \frac{M}{4\pi\rho} \frac{1}{r^3} \right) \Big|_{r=R} = - \frac{3}{2} U \sin \theta$$

Il vient pour le coefficient de pression

$$C_p = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta$$

La pression est localement statique pour $\sin \theta = \pm \frac{2}{3}$. La dépression maximum est atteinte pour $\sin \theta = \pm 1$ où $C_p = -5/4$.

La fonction de courant s'obtient, soit par intégration des relations de définition en (u, w) ; soit par des relations semblables en coordonnées polaires. Exprimant le flux (dans le même sens) à travers un arc de méridienne :

$$d\psi = 2\pi\rho z (u_\theta dr - u_r r d\theta) \quad \text{avec} \quad z = r \sin \theta$$

on obtient les relations de définition de ψ

$$u_r = - \frac{1}{2\pi\rho r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi\rho r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Pour le doublet source dans l'écoulement uniforme

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -U \sin \theta \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2\pi\rho U \sin^2 \theta \left(r - \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2}\right)$$

et, par intégration,

$$\psi = -\pi\rho U \sin^2 \theta \left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right)$$

à une fonction de θ près. La vérification par la deuxième relation montre que cette fonction se réduit à une constante qui peut être prise égale à zéro.

Dans ce cas l'écoulement sur la sphère correspond à $\psi = 0$.

Une autre façon de procéder consisterait à prendre la dérivée partielle en x de la fonction de courant $\frac{x}{2r}$ de la source unitaire et de la multiplier par M pour trouver la fonction de courant du doublet

$$\frac{M}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) = \frac{M x^2}{2 r^3}$$

Remplaçant M par sa valeur en fonction de R et ajoutant la fonction de courant du courant uniforme

$$\psi = -\pi\rho \frac{R^3}{2} U \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

Avec $z = r \sin \theta$ cette expression est bien identique à la précédente.

Force exercée par un courant sur une source.

Pour maintenir une source en place et assurer la permanence de l'écoulement il faut appliquer à la source une force que nous allons calculer. Centrons autour de la source une sphère de rayon r et appliquons au fluide qui s'y trouve contenu le théorème de la quantité de mouvement

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}$$

où \vec{P} est la résultante des pressions sur la sphère et \vec{F} la force appliquée à la source. Par raison de symétrie il suffit de faire le calcul pour la composante de quantité de mouvement dans la direction du courant uniforme (seul présent quand on ôte la source).

$$\frac{dQ_x}{dt} = F_x + F_x$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\text{Vol}} \rho u \, d\tau = \int_{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) \, d\tau + \int_S \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, dS$$

Comme le mouvement est permanent, seule l'intégrale de débit à travers la surface est à évaluer

$$\frac{dQ_x}{dt} = \int_0^\pi \rho u u_r 2\pi z r \, d\theta$$

cù
$$u = U + \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$u_r = U \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\rho} \frac{1}{r^2}$$

$$z = r \sin \theta$$

L'intégration élémentaire donne

$$\frac{dQ_x}{dt} = \frac{4}{3} Q U$$

Pour la composante P_x de la résultante des pressions

$$P_x = - \int_0^\pi p \cos \theta \, 2\pi z r \, d\theta$$

où $p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2)$

$$v^2 = u_r^2 + u_\theta^2 = U^2 + \frac{Q U}{2\pi\rho} \frac{\cos \theta}{r^2} + \left(\frac{Q}{4\pi\rho}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

L'intégration élémentaire donne

$$P_x = \frac{1}{3} Q U$$

Finalement on trouve pour la force appliquée à la source

$$F_x = \frac{d Q_x}{dt} = P_x = Q U$$

Ce résultat se généralise d'emblée pour le cas d'une source plongée dans un écoulement quelconque. Si \vec{V}_0 dénote la vitesse existant dans l'écoulement à l'endroit où la source va être placée, on peut prendre le rayon de la sphère de calcul aussi petit que l'on veut et considérer les conditions de calcul comme celles d'un écoulement localement uniforme de vitesse \vec{V}_0 .

La force sur la source nécessaire à la maintenir en place vaut alors

$$\vec{F} = Q \vec{V}_0$$

Une autre démonstration résulte directement d'une extension du principe de conservation de la masse. On remplace le principe

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, d\tau) = 0$$

par celui plus général

$$\frac{L}{Dt} (\rho \, d\tau) = q \, d\tau$$

où q est alors le débit massique par unité de volume d'une source diffuse dans le volume élémentaire.

Le calcul de la variation de quantité de mouvement d'une particule

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (\rho \vec{V} d\tau) &= \vec{V} \frac{D}{Dt} (\rho d\tau) + \rho d\tau \frac{D\vec{V}}{Dt} \\ &= (q \vec{V} + \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}) d\tau \end{aligned}$$

fait alors apparaître en plus du terme newtonien classique, le terme $q \vec{V} d\tau$ qui, pour conserver aux équations du mouvement leur forme classique, doit être équilibré au second membre par un terme $\vec{F} d\tau$

$$\vec{F} = q \vec{V}$$

représentant la force appliquée par unité de volume pour maintenir en place le système de sources. Cette force est proportionnelle à la vitesse locale du courant.

Paradoxe de d'Alembert.

Soit Q_j un système de sources dans un écoulement uniforme de vitesse \vec{U} . Les forces à appliquer à une source se composent vectoriellement comme les vitesses au droit de cette source provenant de l'écoulement \vec{U} et des vitesses induites par les autres sources.

Théorème : Le système de forces appliquées aux sources en raison de leurs inductions de vitesse mutuelles est statiquement équivalent à zéro.

En effet Q_i induit au droit de Q_j une vitesse

$$\frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

et la force à appliquer à Q_j pour la maintenir en place du fait de la présence de Q_i est

$$\frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Réciproquement la force à appliquer à Q_i pour la maintenir en place du fait de la présence de Q_j sera

$$\frac{Q_i Q_j}{4\pi\rho r_{ij}^3} \vec{r}_{ji}$$

Comme $\vec{r}_{ji} = -\vec{r}_{ij}$ ces deux forces sont toujours égales et opposées suivant la même ligne d'action et forment un système statiquement équivalent à zéro.

Le théorème en découle par superposition des paires d'induction mutuelles.

Considérons maintenant l'écoulement autour d'un corps limité par une surface fermée S obtenu à l'aide d'un système intérieur de sources placées dans le courant uniforme \vec{U} . Appliquant le théorème de la quantité de mouvement au fluide intérieur

$$\frac{D\vec{Q}}{Dt} = \vec{P} + \vec{F}$$

où \vec{P} est la somme vectorielle de l'action des pressions sur la surface S , que nous désirons calculer, et \vec{F} la somme vectorielle des forces appliquées aux sources intérieures. Le premier membre est nul car d'une part le mouvement intérieur est permanent, d'autre part il n'y a pas de flux à travers la surface S . Donc

$$\vec{P} = -\vec{F}$$

D'après le théorème précédent il suffit pour calculer \vec{P} de tenir compte des forces appliquées aux sources par suite de la présence de l'écoulement uniforme \vec{U}

$$\vec{F} = \vec{U} \sum Q_i$$

Mais, si la surface S est fermée, le débit total des sources doit être nul $\sum Q_i = 0$ et donc

$$\vec{P} = 0$$

C'est le paradoxe de d'Alembert.

Appliquant de même le théorème du moment de la quantité de mouvement (ce dernier est aussi constant dans le mouvement intérieur), le moment par rapport à l'origine des actions élémentaires des pressions sur la surface

$$\vec{M} = - \vec{C}$$

où \vec{C} est le moment résultant des forces appliquées aux sources. De nouveau il suffit, en vertu du théorème, de prendre le moment des forces dues à la vitesse \vec{U}

$$\vec{M} = - \sum Q_i (\vec{U} \times \vec{r}_i)$$

Le corps peut donc subir un couple hydrodynamique dans l'écoulement uniforme.

Écoulements irrotationnels à deux dimensions d'un fluide parfait incompressible.

La condition nécessaire et suffisante pour que le tourbillon

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

soit nul est que la vitesse dérive d'un potentiel

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le fluide soit incompressible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

est que l'écoulement possède une fonction de courant

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Par conséquent potentiel et fonction de courant sont liés par des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et le potentiel complexe

$$f = \phi + i \psi$$

est une fonction analytique de la variable complexe

$$z = x + i y$$

Si on connaît $f(z)$ on peut en déduire la vitesse complexe

$$u - i v = \frac{df}{dz}$$

Les lignes de courant $\psi = \text{constante}$ et les équipotentielles $\phi = \text{constante}$ forment, en vertu des équations de Cauchy-Riemann, un réseau orthogonal.

Soit un contour fermé C , contenant éventuellement des singularités de $f(z)$. Le débit volumique Q sortant par C est donné par

$$Q = \oint_C u \, dy - v \, dx = \oint_C d\psi$$

La circulation Γ de la vitesse sur ce contour par

$$\Gamma = \oint_C u \, dx + v \, dy = \oint_C d\phi$$

Par conséquent on trouve pour l'intégrale de la dérivée de $f(z)$ sur le contour fermé la signification

$$\oint_C df = \Gamma + i Q$$

Le potentiel complexe

$$f = \frac{A}{2\pi i} \ln(z - c)$$

où A est une constante complexe et $c = a + i b$ est l'affixe du point singulier du potentiel, donne un champ de vitesse

$$u - i v = \frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z - c}$$

qui possède un pôle simple en $z = c$. Pour un contour C qui entoure le pôle, il vient

$$\oint_C df = \oint_C (u - i v) dz = A$$

Par conséquent le potentiel est celui d'une singularité combinée d'une source filiforme de débit volumique

$$Q = \text{Im} (A)$$

et d'un tourbillon filiforme de circulation

$$\Gamma = \text{Re} (A)$$

Il y a lieu d'écrire ce potentiel sous la forme

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} \ln (z - c)$$

Prenant

$$z - c = r e^{i\theta}$$

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} (\ln r + i \theta)$$

Pour la source seule ($\Gamma = 0$) le potentiel est

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad u_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad u_\theta = 0$$

et la fonction de courant est multivoque

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Pour le tourbillon seul ($Q = 0$) c'est le potentiel qui est multivoque

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad u_r = 0 \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

tandis que la fonction de courant vaut

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Doublets. Ecoulement autour d'un cylindre.

Superposons les potentiels complexes de deux singularités opposées et séparées par la distance complexe dc

$$f = \frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} (\ln(z - c) - \ln(z - c - dc))$$

$$f = -\frac{\Gamma + i Q}{2\pi i} \ln \left(1 - \frac{dc}{z-c}\right) = \frac{(\Gamma + i Q) dc}{2\pi i (z-c)}$$

Si $dc = d\epsilon e^{i\alpha}$

Posons $\lim \Gamma d\epsilon = M$ moment du doublet tourbillon

$\lim Q d\epsilon = N$ moment du doublet source

L'angle α mesure l'orientation du doublet et

$$f = \frac{(M + i N) e^{i\alpha}}{2\pi i (z-c)}$$

Par conséquent un doublet source donne le même potentiel complexe qu'un doublet tourbillon tourné de 90° .

Tout comme le doublet source ponctuel orienté dans le sens d'un écoulement uniforme produit un écoulement autour d'une sphère, le doublet source filiforme de même orientation produit un écoulement autour d'un cylindre. Le potentiel complexe vaut alors

$$f = U z + \frac{N}{2\pi z}$$

La fonction de courant :

$$\psi = U y - \frac{N y}{2\pi(x^2 + y^2)} = U y \left(1 - \frac{N}{2\pi U} \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

La circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ est une ligne de courant correspondant à $\psi = 0$ pour le choix

$$N = 2\pi U a^2$$

Le potentiel complexe de l'écoulement sans circulation autour du cylindre est donc

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

En ajoutant le potentiel d'un tourbillon placé au centre de la circonférence, celle-ci reste ligne de courant. On obtient le potentiel complexe de l'écoulement avec circulation d'intensité Γ autour du cylindre

$$f = U \left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

$$u - i v = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i z}$$

L'affixe des points d'arrêt, où u et v s'annulent simultanément, dépend de l'équation

$$\frac{z}{a} - \frac{a}{z} - 2 i m = 0 \quad \text{où} \quad m = \frac{\Gamma}{4\pi U a}$$

quand $m < 1$ on peut poser

$$z = a e^{i\gamma}$$

et l'équation précédente revient à $\sin \gamma = m$.

Il y a deux points d'arrêt situés symétriquement sur le cylindre, ils confluent au sommet $z = i a$ pour $m = 1$.

quand $m > 1$ on posera

$$z = i k a$$

et le facteur k dépend de l'équation

$$k^2 - 2 m k + 1 = 0$$

dont le produit des racines vaut l'unité. Il n'y a donc qu'une seule racine plus grande que l'unité

$$k = m + \sqrt{m^2 - 1}$$

correspondant à un point d'arrêt situé au sein de l'écoulement. C'est un point double d'une ligne de courant, où les deux branches se coupent à angle droit. En effet en ce point l'écoulement n'a pas de singularité.

Si en $z = z_0$ $\frac{df}{dz} = 0$ et qu'il n'y a pas de singularité il existe un développement convergent du type

$$\frac{df}{dz} = a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

dans le voisinage de $z = z_0$. D'où aussi

$$f = a_0 + \frac{a_1}{2} (z - z_0)^2 + \dots$$

dans ce voisinage. Posons

$$z - z_0 = \epsilon e^{i\alpha}$$

et soit $a_0 = b_0 + i c_0$ $a_1 = b_1 + i c_1$

Alors dans ce voisinage

$$\psi = c_0 + \frac{\epsilon^2}{2} (c_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha) + \dots$$

L'orientation des branches des lignes de courant $\psi = c_0$ qui se croisent en $z = z_0$ sera donnée par

$$c_1 \cos 2\alpha + b_1 \sin 2\alpha = 0$$

A toute solution α de cette relation correspond aussi une solution $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Exercices : Si le courant fait avec l'axe ox un angle $\pi - \alpha$, le potentiel complexe de l'écoulement autour de la circonférence de rayon a est

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - U \left(z e^{+i\alpha} + \frac{a^2}{z} e^{-i\alpha} \right)$$

Si on désire que le point d'arrêt en aval sur la circonférence ait pour affixe $z = a e^{i\gamma}$, la circulation doit être fixée à la valeur

$$\Gamma = -4\pi a \sin(\alpha + \gamma)$$

(avec $\gamma = \pi - \alpha_0$, cette relation devient

$$\Gamma = 4\pi a \sin(\alpha - \alpha_0) \text{) .}$$

Force requise pour maintenir un tourbillon. Théorème de Kutta-Joukowski.

Soit un tourbillon filiforme de circulation Γ , plongé dans un courant uniforme de vitesse U faisant avec ox l'angle β . Le potentiel complexe a pour valeur

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + z U e^{-i\beta}$$

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au fluide contenu dans un cylindre de rayon ϵ centré autour du tourbillon.

Vitesse radiale sur le cylindre : $U \cos(\theta - \beta)$

Variation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (Q_x - i Q_y) &= \rho \int_0^{2\pi} (u - i v) U \cos(\theta - \beta) \epsilon d\theta \\ &= \epsilon U \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon} + U e^{-i\beta} \right) \cos(\theta - \beta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \rho U \Gamma \frac{e^{-i\beta}}{i} = \frac{1}{2} \rho U \Gamma (-\sin \beta - i \cos \beta) \end{aligned}$$

Calcul de la résultante des pressions :

Loi de Bernoulli $p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - v^2)$

$$v^2 = (u - i v)(u + i v) = \frac{df}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right)^*$$

Sur le cylindre

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{-i\theta}}{\epsilon} + U e^{-i\beta} \right) \left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{e^{i\theta}}{\epsilon} + U e^{i\beta} \right) \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 \epsilon^2} + \frac{U\Gamma}{\pi \epsilon} \sin(\beta - \theta) + U^2 \\ p &= p_\infty - \frac{1}{2} \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 \epsilon^2} - \frac{\rho U \Gamma}{2\pi \epsilon} \sin(\beta - \theta) \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre représentent une pression constante de résultante identiquement nulle.

Les deux composantes dues au dernier terme sont :

$$P_x - i P_y = \frac{\rho U \Gamma}{2\pi \epsilon} \int_0^{2\pi} \sin(\beta - \theta) e^{-i\theta} \epsilon d\theta = \frac{1}{2} \rho U \Gamma (\sin \beta + i \cos \beta)$$

Par conséquent, il vient pour la force à appliquer au tourbillon

$$F_x - i F_y = \frac{d}{dt} (Q_x - i Q_y) - (P_x - i P_y)$$

$$= -\rho U \Gamma (\sin \beta + i \cos \beta)$$

ou

$$F_x + i F_y = \rho U \Gamma \quad i e^{i \beta}$$

Elle est proportionnelle à la masse volumique, à la vitesse du courant dans lequel est plongé le tourbillon et à la circulation engendrée par le tourbillon.

Sa direction est obtenue en faisant tourner le vecteur vitesse de 90° dans le sens de la circulation.

Comme pour le cas des sources ponctuelles, ce dernier résultat a une valeur générale. En prenant ϵ suffisamment petit on peut considérer qu'avant l'introduction du tourbillon l'écoulement était uniforme dans le cercle de rayon ϵ . La force qu'il faut appliquer au tourbillon suit alors la même loi, la vitesse à utiliser étant la vitesse locale avant l'introduction du tourbillon.

Interaction entre singularités filiformes.

L'interaction entre sources filiformes suit évidemment une loi semblable à celle entre sources ponctuelles.

Une source de débit volumétrique Q_i (par unité de longueur) induit maintenant au droit d'une autre source Q_j une vitesse radiale

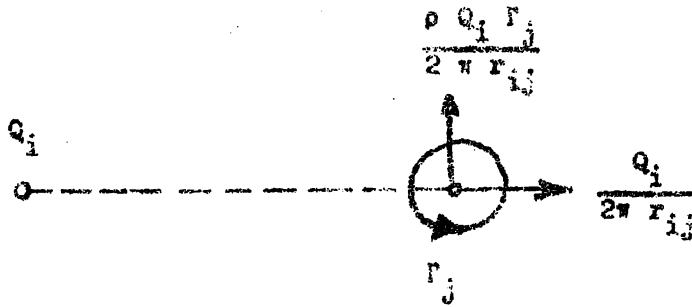
$$\frac{Q_i}{2\pi r_{ij}^2} \quad \vec{r}_{ij}$$

nécessitant sur cette dernière l'application d'une force (par unité de longueur)

$$\rho \frac{Q_i Q_j}{2\pi r_{ij}^2} \quad \vec{r}_{ij}$$

La force à appliquer sur Q_i par suite de la présence de Q_j est manifestement égale et opposée sur la même ligne d'action.

L'interaction entre source et tourbillon filiformes



est constituée par un couple, les forces égales

$$\rho \frac{Q_i \Gamma_j}{2\pi r_{ij}}$$

étant perpendiculaires à la droite joignant les deux singularités.

L'interaction entre tourbillons filiformes est du même type qu'entre sources; deux forces égales et opposées sur la droite joignant les deux singularités :

$$-\rho \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \quad \text{pour la force sur } \Gamma_j \text{ due à la}$$

présence de Γ_i .

Ces considérations permettent une démonstration élémentaire du théorème de Kutta-Joukowski.

Soit un système de sources et tourbillons filiformes réalisant l'écoulement bidimensionnel autour d'un corps fermé avec vitesse \vec{U} à l'infini.

La résultante des pressions sur le corps s'obtient de nouveau par application du théorème de la quantité de mouvement au fluide intérieur. Cette résultante

$$\vec{F} = -\vec{F}$$

où \vec{F} est la somme vectorielle des forces appliquées aux singularités internes. Les forces dues aux interactions entre singularités ont une somme vectorielle nulle. Il suffit de tenir compte des forces provenant de la vitesse \vec{U} à l'infini.

$$\vec{F} = \rho \vec{U} \sum Q_i + (\rho U \sum \Gamma_j) \vec{k}$$

où \vec{k} est un vecteur unitaire obtenu à partir de \vec{i} par une rotation de 90° dans le sens mathématique (cx vers cy).

Pour que le corps soit fermé il faut que $\int \Gamma_j = 0$, d'autre part

$$\int \Gamma_j = \Gamma$$

La circulation autour d'un contour entourant complètement le corps. D'où le théorème de Kutta-Joukowski

$$\vec{P} = -\rho U \Gamma \vec{k}$$

La résultante des pressions est proportionnelle à $\rho U \Gamma$ et obtenue en direction en faisant tourner de 90° dans le sens opposé à la circulation le vecteur vitesse relative à l'infini.

Formules de Blasius.

On a vu que, par la loi de Bernoulli, on peut écrire

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 - \frac{1}{2} \rho \frac{df}{dz} \left(\frac{dz}{dz} \right)^*$$

Soient alors (dx, dy) les éléments d'un contour de profil autour duquel se fait l'écoulement. L'élément de résultante des pressions vaut

$$dP_x - i dP_y = -p dy - i p dx = -i p (dx - i dy) = -i p dz^{**}$$

Il est donc possible de calculer la résultante des pressions par la formule

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_c \frac{df}{dz} dz^{**}$$

En observant que le contour c du profil est une ligne de courant pour laquelle $d\psi = 0$ et donc $dz^{**} = dz$, on obtient la première formule de Blasius

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_c \frac{df}{dz} dz$$

L'élément de moment par rapport à l'origine dû aux pressions sur le contour est

$$dM = -y dP_x + x dP_y = p (x dx + y dy)$$

Observant que $(x dx + y dy)$ est la partie réelle de

$(x + i y) (dx - i dy)$, on aura

$$dM = \operatorname{Re} (p z dz^2)$$

En intégrant sur le contour, la partie constante de la pression n'introduit qu'une valeur imaginaire pure qui peut donc être éliminée (d'ailleurs une pression constante sur une surface fermée donne lieu à une résultante statiquement équivalente à zéro). On obtient ainsi la seconde formule de Blasius

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\rho}{2} \int_C z \frac{df}{dz} dz \right\}$$

Intégration des formules de Blasius.

Soit $z = z(Z)$ la fonction qui réalise une représentation conforme entre les aires extérieures au profil donné (plan z) et à une circonférence unité du plan Z . Par le théorème de Laurent on aura

$$z = b_1 Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots$$

développement convergent pour $|Z| > 1$. La vitesse complexe de l'écoulement autour de la circonférence unité

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ}$$

aura la même valeur à l'infini que dans l'écoulement autour du profil si

$$\frac{dz}{dZ} \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad |Z| \rightarrow \infty$$

Ceci demande $b_1 = 1$.

De plus, il est toujours possible par une translation de faire $a_0 = 0$.

Dans ce cas, l'origine du plan z correspond au point C du profil que l'on appelle le centre du profil et

$$z = Z + \frac{a_1}{Z} + \dots$$

Dans le plan Z le potentiel de l'écoulement est connu :

$$\frac{df}{dZ} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{Z} - U \left(e^{-i\alpha} - \frac{e^{i\alpha}}{Z^2} \right)$$

L'angle que fait la vitesse avec l'axe OX étant ici fixé à α .

Pour calculer les intégrales de Blasius il faut évaluer

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz} &= 1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \\ &= 1 + \frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \frac{a_1^2 + 3a_3}{z^4} + \dots \end{aligned}$$

Ceci permet d'évaluer

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} &= A_0 + \frac{A_1}{z} + \dots \\ z \left(\frac{df}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} &= B_{-1} z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots \end{aligned}$$

D'après le théorème des résidus

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \oint \left(\frac{df}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} dz = 2\pi i \frac{i\rho}{2} A_1$$

$$M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \{ 2\pi i B_1 \}$$

on trouve

$$A_1 = -\frac{\Gamma U}{\pi i} e^{i\alpha}$$

$$B_1 = 2U \left(a_1 e^{2i\alpha} + 1 \right) = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$$

Le premier résultat est conforme au théorème de Kutta-Joukowski

$$P_x - i P_y = -i e^{i\alpha} \rho \Gamma U$$

Le second résultat montre que le moment par rapport au centre du profil ne dépendra que du coefficient complexe a_1 de la fonction de transformation.

Possas

$$a_1 = B^2 e^{2i\beta}$$

il vient

$$M = 2 \pi \rho U^2 B^2 \sin 2(\beta + \alpha)$$

Fixation de la circulation.

Les formules précédentes ne sont uniquement valables que si le développement de Laurent de z converge encore pour $|Z| = 1$, c'est-à-dire si la transformation conforme n'a pas de singularité sur la frontière. Le cas intéressant est précisément celui où une singularité se présente, correspondant à un point anguleux du profil.

Soit un profil présentant un point anguleux en $z = z_0$ où la rotation de la tangente subit une discontinuité égale à $n\pi$ ($n \leq 1$).

Si $Z = e^{i(\pi - \alpha_0)}$ est le point image sur la circonférence unité, considérons la fonction $(Z + e^{-i\alpha_0})^{1+n}$.

Au voisinage du point image $Z = -e^{-i\alpha_0} + \epsilon e^{i\theta}$, cette fonction

$$\epsilon^{1+n} e^{i\theta(1+n)}$$

subit la discontinuité d'argument $\pi(1+n)$ quand on parcourt la circonférence unité; elle est identique à la discontinuité d'argument subie par la fonction $(z - z_0)$ quand le point image parcourt le profil. Par conséquent si on pose

$$z - z_0 = (Z + e^{-i\alpha_0})^{1+n} g(Z)$$

pour la fonction de représentation conforme, $g(Z)$ peut être prise régulière sur la circonférence unité.

Cependant, sauf pour le cas limite $n = 1$, le premier facteur possède en $Z = -e^{-i\alpha_0}$ un point de branchement et la fonction de représentation conforme n'est univoque que si $g(Z)$ possède une singularité compensatrice à l'intérieur du cercle unité. Sans restreindre la généralité on peut prendre un point de branchement compensateur à l'origine et choisir la fonction de représentation conforme sous la forme

$$z - z_0 = \left(1 + \frac{e^{-i\alpha_0}}{Z}\right)^{1+\eta} h(Z)$$

où $h(Z)$ n'a plus de singularités sur la circonférence unité, ni à distance finie en dehors.

La détermination choisie pour le premier facteur est telle que

$$\left(1 + \frac{e^{-i\alpha_0}}{Z}\right)^{1+\eta} = 1 + (1+\eta) e^{-i\alpha_0} \frac{1}{Z} + \frac{\eta(1+\eta)}{2} e^{-2i\alpha_0} \frac{1}{Z^2} + \dots$$

pour $|Z| > 1$.

On voit alors que pour avoir une correspondance entre les vitesses à l'infini

$$\frac{dw}{dz} \rightarrow 1 \quad |Z| \rightarrow \infty$$

$h(Z)$ doit être de la forme

$$h(Z) = Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots$$

c'est-à-dire avoir un pôle simple de résidu unité au point à l'infini.

Le choix $z_0 = 0$ revient à placer l'origine du plan z à la pointe du profil.

Le choix $\alpha_0 = 0$ ne restreint pas davantage la généralité car il revient seulement à modifier les coefficients a_j ($j = 0, 1, \dots$) de $h(Z)$. Nous adopterons donc la forme canonique :

$$z = \left(1 + \frac{1}{Z}\right)^{1+\eta} \left(Z + a_0 + \frac{a_1}{Z} + \dots\right)$$

qui pour $|Z| > 1$ donne lieu aux développements convergents

$$z = Z + (a_0 + 1 + \eta) + \frac{m_2}{Z} + \dots$$

$$\frac{dZ}{dz} = 1 + \frac{m_2}{Z^2} + \dots$$

où $m_2 = a_1 + a_0(1+\eta) + \frac{1}{2} \eta(1+\eta)$

Enfin pour un profil à point anguleux, la circulation de la vitesse doit être fixée par la condition que la vitesse ne devienne pas infinie à la pointe (condition de Kutta). Or la vitesse complexe est donnée par

$\frac{df}{dz} / \frac{dz}{dz}$ et le dénominateur

$$\frac{ds}{dz} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n \left((1+n) h(z) + \left(1 + \frac{1}{z}\right) \frac{dh}{dz} \right)$$

possède un zéro d'ordre n en $Z = -1$. La vitesse ne sera finie en ce point que si Γ est choisi tel que $\frac{df}{dz}$ s'annule pour $Z = -1$. Ceci a lieu pour

$$\Gamma = h \mp U \sin \alpha$$

et dans ce cas

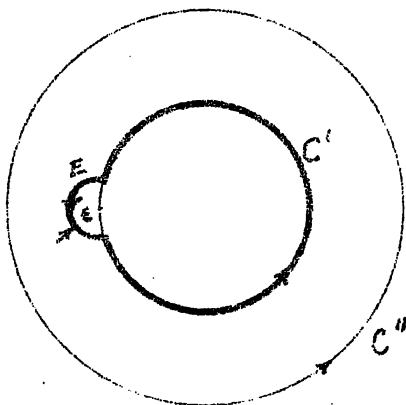
$$\frac{df}{dz} = U \left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(-e^{i\alpha} + \frac{e^{-i\alpha}}{z} \right)$$

possède un zéro d'ordre 1 en $Z = -1$.

Si $n < 1$ la vitesse est nulle à la pointe. Dans le cas limite $n = 1$ d'un point de rebroussement.

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{\text{pointe}} = -U \cos \alpha / h(-1)$$

Pour intégrer les formules de Blasius il faut amputer le contour de la circonférence unité de la partie interceptée par un petit demi-cercle E de rayon ϵ centré en $Z = -1$. Les intégrales de Blasius sont alors à interpréter comme



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'}$$

Or, si C'' dénote un contour extérieur à $C' + E$

$$\int_{C''} = \int_{C'} + \int_E$$

car les fonctions intégrées sont holomorphes dans le domaine annulaire limité par les contours. Donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'} = \int_{C''} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_E$$

La contribution de la dernière intégrale est toujours nulle.

En effet les fonctions intégrées ont respectivement un zéro d'ordre $2 - n$ et d'ordre 3 en $Z = -1$ et sur E les modules des intégrales sont bornés par des expressions du type

$$\left| \int_E \right| < H \epsilon^m \quad \text{avec } m = 3 - n \quad \text{et } 4.$$

(Noter que si la circulation n'était pas fixée par la condition de Kutta, ces valeurs seraient $m = 1 - n$ et 2. Pour $n < 1$ les contributions seraient encore nulles. Pour $n = 1$ on aurait une contribution de la pointe dans la première intégrale).

Les intégrales sur C'' s'évaluent comme auparavant par le théorème des résidus. Elles donnent :

$$P_x - i P_y = -2 \pi \rho U^2 (-1 + e^{2i\alpha})$$

La portance $L = P_x \sin \alpha + P_y \cos \alpha = 4 \pi \rho U^2 \sin \alpha$

La traînée $D = P_y \sin \alpha - P_x \cos \alpha = 0$.

Pour le moment par rapport à la pointe du profil :

$$M = 2 \pi \rho U^2 \left\{ M_0 + M_1 \sin 2(\alpha + \phi) \right\}$$

où $M_0 = -\text{Im}(a_0)$

et $a_0(2+n) + a_1 + \frac{1}{2}(1+n)(2+n) = M_1 e^{+2i\phi}$

Il existe toujours un foyer aérodynamique, c'est-à-dire un point F par rapport auquel le moment est indépendant de l'incidence. Soit $x_F + i y_F = R e^{i\omega}$ son affixe (rappelons que la pointe du profil est à l'origine et que l'axe oex est la corde de portance nulle car $L = 0$ pour $\alpha = 0$).

Le couple de transport nécessaire pour ramener la portance au foyer est

$$\begin{aligned} y_F P_x - x_F P_y &= \text{Im} \left\{ (P_x - i P_y) (x_F + i y_F) \right\} \\ &= 2 \pi \rho U^2 \text{Im} \left\{ (1 - e^{2i\alpha}) R e^{i\omega} \right\} \\ &= 2 \pi \rho U^2 \left(R \sin \omega - R \sin (2\alpha + \omega) \right) \end{aligned}$$

Ajoutant ce couple au moment par rapport à la pointe, on voit que le moment devient indépendant de α si

$$\operatorname{Re} i e^{i\alpha} = M_1 e^{2i\alpha}$$

Les coordonnées du foyer sont donc données directement par

$$x_F + i y_F = a_0 (2 + \eta) + a_1 + \frac{1}{2} (1 + \eta) (2 + \eta)$$

La valeur du moment indépendant de l'incidence est

$$2 \pi \rho U^2 (h_0 + R \sin \alpha)$$

Si ce moment est nul, le profil est à centre de poussée fixe, c'est-à-dire que la résultante aérodynamique est toujours appliquée en F . Ceci a lieu pour

$$(1 + \eta) \operatorname{Im} (a_0) + \operatorname{Im} (a_1) = 0.$$

Les coefficients de $h(z)$ à partir de z^{-2} modifient la forme du profil mais sont sans effet sur la résultante aérodynamique.

Théorème de Lagally.

Ce théorème donne la force exercée sur un obstacle cylindrique par une singularité filiforme extérieure.

Soit $z = c$ l'affixe de cette singularité dont le potentiel complexe est

$$f_A(z) = \frac{A}{2\pi i} \ln(z - c) \quad A = \Gamma + i Q$$

A grande distance de l'obstacle le potentiel complexe complémentaire de l'écoulement est de la forme :

$$f_B(z) = (U - i V)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots$$

la vitesse complexe à l'infini étant $(U - i V)$ et la circulation autour de l'obstacle étant Γ .

(Noter que ce potentiel complémentaire n'est pas le potentiel de l'écoulement autour de l'obstacle en l'absence de la singularité, car l'introduction de celle-ci induit une répartition de vitesse sur le contour de l'obstacle qui

nécessite une modification de ce potentiel pour que l'obstacle reste une ligne de courant). La vitesse complexe totale est,

$$w = \frac{df_A}{dz} + \frac{df_B}{dz} = \frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z-c} + g(z)$$

Par la formule de Blasius la résultante complexe sur l'obstacle est

$$X - i Y = \frac{i\rho}{2} \int_C w^2 dz = \frac{i\rho}{2} \left\{ \int_{C'} w^2 dz - \int_\gamma w^2 dz \right\}$$

C'est un contour plus large englobant la singularité, γ un petit contour entourant la singularité. C' peut être pris tellement grand que

$$\frac{1}{z-c} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - c/z} \right) = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{c}{z} + \frac{c^2}{z^2} + \dots \right)$$

est convergent sur C' ainsi que

$$g(z) = \frac{df_B}{dz} = (U - i V) + \frac{\Gamma}{2\pi i z} - \frac{B_1}{z^2} + \dots$$

Alors, par le théorème des résidus,

$$\int_{C'} w^2 dz = 2(U - i V)(\Gamma + A)$$

A l'intérieur et sur γ , $g(z)$ est holomorphe, donc par le théorème des résidus

$$\int_\gamma w^2 dz = \int_\gamma \left(\frac{A}{2\pi i} \frac{1}{z-c} + g(z) \right)^2 dz = 2 A g(c)$$

La vitesse complexe $g(c) = u_c - i v_c$ peut être interprétée comme la vitesse existant (au sens de valeur principale) au droit de la singularité (ce n'est pas la vitesse au droit de la singularité en l'absence de celle-ci).

Le résultat final est le théorème de Lagally

$$X - i Y = i \rho (U - i V) \Gamma + i \rho A (U - i V - u_c + i v_c)$$

Le second terme représente la force complexe additionnelle provenant de la présence de la source. Le théorème de Lagally ramène le calcul de cette force à celui de la vitesse au droit de la singularité.

Un résultat analogue peut être établi pour le moment :

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2} \rho \int_C z w^2 dz \right)$$

$$M = \rho \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i R_1 (U - iV) + c A (u_c - i v_c - U + iV) + \frac{i A \Gamma}{2 \pi} \right\}$$

Dans le théorème de Lagally les singularités extérieures doivent être maintenues fixes car la pression a été calculée par la loi de Bernoulli du mouvement permanent. Si les singularités sont libres, le mouvement ne sera plus permanent et la pression doit être calculée par le théorème de Kelvin

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Ceci amène la généralisation suivante des formules de Blasius

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} dz + i\rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dz^{\mathbb{N}}$$

Cependant sur le contour C on a $\psi = q(t)$ puisqu'il est à chaque instant une ligne de courant. Donc $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{dq(t)}{dt}$ est indépendant de z sur C et

$$\int_C \frac{\partial \psi}{\partial t} dz^{\mathbb{N}} = \frac{dq}{dt} \int_C dz^{\mathbb{N}} = 0$$

Dès lors $\int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} dz^{\mathbb{N}} = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - i \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dz^{\mathbb{N}} = \left\{ \int_C \frac{\partial f}{\partial t} dz \right\}^{\mathbb{N}}$ et

$$P_x - i P_y = \frac{i\rho}{2} \int_C \frac{df}{dz} dz + i\rho \left\{ \int_C \frac{\partial f}{\partial t} dz \right\}^{\mathbb{N}}$$

Cette formule, due à Risbonchinsky, ramène de nouveau le calcul de la résultante à des intégrations de fonctions analytiques.

Pour le calcul du moment on trouve

$$M = -\rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \int_C z \frac{df}{dz} dz + \int_C z \frac{\partial f}{\partial t} dz^{\mathbb{N}} \right\}$$

La détermination de la vitesse au droit d'une singularité peut se faire du moment que l'on connaît la représentation conforme entre les aires extérieures à l'obstacle et à une circonférence $|Z| = a$.

Soit $Z = q$ l'image de l'affixe $z = c$ de la singularité.

A un petit contour fermé γ entourant la singularité correspond un petit contour fermé γ' entourant son image et le long de ces contours les valeurs numériques du potentiel complexe se correspondent bi-univoquement :

$$f(z) = f[z(Z)] = F(Z)$$

On aura donc également

$$\int_{\gamma} df = \int_{\gamma} \frac{df}{dz} dz = \int_{\gamma'} \frac{df}{dz} \frac{dz}{dZ} dZ = \int_{\gamma'} dF = A$$

si bien que le débit volumétrique et la circulation sont identiques; la singularité image est de même nature que l'originale.

Dans le plan Z une source en présence du cylindre circulaire donne lieu à un potentiel complexe

$$\frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln(Z - q) + \ln\left(Z - \frac{a^2}{q}\right) - \ln Z \right\}$$

Autrement dit, il faut placer à l'intérieur du cylindre une source de même intensité au point d'affixe réciproque a^2/q et au centre une source d'intensité opposée pour que le cylindre demeure une ligne de courant. En effet

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{(Z - q)(Z - a^2/q)}{Z}$$

a une valeur constante $\frac{Q}{2\pi} \arg q$ pour $Z = a e^{i\theta}$.

Un tourbillon donne lieu à un potentiel complexe

$$\frac{\Gamma}{2\pi i} \left\{ \ln(Z - q) - \ln\left(Z - \frac{a^2}{q}\right) + \ln Z \right\}$$

Il faut placer un tourbillon de circulation opposée à l'intérieur du cylindre au point d'affixe réciproque, duquel cas le cylindre demeure déjà une ligne de courant. Le tourbillon de même intensité à l'origine est destiné à éviter de modifier la circulation totale autour du cylindre.

En effet $\frac{Z - q}{Z - a^2/q}$ a un module constant pour $Z = a e^{i\theta}$.

Les contributions à la vitesse complexe dans le plan z s'obtiennent alors par la relation :

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{dz} .$$