UNE GÉNÉRALISATION DU PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES SYSTÈMES BANG-BANG AVEC LIMITATION DU NOMBRE DE COMMUTATIONS

PAR

B. FRAEIJS DE VEUBEKE

1. Introduction

Soit

$$\dot{q} = f(q, t) + \alpha g(q, t) \tag{1}$$

le système différentiel gouvernant l'évolution d'un processus contrôlé par une commande bang-bang α. Sans restreindre la généralité on peut supposer que les valeurs prises par α sont $+1$ et -1, de sorte que l'espace hodographe ne comporte que les points de manœuvrabilité $f+g$ et $f-g$. Toute solution physique acceptable pour une évolution optimale ne peut comporter qu'un nombre fini de commutations de la commande.

Il faut considérer que, dans ces conditions, le minimum de la fonctionnelle de certains problèmes devient inaccessible. Pour s'en assurer il suffit de remplacer le problème physique par le problème mathématique « relaxé » où la manœuvrabilité du système est étendue au plus petit domaine convexe contenant les points de manœuvrabilité originaux [1, 2, 3].

Ce procédé régularise les comportements bang-bang limites de la commande où les intervalles de temps entre deux commutations successives tendent vers zéro. Dans le cas présent la manœuvrabilité s'en trouve étendue au segment de droite joignant les points $f+g$ et $f-g$ et il suffit pour cela de considérer que la commande α peut prendre toute valeur dans l'intervalle fermé $[-1, +1]$.

Si une trajectoire optimale du problème relaxé comporte un « arc de réticence », c'est-à-dire un arc le long duquel la commande prend des valeurs intérieures à l'intervalle, le minimum de la fonctionnelle est physiquement inaccessible. Il se pose alors un problème intéressant et important du point de vue pratique : déterminer le comportement bang-bang optimal de la commande pour atteindre le minimum de la fonctionnelle parmi toutes les solutions comportant un nombre fini spécifié de commutations.

La solution implique une généralisation du principe du maximum, dont la démonstration est esquissée plus loin. Elle consiste à déterminer au préalable la solution du problème relaxé. Ensuite à intégrer le problème à commande bang-bang avec des conditions initiales choisies dans le voisinage de celles du problème relaxé, en déterminant comme suit la commande optimale :

— par le principe du maximum ordinaire pour les arcs correspondant aux arcs réguliers du problème relaxé;
— par un principe du minimum du Hamiltonien pour la simulation en bang-bang d'un arc de réticence.

Éventuellement le nombre spécifié de commutations doit être suffisamment grand et d'une parité convenable pour pouvoir satisfaire aux conditions terminales demandées.

Des exemples, où le problème est susceptible d'une solution analytique complète [4], ont motivé l'intérêt d'une théorie plus générale et l'utilisation du test de la variation seconde [5] pour établir le caractère optimal des solutions.

2. Variable commandée et variables entraînées

Pour simplifier le traitement général introduisons un changement de variables d'état inspiré des méthodes de l'hydrodynamique.

Considérons les lignes de courant engendrées par le système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{g_1(q,t)} = \frac{\mathrm{d}q_2}{g_2(q,t)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}q_n}{g_n(q,t)} = \mathrm{d}a_1 \qquad (2)$$

où t est considéré comme un paramètre. Soient

$$a_i = a_i(q,t) \qquad i = 1, 2 \ldots n \qquad (3)$$

un système de n intégrales premières, résolues par rapport aux constantes d'intégration. Prenons celles-ci comme nouvelles variables d'état. En vertu de (2), les fonctions inverses

$$q_i = q_i(a,t) \qquad (4)$$

ont les propriétés

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1} = g_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \qquad (5)$$

La transformation canonique

$$\mu_i \,\mathrm{d}_{a_i} - K\mathrm{d}t = \lambda_j \,\mathrm{d}_{q_j} - H\mathrm{d}t \qquad (5)$$

permet d'établir la correspondance entre les anciens multiplicateurs λ_j et les nouveaux μ_i :

$$\lambda_j = \mu_i \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \tag{7}$$

De même le nouvel Hamiltonien devient

$$K = H + \mu_i \frac{\partial a_i}{\partial t} \tag{8}$$

où

$$H = \lambda_j (f_j + \alpha g_j) \tag{9}$$

Notons que, en vertu de (7),

$$\lambda_j f_j = \mu_i \frac{\partial a_i}{\partial q_j} f_j$$

et, en vertu de (7) et de (5),

$$\lambda_j g_j = \mu_i \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial a_1} = \mu_1 \tag{10}$$

Par conséquent, posant

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial q_j} f_j = h_i(a, t) \tag{11}$$

le nouvel Hamiltonien est

$$K = \mu_i h_i(a, t) + \alpha \mu_1 \tag{12}$$

et les équations différentielles gouvernant les nouvelles variables d'état sont du type

$$\dot{a}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mu_1} = h_1(a, t) + \alpha \tag{13}$$

$$\dot{a}_m = \frac{\partial K}{\partial \mu_m} = h_m(a, t) \quad (m = 2 \ldots n) \tag{14}$$

Il est logique de qualifier a_1 de « variable commandée ».

L'intervention de la commande sur les autres variables ne se fait sentir qu'indirectement par l'influence de la variable commandée comme argument des fonctions h_m. Les variables $a_m (m = 2 \ldots n)$ peuvent être appelées « variables entraînées ».

Nous excluons le cas où $\partial h_m/\partial a_1 \equiv 0$ ($m = 2 \dots n$); car dans ce cas le système est scindé en deux parties et nous n'avons aucun contrôle sur l'évolution de la seconde.

Les équations différentielles auxquelles obéissent les variables adjointes sont

$$\dot{\mu}_j = -\frac{\partial K}{\partial a_j} = -\mu_i \frac{\partial h_i}{\partial a_j} \tag{15}$$

3. Arc de réticence

L'application du principe du maximum au Hamiltonien K conduit aux cas suivants

$\mu_1 > 0$ implique le choix $\alpha = 1$
$\mu_1 < 0$ $\alpha = -1$

Dans le problème relaxé intervient de plus le cas où μ_1 reste nul durant un certain temps, ce qui sera noté

$$\mu_1 \doteq 0 \tag{16}$$

et où cette relation peut être satisfaite par un choix de valeurs de la commande comprises dans l'intervalle $[-1, +1]$. Le long de cet « arc de réticence » on aura par différentiation et considération de (15) et (16) :

$$\dot{\mu}_1 = -\sum_2^n \mu_m \frac{\partial h_m}{\partial a_1} \doteq 0 \tag{17}$$

Notons déjà que cette relation implique la stationnarité du Hamiltonien partiel du système entraîné

$$K_e = \sum_2^n \mu_m h_m$$

par rapport à la variable commandée a_1. Ceci suggère que, le long d'un arc de réticence, il se pourrait bien que l'évolution du système entraîné se fasse en considérant a_1 comme la variable de commande de ce système.

Elle serait alors choisie en maximisant le Hamiltonien K_e, ce qui a lieu si on vérifie (17) et si

$$-\sum_2^n \mu_m \frac{\partial^2 h_m}{\partial a_1^2} > 0 \tag{18}$$

L'évolution complète du système s'en trouve définie le long de la réticence.

Les valeurs de la véritable commande α compatibles avec cette évolution, se déduisent de (13). Pour que l'arc de réticence soit admissible, ces valeurs ne peuvent sortir de l'intervalle $[-1, +1]$.

La condition (18) est en fait suffisante mais nullement nécessaire pour que le choix de a_1 rende maximum le Hamiltonien partiel. Si l'on envisage la condition nécessaire

$$-\sum_{2}^{n} \mu_m \frac{\partial h_m}{\partial a_1^2} \geqq 0 \tag{19}$$

à cet effet, une des étapes essentielles sera de montrer que cette même condition est aussi nécessaire pour l'optimalité de la trajectoire. En effet on verra qu'elle découle du caractère non négatif que doit avoir la variation seconde de la fonctionnelle à minimiser.

La condition plus stricte (18) sera satisfaite quand la variation seconde de la fonctionnelle sera définie positive, ce qui apporte un critère suffisant d'optimalité de la trajectoire. Dans ce cas on pourra donc dire que, si la trajectoire comporte un arc de réticence, la variable commandée joue le long de celui-ci le rôle de commande pour le système entraîné, dont elle maximise le Hamiltonien. La même condition (18), nous servira alors pour substituer à l'arc de réticence une succession d'arcs $\alpha = \pm 1$, c'est-à-dire un comportement bang-bang tel que la fonctionnelle soit optimisée pour un nombre spécifié de commutations.

4. La variation premiére — Normalité

Précisons d'abord que la fonctionnelle à minimiser est une fonction suffisamment différentiable de l'état initial et de son époque t_0, ainsi que de l'état final et de son époque t_f

$$I[t_0, a(t_0), t_f, a(t_f)] \text{ minimum} \tag{20}$$

La trajectoire est de plus soumise à des contraintes terminales liant les mêmes variables :

$$U_p[t_0, a(t_0), t_f, a(t_f)] = 0 \quad p = 1, 2 \ldots P \leqq 2n+1 \tag{21}$$

Nous n'aurons besoin que d'une théorie partielle de la variation seconde, impliquant des perturbations de commande uniquement sur l'arc de réticence où elles sont précisément libres (les valeurs optimales $\hat{\alpha}$ étant strictement intérieures à l'intervalle $[-1, +1]$. Considérons alors les perturbations de différents ordres sur la commande et sur l'état

$$\alpha = \hat{\alpha} + \varepsilon u + \varepsilon^2 v + \varepsilon^3 w + \ldots$$

$$a = \hat{a} + \varepsilon X + \varepsilon^2 Y + \varepsilon^3 Z + \ldots$$

la trajectoire optimale correspondant à la valeur nulle du petit paramètre ε.

Avec les notations :

$$\Delta^1 h_j(X;t) = (\partial h_j/\partial a_m) \wedge X_m$$

$$\Delta^2 h_j(X, Y;t) = (\partial^2 h_j/\partial a_m \partial a_p) \wedge X_m Y_p$$

$$\Delta^3 h_j(X, Y, Z;t) = (\partial^3 h_j/\partial a_m \partial a_p \partial a_q) \wedge X_m Y_p Z_q$$

Nous obtenons les équations aux perturbations, obtenues en collectant les termes des différentes puissances de ε dans les équations différentielles (13) et (14)

$$\dot{X}_j - \Delta^1 h_j(X;t) = \delta_{1j} u$$

$$\dot{Y}_j - \Delta^1 h_j(Y;t) = \delta_{1j} v + \frac{1}{2} \Delta^2 h_j(X, X;t)$$

$$\dot{Z}_j - \Delta^1 h_j(Z;t) = \delta_{1j} w + \Delta^2 h_j(X, Y;t) + \frac{1}{6} \Delta^3 h_j(X, X, X;t) \tag{22}$$

Une théorie générale de la variation seconde demanderait une perturbation de la variable indépendante et l'introduction des perturbations totales (non isochrones) correspondantes sur l'état [5]. Toutefois ceci n'est pas indispensable au but poursuivi ici et nous considérons t_0 et t_f comme fixes. Le développement Taylorien de la perturbation de la fonctionnelle est alors

$$I[t_0, \hat{a}(t_0)+\delta a(t_0), t_f, \hat{a}(t_f)+\delta a(t_f)] = I[t_0, \hat{a}(t_0)_2\, t_f, \hat{a}(t_f)] +$$
$$+ \Delta^1 I[\delta a(t_0), \delta a(t_f)] + \frac{1}{2} \Delta^2 I[\delta a(t_0), \delta a(t_f)] + \ldots$$

où $\Delta^1 I$ et $\Delta^2 I$ dénotent les termes du premier et du second degré dans les accroissements des $2n$ variables des états terminaux.
Substituant

$$\delta a(t_0) = \varepsilon X(t_0) + \varepsilon^2 Y(t_0) + \ldots$$

$$\delta a(t_f) = \varepsilon X(t_f) + \varepsilon^2 Y(t_f) + \ldots$$

il vient finalement

$$I = \hat{I} + \varepsilon \Delta^1 I[X(t_0), X(t_f)] +$$
$$+ \varepsilon^2 \left\{ \Delta^1 I[Y(t_0), Y(t_f)] + \frac{1}{2} \Delta^2 I[X(t_0), X(t_f)] \right\} + \ldots \tag{23}$$

Un développement similaire est applicable aux contraintes terminales :

$$U_p = \hat{U}_p + \varepsilon \Delta^1 U_p[X(t_0), X(t_f)] +$$

$$+\varepsilon^2 \left\{ \Delta^1 U_p[Y(t_0), Y(t_f)] + \frac{1}{2} \Delta^2 U_p[X(t_0), X(t_f)] \right\} + \dots \qquad (24)$$

Nous introduisons maintenant l'hypothèse de « normalité » de la trajectoire optimale; elle implique :

1. que les $P+1$ formes linéaires

$$\Delta^1 I[X(t_0), X(t_f)], \quad \Delta^1 U_p[X(t_0), X(t_f)]$$

soient linéairement indépendantes.

2. que sur la trajectoire optimale, les équations différentielles (13), (14) et (15), les conditions de transversalité

$$\mu_j(t_0) = \frac{\partial J}{\partial a_j(t_0)}, \qquad \mu_j(t_f) = -\frac{\partial J}{\partial a_j(t_f)} \qquad (25)$$

$$K(t_0) = -\frac{\partial J}{\partial t_0}, \qquad K(t_f) = \frac{\partial J}{\partial t_f} \qquad (26)$$

où

$$J = I + \Sigma \nu_p U_p \qquad (27)$$

et les conditions aux limites (21), nécessaires pour l'annulation de la variation première de la fonctionnelle, déterminent univoquement les fonctions $\mu_j(t)$ et les multiplicateurs constants ν_p.

Dans ces conditions la nullité de la forme linéaire

$$[\mu_j X_j]_{t_0}^{t_f} = 0 \qquad (28)$$

constitue l'unique contrainte additionnelle imposée aux perturbations isochrones du premier ordre des états terminaux par les contraintes différentielles (13) et (14). On trouve en effet par (13), (14) et (15) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu_j X_j) = -X_j \mu_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial a_j}\right) + \mu_j \Delta^1 h_j + \mu_j \delta_{1j} u$$

$$= \mu_1 u$$

Dans notre cas particulier, où la perturbation du premier ordre est prise nulle là où la commande optimale est à fond de course ($\hat{\alpha} = \pm 1$), et puisque $\mu_1 = 0$ le long de tout arc de réticence

$$\frac{d}{dt}(\mu_j X_j) = 0$$

et (28) en découle par intégration. De plus, en vertu des conditions de transversalité (25) il vient

$$[\mu_j X_j]_{t_0}^{t_f} = -\Delta^1 J[X(t_0), X(t_f)] = 0 \tag{29}$$

et la variation première de la fonctionnelle I est bien nulle si on satisfait au premier ordre aux conditions aux limites perturbées, c'est-à-dire aux conditions

$$\Delta^1 U_p[X(t_0), X(t_f)] = 0 \tag{30}$$

L'hypothèse de normalité assure d'ailleurs la possibilité de perturber la commande le long du ou des arcs de réticence de telle façon que l'on puisse satisfaire, de façon plus générale, aux conditions non-homogènes

$$\Delta^1 U_p[X(t_0), X(t_f)] = \gamma_p \tag{31}$$

avec des seconds membres arbitrairement spécifiés.

5. Variation seconde

Examinons maintenant les conséquences qui pourraient résulter d'une variation seconde définie positive. Selon (23) nous écrivons cette hypothèse sous la forme

$$V_2 = \Delta^1 I[Y(t_0), Y(t_f)] + \frac{1}{2}\Delta^2 I[X(t_0), X(t_f)] > 0 \tag{32}$$

Elle doit de plus être vérifiée pour des conditions aux limites perturbées satisfaites au second ordre, c'est-à-dire

$$\Delta^1 U_p[Y(t_0), Y(t_f)] = -\frac{1}{2}\Delta^2 U_p[X(t_0), X(t_f)] \tag{33}$$

La possibilité de satisfaire à (33) par des programmes adéquats de perturbation du second ordre $v(t)$ de la commande le long des réticences est assurée par la normalité. Nous allons d'abord évaluer la variation seconde de la fonctionnelle uniquement en fonction des perturbations du premier ordre. Pour cela calculons à l'aide de la seconde des équations (22) et de (15)

$$\frac{d}{dt}(\mu_j Y_j) = \mu_1 v + \frac{1}{2}\mu_j \Delta^2 h_j(X, X; t)$$

Prenons à nouveau $v = 0$ là où la commande optimale est à fond de course, de sorte que le premier terme du second membre est de nouveau nul. Il vient en intégrant et utilisant la transversalité

$$[\mu_j Y_j]_{t_0}^{t_f} = -\Delta^1 J[Y(t_0), Y(t_f)] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mu_j \Delta^2 h_j(X, X; t)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\Delta^1 I[Y(t_0), Y(t_f)] = \Delta^1 J[Y(t_0), Y(t_f)] - \sum_1^P \nu_p \Delta^1 U_p[Y(t_0), Y(t_f)]$$

et, utilisant le résultat précédent ainsi que (33),

$$\Delta^1 I[Y(t_0), Y(t_f)] = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mu_j \Delta^2 h_j(X, X; t)\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{2}\sum_1^P \nu_p \Delta^2 U_p[X(t_0), X(t_f)]$$

Ceci, substitué dans (32) donne finalement l'évaluation cherchée

$$V_2 = \Delta^2 J[X(t_0), X(t_f)] - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \mu_j \Delta^2 h_j(X, X; t)\,\mathrm{d}t > 0 \qquad (34)$$

En vue d'établir que cette condition entraîne (18) le long d'une réticence, nous utilisons une perturbation du premier ordre d'un type spécial. Soit $t = 0$ par translation en un point intérieur arbitrairement choisi d'un arc de réticence. Prenons

$$\begin{aligned} u &= +1 \quad \text{pour} \quad -\eta < t < 0 \\ u &= -1 \quad \text{pour} \quad 0 < t < \eta \\ u &= 0 \quad \text{partout ailleurs.} \end{aligned} \qquad (35)$$

η étant un paramètre suffisamment petit pour que $t = -\eta$ soit encore un point intérieur à l'arc de réticence.

D'autre part ε peut être pris suffisamment petit pour que

$$[\hat{\alpha}-\varepsilon, \hat{\alpha}+\varepsilon] \subset [-1, +1] \text{ pour } -\eta \leqq t \leqq \eta$$

Développons la solution des équations aux perturbations du premier ordre en puissances du paramètre η. Cela se fera aisément en posant

$$\begin{aligned} X_1 &= \eta A_1 + \eta^2 B_1 + \dots \\ X_m &= \eta^2 B_m + \dots \quad (m = 2, \dots n) \\ t &= \eta\tau \end{aligned}$$

Le fait que les écarts X_1 seront d'un ordre de grandeur supérieur à ceux des autres variables d'état est évident du fait que les variables entraînées ne suivront la perturbation de la commande qu'avec un certain retard. Il vient en substituant dans les premières des équations (22)

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\tau} = u$$

$$\frac{\mathrm{d}B_m}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\partial h_m}{\partial a_1}\right)_0 A_1 \qquad (m = 1, 2 \ldots n)$$

L'intégration fournit, en supposant que la perturbation de l'état soit nulle pour $t = -\eta$,

$$A_1 = \begin{cases} 1+\tau & \text{pour} \quad -1 < \tau < 0 \\ 1-\tau & \text{pour} \quad 0 < \tau < 1 \\ 0 & \text{pour} \quad \tau > 1 \end{cases}$$

$$B_m = \left(\frac{\partial h_m}{\partial a_1}\right)_0 \times \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\tau)^2 & \text{pour} \quad -1<\tau<0 \\ \frac{1}{2}(1+2\tau-\tau^2) & \text{pour} \quad 0<\tau<1 \\ 1 & \text{pour} \quad \tau>1 \end{cases}$$

On voit donc que, si $X(t_0) = 0$, $X(t_f)$ est de l'ordre de η^2 et sa contribution à $\Delta^2 J[X(t_0), X(t_f)]$ de l'ordre de η^4. Par contre l'intégrale dans V_2 contient, outre des contributions d'ordre η^4 également, une contribution principale provenant du terme en X_1^2 dans l'intégrand :

$$-\frac{1}{2}\sum_2^m \mu_m \left(\frac{\partial^2 h_m}{\partial a_1^2}\right)_0 \eta^3 \int_{-1}^{1} A_1^2 \mathrm{d}\tau = -\frac{1}{3}\eta^3 \sum_2^m \mu_m \left(\frac{\partial^2 h_m}{\partial a_1^2}\right)_0$$

Par conséquent, faisant tendre η vers zéro, on peut en conclure que $V_2 > 0$ entraîne pour tout point intérieur d'un arc de réticence la condition (18) qui fait de la variable commandée a_1 une commande du système entraîné maximisant son Hamiltonien propre.

Pour établir correctement cette conclusion il faut encore vérifier les conditions (30). La perturbation de commande (35) violera en général ces conditions et nécessite une perturbation complémentaire de premier ordre satisfaisant des conditions compensatoires du type (31) où les seconds membres sont de l'ordre des $X_m(t_f)$ du calcul précédent, c'est-à-dire de l'ordre de η^2. Une perturbation distribuée du type $u = \eta^2 f(t)$ est nécessaire à cet effet; il est immédiat qu'elle n'entraîne pour V_2 que des contributions additionnelles d'ordre η^4.

6. Le principe du maximum-minimum

Nous supposons le nombre de discontinuités de la commande α spécifié. Il faut alors observer que le principe du maximum ne s'applique plus nécessairement à toute la trajectoire optimale. Il est en effet une conséquence de la comparaison entre la trajectoire optimale et une trajectoire de comparaison contenant une variation forte c'est-à-dire une discontinuité supplémentaire dans la commande. D'autre part, dans le problème relaxé, où le domaine de manoeuvrabilité est convexe, un Hamiltonien stationnaire, comme requis par la variation première, ne peut être que maximum ou minimum. Il est alors aisé de voir que si, le long d'un arc de réticence où la condition (18) est remplie, on détermine le choix de la commande optimale par un principe de minimum, il en résulte une oscillation de la variable adjointe μ_1 et un comportement bang-bang substituant à la réticence une trajectoire voisine comportant un nombre fini de commutations.

Admettons a priori que le système oscille en bang-bang avec une fréquence suffisamment élevée pour que l'écart x_1 de la variable commandée par rapport à sa valeur $\hat{a}_1(t)$ le long de la réticence reste faible. Les écarts x_m des variables entraînées seront à nouveau d'un ordre de grandeur inférieurs et nous pourrons les négliger.

Si ε est l'ordre de grandeur de l'intervalle entre deux commutations, nous poserons

$$t = \varepsilon\tau$$

$$\alpha = \hat{\alpha}+\beta \qquad \beta \in [-1-\hat{\alpha}, 1-\hat{\alpha}]$$

$$a_1 = \hat{a}_1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 y_1 \ldots$$

$$a_m = \hat{a}_m \qquad +\varepsilon^2 y_m \ldots \qquad m = (2 \ldots n)$$

$$\mu_1 = \varepsilon^2 p_1+ \ldots$$

$$\mu_m = \hat{\mu}_m+\varepsilon^2 p_m+ \ldots \qquad (m = 2 \ldots n)$$

Alors, moyennant les développements,

$$h_j(a, t) = h_j(\hat{a}_1+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 y_1 \ldots, \hat{a}_m+\varepsilon^2 y_m+ \ldots, t)$$

$$= h_j(\hat{a}, t)+\varepsilon\left(\frac{\partial h_j}{\partial a_1}\right) x_1+ \ldots$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial a_r} = \left(\frac{\partial h_j}{\partial a_r}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 h_j}{\partial a_r \partial a_1}\right) x_1+ \ldots$$

et compte tenu de ce que (17) s'applique le long de la réticence, nous obtenons pour l'écart principal à l'état

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \beta \tag{36}$$

et pour les écarts principaux des variables adjointes

$$\frac{dp_1}{d\tau} = kx_1 \qquad k = -\left(\mu_m \frac{\partial^2 h_m}{\partial a_1^2}\right) > 0 \tag{37}$$

$$\frac{dp_r}{d\tau} = -\left(\mu_m \frac{\partial^2 h_m}{\partial a_1 \partial a_r}\right) x_1 \qquad (r = 2, \ldots n)$$

En fait, dans cette représentation simplifiée du comportement du système autour de la réticence, les équations (36) et (37) suffisent pour la discussion, les variables autres que x_1 et p_1 pouvant être intégrées a postériori. Il est clair que μ_1 est positif ou négatif avec p_1. Par conséquent, si nous appliquons le principe du minimum, nous choisissons $\alpha = -1$ ($\beta = -1-\hat{\alpha} < 0$) quand p_1 est positif, auquel cas x_1 diminue en vertu de (36) et finit selon (37) par entraîner un changement de signe de p_1. Au moment où p_1 passe par zéro, x_1 est évidemment négatif. A cet instant on commute vers $\alpha = +1$ ($\beta = 1-\hat{\alpha} > 0$) et x_1 se met à augmenter tandis que p_1 prend des valeurs négatives croissantes jusqu'à ce que le renversement de signe de x_1 le fasse remonter vers zéro. Au moment où p_1 atteint zéro par valeurs négatives, x_1 est positif. A ce moment on commute à nouveau et le cycle recommence. On voit d'ailleurs tout de suite, dans le cas où k est constant, que p_1 obéit à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 p_1}{d\tau^2} = k\beta$$

et que son graphe correspond à une succession de courbes d'allure parabolique tournant alternativement leur concavité vers le haut et vers le bas. En général le nombre de commutations autour de la réticence doit être suffisamment élevé pour que la prédiction qualitative qui vient d'être faite se trouve vérifiée dans l'intégration numérique du problème exact. Suivant les conditions initiales choisies on pourra vérifier les conditions aux limites avec un nombre prescrit, suffisamment élevé et éventuellement de bonne parité, de commutations. On trouve dans les applications de cette généralisation du principe du maximum des cas [4] où les solutions peuvent comporter un nombre très faible de commutations. On notera enfin la relation étroite entre l'établissement du résultat (18) et l'analyse par perturbations spéciales des extrémales singulières [6].

RÉFÉRENCES

[1] CONTENSOU, P., Étude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. *Astronautica Acta*, VIII-2-3, (1962), pp. 134-150.

[2] WARGA, J., Relaxed variational problems. *J. Math. Anal. Appl.* 4 (1962) pp. 111-127.

[3] FRAEIJS DE VEUBEKE, B., *Régularisation des réticences et réduction du principe du maximum au calcul classique des variations.* Comité National de Mécanique Théorique et Appliquée, Bruxelles, mai 1964.

[4] FRAEIJS DE VEUBEKE, B., A maximum-minimum principle for bang-bang problems. *Second International Colloquim on Optimization*, Akademgorodok June 1968.

[5] FRAEIJS DE VEUBEKE, B., *The second variation test with algebraic and differential constaints. Advanced problems and methods for space flight optimization*, ed. B.F. de Veubeke, Pergamon, 1969, pp. 189-217.

[6] KELLEY, H.J., KOPP, R.E. and MOYER, H.G., *Singular extremals. Topics in Optimization*, ed. G. Leitmann, Academic Press, 1967, pp. 63-101.