

---

BULLETIN  
DU  
SERVICE TECHNIQUE  
DE  
L'AÉRONAUTIQUE

---

**Application des équations de Lagrange  
au calcul des forces de liaison dans les moteurs en étoile,**

PAR

**B. FRAEYS de VEUBEKE**

INGÉNIEUR CIVIL ELECTRICIEN-MÉCANICIEN,  
INGÉNIEUR DES CONSTRUCTIONS AÉRONAUTIQUES,  
ADMINISTRATION DE L'AÉRONAUTIQUE, SERVICE DU MATÉRIEL VOLANT,  
AÉRODROMÉ DE BRUXELLES-HAREN.

Université  
351 Sciences Appliquées  
Chemin des Chevreuils  
B-4000 L

---

BRUXELLES

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, rue de Louvain, 112

(Domicile légal: rue de la Chancellerie, 4)

—  
1949

# Application des équations de Lagrange au calcul des forces de liaison dans les moteurs en étoile.

---

## INTRODUCTION.

Les mécanismes à barres articulées réalisés dans les machines motrices ont pour but de transformer la pression d'un fluide en évolution thermodynamique en couple moteur sur un arbre de transmission. Les forces qui relient le moteur à son support et celles qui relient entre eux divers organes peuvent être retracées à trois origines distinctes :

Nous avons tout d'abord la pesanteur, dont l'effet principal est de transmettre au bâti le poids total constant du moteur suivant la verticale passant par son centre de gravité. On ne peut perdre de vue que, par suite des déplacements des organes mobiles, celui-ci est susceptible de déplacements périodiques entraînant des variations correspondantes dans les efforts sur les attaches. De même, les forces de liaison entre les pièces mobiles subiront de ce chef des variations périodiques. L'importance négligeable de celles-ci devant les forces mises en jeu par les causes qui suivent enlève tout intérêt à leur calcul, par ailleurs élémentaire.

La pression du fluide évoluant provoque pour chaque configuration du mécanisme des efforts de liaison importants. La base de calcul est ici le diagramme donnant la pression en fonction de l'angle de rotation de l'arbre moteur, tel qu'il est obtenu expérimentalement par les indicateurs modernes, pratiquement dépourvus d'inertie propre.

Enfin les forces d'inertie des pièces en mouvement sont responsables de forces de liaison dont la grandeur croît comme le carré de la vitesse angulaire de rotation. Aussi dans les moteurs à explosion modernes à grande vitesse, leur importance est-elle devenue suffisante pour réclamer une étude approfondie de leur comportement et des possibilités de leur équilibrage, en vue de diminuer les sollicitations vibratoires dont elles sont responsables.

Nous ne prenons pas en considération les forces supplémentaires de liaison dues à d'éventuelles réactions d'entraînement et forces de CORIOLIS, par exemple pour le cas d'un moteur d'avion effectuant une ressource ou une autre évolution acrobatique. Enfin on se limitera aux organes de masse importante : pistons, bielles et vilebrequin.

Les méthodes classiques impliquent une analyse simultanée de l'équilibre dynamique de chaque organe. Il est par conséquent nécessaire de passer par l'élimination d'un grand nombre de forces de liaison étrangères à celle qui constitue l'objet de l'étude.

Les équations de LAGRANGE, comme le principe des Travaux virtuels dont elles dérivent, éliminent d'emblée la considération des forces de liaison auxiliaires. On verra comment le fractionnement de l'énergie cinétique clarifie encore le principe de calcul.

Les méthodes classiques ont été appliquées avec succès aux problèmes comportant des embiellages simples : moteurs en ligne, en V, moteurs en « étoile » idéalisés; citons entre autres le chapitre consacré à cette question dans le « Technische Dynamik » de MM. BIEZENO et GRAMMEL.

Le problème généralisé du moteur en étoile a fait l'objet d'une suite d'articles publiés par KIMMEL dans « Luftfahrtforschung » de juin 1941 à janvier 1944. La méthode des Travaux virtuels y a été appliquée, mais la discussion des résultats est rendue pénible par la complexité des sommations. Une réduction préalable des masses en systèmes ponctuels simples met en évidence des grandeurs fondamentales qui permettent de pousser très loin les discussions numériques. La méthode actuelle a été proposée et appliquée à une forme idéalisée du moteur en étoile en 1942.

Je tiens à remercier spécialement M. D. JACOVLEFF, qui a suggéré son application au problème généralisé et auprès de qui j'ai toujours trouvé conseils et encouragements durant la période 1943-1944, pendant laquelle j'ai pu bénéficier de son enseignement à l'Université de Liège.

Le texte présent est la réadaptation française presque intégrale d'un rapport présenté à l'Aeronautical Research Council par l'intermédiaire du Prof PUGSLEY, de Bristol University. Je saisis cette occasion de l'en remercier. Je suis enfin redevable aux membres de l'Oscillation Sub-Committee, parmi lesquels ce rapport a été diffusé, d'une référence bibliographique et de quelques critiques constructives.

---

## CHAPITRE PREMIER.

### MÉTHODES DE CALCUL

---

#### § 1. Equations de Lagrange pour une force de liaison.

En l'absence de vibrations, tant externes qu'internes, la configuration du moteur, en tant que système dynamique, peut être spécifiée par une seule variable : par exemple la position angulaire  $\theta$  du vilebrequin par rapport au carter.

Nous cherchons à calculer les forces de liaison réciproques qui s'exercent entre les divers organes du moteur; elles seront subdivisées en

a) forces de liaison externes ou existant entre le moteur et son bâti ou support;

b) forces de liaison internes de contact, telles que celles existant entre tête de bielle et maneton, pied de bielle et piston, etc.;

c) forces de liaison internes élastiques, telles qu'efforts normaux, tranchants, moments fléchissants appliqués à une section d'un organe.

Au cours d'un déplacement virtuel, qui respecte toutes les liaisons, et à condition que les frottements des liaisons par contact glissant soient négligeables, les travaux virtuels des forces de liaison sont nuls et elles se trouvent automatiquement éliminées de l'équation du mouvement qui en résulte.

L'énergie cinétique ne dépend dans ces conditions que du paramètre  $\theta$  et de sa vitesse  $\dot{\theta}$ ; nous l'appellerons l'énergie cinétique réelle.

Imaginons maintenant un déplacement virtuel qui, pour une valeur fixe de  $\theta$ , viole la liaison représentée par une paire de forces ou de couples réciproques ( $Q, -Q$ ).

Ce déplacement sera spécifié par une coordonnée  $q$ , telle que  $Qdq$  soit le travail virtuel de la liaison pour une valeur infinitésimale du déplacement.

Soit  $Vdq$  le travail virtuel des autres forces externes et internes. Il faut

maintenant expliciter dans l'expression de l'énergie cinétique du mécanisme la dépendance de la coordonnée  $q$ . Soit

$$T_1(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q})$$

l'expression de l'énergie cinétique totale.

L'équation de LAGRANGE pour la force de liaison sera

$$Q + V = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial q}. \quad (1)$$

### § 2. Fractionnement de l'énergie cinétique totale.

L'énergie cinétique totale correspond à un état de mouvement complexe.

Une particule de masse  $m$  a une vitesse

$V_1$  de composantes  $(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$  proportionnelles à  $\dot{\theta}$  dans l'état de mouvement réel;

$V_2$  de composantes  $(\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2)$  proportionnelles à  $\dot{q}$  dans l'état de mouvement virtuel.

Les énergies cinétiques, réelles et virtuelles correspondantes sont du type

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 f(\theta, q), \quad (2)$$

$$T_v = \frac{1}{2} \Sigma m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 f_v(\theta, q), \quad (3)$$

la sommation étant étendue à toutes les particules en mouvement.

Quand les deux mouvements se produisent simultanément, la vitesse de la particule a les composantes

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2, \dot{y}_1 + \dot{y}_2, \dot{z}_1 + \dot{z}_2)$$

et par conséquent l'énergie cinétique totale

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \Sigma m [(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2 + (\dot{z}_1 + \dot{z}_2)^2] \\ &= T + T_v + \Sigma m (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

L'énergie cinétique totale est donc la somme de l'énergie cinétique réelle, de l'énergie cinétique virtuelle et d'une énergie cinétique à laquelle nous réservons le qualificatif de « mutuelle » :

$$T_m = \Sigma m (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) = \dot{\theta} \dot{q} f_m(\theta, q). \quad (5)$$

A la suite de ce fractionnement, l'équation lagrangienne de la force de liaison devient

$$Q + V = \frac{d}{dt} (\dot{q} f_v + \dot{\theta} f_m) - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2} \dot{q}^2 \frac{\partial f_v}{\partial q} - \dot{\theta} \dot{q} \frac{\partial f_m}{\partial q}. \quad (6)$$

**§ 3. Liaisons sans vibrations.**

Quand la coordonnée  $q$  reste effectivement constante au cours du mouvement du moteur, nous sommes justifié de poser  $\dot{q}=0$  et  $\ddot{q}=0$ , après que toutes les dérivations aient été effectuées dans l'équation (1) ou son équivalent (6). Celle-ci est alors réduite à

$$Q + v = \frac{d}{dt}(\dot{f}_m) - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} \quad (7)$$

et l'évaluation de l'énergie virtuelle devient superflue.

Signalons cependant une extension possible du calcul quand la coordonnée  $q$  est susceptible d'exécuter un mouvement vibratoire.

La vitesse  $\dot{q}$  et l'accélération  $\ddot{q}$  sont alors des grandeurs effectives et tous les termes de (6) doivent être retenus pour l'établissement de l'équation des vibrations de  $q$ .

**§ 4. Cas des liaisons externes.**

Ce cas présente des simplifications importantes.

Le calcul d'une liaison externe implique un déplacement virtuel de tout le bloc moteur, laissant inchangée la configuration interne du mécanisme.

La position du bloc moteur, définie par  $q$ , n'influencera ni l'énergie réelle, ni la virtuelle, ni la mutuelle; d'où

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial T_v}{\partial q} = 0 \quad \frac{\partial T_m}{\partial q} = 0,$$

et l'équation générale de la force de liaison devient

$$Q + v = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T_m + T_v)}{\partial \dot{q}} \right); \quad (8)$$

quand on néglige les vibrations du bâti-moteur on peut encore appliquer les considérations du § 3, et

$$Q + v = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}} \right). \quad (9)$$

**§ 5. Calcul des énergies cinétiques des solides,  
basé sur le théorème de König.**

Les énergies cinétiques « réelle » et « virtuelle », envisagées au § 2, rentrent dans le type ordinaire

$$\frac{1}{2} \sum m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Quand la somme est étendue à un système de points matériels, on peut lui appliquer la décomposition classique de KÖNIG :

L'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à l'énergie cinétique du centre de gravité, considéré comme un point matériel où toute la masse serait concentrée, et de l'énergie cinétique du système dans le mouvement relatif autour du centre de gravité.

Cette décomposition est aussi valable dans le cas d'énergies cinétiques « mutuelles », c'est-à-dire du type

$$\Sigma m (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2),$$

qui sont associées à deux états de mouvement. La démonstration peut être calquée sur la précédente.

Soient (a, b, c) les coordonnées du centre de gravité; nous aurons

$$\begin{cases} x = a + u \\ y = b + v \\ z = c + w \end{cases}$$

où (u, v, w) sont les coordonnées des points dans le système relatif.

Dérivant par rapport au temps dans le premier état de mouvement,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{a}_1 + \dot{u}_1 \\ \dot{y}_1 = \dot{b}_1 + \dot{v}_1 \\ \dot{z}_1 = \dot{c}_1 + \dot{w}_1 \end{cases}$$

Les mêmes équations avec l'indice 2 seront valables dans le second état de mouvement.

Après substitution dans l'expression de l'énergie mutuelle, celle-ci devient

$$\begin{aligned} & \Sigma m (\dot{a}_1 \dot{a}_2 + \dot{b}_1 \dot{b}_2 + \dot{c}_1 \dot{c}_2) + \Sigma m (\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{v}_1 \dot{v}_2 + \dot{w}_1 \dot{w}_2) \\ & + \Sigma m (\dot{a}_1 \dot{u}_2 + \dot{a}_2 \dot{u}_1 + \dot{b}_1 \dot{v}_2 + \dot{b}_2 \dot{v}_1 + \dot{c}_1 \dot{w}_2 + \dot{c}_2 \dot{w}_1), \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul; en effet, par définition du centre de gravité,

$$a \Sigma m = \Sigma m x.$$

Dérivant par rapport au temps, dans le premier état de mouvement,

$$\dot{a}_1 \Sigma m = \Sigma m \dot{x}_1 = \Sigma m (\dot{a}_1 + \dot{u}_1) = \dot{a}_1 \Sigma m + \Sigma m \dot{u}_1;$$

d'où

$$\Sigma m \dot{u}_1 = 0;$$

par conséquent,

$$\Sigma m \dot{a}_2 \dot{u}_1 = \dot{a}_2 \Sigma m \dot{u}_1 = 0.$$

En dérivant dans le second état de mouvement on montrerait que

$$\Sigma m \dot{a}_1 \dot{u}_2 = \dot{a}_1 \Sigma m \dot{u}_2 = 0.$$

Enfin les autres termes sont prouvés être nuls au moyen des équations définissant les coordonnées  $b$  et  $c$  du centre de gravité.

Le terme

$$\Sigma m (\dot{a}_1 \dot{a}_2 + \dot{b}_1 \dot{b}_2 + \dot{c}_1 \dot{c}_2) = (\dot{a}_1 \dot{a}_2 + \dot{b}_1 \dot{b}_2 + \dot{c}_1 \dot{c}_2) \Sigma m$$

est l'énergie mutuelle du centre de gravité, associé à ses vitesses dans les deux états de mouvement.

Le terme

$$\Sigma m (\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dot{v}_1 \dot{v}_2 + \dot{w}_1 \dot{w}_2)$$

est l'énergie mutuelle associée aux deux états de mouvements relatifs autour du centre de gravité.

La vitesse d'un point matériel est souvent connue en grandeur et direction plutôt que par ses composantes; son énergie cinétique réelle ou virtuelle est alors exprimée par

$$\frac{1}{2} m V^2,$$

tandis que son énergie mutuelle, associée aux vitesses  $V_1$  et  $V_2$  qui font entre elles l'angle  $\alpha$ , sera

$$m V_1 V_2 \cos \alpha$$

en effet, on reconnaît dans l'expression

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2$$

le produit scalaire des deux vecteurs vitesse.

Appliquons le théorème de décomposition au cas d'un corps solide dont les états de mouvement sont dans un plan commun, et soient  $M$  la masse totale,  $J$  son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire au plan de mouvement et passant par le centre de gravité  $G$  (fig. 1).

Les énergies cinétiques réelle et virtuelle sont

$$T = \frac{1}{2} M V_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}_1^2,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} M V_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}_2^2.$$

(10)

Le carré de la vitesse résultante du centre de gravité est

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2 V_1 V_2 \cos \alpha,$$



tandis que la vitesse angulaire résultante de rotation est

$$\beta = \beta_1 + \beta_2.$$

L'énergie cinétique totale résultante est donc

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} J (\beta_1 + \beta_2)^2 = T + T_0 + M V_1 V_2 \cos \alpha + J \beta_1 \beta_2.$$

Nous avons donc pour expression de l'énergie mutuelle

$$T_m = M V_1 V_2 \cos \alpha + J \beta_1 \beta_2. \quad (11)$$

Elle vérifie l'extension du théorème de décomposition de KÖNIG. En effet, le premier terme est l'énergie mutuelle du centre de gravité; montrons que le second est l'énergie mutuelle associée aux mouvements relatifs autour du centre de gravité.

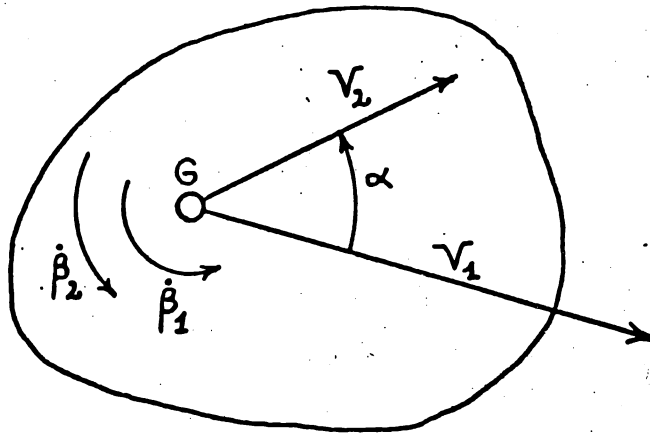


FIG. 1.

Un point matériel de masse  $m$ , situé à une distance  $r$  de  $G$ , possède des vitesses relatives

$$r \beta_1 \text{ et } r \beta_2$$

qui ont même direction positive, perpendiculaire au rayon; l'énergie mutuelle de ce point matériel est donc

$$m r \beta_1 r \beta_2,$$

et pour tout le solide,

$$\Sigma m r \beta_1 r \beta_2 = \beta_1 \beta_2 \Sigma m r^2 = J \beta_1 \beta_2, \quad \text{c. q. f. d.}$$

les expressions (10) et (11) fournissant un moyen de calculer les énergies cinétiques indispensables au calcul des forces de liaison, moyennant la connaissance du vecteur vitesse des centres de gravité et des vitesses angulaires de rotation de chaque organe mobile constituant le moteur.

### § 6. Schémas généraux de décompositions ponctuelles.

Il peut arriver, par suite de la nature des liaisons cinématiques d'un solide, que la vitesse du centre de gravité soit une grandeur difficile à exprimer, et qu'un autre schéma de décomposition ponctuelle offre plus d'intérêt.

Le théorème de KÖNIG exprime, au point de vue des énergies cinétiques en mouvement plan, l'équivalence d'un solide au complexe formé par un point matériel ayant la masse totale  $M$  du solide et se mouvant comme son centre de gravité, et un moment d'inertie  $J$ , lié à la vitesse angulaire du solide.

Considérons un système de points matériels assujettis aux conditions suivantes :

- a) Ils occupent des positions fixes dans le solide;
- b) Leur masse totale est égale à celle du solide;
- c) Leur centre de gravité  $G$  coïncide avec celui du solide.

Les distances entre les points matériels restant invariables, on peut leur appliquer le théorème de KÖNIG : Le système sera équivalent, dans les mêmes conditions que pour le solide, au point matériel de masse  $M$ , se mouvant comme  $G$ , et au moment d'inertie  $J'$  du système par rapport à l'axe perpendiculaire au plan des mouvements, passant par  $G$ .

On peut dire aussi que le point matériel de masse  $M$ , se mouvant comme  $G$ , peut être remplacé, au point de vue calcul énergétique, par le système de points matériels, assujettis aux conditions (a, b, c), associé au moment d'inertie ( $-J'$ ).

Cette proposition permet d'éliminer dans l'équivalence du solide la présence du point matériel confondu avec  $G$  et d'obtenir la nouvelle équivalence qui suit.

Dans les conditions mentionnées plus haut, le calcul énergétique du solide est équivalent à celui d'un système de points matériels, assujettis aux conditions (a, b, c) et accompagné d'un moment d'inertie  $J - J'$ , associé aux vitesses angulaires du solide.

Les conditions laissent une certaine latitude dans le choix du système de points matériels. Ce choix sera naturellement guidé par la facilité avec laquelle les mouvements des points peuvent être exprimés.

Appliquons immédiatement le principe aux cas pratiques suivants :

#### A. — Cas d'une bielle (fig. 2).

Les centres d'articulation  $A$  et  $B$  sont les points dont les mouvements sont les plus simples à exprimer.

Si les conditions de symétrie sont remplies, le centre de gravité  $G$  se trouve sur la droite joignant  $A$  et  $B$ .

Posons  $K=H/L$ ; deux points matériels de masses  $(1-K)M$  et  $KM$ , situés respectivement en A et B, forment un système qui satisfait aux conditions (a, b, c).

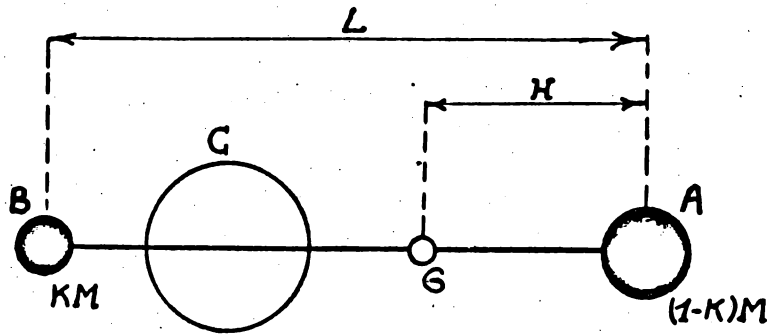


FIG. 2.

Pour les mouvements plans perpendiculaires aux axes d'articulation, il faut considérer le moment d'inertie  $J$  de la bielle autour de  $G$  et le moment d'inertie du système des points

$$J' = M(1-K)H^2 + MK(L-H)^2 = MH(L-H).$$

Le moment d'inertie correcteur associé aux mouvements angulaires de la bielle sera donc

$$C = J - MH(L-H). \quad (12)$$

Il est toujours négatif et de valeur faible comparé à  $J$ .

B. — Cas d'un piston (fig. 3).

Le mouvement réel est une translation; d'où l'énergie cinétique réelle

$$T = \frac{1}{2} M V_1^2,$$

et pour toute énergie mutuelle associée au mouvement réel,

$$T_m = M V_1 V_2 \cos \alpha; \quad \text{en effet, } \beta_1 = 0.$$

Donc dans les cas où le calcul de l'énergie virtuelle même ne se pose pas, le piston est équivalent au point matériel de masse  $M$ , situé au centre de gravité.

Mais il y a dans le piston d'autres points que  $G$  qui conviennent pour le calcul des énergies précédentes. D'abord, tout point à la même vitesse de translation dans le mouvement réel; secondement, pour tous les points de l'axe ( $a$ ) du piston on a la relation

$$V_2 \cos \alpha' = V_2 \cos \alpha,$$

ceci étant justifié par le théorème de cinématique qui définit la vitesse de glisse-

ment d'une droite : « La projection de la vitesse d'un point d'une droite sur cette droite est constante ». Rien n'est donc changé au calcul des énergies réelles et mutuelles du piston, si la masse est concentrée en un autre point de l'axe ( $a, a$ ). Nous choisirons le centre d'articulation B de bielle qui attaque le piston. Remarquons que dans les calculs d'énergies virtuelles, où  $\beta_2$  est différent de zéro, il faudra revenir au schéma de décomposition de KÖNIG.

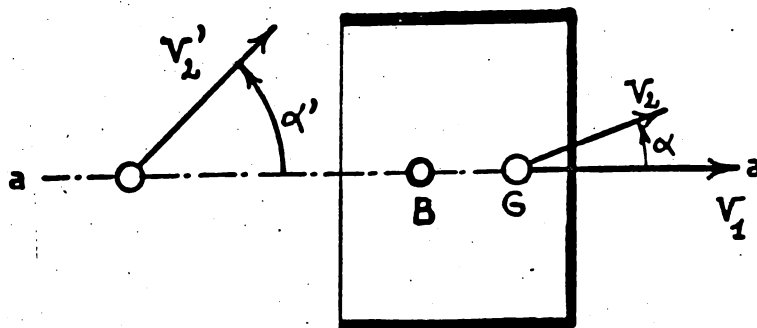


FIG. 3.

Avant de passer au schéma de décomposition ponctuelle de l'ensemble du moteur, nous allons examiner rapidement les raisons qui motivent certaines dispositions cinématiques dans un moteur en étoile.

### § 7. Cinématique des moteurs en étoile.

Dans le moteur en étoile idéalisé les bielles sont identiques et attaquent toutes centralement le maneton.

Les difficultés pratiques de réalisation d'un tel schéma ont conduit à la disposition actuelle qui comporte une bielle principale ou bielle maîtresse, sur laquelle sont articulées des biellettes.

La dissymétrie dans la répartition des masses et dans la cinématique des divers pistons est responsable de perturbations considérables, mises en évidence par des harmoniques importants dans les forces de liaison.

La figure 4 est un schéma cinématique de la bielle maîtresse et d'une biellette.

Le rayon de suspension sera appelé excentricité linéaire :  $r_n$ ; la différence entre l'angle de position du cylindre attaqué par la biellette et l'angle du rayon de suspension avec la bielle principale,

$$\Phi_n - \psi_n = \epsilon_n,$$

excentricité angulaire.

Une théorie du second ordre, qui donne déjà de bons renseignements, consiste à prendre

$$\epsilon_n = 0 \text{ et } r_n = L - l,$$

une constante.

Cette approximation a été utilisée par divers auteurs pour le calcul du contre poids (3), (4), (5), (9) et (10).

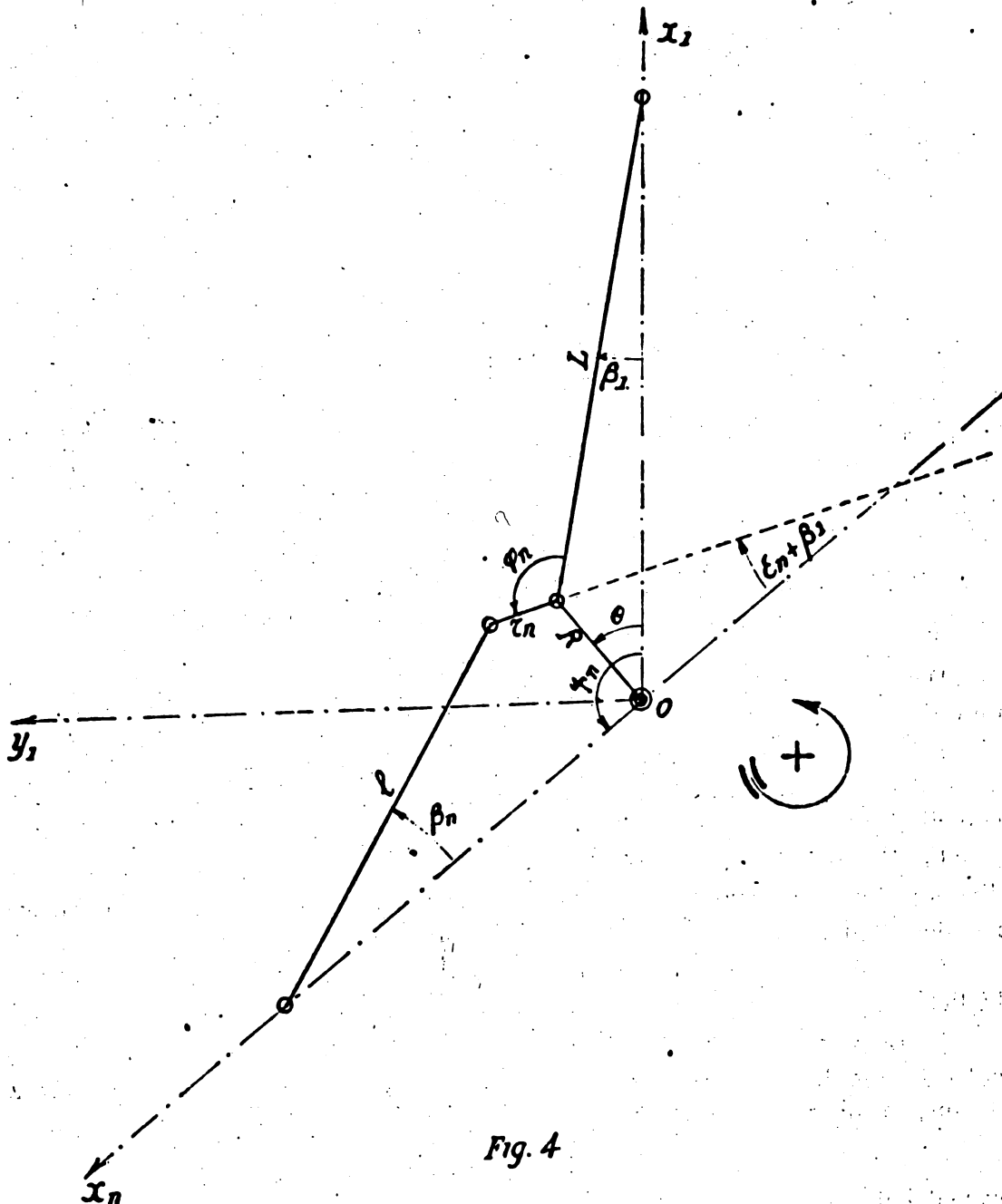


Fig. 4

Les angles sont tous comptés positivement dans le sens indiqué.

La première expression de la force tournante  $S_2$ , basée sur cette approximation est due à LEHR (5).

Les forces tournantes en général ont été investiguées dans (7), (9) et (10).

Enfin, dans la publication (8), le Prof A. COPPENS a donné la première formule correcte pour le calcul du contrepoids dans le cas général où le moteur présente des excentricités linéaires différentes et des excentricités angulaires.

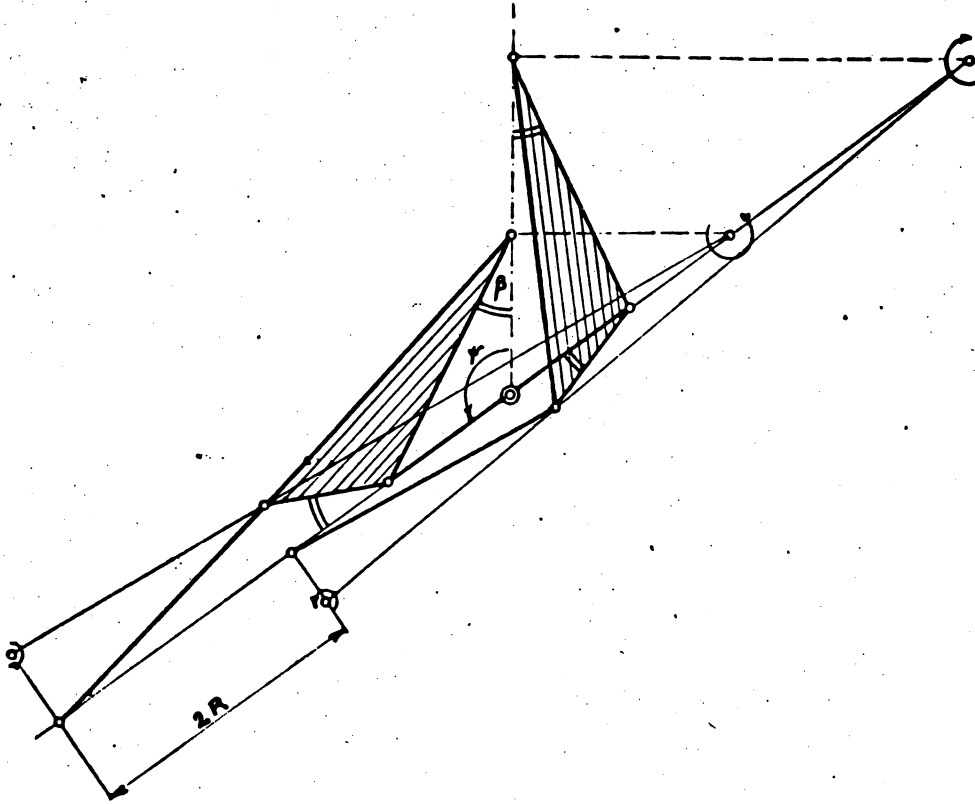


FIG. 5.

Sans excentricité angulaire la course d'un piston de bielle est légèrement augmentée.

Ce cas est d'ailleurs, en pratique, le cas réel; en voici les raisons cinématiques :

La course d'un piston est approximativement

$$2R \left( 1 + \frac{r_n}{L} \sin \epsilon_n \sin \psi_n \right);$$

le volume balayé par le piston serait donc identique à celui balayé par le piston de la bielle maîtresse, si l'on avait une excentricité angulaire nulle.

En fait, la figure 5, tracée pour ce cas, montre que la course est légèrement supérieure à  $2R$  : elle est  $2R$  pour la course angulaire de  $\psi_n$  à  $\pi + \psi_n$  du maneton.

Mais pour  $\theta = \psi_n$ , la position du centre instantané de la bielle montre que le point mort haut n'est pas encore atteint; pour  $\theta = \pi + \psi_n$ , que le point mort bas est déjà dépassé.

2° Le point mort haut a lieu approximativement pour

$$\theta = \psi_n + \frac{r_n \left(1 - \frac{l}{L} \cos \psi_n\right) (\lambda \sin \psi_n - \sin \epsilon_n)}{l + R + r_n \left(\frac{l}{L} \sin \epsilon_n \sin \psi_n + \frac{l}{L} \lambda \cos 2 \psi_n - 2 \lambda \cos \psi_n\right)}$$

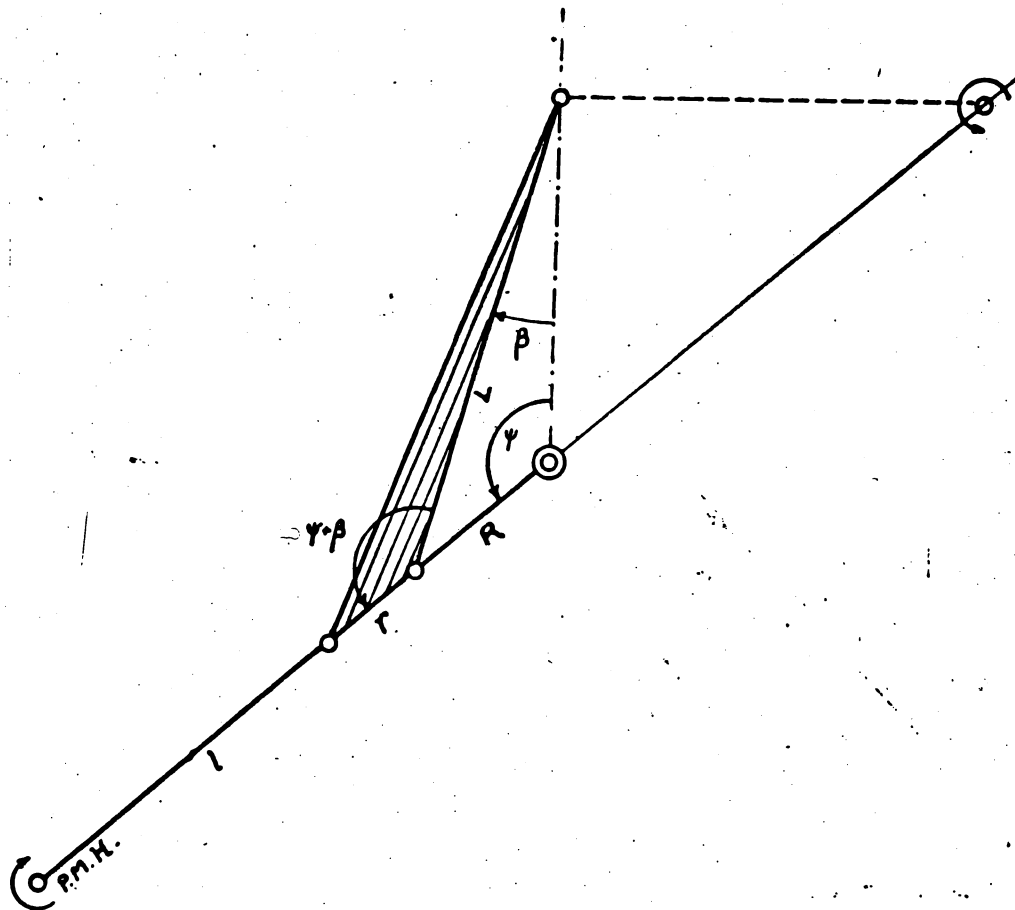


FIG. 6.

Distribution régulière du point mort haut par emploi d'une excentricité angulaire égale à l'obliquité de la bielle maîtresse.

Pour avoir un espacement régulier des points morts hauts il faudrait donc avoir

$$\sin \epsilon_n = \lambda \sin \psi_n, \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{R}{L}.$$

Cette valeur de  $\epsilon_n$  est égale à l'obliquité de la bielle principale pour  $\theta = \psi_n$  et la figure 6 montre que le point mort haut est rigoureusement atteint pour  $\theta = \psi_n$  (centre instantané de rotation de la biellette sur l'axe du cylindre).

3° La formule approximative du point mort bas s'obtient en remplaçant dans la précédente R par —R et en ajoutant  $\pi$ .

La condition pour un espacement régulier des points morts bas est

$$\sin \epsilon_n = -\lambda \sin \psi_n.$$

Ces conditions sont contradictoires; elles indiquent en tout cas que si l'on fait usage d'excentricités angulaires, il faut les distribuer suivant la loi

$$\sin \epsilon_n = \sigma \sin \psi_n.$$

4° La longueur  $r_n$  des rayons de suspension devrait être telle que le taux de compression volumétrique soit un invariant :  $\rho$ .

On ne peut songer, pour des raisons évidentes d'interchangeabilité, à modifier la longueur des biellettes.

Soient  $d$  l'alésage commun des cylindres,  $x_{nh}$  la position du piston au point mort haut,  $x_{nb}$  sa position au point mort bas.

L'accroissement de la cylindrée totale comparée à celle du cylindre principal est

$$(L - R - x_{nb})d.$$

L'accroissement de la chambre de compression :

$$(L + R - x_{nh})d.$$

Pour maintenir le taux de compression volumétrique, ces deux accroissements doivent être dans le rapport  $\rho$  :

$$\frac{L - R - x_{nb}}{L + R - x_{nh}} = \rho.$$

Quand on substitue à  $x_{nb}$  et  $x_{nh}$  des valeurs approchées et qu'on résout par rapport à  $r_n$ , on trouve

$$r_n = \frac{L - l}{1 - \frac{1}{2}(\lambda^2 \sin^2 \psi_n - 2\lambda \frac{\rho + 1}{\rho - 1} \sin \epsilon_n \sin \psi_n + \sin^2 \epsilon_n)}$$

La nécessité des excentricités linéaires variables est maintenant évidente. Elle implique la solution du problème généralisé du moteur en étoile, dont KIMMEL s'est occupé dans les publications (13), (14), (16), (17) et (18).

L'excentricité linéaire peut devenir constante si les excentricités angulaires sont réparties suivant la loi proposée avec

$$\sigma = \frac{\rho + 1 - 2\sqrt{\rho}}{\rho - 1} \lambda;$$

pour  $\rho = 6$ , par exemple,  $\sigma = 0,42\lambda$ .



**§ 8. Réduction de l'embellage à des systèmes ponctuels.**

Chaque bielle et chaque piston sont remplacés par le système ponctuel suggéré au § 6. Les notations utilisées sont les suivantes :

Bielle maitresse	Biellette	Piston	
<b>B</b>	<i>b</i>	<i>p</i>	<b>Masse</b>
<b>L</b>	<i>l</i>		<b>Longueur</b>
<b>H</b> <b>K = H/L</b>	<i>h</i> <i>k = h/l</i>		<b>Position de G</b>
<b>J</b>	<i>j</i>		<b>Moment d'inertie</b>
<b>C = J - BH(L - H)</b>	<i>c = j - bh(l - h)</i>		<b>Moment correcteur</b>

Nous obtenons ainsi le système ponctuel et les moments d'inertie de la figure 7.

Le schéma peut être simplifié davantage en éliminant les masses pseudo-rotatives  $b(1 - k)$  qui proviennent de la décomposition des biellettes et n'ont pas un mouvement simple.

Il suffit de remarquer que leur ensemble se comporte comme un solide auquel le théorème de KÖNIG peut donc s'appliquer.

Avant d'opérer, il est extrêmement avantageux de joindre à cet ensemble une masse  $m$ , détachée de la masse  $p + BK$ , située sur l'axe du pied de la bielle maitresse. Sa valeur sera choisie de façon à placer le centre de gravité de l'ensemble sur l'axe du maneton. Il suffit pour cela d'exprimer que le moment statique de l'ensemble par rapport à l'axe ( $b$ ,  $b$ ) est nul :

$$b(1 - k) \sum_1^n r_n \cos \Phi_n + mL = 0;$$

d'où la valeur

$$m = - \frac{b(1 - k)}{L} \sum_1^n r_n \cos(\psi_n + \epsilon_n). \quad (13)$$

Le système équivalent comporte alors (fig. 8) la masse totale située sur l'axe du maneton :

$$D' = m + (n - 1)b(1 - k),$$

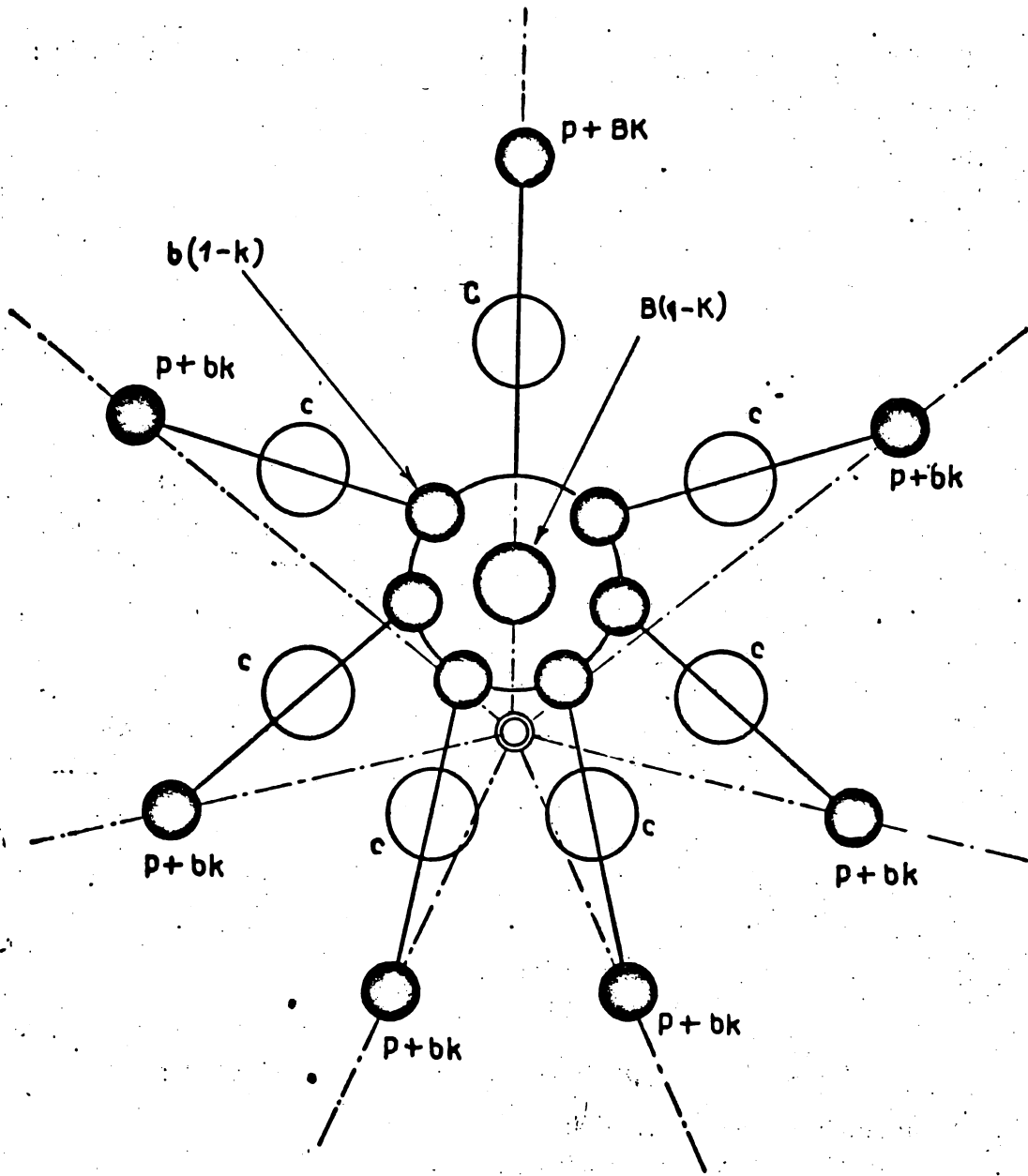


FIG. 7.

Première réduction en masses ponctuelles.

et le moment d'inertie de l'ensemble autour du même axe :

$$I' = m L^2 + b (1 - k) \sum_{i=1}^n r_n^2.$$

Tandis que pour l'ensemble de l'embellage on obtient (fig. 9 a et 9 b) :

a) Une distribution homogène :

1° de masses en mouvement alternatif :

$$a = p + bk, \quad (14)$$

2° de moments d'inertie correcteurs :

$$c = j - bh(l - h).$$

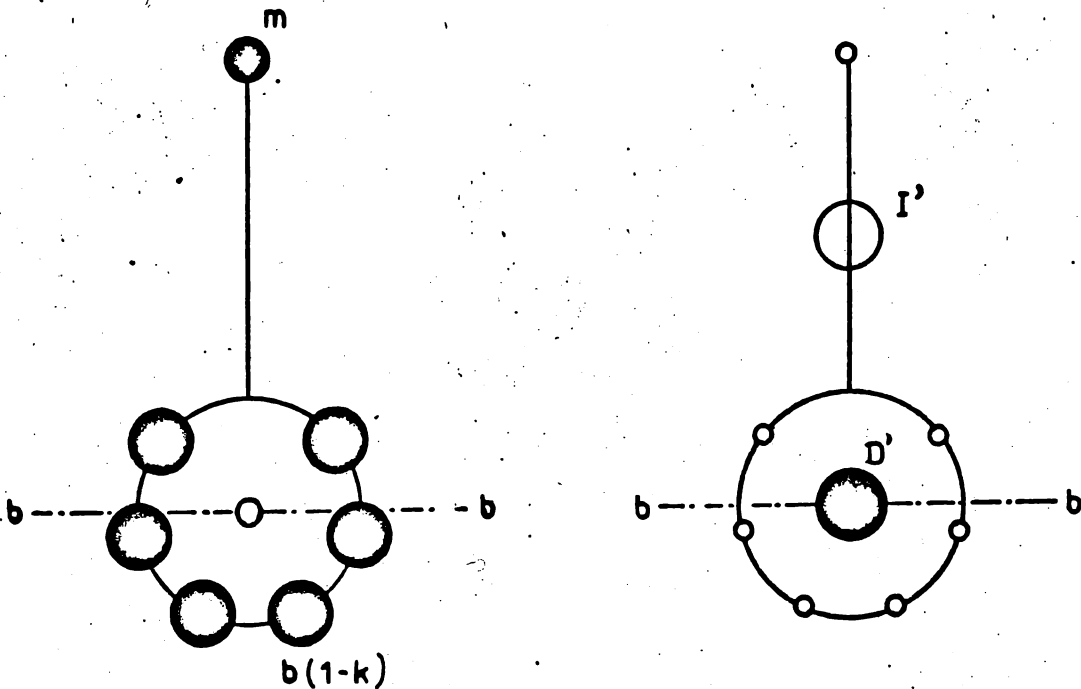


FIG. 8.

Réduction des masses pseudo-rotatives.

b) Associés au mouvement de la bielle maîtresse seulement :

1° un maître-excès alternatif :

$$A = BK - bk - m; \quad (15)$$

2° un maître-excès de moment d'inertie :

$$I = C - c + I'. \quad (16)$$

c) Une masse rotative :

$$D = B(1 - K) + (n - 1)b(1 - k) + m. \quad (17)$$

Les formules (13) à (17) permettent de calculer ces grandeurs caractéristiques à partir des données du moteur.

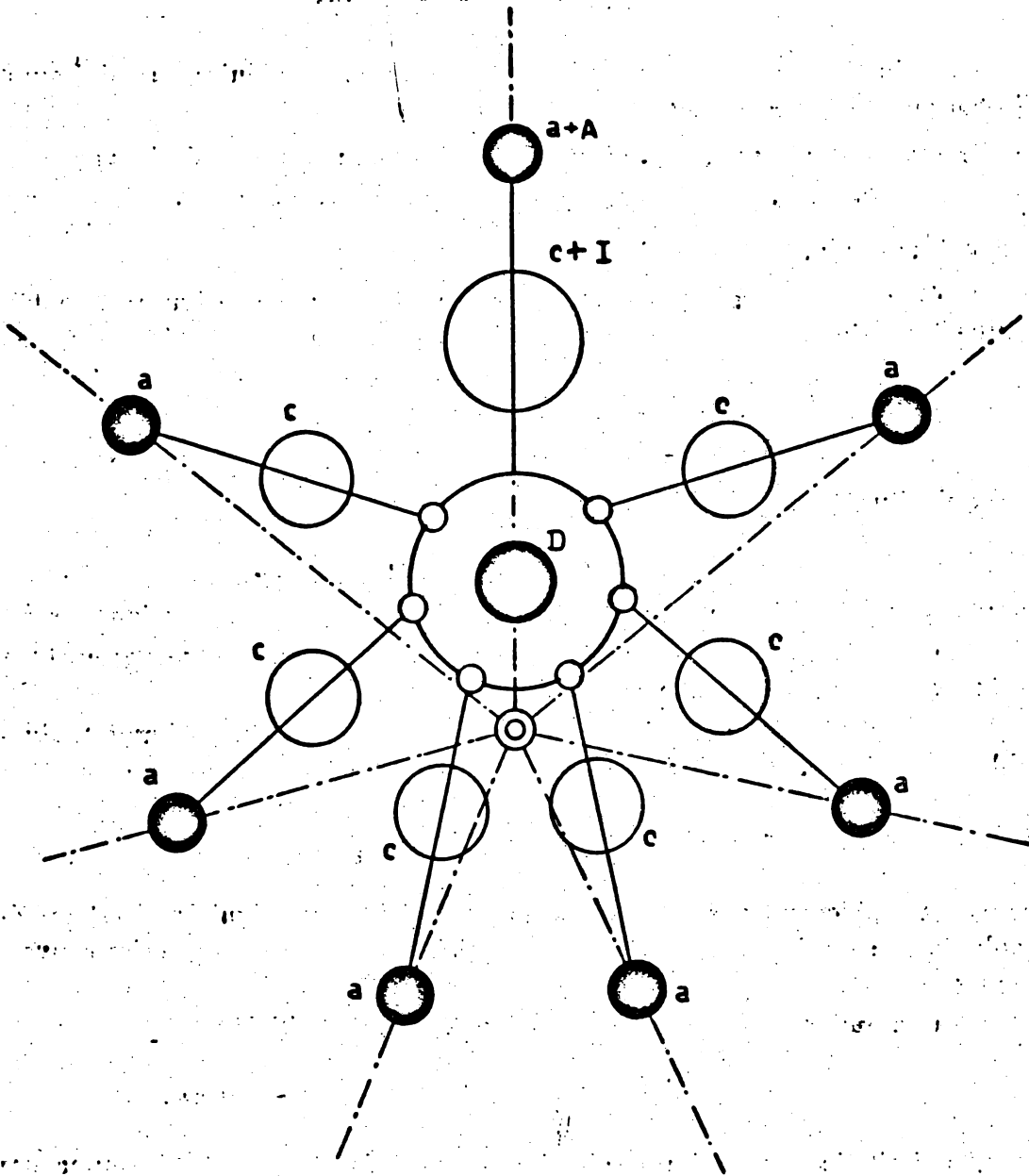


FIG. 9.

Deuxième réduction à des masses ponctuelles.

### § 9. Développements trigonométriques.

La réduction ponctuelle précédente a l'avantage de réduire au minimum l'importance des développements trigonométriques.

Le calcul des énergies cinétiques n'implique plus que le développement :

1° des distances  $x_n$  entre axe du vilebrequin et axe du piston;

2° des obliquités  $\beta_n$  des bielles.

Les équations trigonométriques suivantes, déduites de la figure 4, sont à notre disposition :

$$\begin{cases} x_n = l \cos \beta_n + r_n \cos (\beta_n + \epsilon_n) + R \cos (\psi_n - \theta); \\ L \sin \beta_n + R \sin \theta = 0; \\ l \sin \beta_n = -r_n \sin (\beta_n + \epsilon_n) + R \sin (\psi_n - \theta). \end{cases}$$

Substituant

$$\cos \beta_n = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_n},$$

nous pouvons établir des expressions exactes pour  $x_n$  et  $\beta_n$  en fonction de  $\theta$ .

Ces fonctions sont périodiques, de période  $2\pi$ , et leur développement en série de FOURIER nous intéresse davantage.

Le calcul direct des coefficients de FOURIER conduit à des intégrales réductibles à des intégrales elliptiques. Cependant, comme la série de TAYLOR :

$$\cos \beta_n = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \beta_n - \frac{1}{8} \sin^4 \beta_n - \frac{1}{16} \sin^6 \beta_n \dots,$$

converge rapidement par suite de la valeur limitée des obliquités, il est préférable de s'en servir pour exprimer les coefficients sous forme de séries convergentes.

Les paramètres sans dimensions suivants ont été utilisés :

$$\lambda = R/L \quad \mu = R/l \quad \sigma_n = \frac{r_n}{R} \sin \epsilon_n \quad \gamma_n = \frac{r_n}{R} \cos \epsilon_n.$$

La limitation des séries a été faite en considérant  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\sigma_n$  comme des quantités petites du premier ordre.

On trouvera en annexe les développements des fonctions sans dimensions suivantes :

$$u_n = \frac{\dot{x}_n}{R \dot{\theta}} \dots, \text{ vitesse non dimensionnelle de piston;}$$

$$u_n^2 \dots, \text{ son carré;}$$

$\delta_n = \frac{\beta_n}{\mu \theta} \dots$ , vitesse non dimensionnelle d'obliquité ;

$\delta_n^2 \dots$ , son carré ;

$\Delta_1 = \frac{\beta_1}{\lambda \theta} \dots$ , vitesse non dimensionnelle de l'obliquité principale ;

$\Delta_1^2 \dots$ , son carré ;

$$u_{nR} = u_n \frac{\partial x_n}{\partial R}; \quad \delta_{nR} = \delta_n l \frac{\partial \beta_n}{\partial R}; \quad \Delta_{1R} = \Delta_1 L \frac{\partial \beta_1}{\partial R}.$$

Des développements similaires ont été établis par LEHR, EVANS et BUTCHER (7), ainsi que par KIMMEL.

### § 10. Addition et discrimination des harmoniques.

Les axes des cylindres font entre eux le même angle :  $\frac{2\pi}{n}$ .

Pour deux cylindres symétriques par rapport au principal, on établit finalement le tableau de correspondance suivant :

cylindre $n$	$\psi_n$	$r_n$	$\varepsilon_n$	$\sigma_n$	$\gamma_n$	$\cos k \psi_n$	$\sin k \psi_n$
symétrique	$-\psi_n$	$r_n$	$-\varepsilon_n$	$-\sigma_n$	$\gamma_n$	$\cos k \psi_n$	$-\sin k \psi_n$

Suivant les combinaisons de ces facteurs dans les développements, les termes s'ajoutent ou se détruisent.

Quand les sommations sont achevées, les harmoniques sont groupés comme suit :

- 1° harmoniques de perturbation angulaires (s'annulant avec  $\sigma_n$ );
- 2° harmoniques de perturbation linéaires (s'annulant avec  $\gamma_n$  et distincts de 1°).

Puis les harmoniques provenant du moteur monocylindrique constitué par les maîtres-excès :

- 3° harmoniques dus au maître-excès alternatif (s'annulant avec A);
- 4° harmoniques dus au maître-excès du moment d'inertie (s'annulant avec I).

Les harmoniques restants peuvent être groupés sous le titre d'harmoniques naturels, puisqu'ils sont aussi bien présents dans le moteur en étoile idéalisé, pour lequel, en effet, on a

$$\sigma_n = \gamma_n = A = I = 0.$$

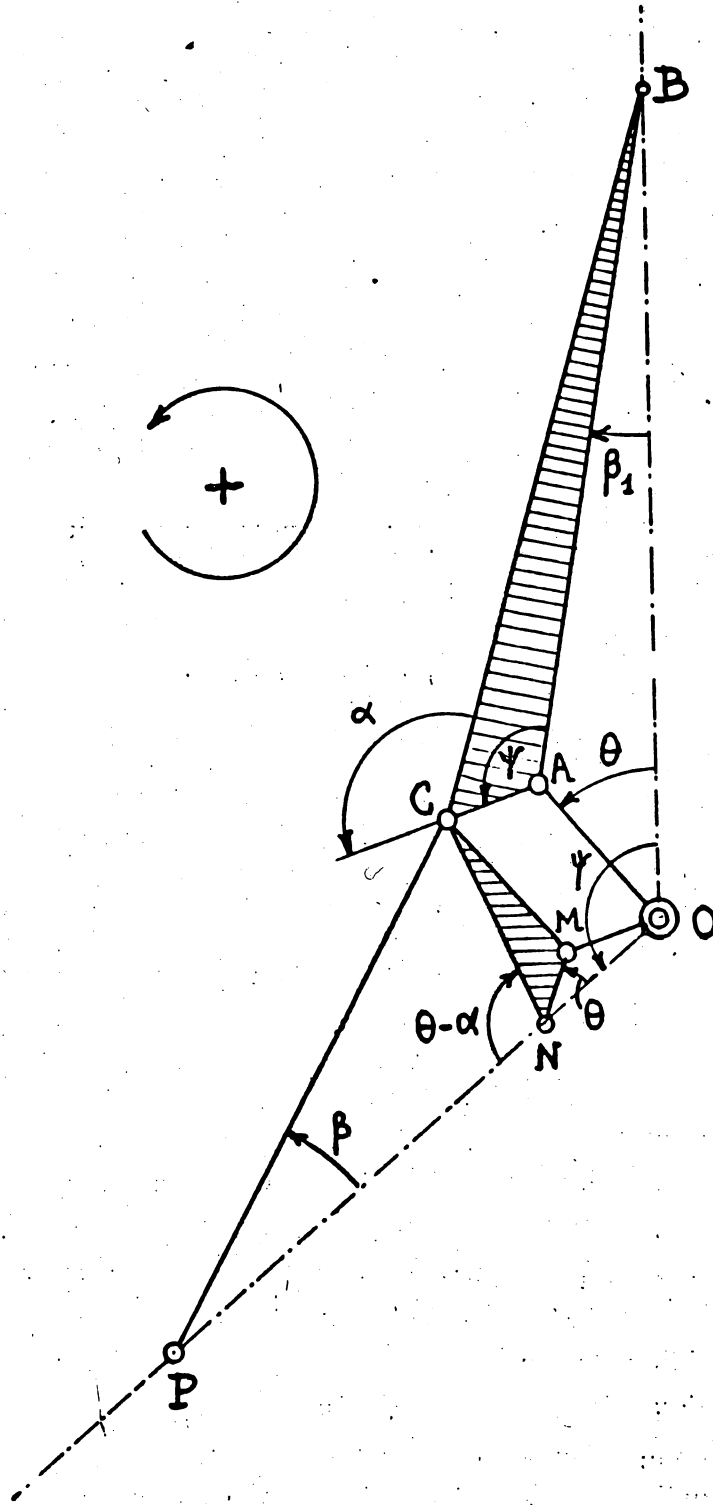


FIG. 10.

Deuxième génération du mouvement d'une bielle et théorème de Crocco.

§ 11. Cas particulier des excentricités angulaires nulles.

Quand  $\varepsilon_n = 0$ , TANAKA (2) a observé que l'obliquité  $\beta_n$  de la bielle pouvait être considérée comme l'obliquité résultant d'une attaque directe par une manivelle fictive de rayon  $R^*$  et déphasage  $\alpha$  :

$$l \sin \beta_n = -r_n \sin \beta_1 + R \sin (\psi_n - \theta) = r_n \frac{R}{L} \sin \theta + R \sin (\psi_n - \theta) = -R^* \sin (\theta - \alpha),$$

à condition de prendre

$$R^* = R \sqrt{\left(\frac{r_n}{L}\right)^2 - 2 \frac{r_n}{L} \cos \psi_n + 1};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \psi_n}{\cos \psi_n - \frac{r_n}{L}}.$$

MERCIER (19) en a déduit que le mouvement du piston de bielle pouvait être ramené à une superposition de deux mouvements bielle-manivelle ordinaires :

$$x_n = (R^* \cos (\theta - \alpha) + l \cos \beta_n) + (r_n \frac{R}{L} \cos \theta + r_n \cos \beta_1).$$

Un premier de manivelle  $R^*$  et bielle  $l$ , déphasé de l'angle  $\alpha$ ; un second de manivelle  $r_n \lambda$  et bielle  $r_n$ , non déphasé.

CROCCO (11), (12) est arrivé à la même conclusion par voie géométrique et l'a énoncée sous une forme connue dans la littérature italo-germanique sous le nom de théorème de CROCCO.

En réalité, cette propriété est à rattacher à un cas particulier du vieux théorème du trois-barres [par exemple ref. (1)], un des centres de rotation étant éloigné à l'infini et remplacé par le guidage rectiligne du piston principal. On obtient alors une deuxième génération du mouvement du point C au moyen du triangle MCN semblable à ABC, ce qui rend le théorème de CROCCO évident à simple inspection (fig. 10). Le point N est guidé sur OP.

D'autres considérations relatives à la cinématique du cas particulier  $\varepsilon_n = 0$  se trouvent développées dans la publication (6) de l'ingénieur principal DUCARME. L'extension des méthodes, qui s'y trouvent être utilisées, permet d'établir les formules énoncées sans démonstration au § 8.



## CHAPITRE II.

### CALCUL DES FORCES DE LIAISON EXTERNES

Les forces de liaison entre moteur et bâti-moteur sont connues en tant que système vectoriel, quand on peut en donner les trois composantes de la somme vectorielle et les trois moments par rapport à un système d'axes non parallèles.

*Les axes choisis sont :*

OZ : l'axe du vilebrequin;

OX : suivant l'axe du cylindre principal;

OY : perpendiculaire aux précédents et orienté de façon à ce qu'une rotation positive de 90° amène l'axe OX sur OY.

Soient  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  les composantes de la somme vectorielle des efforts transmis par le moteur sur le bâti-moteur;  $M_{ox}$ ,  $M_{oy}$ ,  $M_{oz}$ , les trois moments.

#### § 1. Calcul des forces tournantes transmises au bâti.

Au cours d'une translation vectorielle du moteur le long de OX, le seul travail virtuel des forces extérieures et intérieures est celui de la composante —  $S_x$  exercée par le bâti sur le moteur :

Dénotons par  $Tmx$  l'énergie mutuelle associée; l'équation lagrangienne s'écrit, d'après (9) :

$$S_x = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Tmx}{\partial \dot{q}} \right).$$

Pour le calcul de  $Tmx$ , utilisons le schéma de décomposition ponctuelle de l'embliage établi au chapitre premier, § 8.

Chaque masse ponctuelle donne une contribution représentée par le produit de sa masse et du produit scalaire de sa vitesse réelle et de sa vitesse virtuelle.

Les moments d'inertie correcteurs ne donnent pas de contribution du fait que la vitesse angulaire est nulle. D'où

$$Tmx = a\dot{q} \sum \dot{x}_n \cos \psi_n + A\dot{q}\dot{x}_1 - D\dot{q}\dot{\theta} R \sin \theta.$$

En prenant un déplacement virtuel le long de OY, on aurait, de façon similaire,

$$S_y = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_{my}}{\partial \dot{q}} \right),$$

où

$$T_{my} = a \dot{q} \sum \dot{x}_n \sin \psi_n + D \dot{q} \dot{\theta} R \cos \theta.$$

On a immédiatement  $S_z = 0$ , du fait que les forces d'inertie sont toutes parallèles au plan XOY.

Il est commode de continuer le calcul de  $S_x$  et  $S_y$  en considérant XOY comme le plan d'une variable complexe  $x + iy$ ; on introduira donc les grandeurs complexes

$$S = S_x + i S_y;$$

$$T_m = T_{mx} + i T_{my},$$

et la combinaison des équations données plus haut donne

$$S_y = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \dot{q}} \right), \tag{18}$$

où

$$T_m = a \dot{q} \sum \dot{x}_n e^{i \psi_n} + A \dot{q} \dot{x}_1 + i R \dot{\theta} \dot{q} D e^{i \theta}.$$

Introduisons les vitesses non dimensionnelles des pistons :

$$T_m = \frac{R \dot{\theta} \dot{q}}{g} [g a \sum u_n e^{i \psi_n} + g A u_1 + i g D e^{i \theta}]. \tag{19}$$

Après introduction des développements en série de FOURIER pour les  $u_n$ , qu'on trouvera dans l'annexe I, on trouve pour  $T_m$  un développement du type

$$T_m = \frac{R \dot{\theta} \dot{q}}{g} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} S_k e^{i k \theta}. \tag{20}$$

Les expressions des coefficients  $S_k$  sont données par les tableaux I et II; un nombre limité seulement de coefficients est obtenu du fait qu'on a limité les séries aux termes du 5<sup>e</sup> ordre en  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . Par ailleurs, la valeur des coefficients suivants devient rapidement négligeable; il reste à trouver leur signification.

Pour cela, supposons que  $\theta$  conserve une valeur constante désignée par  $\Omega$  et effectuons les dérivations indiquées par (18); on trouve

$$S = \frac{R \Omega^2}{g} \sum_{-\infty}^{+\infty} S_k e^{i \Omega k}. \tag{21}$$

Dans cette équation,  $R \Omega^2 / g$  est un « coefficient d'accélération »; il mesure l'accélération radiale de l'axe du maneton, celle de la pesanteur étant prise pour unité.

I. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES FORCES TOURNANTES. — A) Sens de rotation du vilebrequin.

Forces Tournantes →		$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
Harmoniques d'Excentricités	linéaires		$-\lambda \mu \left(1 + \frac{3}{8} \mu^2\right) + \frac{1}{2} \lambda^2 \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2\right) - \frac{1}{8} \lambda \mu^3 + \frac{1}{2} \lambda^3 \mu \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2\right)$		$-\frac{1}{8} \lambda^4 + \frac{1}{2} \lambda \mu^2 - \frac{3}{4} \lambda^3 \mu^3$		
	angulaires	$+\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{16} \lambda^2 \mu + \frac{1}{2} \lambda \mu \left(1 + \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{3}{8} \lambda^2\right)$		$-\frac{9}{16} \mu^2 + \frac{9}{16} \lambda \mu (\lambda^2 + 3\mu^2)$			
	$g A$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2} \lambda \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{15}{128} \lambda^4\right)$		$-\frac{1}{8} \lambda^2 \left(1 + \frac{3}{4} \lambda^2\right)$		$+\frac{9}{256} \lambda^5$
	$g D$	$+1$					
Harmoniques Naturels	$g a$	$+\frac{n}{2}$			$-\frac{1}{8} \mu^2 \left(1 + \frac{3}{4} \mu^2\right) (n, 3)$		$+\frac{9}{256} \mu^5 (n, 5)$

(1) Chaque colonne renseigne, pour une force tournante donnée, les multiplicateurs des groupements de facteurs figurant à gauche sur la même ligne. La somme de tous les termes qui possèdent un multiplicateur est l'expression mathématique de la force tournante.

(2) Pour la signification des facteurs  $(g, 0)$ , etc., cfr le tableau VII.

II. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES FORCES TOURNANTES. — B) Sens de rotation inverse.

Forces Tournantes →		S <sub>-1</sub>	S <sub>-2</sub>	S <sub>-3</sub>	S <sub>-4</sub>	S <sub>-5</sub>	S <sub>-6</sub>	
Harmoniques d'Excentricités	linéaires	(g, 0)						
		(g, 1)						
		(g, 2)						
		(g, 4)						
		(2g, 1)						
		(2g, 3)						
	angulaires	(s, 1)	$-\frac{1}{2}\lambda$					
		(s, 2)	$+\frac{1}{2}\mu(1 + \frac{3}{8}\mu^2 - \frac{1}{4}\lambda^2)$					
		(s, 4)						
		(s, g, 1)	$-\frac{1}{2}\lambda\mu(1 + \frac{3}{4}\mu^2 - \frac{3}{8}\lambda^2)$					
g a	(s, g, 3)	$-\frac{3}{16}\lambda\mu^3$						
	(2s, 1)							
g D	(2s, 3)							
	g A	$+\frac{1}{2}$						
Harmoniques Naturels	g a							

$$-\frac{1}{8}\lambda^4$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\mu^3$$

$$-\frac{3}{4}\lambda^2\mu^2$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2(1 + \frac{1}{4}\lambda^2)$$

$$-\lambda\mu(1 + \frac{3}{8}\mu^2)$$

$$-\frac{1}{8}\lambda\mu^3$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu(1 + \frac{3}{4}\mu^2)$$

$$+\frac{3}{8}\lambda^2\mu^3$$

$$+\frac{9}{16}\lambda^2\mu$$

$$-\frac{9}{16}\mu^3$$

$$-\frac{9}{16}\lambda^2\mu$$

$$+\frac{27}{16}\lambda\mu^3$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2\mu$$

$$+\frac{3}{4}\mu^5$$

$$+\frac{1}{2}\lambda(1 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{15}{128}\lambda^4)$$

$$+\frac{1}{2}\mu(1 + \frac{1}{4}\mu^2 + \frac{15}{128}\mu^4)(\mu, 3)$$

$$-\frac{1}{8}\lambda^2(1 + \frac{3}{4}\lambda^2)$$

$$-\frac{1}{8}\mu^2(1 + \frac{3}{4}\mu^2)(\mu, 5)$$

$$+\frac{9}{256}\lambda^5$$

$$+\frac{9}{256}\mu^5(\mu, 7)$$

Un terme  $S_k e^{ik\Omega t}$  représente une force de grandeur  $S_k$ , tournant à la vitesse angulaire  $k\Omega$ . Pour des entiers  $k$  négatifs, la rotation s'effectue en sens inverse du vilebrequin.

Nous avons donc obtenu une représentation du vecteur  $(S_x, S_y)$  en une superposition de vecteurs tournants; ce sont les « forces tournantes ». La plus importante :  $S_1$ , qui accompagne la rotation du vilebrequin, peut être équilibrée directement par l'adjonction d'un contrepoids. L'équilibrage des autres nécessite des dispositifs spéciaux sur lesquels nous reviendrons ultérieurement.

Remarque. — L'hypothèse de la constance de la vitesse angulaire du vilebrequin peut être discutée. De toute façon, on peut calculer  $S$  par la méthode précédente dans le cas général; on obtient

$$S = \frac{R \Omega^t}{g} \sum_{-\infty}^{+\infty} S_k e^{ik\theta} - \frac{R}{g} \frac{d\Omega}{dt} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{k} S_k e^{ik\theta}.$$

Le problème est ramené à la connaissance de  $\Omega$  en fonction de  $\theta$ ; problème très ardu, qui ne sera pas abordé ici.

En général on peut se faire une idée assez exacte de l'importance des écarts à la valeur moyenne, au moyen d'un diagramme « masse-énergie » [cf., par exemple, (16)].

## § 2. Calcul des moments $M_{ox}$ et $M_{oy}$ .

Comme le plan XOY constitue toujours un plan de symétrie pour l'embiellage, les moments  $M_{ox}$  et  $M_{oy}$  sont nécessairement nuls.

Dans le cas des moteurs en étoile multiple, l'embiellage de chaque étoile donnera comme contribution au moment par rapport à un axe de référence, perpendiculaire au vilebrequin, le moment de sa somme vectorielle située dans son plan de symétrie.

En particulier, dans les moteurs à étoile double, du fait que les manetons et les axes des cylindres principaux sont décalés de  $180^\circ$ , les sommes vectorielles se résolvent en un système de couples tournants. Chaque couple tournant est dû au produit de la force tournante correspondante par la distance entre les plans de symétrie des deux étoiles.

Remarque. — Dans tout ce qui précède on suppose que le vilebrequin, le réducteur et les autres pièces importantes en mouvement de rotation sont équilibrés statiquement et dynamiquement. Le contrepoids, qui fait généralement partie intégrante du vilebrequin, est, pour la commodité du calcul, traité de façon indépendante.

### § 3. Calcul du moment de renversement.

Les éléments qui interviennent dans ce calcul sont les suivants :

$C_m$  : le couple moteur dû à l'évolution thermodynamique des fluides dans les cylindres. Sa valeur est calculable pour chaque position du vilebrequin au moyen des diagrammes d'indicateurs. Les procédés de l'analyse harmonique permettent de le développer en série de FOURIER. On trouvera dans les références (10) et (16) des résultats intéressants à ce sujet.

$C_r$  : le couple résistant. Nous le supposons appliqué à un arbre entraîné parallèlement au vilebrequin à  $\frac{1}{\tau}$  fois la vitesse de celui-ci, et cela au moyen d'un réducteur qui fait corps avec le moteur.

Les sens positifs de ces couples sont ceux des angles  $\theta$  croissants.

Écrivons l'équation du mouvement réel du moteur en ne considérant que les variations de la coordonnée  $\theta$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = C_m + \frac{1}{\tau} C_r. \quad (22)$$

Appliquant la notion de force d'inertie, considérons dans (22) le couple d'inertie

$$C_i = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta}.$$

L'équation (22), résolue par rapport au couple résistant, peut donc s'écrire

$$C_r = - \tau (C_m + C_i).$$

Pour obtenir une équation qui fasse intervenir le moment de renversement  $Moz$ , appliquons au moteur une rotation virtuelle  $\alpha$  autour de l'axe du vilebrequin et écrivons l'équation (9) valable pour les liaisons externes; il vient

$$C_r - Moz = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \dot{\alpha}} \right).$$

On peut y substituer la valeur trouvée pour le couple résistant, et ainsi

$$Moz = - \tau (C_m + C_i) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_m}{\partial \dot{\alpha}} \right). \quad (23)$$

On remarquera le rôle amplificateur du réducteur, qui multiplie par  $\tau$  la réaction du couple moteur et du couple d'inertie. L'emploi de propulseurs coaxiaux et contra-rotatifs permet théoriquement d'annuler cet effet.

Le dernier terme de (23) est connu sous le nom de « couple de basculement des bielles »; il est généralement faible comparé aux deux autres.

III. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS U.

Coefficients →		U <sub>0</sub>	U <sub>1</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>3</sub>	U <sub>4</sub>	U <sub>5</sub>	
Harmoniques d'Excentricités	linéaires	g <sup>a</sup>	(g, 0)	- $\frac{1}{2} \lambda \mu$				
			(g, 1)	+ $\frac{1}{4} \lambda^2$				
			(g, 2)	+ $\frac{1}{8} \lambda^2 \mu$				
		(g, 3)						
		(2g, 1)	+ $\frac{1}{4} \lambda^2 \mu$					
	angulaires	g <sup>c</sup> / <sub>p</sub>	(g, 1)	- $\frac{1}{2} \lambda (1 + \frac{1}{2} \mu^2)$				
			(g, 3)	+ $\frac{1}{4} \lambda^2$				
			(2g, 0)					
		g <sup>a</sup>	(s, 1)	+ $\frac{1}{2} \lambda$				
			(s, 3)	+ $\frac{1}{2} \lambda \mu$				
g <sup>c</sup> / <sub>p</sub>	(s, 1)							
	(s, 3)							
g <sup>D</sup>								
g <sup>A</sup>								
g <sup>L</sup> / <sub>2</sub>								
Harmoniques g <sup>u</sup>								
Naturels g <sup>c</sup> / <sub>p</sub>								

IV. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS V.

Coefficients →		V <sub>0</sub>	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>
Harmoniques d'Excentricités	linéaires	$\frac{c}{g \bar{r}} \left. \begin{array}{l} (g, 0) \\ (g, 2) \\ (2g, 1) \end{array} \right\}$	$+\frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{1}{4} \mu^2\right) + \frac{1}{8} \lambda \mu - \frac{3}{8} \lambda^2 \mu$		$-\frac{9}{8} \lambda \mu + \frac{9}{8} \lambda^2 \mu$		
	angulaires		$\frac{c}{g \bar{r}} \left. \begin{array}{l} (s, 2) \\ (s, g, 1) \\ (2s, 1) \end{array} \right\}$	$+\mu - 2\lambda \mu$			
	g D	+ 1					
	$\frac{1}{g \bar{L}^2}$		$-\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{8} \lambda^2 + \frac{3}{64} \lambda^4\right)$		$+\frac{3}{8} \lambda \left(1 + \frac{9}{16} \lambda^2\right)$		$-\frac{15}{128} \lambda^3$
Harmoniques Naturels	$\frac{c}{g \bar{r}}$		$-\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{1}{8} \mu^2 + \frac{3}{64} \mu^4\right) (n, 1)$		$+\frac{3}{8} \mu \left(1 + \frac{9}{16} \mu^2\right) (n, 3)$		$-\frac{15}{128} \mu^3 (n, 5)$



CALCUL DU COUPLE D'INERTIE. — Moyennant le schéma de réduction ponctuel de l'embellage, on peut écrire, pour l'énergie réelle :

$$T = \frac{1}{2} a \Sigma \dot{x}_n^2 + \frac{1}{2} A \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c \Sigma \dot{\beta}_n^2 + \frac{1}{2} I \dot{\beta}_1^2 + \frac{1}{2} D (R \dot{\theta})^2,$$

ou, si l'on fait intervenir les grandeurs cinématiques sans dimensions développées en annexe :

$$T = \frac{(R \dot{\theta})^2}{2g} [ga \Sigma u_n^2 + gA u_1^2 + \frac{gc}{l^2} \Sigma \delta_n^2 + \frac{gI}{L^2} \Delta_1^2 + gD]. \quad (24)$$

On obtient ainsi le tableau III des coefficients  $U_n$  qui interviennent dans un développement en série de FOURIER :

$$T = \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{g} [U_0 + U_1 \cos \theta \dots + \frac{1}{n} U_n \cos n \theta \dots], \quad (25)$$

qui correspond au couple d'inertie :

$$Ct = R \frac{R \Omega^2}{g} (U_1 \sin \theta \dots + U_n \sin n \theta \dots) - 2R \frac{R d \Omega}{g dt} (U_0 + U_1 \cos \theta \dots + \frac{1}{n} U_n \cos n \theta \dots) \quad (26)$$

CALCUL DU COUPLE DE BASCULEMENT DES BIELLES. — Les masses en mouvement alternatif  $a$  et  $A$  ne donnent pas de contribution à l'énergie mutuelle, car leur vitesse virtuelle est perpendiculaire à leur vitesse réelle de translation; il reste

$$Tm = c \dot{\alpha} \Sigma \dot{\beta}_n + I \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + D \dot{\alpha} R^2 \dot{\theta},$$

ou en fonctions sans dimensions :

$$Tm = \dot{\alpha} \dot{\theta} \frac{R^2}{g} \left[ \frac{gc}{l^2} \frac{1}{\mu} \Sigma \delta_n + \frac{gI}{L^2} \frac{1}{\lambda} \Delta_1 + gD \right]. \quad (27)$$

Le tableau IV permet de calculer les coefficients  $V_n$  du développement en série de FOURIER qui y correspond :

$$Tm = \dot{\alpha} \dot{\theta} \frac{R^2}{g} [V_0 + V_1 \cos \theta \dots + \frac{1}{n} V_n \cos n \theta \dots]. \quad (28)$$

Le développement du couple de basculement est alors

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Tm}{\partial \dot{\alpha}} \right) = R \frac{R \Omega^2}{g} [V_1 \sin \theta \dots + V_n \sin n \theta \dots] - R \frac{R d \Omega}{g dt} [V_0 + V_1 \cos \theta \dots + \frac{1}{n} V_n \cos n \theta \dots]. \quad (29)$$

A vitesse angulaire constante, le couple de renversement vaut

$$Moz = -Cm + R \frac{R \Omega^2}{g} [(V_1 - \tau U_1) \sin \Omega t \dots + (V_n - \tau U_n) \sin n \Omega t \dots] \quad (30)$$

### CHAPITRE III.

## CALCUL DES FORCES DE LIAISON INTERNES

Les investigations seront limitées au calcul des forces de liaison entre bielle maîtresse et maneton et entre vilebrequin et paliers.

L'interaction biellette-bielle maîtresse et biellette-piston est commodément traitée par les méthodes classiques; on consultera, par exemple, la référence (19).

#### § 1. Liaison bielle maîtresse et maneton.

A. — Composante tangentielle  $F_t$  de l'action de la bielle sur le maneton.

Comptée positive quand elle tend à faire tourner le vilebrequin dans la direction des angles  $\theta$  croissants, on trouve facilement que

$$F_t = \frac{1}{R} (C_i + C_m). \quad (31)$$

Par conséquent, les coefficients  $U_i$  de (26) fournissent la réponse au problème.

B. — Composante radiale  $F_r$ .

Elle est comptée positive quand elle tend à augmenter le rayon de manivelle  $R$ .

Pour établir une équation lagrangienne, dans laquelle elle interviendra, donnons à l'axe de maneton une vitesse virtuelle radiale :

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt}.$$

L'équation lagrangienne du type (7) qui en résulte :

$$-\frac{\pi a^2}{4} \sum p_n \frac{\partial \alpha_n}{\partial R} - F_r = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T m}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial T}{\partial R}, \quad (32)$$

fait intervenir le travail virtuel des pressions  $p_n$  du fluide en évolution dans les cylindres.

Une masse  $a$  subit une vitesse de translation virtuelle de même direction que sa vitesse réelle :

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial R} \dot{R}.$$

V. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS W.

Coefficients W →		W <sub>1</sub>	W <sub>2</sub>	W <sub>3</sub>	W <sub>4</sub>	W <sub>5</sub>	
Harmoniques d'Excentricités	linéaires	(g, 0)	$-\frac{1}{2}\lambda\mu$	$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu$	$-\frac{3}{2}\lambda^3$		
		(g, 1)	$+\frac{1}{2}\lambda^2$	$-\frac{3}{2}\lambda\mu^2$	$+\frac{3}{2}\lambda\mu$	$-\lambda^2\mu$	
		(g, 2)	$-\frac{1}{2}\lambda\mu$	$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu$		$+2\lambda\mu^2$	
		(g, 3)		$-\frac{1}{2}\lambda\mu^2$	$-\frac{3}{2}\lambda^2\mu$		
		(2g, 1)	$-\frac{1}{2}\lambda^2\mu$				
	angulaires	(g, 1)		$-2\lambda(1 + \frac{3}{4}\mu^2)$			
		(g, 3)		$-\frac{1}{2}\lambda\mu^2$		$+2\lambda\mu^2$	
		(2g, 0)		$+\lambda^2$			
		(s, 1)	$+\frac{1}{2}\mu^2$	$+2\lambda$			
		(s, 2)		$-2\mu$	$+\frac{3}{2}\lambda\mu$		
g a	(s, 3)		$+2\lambda\mu$	$-\frac{3}{2}\mu^2$			
	(s, g, 1)			$+\frac{3}{2}\lambda^2$			
	(s, 1)	$+\frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2)$		$+\frac{3}{2}\lambda^2$			
	(s, 3)			$-\frac{3}{2}\mu^2$			
	g A			$-\frac{3}{2}\lambda(1 + \frac{3}{8}\lambda^2)$	$-\frac{1}{2}\lambda^2$	$+\frac{5}{16}\lambda^2$	
g I <sup>2</sup>			$+(1 + \frac{1}{2}\lambda^2)$		$-\frac{1}{2}\lambda^2$		
Harmoniques	g a	$+\frac{1}{2}\mu(1 + \frac{1}{2}\mu^2)(n, 1)$		$-\frac{3}{2}\mu(1 + \frac{3}{8}\mu^2)(n, 3)$		$+\frac{5}{16}\mu^2(n, 5)$	
Naturels	$\frac{c}{g \bar{p}}$						

VI. — TABLEAU POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS R.

Coefficients →		R <sub>0</sub>	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>	R <sub>3</sub>	R <sub>4</sub>	R <sub>5</sub>	
Harmoniques d'Excentricités	linéaires	g <sub>a</sub>	(g, 0)	-λμ	- $\frac{1}{2}\lambda^2\mu$	$+\frac{3}{4}\lambda^2$		
			(g, 1)	$+\frac{1}{4}\lambda^2$	$+\frac{3}{2}\lambda\mu^2$	$-\frac{3}{2}\lambda\mu$	$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu$	
			(g, 2)	$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu$	$-\frac{1}{2}\lambda^2\mu$	$-\frac{3}{2}\lambda\mu$	$-\lambda\mu^2$	
			(g, 3)		$+\frac{1}{2}\lambda\mu^2$	$+\frac{3}{4}\lambda^2\mu$		
			(2g, 1)	$+\frac{1}{4}\lambda^2\mu$				
	angulaires	g <sub>a</sub>	(g, 1)	$-\lambda(1+\mu^2)$	$+\lambda(1+\frac{3}{2}\mu^2)$			
			(g, 3)		$+\frac{1}{2}\lambda\mu^2$		$-\lambda\mu^2$	
			(2g, 0)	$+\frac{1}{2}\lambda^2$	$-\frac{1}{2}\lambda^2$			
			(s, 1)	$+\lambda$	$-\lambda$			
			(s, 2)		$+\mu$	$-\frac{3}{4}\lambda\mu$		
Harmoniques g <sub>a</sub>	g <sub>a</sub>	(s, 3)		$-\lambda\mu$	$+\frac{3}{4}\mu^2$			
		(s, g, 1)	$+\lambda\mu$					
		(s, 1)			$-\frac{3}{4}\lambda^2$			
		(s, 3)			$+\frac{3}{4}\mu^2$			
		(s, 1)		$-\frac{1}{4}(\lambda^2+5\mu^2)$				
Naturels	g <sub>a</sub>		$+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\lambda^2)$	$+\frac{1}{2}(1-\lambda^2)$	$+\frac{3}{4}\lambda(1+\frac{1}{8}\lambda^2)$	$+\frac{1}{4}\lambda^2$	$-\frac{5}{32}\lambda^2$	
			$+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\lambda^2)$	$-\frac{1}{2}(1+\lambda^2)$		$+\frac{1}{4}\lambda^2$		
			$+(1+\frac{1}{2}\mu^2)\frac{n}{2}$	$-\frac{1}{4}\mu(1-\frac{1}{4}\mu^2)(n, 1)$	$+\frac{3}{4}\mu(1+\frac{1}{8}\mu^2)(n, 3)$		$-\frac{5}{32}\mu^2(n, 5)$	
Naturels	g <sub>a</sub>		$+(1+\frac{1}{2}\mu^2)\frac{n}{2}$					

Les bielles subissent aussi des vitesses angulaires virtuelles :

$$\frac{\partial \beta_n}{\partial R} \dot{R}.$$

On en tire l'expression de l'énergie mutuelle appropriée à ce cas :

$$Tm = a \dot{R} \Sigma \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial R} + A \dot{R} \dot{x}_1 \frac{\partial x_1}{\partial R} + c \dot{R} \Sigma \dot{\beta}_n \frac{\partial \beta_n}{\partial R} + I \dot{R} \dot{\beta}_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial R},$$

ou, en termes de fonctions sans dimensions :

$$Tm = \dot{R} \frac{R \dot{\theta}}{g} [g a \Sigma u_{nR} + g A u_{1R} + \frac{g c}{P} \Sigma \delta_{nR} + \frac{g I}{L^2} \Delta_{1R}]. \quad (33)$$

La substitution des fonctions par leurs séries de FOURIER signalées en annexe et la comparaison avec l'expression condensée

$$Tm = \dot{R} \frac{R \dot{\theta}}{g} [W_1 \sin \theta \dots + \frac{1}{n} W_n \sin n \theta \dots] \quad (34)$$

permettent d'établir le tableau de calcul V des coefficients  $W_n$ .

D'autre part,

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{R \dot{\theta}^2}{g} \left[ \left( 2 U_0 + R \frac{\partial U_0}{\partial R} \right) \dots + \frac{1}{n} \left( 2 U_n + R \frac{\partial U_n}{\partial R} \right) \cos n \theta \dots \right];$$

d'où, en posant

$$R_n = \frac{1}{n} \left( 2 U_n + R \frac{\partial U_n}{\partial R} \right) - W_n \dots, \quad (35)$$

on obtient, pour la composante radiale :

$$F_r = - \frac{\pi d^2}{4} \Sigma p_n \frac{\partial x_n}{\partial R} + \frac{R \Omega^2}{g} [R_0 + R_1 \cos \theta \dots + R_n \cos n \theta \dots] - \frac{R}{g} \frac{d \Omega}{dt} [W_1 \sin \theta \dots + \frac{1}{n} W_n \sin n \theta \dots]. \quad (36)$$

**§ 2. Liaison vilebrequin-palier.**

Les forces tournantes transmises au bâti-moteur sont dues partiellement aux réactions latérales des pistons, partiellement aux actions du vilebrequin sur les paliers.

Nous sommes en mesure de séparer ces deux contributions en remarquant que les forces tangentielle et radiales sur le maneton sont transmises aux paliers par l'intermédiaire du vilebrequin.

Effectuons le calcul pour  $\Omega$  constant; le calcul supplémentaire pour une accélération angulaire est analogue.

TABLEAU VII. — Symboles utilisés dans les tableaux de calcul.

Coefficients de perturbation linéaire :	
$(g, 0) = \Sigma \gamma_n$	$(2g, 0) = \Sigma \gamma_n^2$
$(g, 1) = \Sigma \gamma_n \cos \psi_n$	$(2g, 1) = \Sigma \gamma_n^2 \cos \psi_n$
$(g, 2) = \Sigma \gamma_n \cos 2 \psi_n$	
$(g, 3) = \Sigma \gamma_n \cos 3 \psi_n$	$(2g, 3) = \Sigma \gamma_n^2 \cos 3 \psi_n$
$(g, 4) = \Sigma \gamma_n \cos 4 \psi_n$	
Coefficients de perturbation angulaire :	
$(s, 1) = \Sigma \sigma_n \sin \psi_n$	$(2s, 1) = \Sigma \sigma_n^2 \cos \psi_n$
$(s, 2) = \Sigma \sigma_n \sin 2 \psi_n$	
$(s, 3) = \Sigma \sigma_n \sin 3 \psi_n$	$(2s, 3) = \Sigma \sigma_n^2 \cos 3 \psi_n$
$(s, g, 1) = \Sigma \sigma_n \gamma_n \sin \psi_n$	
$(s, g, 3) = \Sigma \sigma_n \gamma_n \sin 3 \psi_n$	
$(n, 1) = \Sigma \cos \psi_n = 1$ pour moteur à 1 cylindre $(n, 3) = \Sigma \cos 3 \psi_n = 3$ pour moteur à 3 cylindres $(n, 5) = \Sigma \cos 5 \psi_n = 5$ pour moteur à 5 cylindres $(n, 7) = \Sigma \cos 7 \psi_n = 7$ pour moteur à 7 cylindres	

REMARQUE : Sommation étendue à tous les cylindres avec  $\gamma_i = \frac{L-l}{R}$

Prenant de nouveau le plan « OXY » comme celui d'une variable complexe, exprimons  $F_r$  et  $F_i$  comme des vecteurs :

$$\begin{cases} F_r = -\frac{\pi d^2}{4} \left( \sum p_n \frac{\partial x_n}{\partial R} \right) e^{i\theta} + \frac{R \Omega^2}{g} e^{i\theta} \sum_0^{\infty} R_k \cos k\theta; \\ F_i = -\frac{\pi d^2}{4} \left( \sum p_n \frac{1}{R} \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right) i e^{i\theta} + \frac{R \Omega^2}{g} i e^{i\theta} \sum_0^{\infty} U_k \sin k\theta. \end{cases}$$

Se servant alors des formules connues :

$$\cos k\theta = \frac{1}{2} (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta});$$

$$i \sin k\theta = \frac{1}{2} (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}),$$

la somme des deux vecteurs peut s'écrire

$$-\frac{\pi d^2}{4} \sum p_n \left( \frac{\partial x_n}{\partial R} + \frac{i}{R} \frac{\partial x_n}{\partial \theta} \right) e^{i\theta} + \frac{R \Omega^2}{g} \sum_{-\infty}^{+\infty} T_k e^{i\theta} \dots, \quad (37)$$

où les coefficients  $T_k$ , forces tournantes unitaires sur les paliers, sont des combinaisons simples :

$$T_1 = R_0, \quad T_{1-k} = \frac{1}{2} (R_k - U_k), \quad T_{1+k} = \frac{1}{2} (R_k + U_k). \quad (k = 1, 2 \dots) \quad (38)$$

L'inspection des tableaux montre de légères différences entre les forces tournantes  $S$  et les forces tournantes  $T$ , montrant par là qu'une partie des forces tournantes  $S$  provient des réactions latérales des pistons.

Le couple de renversement ne provient que des réactions latérales des pistons et, le cas échéant, de l'appui des dentures des satellites sur la couronne fixe du réducteur.

## CHAPITRE IV.

### APPLICATION DE LA THÉORIE

#### § 1. Résultats numériques.

Aucune discussion n'est possible sans la connaissance d'un ordre de grandeur des quantités étudiées.

Les résultats numériques qui suivent ont été calculés à partir des données de base du moteur BRAMO 323 à neuf cylindres en étoile, figurant au tableau VIII.

Au moyen de ces données on peut, à partir des formules établies aux §§ 6 et 8 du chapitre premier, calculer les données dérivées, reproduites au tableau IX, ainsi que les combinaisons sommatoires reproduites au tableau X.

**TABEAU VIII. — Données de base du BRAMO 323 à neuf cylindres en étoile.**

Alésage : 154 mm Course : 160 mm = 2 R	L = 330 mm    H = 41.3 mm l = 261.5 mm    k = 138.5 mm						
$r_1 = L - l = 68.50$ mm $r_2 = r_9 = 69.65$ mm $r_3 = r_6 = 71.26$ mm $r_4 = r_7 = 70.60$ mm $r_5 = r_8 = 68.82$ mm	$\epsilon_n = 0$						
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: left;"><math>gp = 2.972</math> kgs</td> <td style="text-align: left;"><math>gB = 10.54</math> kgs</td> <td style="text-align: left;"><math>J = 1.250</math> kg cm sec</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: left;"><math>gb = 1.42</math> kgs</td> <td style="text-align: left;"><math>j = 0.144</math> kg cm sec</td> </tr> </table>		$gp = 2.972$ kgs	$gB = 10.54$ kgs	$J = 1.250$ kg cm sec		$gb = 1.42$ kgs	$j = 0.144$ kg cm sec
$gp = 2.972$ kgs	$gB = 10.54$ kgs	$J = 1.250$ kg cm sec					
	$gb = 1.42$ kgs	$j = 0.144$ kg cm sec					

**TABEAU IX. — Données dérivées du BRAMO 323.**

$K = 0.12515$ $k = 0.52964$	$gBK = 1.3186$ kgs $gbk = 0.7519$ kgs	$gB(1 - K) = 9.2214$ kgs $gb(1 - k) = 0.6681$ kgs
$gm = 0.1386$ kgs $ga = 3.7239$ kgs $gA = 0.4281$ kgs $gD = 14.7048$ kgs	$g \frac{c}{r^2} = -0.1469$ kgs $g \frac{I}{L^3} = 0.4441$ kgs	

**TABEAU X. — Données dérivées du BRAMO 323.**

$\gamma_1 = 0.85685$ $\gamma_2 = \gamma_9 = 0.8706$ $\gamma_3 = \gamma_6 = 0.8907$ $\gamma_4 = \gamma_7 = 0.8825$ $\gamma_5 = \gamma_8 = 0.8602$	$(g, 0) = + 7.86425$ $(g, 1) = + 0.00027$ $(g, 2) = - 0.07995$ $(g, 3) = - 0.00025$ $(g, 4) = + 0.00093$ $(g, 5) = + 0.00093$	$(2g, 0) = + 6.8732$ $(2g, 1) = + 0.00048$ $(2g, 3) = - 0.00046$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------



**TABLEAU XI. — Puissances combinées des rapports bielle-manivelle.**

Puissances de $\mu \rightarrow$		1	2	3	4	5
Puissances de $\lambda$		0.30593	0.09359	0.02863	0.00876	0.00268
1	0.24242	0.07416	0.02269	0.00694		
2	0.05876	0.01798	0.00550	0.00168		
3	0.01424	0.00435				
4	0.00345					
5	0.00083					
6	0.00020					

**TABLEAU XII. — Valeurs numériques des harmoniques : BRAMO 323.**

$S_1 = 31.67635$	$T_1 = 31.97762$	$R_0 = 31.97762$	$U_0 = 15.72127$	$V_0 = 14.7048$
$S_2 = -2.19496$	$T_2 = -1.63417$ $T_0 = -0.57460$	$R_1 = -2.20877$	$U_1 = -1.05957$	$V_1 = -2.78241$
$S_3 = 0$ $S_{-1} = +0.21505$	$T_3 = -0.14311$ $T_{-1} = -0.12146$	$R_2 = -0.26458$	$U_2 = 0.02165$	$V_2 = 0$
$S_4 = -0.00184$ $S_{-2} = +0.07553$	$T_4 = -0.00057$ $T_{-2} = +0.11212$	$R_3 = +0.11155$	$U_3 = -0.11269$	$V_3 = +0.04073$
$S_5 = 0$ $S_{-3} = +0.00000$	$T_5 = -0.00002$ $T_{-3} = +0.01015$	$R_4 = +0.01013$	$U_4 = -0.01017$	$V_4 = 0$
$S_6 = -0.00001$ $S_{-4} = -0.00080$	$T_6 = -0.00000$ $T_{-4} = -0.00095$	$R_5 = -0.00095$	$U_5 = +0.00095$	$V_5 = -0.00074$
$S_6 = +0.00001$	Toutes valeurs exprimées en kilogrammes.			

Le tableau XI contient les combinaisons principales des puissances de  $\lambda$  et de  $\mu$  à utiliser.

L'application des calculs indiqués dans les tableaux I à VI conduit aux valeurs numériques des forces tournantes ou des harmoniques de couples, indiquées au tableau XII.

Pour obtenir l'amplitude réelle de ces forces, dans le cas d'une vitesse angulaire constante, il y a lieu de multiplier chaque fois par le facteur d'accélération centripète. Au régime normal du moteur, soit ici 2.100 t./m., ce facteur vaut

$$\frac{R \Omega^2}{g} = 394.38.$$

Il est donc à retenir qu'une unité du tableau XII peut représenter une force d'environ 400 kilogrammes.

### § 2. Ordre de grandeurs théorique des coefficients de perturbation.

Les valeurs numériques des grandeurs du tableau X peuvent être interprétées par des considérations théoriques, qui peuvent être étendues au cas d'existence d'excentricités angulaires.

A cet effet il sera admis que celles-ci sont réparties suivant la loi

$$\sin \epsilon_n = \epsilon \lambda \sin \psi_n, \quad \text{où } -1 \leq \epsilon \leq +1;$$

les cas extrêmes correspondent aux distributions uniformes des points morts bas ou des points morts hauts.

Admettant la loi de  $r_n$  établie au § 7 du chapitre premier et la développant en puissances de  $\lambda$  jusqu'à la seconde incluse :

$$\begin{aligned} r_n &= (L-l) \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} f_1 - \frac{\lambda^2}{4} f_1 \cos 2\psi_n \right); & \sigma_n &= \gamma_1 \epsilon \lambda \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} \lambda^2 f_1 \right) \sin \psi_n - \frac{3}{8} \lambda^2 f_1 \sin 3\psi_n \right]; \\ \gamma_n &= \gamma_1 \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} f_2 - \frac{\lambda^2}{4} f_2 \cos 2\psi_n \right); & \sigma_n \gamma_n &= \gamma_1^2 \epsilon \lambda \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} \lambda^2 (f_1 + f_2) \right) \sin \psi_n \right. \\ & & & \left. - \frac{3}{8} \lambda^2 (f_1 + f_2) \sin 3\psi_n \right]; \\ \gamma_n^2 &= \gamma_1^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} f_2 - \frac{\lambda^2}{2} f_2 \cos 2\psi_n \right); & & \end{aligned}$$

où les coefficients  $f_1$  et  $f_2$  ont les valeurs

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - 2\epsilon \frac{\rho + 1}{\rho - 1} + \epsilon^2; \\ f_2 &= 1 - 2\epsilon \frac{\rho + 1}{\rho - 1}. \end{aligned}$$

Effectuant alors la sommation sur toutes les valeurs de  $n$ , on obtient les valeurs théoriques suivantes :

1° Pour les coefficients de perturbation linéaire :

$$(g, 0) = n \gamma_1 \left(1 + \frac{1}{4} \lambda^2 f_2\right), \quad \text{Coefficient principal associé à } g a;$$

$$(2g, 0) = n \gamma_1^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 f_2\right), \quad \text{Coefficient associé à } \frac{g^2 c}{l^2};$$

$$(g, 2) = -\frac{1}{8} n \gamma_1 \lambda^2 f_2, \quad \text{Coefficient secondaire;}$$

la valeur théorique des autres coefficients est nulle.

2° Pour les coefficients de perturbation angulaire :

$$(s, 1) = \frac{n}{2} \gamma_1 \varepsilon \lambda \left(1 + \frac{3}{8} \lambda^2 f_1\right) \left. \vphantom{\begin{matrix} (s, 1) \\ (s, g, 1) \end{matrix}} \right\} \text{Coefficients principaux;}$$

$$(s, g, 1) = \frac{n}{2} \gamma_1^2 \varepsilon \lambda \left(1 + \frac{3}{8} \lambda^2 (f_1 + f_2)\right) \left. \vphantom{\begin{matrix} (s, 1) \\ (s, g, 1) \end{matrix}} \right\}$$

$$(s, 3) = -\frac{n}{16} \gamma_1 \varepsilon \lambda^3 f_1 \left. \vphantom{\begin{matrix} (s, 3) \\ (s, g, 3) \end{matrix}} \right\} \text{Coefficients secondaires.}$$

$$(s, g, 3) = -\frac{n}{16} \gamma_1 \varepsilon \lambda^3 (f_1 + f_2)$$

La valeur théorique des autres coefficients est nulle.

Le tableau XIII donne les valeurs qui seraient applicables au BRAMO pour  $\rho=6$ .

### § 3. Influence des excentricités angulaires sur A, I et D.

Quoique approchées, les formules établies au § 2 sont suffisamment précises pour examiner numériquement l'influence des excentricités angulaires sur les forces d'inertie dans les liaisons.

Les valeurs de A, I et D sont tout d'abord influencées par l'intermédiaire de  $m$ ; par (13) on a

$$m = -b(1-k) \lambda \sum_n (\gamma_n \cos \psi_n - \sigma_n \sin \psi_n),$$

et par les formules du § 2 :

$$m = b(1-k) \lambda \gamma_1 \left[1 + \frac{n}{2} \varepsilon \lambda + \left(1 + \frac{3}{8} \lambda^2 f_1\right)\right];$$

suisant (15) et (17), les grandeurs A et D ne sont influencées que par la présence de  $m$ , tandis que par (16) :

$$\frac{I}{L^2} = \frac{C-c}{L^2} + m + b(1-k) \frac{1}{L^2} \sum_1^n r_n^2,$$

ce qui devient, transformé par l'introduction des sommations théoriques :

$$\frac{I}{L^2} = \frac{C-c}{L^2} + m + b(1-k) \lambda^2 \gamma_1^2 (n-1 + n \frac{\lambda^2}{2} f_1).$$

Les variations de cette grandeur avec  $\epsilon$  restent dues surtout à celles de  $m$ .

Le tableau XIV donne les valeurs qui seraient applicables au BRAMO pour  $\rho=6$ .

Nous avons maintenant les éléments voulus pour discuter l'influence du facteur  $\epsilon$  sur les amplitudes des harmoniques.

#### § 4. Fondamentaux et contreponds théorique.

Le vilebrequin étant supposé déjà statiquement équilibré, la valeur théorique du contreponds, dont le centre de gravité serait placé à une distance R de l'axe de rotation, et nécessaire pour équilibrer la force tournante  $S_1$ , est, suivant le tableau I :

$$g G = g B(1-K) + g(n-1)b(1-k) + \frac{1}{2} g [np + (n-1)bk + BK] + \frac{1}{2} g m + g a E(\epsilon),$$

$$\text{où } E(\epsilon) = \frac{1}{2} \lambda(s, 1) + \frac{1}{2} \lambda \mu (1 + \frac{3}{8} \mu^2 - \frac{3}{8} \lambda^2) (s, g, 1).$$

Cette formule est en accord avec celle du Prof<sup>r</sup> A. COPPENS (8), à l'exception de l'addition du dernier terme dans E.

Les trois premiers termes vérifient la règle ordinaire dérivée de la théorie du moteur en étoile idéalisé : somme des masses rotatives (et pseudo-rotatives) et de la moitié des masses alternatives.

Le quatrième terme ou premier complément est la seule correction à cette règle en l'absence d'excentricités angulaires. Le second complément peut d'ailleurs conduire à des corrections plus importantes.

La force tournante correspondante sur les paliers :  $T_1 = R_0$ , est légèrement plus grande. Elle contient des contributions additionnelles du maître-excès de moment d'inertie et des perturbations linéaires. De plus, les perturbations angulaires sont deux fois plus importantes et, en conséquence  $T_1$  croît plus rapidement que  $S_1$  avec l'augmentation de  $\epsilon$ .

**TABLEAU XIII. — Influence des excentricités angulaires sur les coefficients de perturbation.**

$\epsilon$	$(g, 0)$	$(2g, 0)$	$(g, 2)$	$(s, 1)$	$(s, g, 1)$	$(s, 3)$	$(s, g, 3)$
-1	8.09118	7.25756	-0.19217	-1.02466	-0.93729	+0.03010	+0.04571
0	7.81947	6.79230	-0.05652	0	0	0	0
+1	7.54776	6.32705	+0.07913	+0.92583	+0.76807	+0.00274	+0.01055

**TABLEAU XIV. — Influence des excentricités angulaires sur les masses ponctuelles de réduction.**

$\epsilon$	$gm$	$gA$	$g\frac{I}{L^2}$	$gD$
-1	-0.0272	0.5939	0.3041	14.5390
0	+0.1386	0.4281	0.4441	14.7048
+1	+0.2884	0.2783	0.5833	14.8546

**TABLEAU XV. — Influence des excentricités angulaires sur les forces tournantes de rang un.**

$\epsilon$	$S_1$ idéalisé	1 <sup>er</sup> complément	2 <sup>me</sup> complément	$S_1$ réel	$T_1$	$T_1 - S_1$
-1	31.6071	-0.0136	-0.5936	30.9999	30.6293	-0.3706
0	31.6071	+0.0693	0	31.6764	31.9722	+0.2958
+1	31.6071	+0.1442	+0.5253	32.2766	33.1710	+0.8944

**TABLEAU XVI. — Influence des excentricités angulaires sur le groupe d'harmoniques I.**

$\epsilon$	$S_2$	$T_2$	$T_0$	$R_1$	$U_1$	$V_1$
-1	-2.2391	-1.4335	-0.4364	-1.8700	-0.9972	-2.2275
0	-2.1823	-1.6231	-0.5697	-2.1928	-1.0534	-2.7771
+1	-2.1235	-1.7880	-0.6874	-2.4753	-1.1005	-3.3235

Si  $S_1$  est équilibrée par un contrepoids, il y aura une force résiduelle :  $T_1 - S_1$ , sur les paliers. Les excentricités angulaires négatives sont favorables ici et pourraient annuler cette force résiduelle.

Le tableau XV donne une idée des variations possibles sur l'exemple du BRAMO.

### § 5. Autres harmoniques.

Les trois principaux canaux par lesquels l'influence des excentricités angulaires se fait sentir sur les harmoniques sont :

1° L'apparition de perturbations angulaires dont les coefficients théoriques sont consignés au tableau XIII;

2° La modification des coefficients de perturbation linéaire, enregistrée aussi au tableau XIII;

3° La modification des grandeurs A, I et D étudiée au § 3 et au tableau XIV.

Divisons les harmoniques en groupes :

a) Le groupe I, qui contient le coefficient de perturbation principal, est influencé surtout par les canaux 2 et 3.

Les valeurs théoriques pour le BRAMO sont enregistrées au tableau XVI.

On remarquera que les excentricités angulaires positives sont favorables sur  $S_2$ , à l'opposé des autres membres du groupe.

b) Le groupe II dépend des coefficients principaux de perturbation angulaire et est donc influencé principalement par le premier canal.

Le tableau XVII contient les résultats obtenus pour le BRAMO.

Tandis que  $S_{-1}$  pourrait être rendue nulle par des excentricités positives, on observera qu'il est préférable de s'en tenir à des excentricités nulles ou très légèrement négatives, pour ne pas donner naissance à des harmoniques considérables, entre autres  $U_2$  et  $R_2$ , susceptibles d'exciter des vibrations de torsion et de flexion du vilebrequin.

c) Le groupe III est analogue au groupe I, à l'exception de l'importance moindre des harmoniques.

Le tableau XVIII résume les résultats pour le BRAMO.

d) Les harmoniques supérieurs ne sont pas assez importants pour justifier une étude détaillée.

Il semble bien, en guise de conclusion, que l'usage d'excentricités angulaires ne soit pas à recommander, à cause de l'importance des harmoniques qu'elles développeraient dans le second groupe.

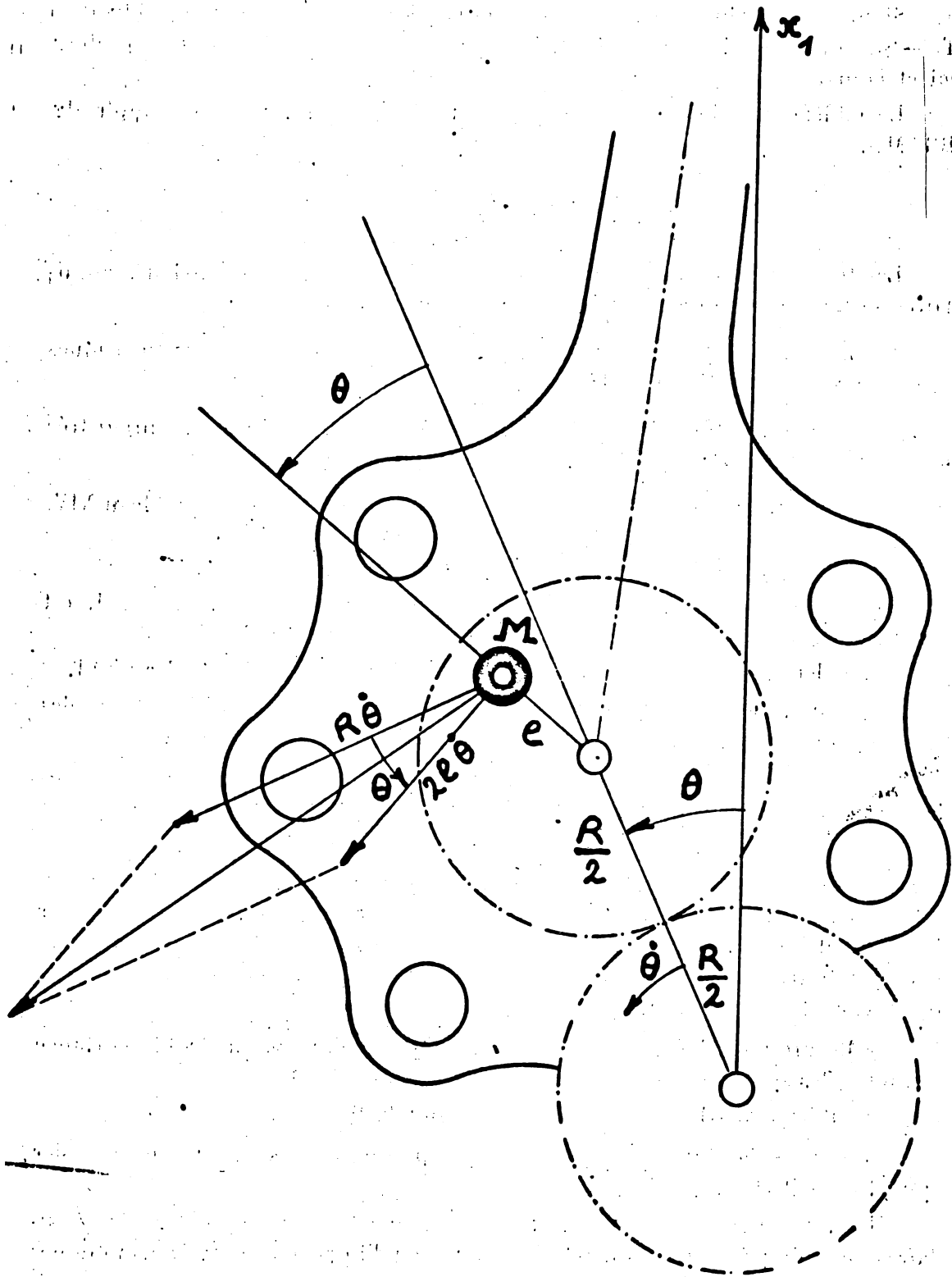


FIG. 11.

La perturbation principale peut être représentée par le mouvement épicycloïdal d'une masse  $M$ .

Pour minimiser les autres perturbations, le dessin de la bielle maîtresse devrait tendre à réduire au minimum la valeur des maîtres-excès.

Les harmoniques importants du premier groupe peuvent être partiellement équilibrés par l'usage de contrepoids spéciaux. Le paragraphe suivant sera donc consacré à une étude spéciale de ce groupe.

### § 6. Représentation des perturbations linéaires principales.

Comme le montre l'inspection des tableaux I à VI, les perturbations linéaires les plus considérables sont associées au groupement de facteurs

$$gP = g a \lambda \mu (g, 0).$$

Ce groupement peut être retracé dans les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} & -0.5 \ gP \text{ dans } U_1; \\ & - \ gP \text{ " } R_1; \\ & -0.25 \ gP \text{ " } T_0; \\ & -0.75 \ gP \text{ " } T_2; \\ & - \ gP \text{ " } S_2. \end{aligned}$$

Un système de coefficients parfaitement identiques peut être développé par un rotor à balourd, dont l'axe serait entraîné par le vilebrequin (fig. 11). En effet, une masse ponctuelle  $M$ , tournant autour de l'axe du maneton, à une distance  $e$  de celui-ci, et à deux fois la vitesse angulaire du vilebrequin dans le même sens que celui-ci (ce qui est facilement obtenu en la couplant par un pignon à un pignon fixe identique centré sur l'axe du vilebrequin), possède une énergie réelle :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 (R^2 + 4e^2 + 4Re \cos \theta);$$

d'où les coefficients

$$\begin{aligned} U_0 &= gM(1 + 4h^2), \\ U_1 &= 2gMh, \end{aligned} \quad \text{où } h = \frac{e}{R}.$$

Son énergie mutuelle complexe, au sens du § 1, chapitre II, est

$$Tm = M \dot{\theta}^2 i (R e^{i\theta} + 2e e^{2i\theta});$$

d'où les forces tournantes

$$S_1 = gM, \quad S_2 = 4gMh.$$

Son énergie mutuelle, au sens du § 3, chapitre II, est

$$Tm = M \dot{\theta}^2 (R^2 + 2e^2 + 3Re \cos \theta);$$



**TABLEAU XVII. — Influence des excentricités angulaires sur le groupe d'harmoniques II.**

$\epsilon$	$S_2$	$T_2$	$S_{-1}$	$T_{-1}$	$R_2$	$U_2$	$V_2$
-1	-0.0494	-0.1456	+0.8951	+1.2145	+1.0552	-1.3738	-0.0204
0	0	-0.1429	+0.2140	-0.1216	-0.2645	-0.0213	0
+1	+0.0405	-0.1405	-0.3899	-1.3136	-1.4541	+1.1731	+0.0167

**TABLEAU XVIII. — Influence des excentricités angulaires sur le groupe d'harmoniques III.**

$\epsilon$	$S_4$	$T_4$	$S_{-2}$	$T_{-2}$	$R_4$	$U_4$	$V_4$
-1	-0.0036	-0.0065	+0.1280	+0.1844	+0.1779	-0.1909	+0.0262
0	-0.0015	-0.0005	+0.0688	+0.1024	+0.1019	-0.1029	+0.0410
+1	+0.0005	-0.0009	+0.0116	+0.0247	+0.0238	-0.0256	+0.0557

**TABLEAU XIX. — Effet de l'antivibrateur sur les harmoniques du groupe I.  $E = 0$ .**

	$S_2$	$T_2$	$T_0$	$R_1$	$U_1$	$V_1$
Sans antivibrateur	-2.1823	-1.6231	-0.5697	-2.1928	-1.0534	-2.7774
Avec antivibrateur	-0.0222	-0.0046	-0.0314	-0.0360	+0.0268	-1.1528
% réduction.	98.98	99.72	94.49	98.36	97.45	58.49

d'où les coefficients de couple de basculement :

$$V_0 = gM(1 + 2h^2); \quad V_1 = 3gMh.$$

Enfin son énergie mutuelle, au sens du § 1, chapitre III :

$$Tm = MR\theta(-2e \sin \theta),$$

conduit aux coefficients

$$W_1 = -2gMh;$$

$$R_0 = gM;$$

$$R_1 = 4gMh;$$

$$T_0 = gMh;$$

$$T_2 = 3gMh;$$

Il y a identification entre ce système de coefficient et celui des perturbations principales si

$$gMh = -0.25 gP.$$

La distance  $e$  doit donc être prise négative; donc le centre de gravité de la masse doit être diamétralement opposé à celui qui est figuré et qui montre la disposition à adopter dans le cas d'un *antivibrateur*.

En dehors des termes  $U_0$  et  $V_0$ , qui n'intéressent que les accélérations angulaires, il y a deux coefficients additionnels :

Un en  $S_1$ , qui doit être équilibré par une modification du contrepois, et un en  $V_1$ , qui vient s'opposer au terme principal :

$$V_1 = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 + \frac{\mu^2}{4} \right) g \frac{c}{r} (g, 0).$$

Dans le cas du BRAMO,

$$gP = 2.17276 \text{ kgs,}$$

et il faut réaliser en valeur absolue un  $gMe = 43,45 \text{ kg mm.}$ , ce qui paraît facilement réalisable sur un ou deux rotors de 40 mm. de rayon.

Le tableau XIX montre la réduction de valeur des perturbations dans l'exemple du BRAMO.

Il semble que la complication mécanique et la pénalisation de poids puissent être justifiées par l'amélioration considérable d'équilibrage réalisée à la source même des perturbations.

**BIBLIOGRAPHIE.**

1. KOENIGS, *Cinématique*, Paris, Hermann & C°, chap. XI.
  2. TANAKA, K., *The Inertia Forces and Couples and their Balancing in the Star Type Engine*, Rep. Aeron. Res. Inst. Tôkyo, n° 10, 1925.
  3. RIEKERT, P., *Beitrag zur Theorie des Massenausgleichs von Sternform Motoren mit nichtzyklisch-symmetrischen Gleitbahnen*. (Ing. Arch., I, 245, 1930.)
  4. COPPENS, A., *Etablissement d'expressions complètes, exactes et simples, de la valeur des contrepoids à appliquer au coude des machines à pistons, en particulier des moteurs d'aviation*. (Congrès Intern. de Mécanique Générale, Liège, 1930.)
  5. LEHR, G., *Note sur un perfectionnement de l'équilibrage des moteurs en étoile*. (Revue Trim. Canadienne, Montréal, juin 1931.)
  6. DUCARME, J., *Notes et abaques sur la cinématique des moteurs en étoile*. (Bulletin du S.T.Aé. Belge, 1932.)
  7. EVANS, W. J. and BUTCHER, E. M., *The articulated Connecting Rod*. (Aircraft Engineering, octobre 1935.)
  8. COPPENS, A., *Etude de l'équilibrage des moteurs en étoile*. (Comptes rendus 2° Congrès Nat. des Sciences, Bruxelles, 1935.)
  9. DEVILLERS, R. et MERCES, P., *Le moteur à explosion*, Paris, Dunod, 1935.
  10. BIEZENO, B. und GRAMMEL, R., *Technische Dynamik*, Berlin, J. Springer, 1939.
  11. GROCCO, L., *Una Proprieta del Mecanismo Manovella-Biella-Stantuffo, e sua applicazioni al meccanismo a Biella madre e bielletta*. (Atti di Guidonia, I, août 1939.)
  12. — *Novi Sviluppi sul meccanismo a biella madre e bielletta e questioni Dinamiche nei Motori stellari*. (Atti di Guidonia, I, décembre 1939.)
  13. KIMMEL, A., *Untersuchungen über die Erregung der Dreh- und Biegeschwingungen bei Flugmotoren*. (Luftfahrt-Forschung 18 6, 30 juin 1941.)
  14. — *Die erregenden Drehkräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkungen*. (Luftfahrt-Forschung 18,7, 19 juillet 1941.)
  15. — *Die erregenden Biegekräfte bei Flugmotoren mit mittelbarer Nebenpleuelanlenkungen*. (Luftfahrt-Forschung, 29 décembre 1941.)
  16. SCHRON, *Die Dynamik der Verbrennungskraft Maschine*, Springer, Wien, 1942.
  17. KIMMEL, A., *Das Massenrückdrehmoment des Flugmotors*. (Luftfahrt-Forschung 20,4, 30 avril 1943.)
  18. — *Das Massenrückdrehmoment von Mehrzylindermotoren*. (Luftfahrt-Forschung 20,11, 6 janvier 1944.)
  19. MARCHAL, *Moteurs d'avions*, Paris, Dunod, 1946.
-

ANNEXE II. — Développement de :  $u_n^2$

Ordre dans les grandeurs : $\lambda, \mu, \sigma$	Rang des Harmoniques				
	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2} \cos 2(\psi - \theta)$		
1		$+\frac{1}{2} \mu \cos(\psi - \theta)$		$-\frac{1}{2} \mu \cos 3(\psi - \theta)$	
2	$+\sigma \lambda \sin \psi$ $+\frac{1}{8} \mu^2$	$+\frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \cos(\psi + \theta)$ $-\gamma \lambda \mu \cos \theta$	$+\sigma \lambda \sin(\psi - 2\theta)$ $-\sigma \mu \sin 2(\psi - \theta)$	$-\frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \cos(\psi - 3\theta)$ $+\gamma \lambda \mu \cos(2\psi - 3\theta)$	$-\frac{1}{8} \mu^2 \cos 4(\psi - \theta)$
3	$+\sigma \gamma \lambda \mu \sin \psi$ $+\frac{1}{4} \gamma \lambda^2 \mu \cos 2\psi$ $-\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu^2 \cos \psi$	$+\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \mu \cos(\psi + \theta)$ $+\frac{1}{8} \mu^3 \cos(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \sin(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{2} \sigma \lambda \mu \sin(2\psi - \theta)$	$+\sigma \gamma \lambda \mu \sin(\psi - 2\theta)$	$-\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \mu \cos(\psi - 3\theta)$ $-\frac{3}{16} \mu^3 \cos 3(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{2} \sigma \lambda \mu \sin(2\psi - 3\theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \sin 3(\psi - \theta)$	$-\frac{1}{4} \gamma \lambda^2 \mu \cos(2\psi - 4\theta)$ $+\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu^2 \cos(3\psi - 4\theta)$ $+\frac{1}{16} \mu^2 \cos 5(\psi - \theta)$

*Remarque :* Les grandeurs  $\gamma, \sigma$  et  $\psi$  doivent être affectées de l'indice correspondant au cylindre intéressé.

ANNEXE III. — Obliquité non dimensionnelle de bielle :  $\delta_n = \beta_n / \mu \theta$

Ordre dans les grandeurs : $\lambda, \mu, \sigma$	Rang des Harmoniques			
	1	2	3	5
0	$-\cos(\psi - \theta)$			
1	$+\gamma \lambda \cos \theta$			
2	$-\frac{1}{8} \mu^2 \cos(\psi - \theta)$		$+\frac{1}{8} \mu^2 \cos 3(\psi - \theta)$	
3	$+\frac{1}{4} \gamma \lambda \mu^2 \cos \theta$ $+\frac{1}{8} \gamma \lambda \mu^2 \cos(2\psi - \theta)$	$+\frac{1}{2} \sigma \lambda \mu \sin 2\theta$ $+\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \sin 2(\psi - \theta)$	$-\frac{3}{8} \gamma \lambda \mu^2 \cos(2\psi - 3\theta)$	
4	$-\frac{1}{8} \gamma^2 \lambda^2 \mu^2 \cos(\psi + \theta)$ $-\frac{3}{64} \mu^4 \cos(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{4} \gamma^2 \lambda^2 \mu^2 \cos(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma^2 \mu^2 \cos(\psi - \theta)$	$-\sigma \gamma \lambda \mu^2 \sin(\psi - 2\theta)$	$+\frac{3}{8} \gamma^2 \lambda^2 \mu^2 \cos(\psi - 3\theta)$ $+\frac{9}{128} \mu^4 \cos 3(\psi - \theta)$	$-\frac{3}{128} \mu^4 \cos 5(\psi - \theta)$

Remarque : Les grandeurs  $\gamma, \sigma$  et  $\psi$  doivent être affectées de l'indice correspondant au cylindre intéressé.

ANNEXE IV. — Développement de :  $\delta_n^2$

Ordre dans les grandeurs : $\lambda, \mu, \sigma$	Rang des Harmoniques			
	0	1	2	3
0	$+\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2} \cos 2(\psi - \theta)$	
1	$-\gamma \lambda \cos \psi$		$-\gamma \lambda \cos(\psi - 2\theta)$	
2	$+\frac{1}{8} \mu^2$ $+\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2$		$+\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \cos 2\theta$	$-\frac{1}{8} \mu^2 \cos 4(\psi - \theta)$
3	$-\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu^2 \cos \psi$	$-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \sin(\psi + \theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \sin(\psi - \theta)$		$+\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \sin(\psi - 3\theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \sin 3(\psi - \theta)$

Remarque : Les grandeurs  $\gamma, \sigma$  et  $\psi$  doivent être affectées de l'indice correspondant au cylindre intéressé.

ANNEXE V. — Développement de :  $u_n = u_n \frac{\partial x_n}{\partial R}$

On l'obtient en multipliant le développement de  $u_n$ , par celui de  $\frac{\partial x_n}{\partial R}$ .

Ce dernier s'obtient très simplement au moyen des considérations suivantes :

$$x_n = R f(\lambda, \mu, \sigma, \gamma);$$

posons  $x_n/R = h$  :

$$\frac{\partial x_n}{\partial R} = h + \lambda \frac{\partial h}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial h}{\partial \mu} - \gamma \frac{\partial h}{\partial \gamma} - \sigma \frac{\partial h}{\partial \sigma};$$

en effet :

$$R \frac{\partial \lambda}{\partial R} = \lambda \quad R \frac{\partial \mu}{\partial R} = \mu \quad R \frac{\partial \gamma}{\partial R} = -\gamma \quad R \frac{\partial \sigma}{\partial R} = -\sigma;$$

Or chaque terme de  $h$  est du type :

$\lambda^a \mu^b \gamma^c \sigma^d \Phi(\theta, \psi)$ ; dans  $\frac{\partial x_n}{\partial R}$  ce terme va donner naissance à un terme :

$$(1 + a + b - c - d) \lambda^a \mu^b \gamma^c \sigma^d \Phi(\theta, \psi).$$

Il suffit donc de retranscrire le développement de  $h$  en multipliant chaque terme par le facteur  $(1 + a + b - c - d)$ , obtenu à partir des exposants propres à ce terme.

Une fois la multiplication des développements achevée on trouve le tableau suivant :

Développement de :  $u_{nr}$

Rang des Harmoniques		1	2	3	4	5
Ordre dans les grandeurs : $\lambda, \mu, \sigma$						
0			$+\frac{1}{2} \sin 2(\psi - \theta)$			
1	$-\frac{1}{2} \mu \sin(\psi - \theta)$			$+\frac{1}{2} \mu^2 \sin 3(\psi - \theta)$		
2	$-\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu \sin \theta$ $-\frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \sin(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu \sin(2\psi - \theta)$	$-\frac{1}{4} \mu^2 \sin 2(\psi - \theta)$ $+\sigma \lambda \cos(\psi - 2\theta)$ $-\sigma \mu \cos 2(\psi - \theta)$	$+\frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \sin(\psi - 3\theta)$ $-\gamma \lambda \mu \sin(2\psi - 3\theta)$	$+\frac{1}{8} \mu^2 \sin 4(\psi - \theta)$		
3	$-\frac{1}{4} \mu^3 \sin(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{2} \gamma \lambda^2 \mu \sin(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \lambda \mu \cos \theta$ $+\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \cos(\psi - \theta)$	$-\frac{1}{4} \gamma \lambda^2 \mu \sin 2(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{4} \gamma \lambda^2 \mu \sin 2\theta$ $+\frac{3}{4} \gamma \lambda \mu^2 \sin(\psi - 2\theta)$ $+\frac{1}{4} \gamma \lambda \mu^2 \sin(3\psi - 2\theta)$ $+\sigma \gamma \lambda \mu \cos(\psi - 2\theta)$	$+\frac{3}{16} \mu^3 \sin 3(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \mu \sin(\psi - 3\theta)$ $+\frac{1}{2} \sigma \lambda \mu \cos(2\psi - 3\theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \cos 3(\psi - \theta)$	$+\frac{1}{4} \gamma \lambda^2 \mu \sin(2\psi - 4\theta)$ $-\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu^2 \sin(3\psi - 4\theta)$	$-\frac{1}{16} \mu^3 \sin 5(\psi - \theta)$	

*Remarque :* Les grandeurs  $\gamma, \sigma$  et  $\psi$  doivent être affectées de l'indice correspondant au cylindre intéressé.

ANNEXE VI. — Développement de :  $\delta_{nr} = \delta_n l \frac{\partial \beta_n}{\partial R}$

Ordre dans les grandeurs : $\lambda, \mu, \sigma$	Rang des Harmoniques			
	1	2	3	4
0		$-\frac{1}{2} \sin 2(\psi - \theta)$		
1		$+\gamma \lambda \sin(\psi - 2\theta)$		
2		$-\frac{1}{4} \mu^2 \sin 2(\psi - \theta)$ $+\frac{1}{2} \gamma^2 \lambda^2 \sin 2\theta$		$+\frac{1}{8} \mu^2 \sin 4(\psi - \theta)$
3	$+\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \cos(\psi - \theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \cos(\psi - \theta)$	$+\frac{3}{4} \gamma \lambda \mu^2 \sin(\psi - 2\theta)$ $+\frac{1}{4} \gamma \lambda \mu^2 \sin(3\psi - 2\theta)$	$+\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \cos(\psi - 3\theta)$ $-\frac{1}{2} \sigma \mu^2 \cos 3(\psi - \theta)$	$-\frac{1}{2} \gamma \lambda \mu^2 \sin(3\psi - 4\theta)$

Remarque : Les grandeurs  $\gamma, \sigma$  et  $\psi$  doivent être affectées de l'indice correspondant au cylindre intéressé.

ANNEXE VII.

a) Développement de  $\Delta_1 = \frac{\beta_1}{\lambda \theta}$

$$\Delta_1 = - \left( 1 + \frac{1}{8} \lambda^2 + \frac{3}{64} \lambda^4 \right) \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{8} \lambda^2 \left( 1 + \frac{9}{16} \lambda^2 \right) \cos 3\theta$$

$$- \frac{3}{128} \lambda^4 \cos 5\theta$$

b) Développement de  $\Delta_1^2$ :

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} \lambda^2 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cos 2\theta$$

$$- \frac{1}{8} \lambda^2 \cos 4\theta$$

c) Développement de  $u_{nr} = u_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial R}$

$$u_{nr} = + \frac{1}{2} \lambda \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \sin \theta$$

$$- \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \sin 2\theta$$

$$- \frac{1}{2} \lambda \left( 1 + \frac{3}{8} \lambda^2 \right) \sin 3\theta$$

$$- \frac{1}{8} \lambda^2 \sin 4\theta + \frac{1}{16} \lambda^2 \sin 5\theta$$

d) Développement de  $\Delta_{nr} = \Delta_1 L \frac{\partial \beta_1}{\partial R}$

$$\Delta_{nr} = + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) \sin 2\theta - \frac{1}{8} \lambda^2 \sin 4\theta$$