

BULLETIN  
DU  
SERVICE TECHNIQUE  
DE  
L'AÉRONAUTIQUE

Chaussée de Waterloo, 72, Rhode-Saint-Genèse (Bruxelles)

**Aérodynamique instationnaire des profils minces déformables,**

PAR

**B. FRAEYS de VEUBEKE**

CHARGÉ DE COURS A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE,  
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

Travail développé sous les auspices du

Centre National d'Études et de Recherches Aéronautiques

(CNERA)

BRUXELLES

IMPRIMERIE MARCEL HAYEZ

412, rue de Louvain, 112  
Dom. légal : av. de l'Horizon, 39

1953

# Aérodynamique instationnaire des profils minces déformables.

## INTRODUCTION.

Ce texte est basé sur des notes de conférences faites au Centre National d'Études et de Recherches Aéronautiques pendant le mois de juin 1953. Il tente de donner une vue d'ensemble de la théorie linéarisée des profils minces en fluide incompressible.

Le mouvement et la déformation du profil restant arbitraires, le traitement s'écarte de celui de THEODORSEN et s'inspire principalement de ceux de SCHWARZ et de VON KÁRMÁN et SEARS.

Il ne prétend pas rendre justice à tous les travaux qui ont été faits et la liste des références est incomplète.

Parmi les contributions présumées originales, qu'on nous permette de citer :

1. Une dérivation relativement simple d'une loi générale gouvernant la distribution de la pression le long du profil (éq. 1.62).

2. Une expression de l'intensité tourbillonnaire du sillage, dérivée des idées de BIRNBAUM (éq. 1.80), qui, outre son intérêt propre, supprime toute difficulté de convergence des intégrales de sillage appartenant au mouvement purement sinusoïdal.

3. L'entièreté du chapitre IV, consacré à l'effet d'hérédité dû au sillage. On y développe une méthode d'approximation qui conduit à relier la partie circulaire de la portance et la circulation quasi-permanente par des opérateurs différentiels à coefficients constants et un jeu de conditions initiales. Cette méthode fournit des représentations de la fonction de THEODORSEN par des fonctions rationnelles de la fréquence réduite et des approximations exponentielles à la fonction de WAGNER. Elle permet en général un traitement élémentaire des problèmes de mouvement avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique.

4. Une généralisation de la fonction de WAGNER dans le but d'examiner quelle signification pourrait avoir l'extension aux mouvements harmoniques généralisés convergents de la fonction de THEODORSEN.

Cette extension est parfois invoquée en tirant argument de la continuité des fonctions de BESSEL.

Il ressort clairement d'un examen de la fonction de WAGNER généralisée (par. 5.4) que si, pour les mouvements harmoniques divergents et le cas frontière du mouvement purement sinusoïdal, la fonction de THEODORSEN constitue l'amplitude d'une solution particulière dite « de régime » qui finit par dominer une solution complémentaire transitoire et peut en conséquence être considérée isolément, au contraire, pour les mouvements convergents, la fonction de THEODORSEN étendue est l'amplitude d'un terme qui disparaît plus rapidement que le terme transitoire complémentaire, et ne saurait qu'abusivement être appelé « amplitude de régime ». La raison pour laquelle l'intégrale de sillage correspondante devient infinie divergente est alors claire.

5. Une expression opérationnelle étendue de la fonction de KUESSNER représentant la portance totale d'un profil pénétrant dans une rafale à front raide.

**NOTATIONS PRINCIPALES.**

$c$	corde du profil.
$U$	vitesse de translation du profil.
$\rho$	masse spécifique du fluide.
$t$	temps non-dimensionnel.
$u, v$	vitesse de perturbation non-dimensionnelles.
$\varphi$	potentiel des vitesses de perturbation.
$p$	pression non-dimensionnelle.
$(x, y)$	coordonnées non-dimensionnelles attachées au centre du profil.
$x = -\cos \theta$	le long du profil.
$s = t + 1 - \eta$	coordonnée de repère dans le sillage.
$-1 < \xi = -\cos u < +1$	variable d'intégration le long du profil.
$1 < \eta < \infty$	variable d'intégration le long du sillage.
$h(x, y, t)$	mouvement vertical non-dimensionnel des points du profil.
$\gamma(x, t) = \epsilon(x, t) + \beta(x, t)$	intensité tourbillonnaire le long du profil.
$\epsilon(x, t)$	tourbillon libre le long du profil.
$\epsilon(\eta, t)$	tourbillon libre dans le sillage
$\beta(x, t)$	tourbillon lié le long du profil.
$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$	circulation totale autour du profil.
$\Gamma_1$	circulation quasi-permanente, c'est-à-dire obtenue sans tenir compte du sillage.
$\Gamma_2$	circulation due à la présence du sillage.
$\gamma_0$	intensité tourbillonnaire le long du profil satisfaisant aux conditions du mouvement sans circulation.
$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{\Gamma_f}{\pi\sqrt{1-x^2}}$	intensité tourbillonnaire quasi-permanente le long du profil (satisfaisant aux conditions du mouvement et à la condition de KUTTA au bord de fuite, mais sans intervention du sillage).
$\gamma_2$	intensité tourbillonnaire complémentaire due au sillage et satisfaisant à la condition de KUTTA.
$P(t)$	définie par (1.63), amplitude héréditaire d'une partie de la distribution des pressions.
$L_0$	portance due aux effets d'inertie virtuelle.
$L_1 = -2\Gamma_1$	portance quasi-permanente.

$L_1 = -2P$	portance héréditaire.	
$L_0 = L_1 + L_2$	partie de la portance due aux effets de circulation.	
$L = L_0 + L_1 + L_2$	portance totale.	
$M_0$	moment dû aux effets d'inertie virtuelle	} positifs cabreurs autour du centre du profil.
$M_1$	moment quasi-permanent	
$M_2 = \frac{1}{2} L_2$	moment héréditaire	
$M = M_0 + M_1 + M_2$	moment total	
$M_0^*$ et $M_1^*$ ( $M_2^* = 0$ )	définis similairement autour du foyer avant du profil.	
$\omega = \mu + ik$	fréquence circulaire réduite d'un mouvement harmonique généralisé $\mu > 0$ divergent $\mu < 0$ convergent.	
$K_0(\omega), K_1(\omega)$	fonctions de BESSEL modifiées de seconde espèce.	
$J_0(z), J_1(z)$	fonctions de BESSEL de première espèce.	
$C(-i\omega) = \frac{K_1(\omega)}{K_0(\omega) + K_1(\omega)}$	fonction de THEODORSEN.	
$= F(\mu, k) + iG(\mu, k)$		
$A_n(t)$	intégrales de sillage définies par (4.5).	
$\mathcal{L}[f(t)]$	transformée de LAPLACE de $f(t)$ .	
$l(p)$	transformée de LAPLACE de $L_c(t)$ .	
$\gamma(p)$	transformée de LAPLACE de $\Gamma_1(t)$ .	
$H(t)$	fonction perturbation unité de HEAVISIDE.	
$k_1(t) = k_1(o, t)$	fonction de WAGNER.	
$k_1(-i\omega, t)$	fonction de WAGNER généralisée.	
$k_2(t)$ et $k_2^*(t)$	fonctions exprimant respectivement la partie circulaire et la portance totale dans le problème de la rafale à front raide.	

## CHAPITRE PREMIER.

### ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

#### 1.1. Unités naturelles.

Trois grandeurs caractéristiques du problème suggèrent un système d'unités naturelles permettant l'emploi exclusif de grandeurs non-dimensionnelles :

- la demi-corde  $c/2$  du profil pour l'unité de longueur;
- la vitesse  $U$  de l'écoulement non perturbé en amont.
- la pression dynamique  $\frac{1}{2} \rho U^2$ .

Les unités dérivées suivantes en découlent :

temps	$\frac{1}{2} \frac{c}{U}$
masse	$\frac{1}{16} \rho c^3$
accélération	$2 \frac{U^2}{c}$
force par unité d'envergure	$\frac{1}{4} \rho U^2 c$
moment par unité d'envergure	$\frac{1}{8} \rho U^2 c^2$
circulation	$\frac{1}{2} cU$

#### 1.2. Équations du mouvement.

Le plan du mouvement est rapporté à un repère cartésien. L'axe de la coordonnée non-dimensionnelle  $x$  est dirigé dans le sens du vent relatif, l'axe des  $y$  vers le haut (fig. 1).

La corde du profil occupe en projection sur  $ox$  l'intervalle  $(-1, 1)$  et les points de sa ligne moyenne ne s'en écartent que peu et dans le sens vertical.

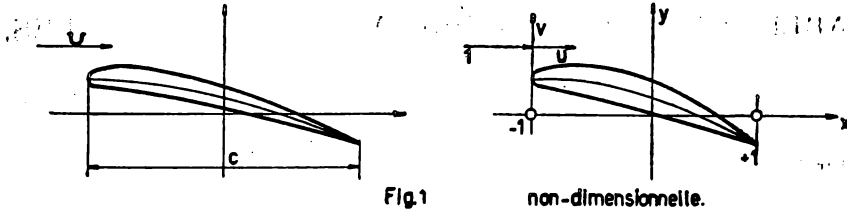
La présence du profil et son mouvement induisent des vitesses de perturbation qui, sous leur forme non-dimensionnelle, sont notées  $(u, v)$ .

Elles seront supposées faibles comparativement à la vitesse de l'écoulement non perturbé, de façon à permettre une linéarisation des équations du mouvement. Ceci se traduit par

$$u \ll 1 \quad v \ll 1.$$

L'équation de continuité pour un fluide incompressible demande

$$u_x + v_y = 0.$$



Elle exige que le potentiel  $\varphi$  des vitesses de perturbation, défini par

$$\boxed{u = \varphi_x \quad v = \varphi_y} \quad (1.1)$$

satisfasse à l'équation de LAPLACE

$$\boxed{\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0} \quad (1.2)$$

Les équations du mouvement sont linéarisées en négligeant dans l'expression de l'accélération  $u$  et  $v$  devant l'unité ainsi que les produits  $uu_x$  et  $vv_y$  devant  $u_x$  et  $v_x$ .

Sous forme non-dimensionnelle, ces équations deviennent alors

$$\left. \begin{aligned} u_t + u_x &= -\frac{1}{2} p_x \\ v_t + v_x &= -\frac{1}{2} p_y \end{aligned} \right\} (1.3)$$

L'introduction du potentiel des vitesses :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_t + \varphi_x) &= -\frac{1}{2} p_x \\ \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_t + \varphi_x) &= -\frac{1}{2} p_y \end{aligned} \right\} (1.4)$$

permet d'intégrer immédiatement la pression, sous la forme

$$\boxed{p = -2(\varphi_t + \varphi_x)} \quad (1.5)$$

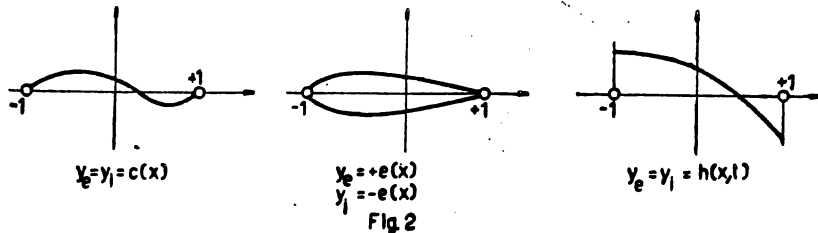
1.3. Conditions aux limites.

Le contour du profil est défini par les équations

$$\left. \begin{aligned} y_{ext}(x, t) &= c(x) + e(x) + h(x, t), \\ y_{int}(x, t) &= c(x) - e(x) + h(x, t). \end{aligned} \right\} (1.6)$$

Le premier terme représente la forme de la ligne moyenne de référence. Le second la distribution symétrique de l'épaisseur autour de la ligne moyenne. Le troisième terme introduit la possibilité d'un mouvement et d'une déformation de la ligne moyenne.

Les conditions aux limites expriment la tangence de la vitesse au profil. Par suite de la linéarisation du problème il sera permis de considérer indépendamment chaque terme contribuant à définir le contour du profil et de superposer les solutions. Le problème se sépare ainsi (fig. 2) en :



1° Un problème permanent antisymétrique. Celui de l'écoulement autour de la ligne moyenne de référence qui constitue l'objet propre de la théorie des profils minces;

2° Un problème permanent symétrique. L'écoulement autour d'un profil mince symétrique;

3° Le problème instationnaire antisymétrique de l'écoulement autour d'une plaque infiniment mince qui se déplace et se déforme avec le temps.

La linéarisation des conditions aux limites repose sur l'hypothèse que les termes de (1.6) sont petits devant l'unité.

De façon plus précise que

$$\begin{aligned} c(x) \ll 1 & \quad e(x) \ll 1 & \quad c_x \ll 1 & \quad e_x \ll 1 \\ h(x, t) \ll 1 & \quad h_x \ll 1 & \quad h_t \ll 1. \end{aligned}$$

Non seulement l'épaisseur relative du profil est faible, mais la ligne moyenne s'écarte peu du segment  $(-1, +1)$  de l'axe  $ox$ .



La condition de tangence de la vitesse au profil est, pour l'extrados, par exemple (fig. 3),

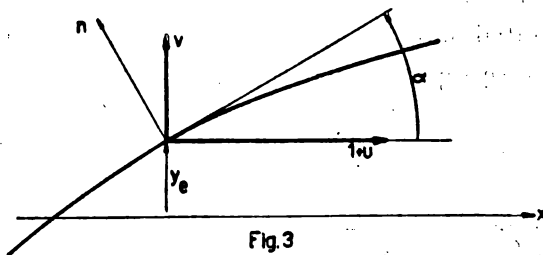
$$\frac{\partial y_e}{\partial t} \cos \alpha = -(1 + u) \sin \alpha + v \cos \alpha;$$

$u$  sera de nouveau négligé devant l'unité, et comme

$$\frac{\partial y_e}{\partial x} = \tan \alpha \ll 1,$$

on peut opérer les substitutions approchées

$$\cos \alpha \cong 1, \quad \sin \alpha \cong \tan \alpha.$$



La condition s'écrit alors

$$\frac{\partial y_e}{\partial t} + \frac{\partial y_e}{\partial x} = v(x, y_e, t);$$

on néglige encore des termes du même ordre de grandeur que ceux écartés par la linéarisation des équations du mouvement en substituant, au second membre

$$v(x, +0, t) \text{ à } v(x, y_e, t).$$

Ceci revient à satisfaire les conditions aux limites sur le segment  $(-1, +1)$  lui-même, au lieu de le faire pour les points du profil.

Les conditions linéarisées générales

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_e}{\partial t} + \frac{\partial y_e}{\partial x} &= v(x, +0, t); \\ \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial x} &= v(x, -0, t); \end{aligned} \right\} (1.7)$$

conduisent aux conditions linéarisées suivantes pour les problèmes particuliers :

$$\left. \begin{aligned} v(x, \pm 0) &= \frac{dc}{dx}; \\ v(x, \pm 0) &= \pm \frac{dc}{dx}; \\ v(x, \pm 0, t) &= h_s + h_i. \end{aligned} \right\} (1.8)$$

1.4. Distribution de sources et de puits. Solution du cas symétrique.

Le potentiel complexe d'une source ponctuelle située en  $z_0$  et de débit non-dimensionnel  $Q$  est

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0).$$

Pour une nappe étendue sur le segment  $-1 < x < +1$   $y = 0$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} q(\xi) \ln(z - \xi) d\xi. \quad (1.9)$$

Le champ des vitesses qui en résulte par dérivation,

$$u - iv = df/dz,$$

apparaît sous la forme

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(x - \xi) q(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}, \quad v = \frac{1}{2\pi} y \int_{-1}^{+1} \frac{q(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

En vue de satisfaire aux conditions aux limites, il faut examiner ce que deviennent ces expressions quand  $y$  tend vers zéro, et  $-1 < x < 1$ .

Il vient directement pour  $u$  :

$$u(x, \pm 0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad (1.10)$$

où le symbole  $\oint$  indique qu'il y a lieu de prendre pour l'intégrale singulière sa valeur principale de CAUCHY.

Pour la composante  $v$ , subdivisant l'intervalle d'intégration en trois :

$$-1 < \xi < x - \epsilon, \quad x - \epsilon < \xi < x + \epsilon, \quad x + \epsilon < \xi < 1,$$

il est visible que la contribution des intervalles extrêmes tend vers zéro avec  $y$ . Par conséquent,

$$v(x, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{2\pi} y \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{q(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2},$$

et si  $\epsilon$  est suffisamment petit,

$$= \frac{q(x)}{2\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{y d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Posant

$$\xi = x + y \eta,$$

l'intégrale devient

$$\int_{-\frac{t}{y}}^{+\frac{t}{y}} \frac{d\sigma}{1 + \sigma^2} = \left[ \text{arc tang } \sigma \right]_{-\frac{t}{y}}^{+\frac{t}{y}};$$

elle tend vers  $\pm \pi$ , suivant que  $y$  tend vers zéro par valeurs positives ou négatives. Par conséquent,

$$v(x, \pm 0) = \pm \frac{1}{2} q(x). \quad (1.11)$$

La distribution produit donc bien une discontinuité dans la composante normale de la vitesse de perturbation.

La condition aux limites (1.8) du problème symétrique est satisfaite en posant

$$q(x) = \frac{1}{2} \frac{de}{dx}. \quad (1.12)$$

Ce problème peut être généralisé en supposant que l'épaisseur du profil varie avec le temps.

Dans ce cas, la condition aux limites étendue

$$v(x, \pm 0, t) = e_x + e_t$$

est satisfaite en prenant une distribution

$$q(x, t) = \frac{1}{2} (e_x + e_t). \quad (1.13)$$

Il n'y a pas lieu d'être préoccupé d'un phénomène d'induction dû à un sillage, car, en vertu de la symétrie du problème, la condition de KUTTA-JOUKOWSKI est toujours satisfaite au bord de fuite. La circulation reste nulle et, tout comme en mouvement permanent, il n'y a pas de tourbillons de sillage.

La distribution de la vitesse de perturbation  $u$  et celle de la pression restent symétriques par rapport à  $ox$ , il n'y a donc pas d'effet de portance, mais il peut y avoir un effet de traînée. Suivant (1.9) et (1.13) le potentiel a pour valeur sur le segment

$$2\phi(x, \pm 0, t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} (e_{\xi} + e_t) \ln(x - \xi) d\xi$$

et, suivant (1.5), on en déduit pour la pression

$$-p(x, \pm 0, t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} (e_{\xi} + e_t) \frac{d\xi}{x - \xi} + \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} (e_{\xi} + e_{tt}) \ln(x - \xi) d\xi.$$

La traînée a pour expression

$$T = \int_{-1}^{+1} p(x, \pm 0, t) e_x dx.$$

1.5. Distribution de tourbillons. Solution du cas antisymétrique.

Le potentiel complexe dû à un tourbillon ponctuel de circulation totale et antihorlogique  $\Gamma$  est

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0).$$

Pour une couche d'élément  $\gamma(\xi) d\xi$  étendue sur le segment,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \ln(z - \xi) \gamma(\xi) d\xi;$$

le champ des vitesses correspondant

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{z - \xi},$$

séparé dans sa partie réelle et imaginaire, a pour expression

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{y \gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}; \quad v = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(x - \xi) \gamma(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Par analogie avec le cas des sources, il vient pour le calcul du champ au droit du segment :

$$u(x, \pm 0) = \mp \frac{1}{2} \gamma(x); \tag{1.14}$$

$$v(x, \pm 0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi}. \tag{1.15}$$

Le premier résultat correspond au fait bien connu qu'une nappe de tourbillons est équivalente à une discontinuité dans la vitesse tangentielle à la nappe.

Le second résultat nous livre l'expression de la vitesse de perturbation verticale sur le segment en fonction de la distribution des tourbillons. On voit qu'elle possède la symétrie requise par les conditions aux limites du problème antisymétrique.

Dans le problème stationnaire, où le sillage est absent, le profil peut être remplacé par une distribution  $\gamma$  convenable. Comme la vitesse  $v(x, \pm 0)$  est connue par les conditions aux limites, la solution de ce problème est entièrement ramenée à l'inversion de l'équation intégrale (1.15). Celle-ci est également requise dans le cas du problème instationnaire, où la question est encore compliquée par les effets d'induction de vitesse dus à la présence d'un sillage.

**1.6. Calcul de la pression sur le profil.**

Comme, par définition,

$$u = \varphi_x,$$

la loi (1.5) de la pression peut s'écrire

$$p = -2(\varphi_t + u).$$

En passant de l'intrados à l'extrados, la pression subit une discontinuité :

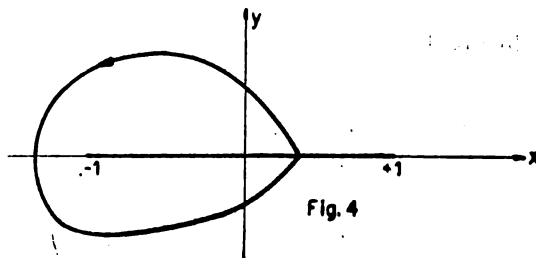
$$\Delta p = p_t - p_s = -2[\varphi_t(x, -0) - \varphi_t(x, +0) + u(x, -0) - u(x, +0)];$$

Cherchons à l'exprimer entièrement en fonction de l'intensité tourbillonnaire. Par (1.14) il vient déjà

$$u(x, -0) - u(x, +0) = \gamma(x).$$

Pour calculer la discontinuité du potentiel, considérons le contour fermé qui partant d'un point de l'extrados contourne le profil par le bord d'attaque pour rejoindre le même point à l'intrados (fig. 4). La circulation de la vitesse

$$\oint u dx + v dy = \oint \varphi_x dx + \varphi_y dy = \oint d\varphi = \varphi(x, -0) - \varphi(x, +0)$$



représente la discontinuité cherchée. Par le théorème de STOKES elle vaut également l'intensité tourbillonnaire totale entourée :

$$\varphi(x, -0) - \varphi(x, +0) = \int_{-1}^{+1} \gamma d\xi.$$

Substituant ces résultats,

$$\Delta p = -2 \left[ \gamma(x, t) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma(\xi, t)}{\partial t} d\xi \right]. \quad -1 < x < +1 \quad (1.16)$$

Cette équation montre que le théorème de KUTTA-JOUKOWSKI n'est pas applicable en mouvement non-permanent. En mouvement permanent nous retrouvons ce théorème sous la forme (non-dimensionnelle)

$$\Delta p = -2\gamma(x).$$

Il est possible, comme il sera montré plus loin, d'étendre son champ d'application en mouvement non-permanent, à condition de dénier à  $\gamma$  le caractère de tourbillon lié et de le considérer, suivant les idées de BIRNBAUM, comme somme d'un tourbillon lié et d'un tourbillon libre. Dans ce cas le sillage effectif, formé par l'ensemble de tous les tourbillons libres, débute déjà au bord d'attaque.

### 1.7. Mécanisme de formation du sillage.

Les équations du mouvement utilisées étant celles d'un fluide dénué de viscosité, le théorème de THOMSON-LAGRANGE est d'application. Toute variation de la circulation totale  $\Gamma$  autour du profil

$$\Gamma = \int_{-1}^{+1} \gamma(x) dx \quad (1.17)$$

sera donc corrélative de l'émission de tourbillons libres qui, entraînés par le courant, s'étendront du bord de fuite  $x = 1$  jusqu'à l'infini en aval. Ils forment le sillage, dont l'intensité tourbillonnaire locale sera dénotée par  $\varepsilon(\eta, t)$ , pour la distinguer de celle distribuée le long du profil.

$\eta$  est une variable d'intégration parcourant le sillage  $1 < \eta < \infty$ .

L'équation (1.16) reste applicable si le point  $x$  est pris dans le sillage, mais comme il n'y a plus de support matériel pour une discontinuité de pression, il vient

$$0 = \varepsilon(x, t) + \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma}{\partial t} d\xi + \int_1^x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\eta \quad x > 1. \quad (1.18)$$

Avec la notation (1.17), elle devient

$$\varepsilon(x, t) + \int_1^{\infty} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} d\eta = - \frac{d\Gamma}{dt} \quad x > 1. \quad (1.19)$$

Il reste à utiliser la condition cinématique fondamentale du mouvement tourbillonnaire

$$\frac{D}{Dt} \varepsilon(\eta, t) = 0. \quad (1.20)$$

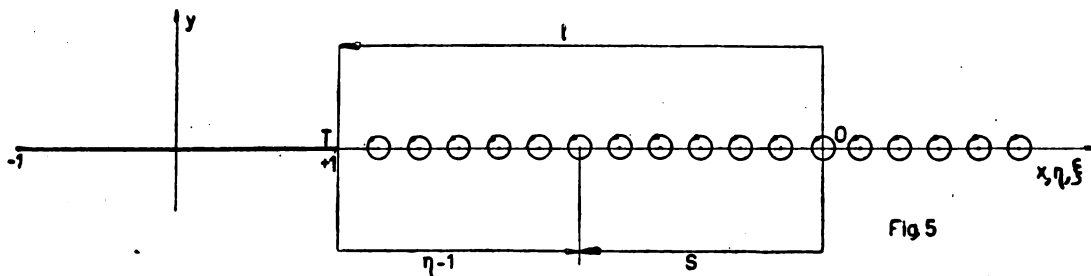
Elle exprime que les tourbillons libres sont entraînés avec le fluide. Développant l'opération de la « dérivée matérielle » ou « dérivée en suivant le fluide », cette condition est susceptible d'une linéarisation analogue à celle qui conduit aux composantes linéarisées de l'accélération figurant aux premiers membres de (1.3) :

$$\varepsilon_t + (1 + u) \varepsilon_\eta + v \varepsilon_\nu \cong \varepsilon_t + \varepsilon_\eta = 0 \quad u > 1. \quad (1.21)$$

Sous sa forme linéarisée, la condition est satisfaite en considérant  $\epsilon$  comme une fonction de la seule variable  $(t-\eta)$ , ou encore, si l'attention est plus spécialement portée au bord de fuite  $\eta = 1$ , de la seule variable

$$s = t - \eta + 1. \quad (1.22)$$

Le point O marquant un repère fixe, éventuellement l'origine, du sillage, T la position du bord de fuite après l'intervalle de temps  $t$ ,  $s$  mesure la distance d'un point du sillage au repère. Le fait que  $\epsilon$  ne soit fonction que de cette distance indique que le tourbillon libre demeure à l'endroit où il a été créé. Si l'on se place au point de vue de l'observateur entraîné avec le profil, le sillage se déplace sans



altération avec la vitesse d'entraînement du courant non perturbé. La linéarisation de (1.20) revient en fait à négliger le déplacement additionnel des tourbillons du sillage dû à l'induction de vitesse par les tourbillons liés et libres.

Combinant (1.19) et (1.21).

$$\epsilon(x, t) - \int_1^{\infty} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} d\eta = \epsilon(1, t) = - \frac{d\Gamma}{dt}. \quad (1.23)$$

Cette équation exprime que toute variation de la circulation autour du profil est compensée par l'émission d'un tourbillon libre au bord de fuite.

Combinant (1.21) et (1.23), nous obtenons le résultat général important qui résume le mécanisme du sillage :

$$\epsilon(\eta, t) = - \left( \frac{d\Gamma}{d\tau} \right)_{\tau = t - (\eta - 1)} \quad (1.24)$$

Il exprime qu'à l'instant  $t$  le tourbillon libre occupant la position  $\eta$  est celui qui a été engendré par variation de circulation à l'époque  $\tau = t - (\eta - 1)$ .

Considérant la circulation comme une fonction de  $s$ , ceci s'exprime aussi sous la forme

$$\epsilon(\eta, t) = \epsilon(s) = - \left( \frac{d\Gamma}{ds} \right)_{s = t - (\eta - 1)} \quad (1.25)$$

**1.8. Les tourbillons liés de BIRNBAUM (1).**

Sur le segment  $-1 < x < +1$ , décomposons l'intensité tourbillonnaire en une partie « liée » et une partie libre :

$$\gamma(x, t) = \beta(x, t) + \varepsilon(x, t). \quad -1 < x < +1 \quad (1.26)$$

Il faut définir  $\varepsilon(x, t)$  dans cet intervalle. Pour cela on peut observer que l'éq. (1.18) sous la forme

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-1}^{+1} \gamma d\xi + \int_1^x \varepsilon d\eta \right) \quad x > 1$$

peut s'interpréter comme une génération du tourbillon libre par la variation avec le temps de l'intensité tourbillonnaire totale en amont du point considéré. Étendant cette interprétation aux points du profil, il vient pour y définir la partie libre du tourbillon

$$\varepsilon(x, t) = -\int_{-1}^x \frac{\partial \gamma}{\partial t} d\xi \quad -1 < x < 1. \quad (1.27)$$

Par conséquent, et suivant (1.26), la partie « liée » a pour valeur

$$\beta(x, t) = \gamma(x, t) + \int_{-1}^x \frac{\partial \gamma}{\partial t} d\xi. \quad (1.28)$$

La discontinuité de pression est dès lors en relation avec la densité tourbillonnaire liée par l'équation

$$\Delta p = -2\beta(x, t),$$

et le théorème de KUTTA-JOUKOWSKI est sauvé en régime non-permanent.

La distinction de BIRNBAUM n'apporte pas de procédé de calcul nouveau, mais constitue une interprétation élégante de la formule trouvée pour la discontinuité de pression.

Le mécanisme de formation des tourbillons libres peut maintenant être déduit entièrement de la variation des tourbillons liés.

Pour cela dérivons (1.27) par rapport à  $x$  :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

soit encore, avec (1.26),

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial t}. \quad -1 < x < +1 \quad (1.29)$$



Rapproché de (1.21), ce résultat montre que, tandis que dans le sillage il n'y a pas d'accroissement matériel (en suivant le fluide) de la densité libre, il y en a une sur le profil par suite de la variation de la densité liée.

La solution de (1.29) pour  $\varepsilon$  généralise (1.24) :

$$\varepsilon(x, t) = - \int_{-1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \beta[\xi, t - (x - \xi)] d\xi. \quad (1.30)$$

En effet, toute variation de la densité liée au point  $\xi$  prend un délai  $(x - \xi)$  pour se faire sentir au point  $x$ .

Il est d'ailleurs facile de vérifier que (1.30) satisfait formellement à (1.29).

### 1.9. Dérivation d'une intégrale de sillage.

Dans les calculs qui suivent interviennent plusieurs intégrales :

$$F(t) = \int_{-1}^{\infty} \varepsilon(\eta, t) f(\eta) d\eta \quad (1.31)$$

étendues au sillage et qui sont fonctions du temps dont il sera nécessaire de calculer la dérivée. Au lieu d'effectuer la dérivation sous le signe intégral, puis, se servant de (1.21), d'intégrer par parties, on peut utiliser le procédé suivant, suggéré par VON KÁRMÁN et SEARS (2), qui évite les difficultés soulevées par une justification du résultat quand  $\varepsilon$  a des discontinuités.

Puisque  $\varepsilon$  n'est une fonction que de sa distance  $s$  à un tourbillon-repère arbitraire du sillage, il vient, par (1.22),

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(s) f(t + 1 - s) ds.$$

Effectuant la dérivation

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon(1, t) f(1) + \int_{-\infty}^t \varepsilon(s) f'(t + 1 - s) ds,$$

ou, revenant à la variable primitive,

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon(1, t) f(1) + \int_{-1}^{\infty} \varepsilon(\eta, t) f'(\eta) d\eta. \quad (1.32)$$

### 1.10. Inversion de l'équation intégrale de la nappe tourbillonnaire.

Si, reprenant l'équation (1.15),

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad -1 < x < +1$$

est la vitesse induite sur l'axe de la nappe tourbillonnaire par la distribution  $\gamma(\xi)$ ,

réciroquement

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left( \Gamma - 2 \oint_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} v(\xi) d\xi}{x-\xi} \right) \quad (1.33)$$

est la distribution réalisant une répartition donnée de vitesse induite sur le segment. Elle n'est pas unique, car dans cette expression

$$\Gamma = \int_{-1}^{+1} \gamma(x) dx,$$

circulation totale autour de la nappe, est un paramètre arbitraire de la solution. La partie représentée par l'intégrale est la solution particulière correspondant à une circulation totale nulle. Comme telle elle s'applique dans le plan de TREFFTZ au cas de la nappe des tourbillons libres dans le problème de l'aile d'envergure finie et a été obtenue par BETZ (3) au moyen d'un développement en série de FOURIER. Sous sa forme (1.33) complète elle a été obtenue et discutée très complètement par SOEHNGEN (4). On en trouvera en Annexe une démonstration simple basée sur l'intégrale de CAUCHY.

Dans le problème des profils minces qui nous occupe, la valeur de la circulation est réglée par la condition de KUTTA-JOUKOWSKI.

Pour que la vitesse  $u$  (et donc  $\gamma$ ) demeure finie au bord de fuite  $x = 1$ , il faut que

$$\Gamma = 2 \oint_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} v(\xi) d\xi. \quad (1.34)$$

Cette valeur introduite dans (1.33) donne

$$\gamma(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{v(\xi) d\xi}{\xi-x}. \quad (1.35)$$

#### 1.11. Calcul de l'intensité tourbillonnaire dans le problème instationnaire.

Dans le problème stationnaire des profils minces, il suffit, en vue de satisfaire à la première des conditions aux limites (1.8), de remplacer dans (1.35) la vitesse  $v(\xi)$  par sa valeur imposée

$$v(\xi, \pm 0) = \frac{dc}{d\xi},$$

où  $c(\xi)$  est l'équation de la ligne moyenne du profil. La distribution tourbillonnaire  $\gamma$  est alors connue et les autres grandeurs physiques importantes en dérivent.

Dans le problème instationnaire la vitesse de perturbation verticale dépend

non seulement de l'intensité tourbillonnaire le long du profil, mais de celle existant le long du sillage

$$v(x, \pm 0) = v_1 + v_2,$$

où

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{x - \xi} \quad (1.36)$$

est la partie due au profil,

$$v_2 = \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\epsilon(\eta, t) d\eta}{x - \eta} \quad (1.37)$$

est la partie induite par le sillage.

La dernière des conditions aux limites (1.8) s'écrit donc

$$v_1 + v_2 = h_x + h_t,$$

relation qui peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{x - \xi} = (h_x + h_t) - v_2.$$

L'intensité tourbillonnaire le long du profil se sépare alors naturellement en deux parties :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad (1.38)$$

avec

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\gamma_1 d\xi}{x - \xi} = h_x + h_t; \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^{+1} \frac{\gamma_2 d\xi}{x - \xi} = -v_2. \quad (1.40)$$

La partie  $\gamma_1$  tient compte des déplacements du profil en faisant abstraction de l'induction de vitesse par le sillage. Elle a reçu le nom de « distribution quasi-permanente ». En effet, s'il était possible de conserver en tout point du profil la pente et la vitesse, la distribution s'établirait définitivement à la valeur  $\gamma_1$  indépendante du temps. Il est intéressant d'observer que la condition générale pour que le problème instationnaire se réduise à la partie quasi-permanente est

$$h_x + h_t = \frac{dc(x)}{dx},$$

indépendante du temps, dont la solution générale est

$$h(x, t) = c(x) + f(x - t),$$

où  $f$  est une fonction arbitraire de son argument et représente une onde de déformation progressant sur le profil avec la vitesse de l'écoulement non perturbé.

La partie  $\gamma_2$  tient compte de la présence de sillage sans déplacement du profil.

**1.11.1. Calcul de l'intensité quasi-permanente.**

Appliquons à (1.39) la formule d'inversion (1.33); il vient

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad (1.41)$$

où

$$\gamma_0 = \frac{-2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} (h_{\xi} + h_i) d\xi \quad (1.42)$$

est la partie non circulatoire qui est responsable des effets dits « d'inertie virtuelle », et, suivant (1.34),

$$\Gamma_1 = 2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} (h_{\xi} + h_i) d\xi \quad (1.43)$$

est la circulation totale nécessaire en vue de satisfaire à la condition de KUTTA au bord de fuite.

La fonction  $h(x, t)$  étant considérée comme une donnée du problème, la distribution quasi-permanente est entièrement déterminée par ces formules et peut être considérée dorénavant comme une grandeur connue.

Combinant (1.42) et (1.43), il vient encore

$$\gamma_1(x, t) = \frac{-2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{h_{\xi} + h_i}{x-\xi} d\xi, \quad (1.44)$$

que l'on obtient aussi directement par application de (1.35).

**1.11.2. Calcul de l'intensité induite par le sillage.**

Avec SCHWARZ (5), appliquons encore la formule (1.35) d'inversion à (1.40) :

$$\gamma_2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{v_2(\xi, t)}{x-\xi} d\xi.$$

Quand  $v_2$  est remplacé par sa valeur (1.37), il en résulte une intégrale double. Renversant l'ordre d'intégration et évaluant l'intégrale en  $\xi$  :

$$\frac{1}{\pi} \oint_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} \frac{d\xi}{\xi-\eta} = \frac{1}{\eta-x} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}},$$

il vient finalement l'expression

$$\gamma_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\eta-x} d\eta. \quad (1.45)$$

Il est aussi possible de procéder plus élémentairement par des méthodes de la représentation conforme. La décomposition de  $\gamma_2$  en ses parties non circulatoire et circulatoire, qui se révélera très utile pour le but final poursuivi qui est le calcul de la pression, s'en trouve aussi simplifiée.

La transformation de JOUKOWSKI :

$$z = \frac{1}{2} (Z + 1/Z)$$

réalise la représentation conforme de l'aire extérieure à la coupure  $-1 < x < +1$  de l'axe réel du plan  $z$  sur l'aire extérieure à la circonférence-unité :

$$Z = e^{i\theta} \text{ du plan } Z.$$

Les points des contours sont donc en correspondance par la loi

$$x = \cos \theta.$$

Les sillages se correspondent par la loi

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} (X + 1/X) & \eta > 1 \\ X &= \eta + \sqrt{\eta^2 - 1} & X > 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Entre les champs de vitesse on a la relation

$$U - iV = (u - iv) \frac{dz}{dZ} = (u - iv) \frac{1}{2} (1 - 1/Z^2).$$

Sur les contours elle devient, en introduisant les composantes radiale et tangentielle à la circonférence,

$$(u_r - i u_\theta) = e^{i\theta} (U - iV) = (u - iv) \frac{1}{2} e^{i\theta} (1 - e^{-2i\theta}) = (u - iv) i \sin \theta,$$

c'est-à-dire, en séparant parties réelle et imaginaire,

$$u_r = v \sin \theta \quad u_\theta = -u \sin \theta. \quad (1.47)$$

Le potentiel complexe  $f(z)$  d'un écoulement autour du segment devient celui

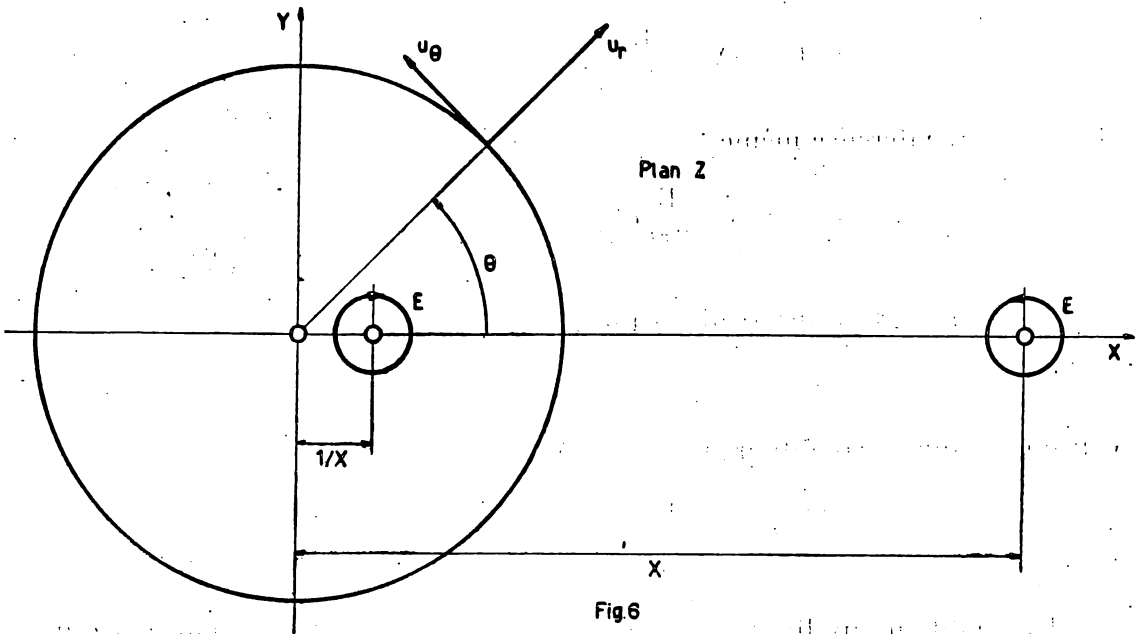
$$f(Z) = f[z(Z)]$$

d'un écoulement autour de la circonférence. Par construction le potentiel prend donc les mêmes valeurs en des points  $z$  et  $Z$  qui se correspondent.

Par suite l'intégrale sur un contour fermé quelconque tracé dans l'aire extérieure du plan  $z$  :

$$\oint df = A + iB,$$

prend la même valeur pour le contour fermé correspondant de l'aire extérieure du plan  $Z$ .



Dans le plan  $z$  cette intégrale a pour signification

$$\oint \frac{df}{dz} dz = \oint (u - iv) (dx + i dy),$$

c'est-à-dire

$$A = \oint u dx + v dy, \quad \text{circulation de la vitesse sur le contour;}$$

$$B = \oint u dy - v dx, \quad \text{flux sortant du contour.}$$

Et de même pour le contour correspondant du plan  $Z$ ,

$$A = \oint U dX + V dY; \quad B = \oint U dY - V dX.$$

Circulation et flux de contours correspondants sont donc identiques. Il s'ensuit que si un des écoulements contient une singularité extérieure (source ou tourbillon), l'écoulement conforme contient la même singularité au point extérieur correspondant.

Si donc le problème d'écoulement posé par la présence d'un tourbillon dans le sillage est résolu pour le plan  $Z$ , il le sera également pour le plan  $z$ .

Soit  $E$  l'intensité du tourbillon placé en  $X$  dans le sillage. La circonférence devient une ligne de courant si, suivant la méthode des images, un tourbillon d'intensité égale et opposée est placé à l'intérieur de la circonférence au point d'abscisse  $1/X$ .

Le champ des vitesses résultant est

$$U - iV = \frac{E}{2\pi i} \left( \frac{1}{Z - X} - \frac{1}{Z - 1/X} \right)$$

et, sur la circonférence même,

$$u_r - i u_\theta = \frac{E}{2\pi i} e^{i\theta} \left( \frac{1}{e^{i\theta} - X} - \frac{1}{e^{i\theta} - 1/X} \right).$$

Soit, séparant parties réelle et imaginaire,

$$u_r = 0,$$

confirmant que la condition aux limites est satisfaite, et

$$u_\theta = -\frac{E}{2\pi} \left( \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1 - 2X \cos \theta} \right).$$

La condition aux limites n'est pas modifiée par la présence d'un tourbillon au centre de la circonférence. Si ce tourbillon a même intensité et sens que celui du sillage, sa circulation détruit celle que provoquait autour du profil la présence du tourbillon-image. On obtient ainsi la partie non circulatoire de la solution, caractérisée par la vitesse tangentielle

$$u_\theta = -\frac{E}{2\pi} \left( \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1 - 2X \cos \theta} - 1 \right). \quad (1.48)$$

Cette partie ne satisfait pas à la condition de KUTTA au bord de fuite  $\theta = 0$ , car elle y induit une vitesse tangentielle

$$u_\theta = -\frac{E}{2\pi} \left( \frac{X + 1}{X - 1} - 1 \right)$$

La partie circulaire de la solution comporte donc la présence additionnelle, au centre de la circonférence, d'un tourbillon d'intensité

$$\Gamma_s = E\left(\frac{X+1}{X-1} - 1\right), \quad (1.49)$$

de façon à rendre nulle la vitesse au bord de fuite.

La partie circulaire correspondante de la vitesse tangentielle est

$$u_0 = \frac{\Gamma_s}{2\pi}. \quad (1.50)$$

La densité tourbillonnaire sur le profil résulte de (1.14) et (1.47)

$$\gamma = -2u(x, +0) = 2u_0/\sin\theta = \frac{2u_0}{\sqrt{1-x^2}} \quad 0 < \theta < \pi.$$

Par conséquent, additionnant (1.48) et (1.50),

$$\gamma_s = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ \Gamma_s - E\left(\frac{X^2-1}{X^2+1-2Xx} - 1\right) \right]. \quad (1.51)$$

En vue d'éliminer X au profit de  $\eta$ , on peut partir de la relation immédiate

$$X^2 + 1 = 2\eta X, \quad (1.52)$$

dont on déduit successivement

$$(X+1)^2 = 2X(\eta+1), \quad (X-1)^2 = 2X(\eta-1),$$

$$(1.53) \quad X^2 - 1 = 2X\sqrt{\eta^2 - 1} \quad \text{et} \quad \frac{X+1}{X-1} = \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}}. \quad (1.54)$$

Transformant dans (1.51) le numérateur par (1.53) et le dénominateur par (1.52),

$$\gamma_s = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ \Gamma_s - E\left(\frac{\sqrt{\eta^2-1}}{\eta-x} - 1\right) \right],$$

tandis que (1.49) transformé par (1.54) devient

$$\Gamma_s = E\left(\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} - 1\right).$$

Enfin, pour un sillage complet, d'éléments  $dE = \varepsilon(\eta, t) d\eta$ ,

$$\gamma_s(x, t) = \frac{\Gamma_s}{\pi\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_1^\infty \left(1 - \frac{\sqrt{\eta^2-1}}{\eta-x}\right) \varepsilon(\eta, t) d\eta, \quad (1.55)$$

$$(1.56) \quad \Gamma_s(t) = \int_1^\infty \left(\sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} - 1\right) \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (1.56)$$



En substituant cette valeur de  $\Gamma_2$  dans (1.55) on retrouve bien l'expression (1.45). Cependant, tout comme pour  $\gamma_1$ , la subdivision explicite de  $\gamma_2$  en ses parties non circulatoire et circulatoire sera d'une grande utilité.

**1.11.3. Formules pour l'intensité totale.**

La circulation totale autour du profil est

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad (1.57)$$

où  $\Gamma_1$  est la partie quasi-permanente telle que donnée par (1.43), et  $\Gamma_2$  est fourni par l'intégrale de sillage (1.56).

Une autre relation importante entre la circulation totale et le sillage est soulignée par VON KÁRMÁN et SEARS (2).

Considérons l'expression

$$\Delta = \Gamma + \int_1^{\infty} \varepsilon(\eta, t) d\eta.$$

Elle représente l'intensité tourbillonnaire totale autour du profil et du sillage. Cette grandeur doit rester constante en vertu du théorème de THOMSON-LAGRANGE. De fait, si nous la dérivons par rapport au temps en utilisant la méthode décrite au paragraphe 1.9, avec, dans ce cas,

$$f(\eta) = 1,$$

il vient

$$\frac{D\Delta}{Dt} = \frac{d\Gamma}{dt} + \varepsilon(1, t) = 0,$$

précisément d'après la loi (1.23) exprimant le mécanisme de formation du sillage.

De plus, on ne restreint pas la généralité des résultats en posant  $\Delta = 0$ , soit que le mouvement ait débuté avec circulation totale nulle, soit que l'on considère seulement les effets transitoires qui se superposent à un régime permanent déjà établi.

Avec la nouvelle relation ainsi posée sous la forme

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \int_1^{\infty} \varepsilon(\eta, t) d\eta = 0, \quad (1.58)$$

on trouve en particulier la relation suivante entre la circulation quasi-permanente et le sillage :

$$\Gamma_1(t) = - \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \varepsilon(\eta, t) d\eta \quad (1.59)$$

Pour l'intensité tourbillonnaire totale on pourrait additionner simplement les formules (1.44) et (1.45), la séparant ainsi comme primitivement conçue en sa partie quasi-permanente et celle due au sillage.

$$\gamma = \gamma_1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\eta-x} d\eta. \quad (1.60)$$

Si, au contraire, on additionne (1.41) et (1.55), il vient

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi \sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_1^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{\eta^2-1}}{\eta-x}\right) \varepsilon(\eta, t) d\eta.$$

Cette relation est considérablement simplifiée par l'utilisation de (1.58); il reste

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\eta^2-1}}{\eta-x} \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (1.61)$$

Cette équation est une expression générale du point de vue de THEODORSEN (12) qui sépare l'intensité tourbillonnaire en sa partie non circulatoire  $\gamma_0$  qui tient compte du déplacement du profil et une partie qui tient compte à la fois du sillage et de la circulation totale nécessaire pour satisfaire à la condition de KUTTA au bord de fuite.

### 1.12. Calcul de la pression.

Le calcul du saut de pression se fait suivant la formule (1.16) et nécessite la dérivation de  $\gamma$  par rapport au temps. L'emploi de (1.61) à cet effet conduit aux calculs les plus simples. Ceci tient au fait que la méthode du paragraphe 1.9 est directement applicable à l'intégrale de sillage de cette équation, tandis qu'elle ne l'est pas à celle de l'équation (1.60), pour laquelle

$$f(1) = \infty.$$

Dérivant (1.61) par rapport au temps par la méthode du paragraphe 1.9,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} - \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \int_1^{\infty} \frac{1-\eta x}{(\eta-x)^2 \sqrt{\eta^2-1}} \varepsilon(\eta, t) d\eta.$$

Évaluant l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1-\eta x}{(\eta-x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \left[ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\eta-x} \right]_1^{\infty} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\eta-x},$$

il vient alors

$$\int_1^{\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial t} dx = \int_1^{\infty} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{(\eta-x) \sqrt{\eta^2-1}} d\eta.$$

Au moyen de l'identité

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\eta-x} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left( \frac{1+\eta}{\eta-x} - 1 \right),$$

elle peut être mise sous la forme équivalente

$$\int_{-1}^x \frac{\partial \gamma}{\partial t} dx = \int_{-1}^x \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left\{ \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon d\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} - \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \frac{\varepsilon}{\eta-x} d\eta \right\}.$$

Il est alors immédiatement apparent que lorsqu'on additionne à cette expression celle donnée pour  $\gamma$  par (1.60), une simplification considérable a lieu par destruction des derniers termes et il vient pour le calcul du saut de pression la formule générale

$$\boxed{-\frac{1}{2} \Delta p = \int_{-1}^x \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx + \gamma_1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\sqrt{\eta^2-1}} d\eta} \quad (1.62)$$

Trois contributions distinctes sont apparentes :

- 1° Celle de la partie non circulatoire  $\gamma_0$ , due aux seuls mouvements du profil (sillage négligé), responsable des effets « d'inertie virtuelle »;
- 2° Celle de la distribution quasi-permanente  $\gamma_1$ , qui subsiste seule en cas de mouvement permanent;
- 3° Celle du sillage.

Cette dernière est remarquable par le fait qu'elle est toujours distribuée le long du profil selon la loi

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

qui gouverne également l'effet d'incidence sur une plaque plane en mouvement permanent. Seule l'intensité, définie par l'intégrale de sillage

$$\boxed{P(t) = \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\sqrt{\eta^2-1}} d\eta} \quad (1.63)$$

est une fonction de l'histoire du mouvement.

### 1.13. Portance totale.

Au moyen d'une intégration du saut de pression le long de la corde, il vient une expression de la portance totale séparée en ses trois contributions :

$$L = L_0 + L_1 + L_s$$

dans laquelle

$$L_0 = -2 \int_{-1}^{+1} \left( \int_{-1}^{+1} \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx \right) dx = 2 \frac{d}{dt} \int_{-1}^{+1} \gamma_0(x, t) x dx; \quad (1.64)$$

expression résultant d'une intégration par parties utilisant le caractère non circulaire :

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_0(x, t) dx = 0,$$

de la distribution  $\gamma_0$ ;

$$L_1 = -2 \int_{-1}^{+1} \gamma_1 dx = -2 \Gamma_1(t); \quad (1.65)$$

$$L_2 = -2 P(t) \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx = -2 P(t). \quad (1.66)$$

Excluant cette partie  $L_0$  de la portance due aux effets d'inertie virtuelle, la partie circulaire

$$L_c = L_1 + L_2$$

peut, au moyen de (1.63) et de (1.59), s'exprimer entièrement sous forme d'une intégrale de sillage :

$$L_c = 2 \int_{-1}^{\infty} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (1.67)$$

#### 1.14. Moment.

Le moment positif cabreur par rapport au milieu de la corde résulte du calcul de l'intégrale

$$M = - \int_{-1}^{+1} \Delta p x dx = M_0 + M_1 + M_2.$$

On trouve sans difficultés

$$M_0 = - \frac{d}{dt} \int_{-1}^{+1} \gamma_0 x^2 dx; \quad (1.68)$$

$$M_1 = 2 \int_{-1}^{+1} \gamma_1 x dx = 2 \int_{-1}^{+1} \gamma_0 x dx; \quad (1.69)$$

$$M_2 = -P(t) = \frac{1}{2} L_2. \quad (1.70)$$

Ce dernier résultat montre que la résultante de l'effet de sillage est appliquée au quart avant de la corde ou « foyer avant ». Il en résulte que si le moment est

calculé par rapport à ce point, il devient indépendant de l'histoire du mouvement :

$$M^* = M - \frac{1}{2} L = M_0^* + M_1^*,$$

avec

$$M_0^* = - \frac{d}{dt} \int_{-1}^{+1} \gamma_0 x (1 + x) dx; \quad (1.71)$$

$$M_1^* = \int_{-1}^{+1} \gamma_1 (1 + 2x) dx. \quad (1.72)$$

VON KÁRMÁN et SEARS (2) ont obtenu des expressions complètement équivalentes pour la portance et le moment total par des considérations ingénieuses basées sur la quantité de mouvement et le moment de quantité de mouvement de la distribution tourbillonnaire. S'ils évitent ainsi le calcul de la répartition de la pression, celle-ci n'en devient pas moins indispensable pour le calcul des moments de charnière ou des moments fléchissants quand le profil est articulé (aileron et tab) ou élastiquement déformable.

#### 1.15. Remarques finales sur l'effet de sillage.

Si le mouvement du profil  $h(x, t)$  est donné, les grandeurs  $\gamma_0(x, t)$ ,  $\gamma_1(x, t)$  et  $\Gamma_1(t)$  doivent être considérées comme connues par les formules (1.42), (1.43) et (1.44). Quelques indications sur ces calculs sont données au chapitre III pour les mouvements usuels de pompage, tangage et débattement des gouvernes utilisés dans les calculs de flutter et de stabilité.

Il est plus important d'examiner comment se présente le calcul effectif de l'effet de sillage.

On dispose à cet effet de l'équation (1.59), qui, moyennant le changement de variable

$$s = t + 1 - \eta,$$

prend plus clairement la forme d'une équation intégrale du type de VOLTERRA pour la détermination de  $\varepsilon(s)$  :

$$\int_{-\infty}^t \varepsilon(s) \sqrt{\frac{t+2-s}{t-s}} ds = - \Gamma_1(t). \quad (1.73)$$

De sa résolution analytique ou numérique pour une loi de variation de  $\Gamma_1(t)$  particulière à chaque problème dépend le calcul de l'intensité  $P(t)$  défini par (1.63) et qui gouverne à elle seule la partie héréditaire des pressions aérodynamiques.

La résolution analytique complète sous forme finie est connue pour le cas d'une variation harmonique de  $\Gamma_1$ . Elle se ramène aux fonctions de BESSEL et sera

exposée au chapitre II. La solution correspondant à un cas de variation quelconque peut alors être obtenue par la technique de l'intégrale de FOURIER ou de la transformée de LAPLACE.

La réponse indicielle, c'est-à-dire provoquée par une discontinuité unitaire de  $\Gamma_1$ , est un des problèmes les plus anciennement examinés et résolus numériquement. La réponse indicielle n'a pu être ramenée à aucune fonction connue, les valeurs numériques initialement obtenues par WAGNER (6) ont été précisées par KÜSSNER (16) au moyen d'un développement en série et par SCHWARZ (8) par la technique de l'intégrale de FOURIER.

Son comportement asymptotique, concordant avec celui obtenu ultérieurement par SCHWARZ, est dû à SEARS (9).

De la réponse indicielle découle aussi la réponse à une loi de variation arbitraire par une intégrale de DUHAMEL.

Ces méthodes, auxquelles le chapitre V est consacré, ont toutes l'inconvénient d'exiger des calculs numériques laborieux par suite du caractère analytique compliqué des noyaux des intégrales. Aussi a-t-on cherché des expressions analytiques simples susceptibles d'en fournir une représentation approchée. En particulier il existe dans la littérature un grand nombre d'expressions exponentielles pour la réponse indicielle.

En vue d'ôter à ces approximations un caractère empirique on peut chercher à les développer rationnellement en attaquant directement les noyaux de (1.63) et (1.73) par une méthode de minimum de l'erreur quadratique. Ce point de vue nouveau est abordé au chapitre IV. Il conduit à relier directement  $\Gamma_1$  et P par deux opérateurs différentiels à coefficients constants associés au nombre voulu de conditions aux limites. La détermination du terme transitoire devient alors un problème de caractère élémentaire.

#### 1.16. Une équation intégrale directe entre $\Gamma_1$ et P.

Dans le système (1.63) et (1.73), l'intensité héréditaire et la circulation quasi-permanente sont reliées par l'intermédiaire de l'intensité tourbillonnaire du sillage.

Une extension des idées de BIRNBAUM permet cependant de supprimer cet intermédiaire.

Reprenons à cet effet l'éq. (1.30) appliquée au bord de fuite  $x = 1$  :

$$\varepsilon(1, t) = - \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial t} \beta(\xi, t - 1 + \xi) d\xi.$$

Remarquons ensuite que, en vertu de (1.23) et (1.24),

$$\varepsilon(\eta, t) = \varepsilon(1, t + 1 - \eta) = - \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial t} \beta(\xi, t - \eta + \xi) d\xi. \quad (1.74)$$

Par ailleurs, d'après le théorème de KUTTA-JOUKOWSKI et la loi (1.62) découverte pour la pression,

$$\beta(x, t) = \int_{-1}^x \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx + \gamma_1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P(t).$$

Remplaçant encore  $\gamma_1$  par son expression (1.41),

$$\beta(x, t) = \beta_0(x, t) + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_1(t)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P(t), \quad (1.75)$$

où

$$\beta_0(x, t) = \gamma_0(x, t) + \int_{-1}^x \frac{\partial}{\partial t} \gamma_0(u, t) du. \quad (1.76)$$

Si, faisant abstraction de la condition de KUTTA-JOUKOWSKI au bord de fuite, on satisfait aux conditions aux limites du problème par la distribution tourbillonnaire  $\gamma_0$ , le tourbillon lié de BIRNBAUM se réduit à  $\beta_0$ . Dans ce cas la circulation totale autour du profil reste nulle par construction

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_0(u, t) du = 0, \quad t \text{ quelconque,} \quad (1.77)$$

et le sillage ne peut se former. Il faut donc s'attendre à ce que la contribution du terme  $\beta_0$  au second membre de (1.74) soit nulle. Ce fait peut être contrôlé formellement comme suit : de (1.76),

$$\beta_0(\xi, t - \eta + \xi) = \gamma_0(\xi, t - \eta + \xi) + \int_{-1}^{\xi} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_0(u, t - \eta + \xi) du. \quad (1.78)$$

Dérivant par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_0(\xi, t - \eta + \xi) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_0(\xi, t - \eta + \xi) + \int_{-1}^{\xi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma_0(u, t - \eta + \xi) du.$$

Par contre, dérivant (1.78) par rapport à  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \beta_0(\xi, t - \eta + \xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma_0(\xi, t - \eta + \xi) + \frac{\partial}{\partial t} \gamma_0(\xi, t - \eta + \xi) \\ &+ \int_{-1}^{\xi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \gamma_0(u, t - \eta + \xi) du, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_0(\xi, t - \eta + \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \gamma_0(\xi, t - \eta + \xi) - \beta_0(\xi, t - \eta + \xi) \right\}.$$

Intégrant maintenant en vue de former la contribution cherchée au second membre de (1.74),

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial t} \beta_0(\xi, t - \eta + \xi) d\xi = -\gamma_0(1, t - \eta + 1) + \beta_0(1, t - \eta + 1) \left\{ \begin{array}{l} (1.79) \\ + \gamma_0(-1, t - \eta - 1) - \beta_0(-1, t - \eta - 1); \end{array} \right.$$

mais, faisant  $\xi = 1$  dans (1.78),

$$\beta_0(1, t - \eta + 1) - \gamma_0(1, t - \eta + 1) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^{+1} \gamma_0(u, t - \eta + 1) du = 0,$$

en vertu de (1.77), tandis que pour  $\xi = -1$  il vient

$$\beta_0(-1, t - \eta - 1) = \gamma_0(-1, t - \eta - 1).$$

Ceci achève de démontrer que le second membre de (1.79) est nul.

L'introduction des deux autres termes de (1.75) au second membre de (1.74) conduit à la formule

$$-\varepsilon(\eta, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'_1(t - \eta + \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1 - \xi}{1 + \xi}} P'(t - \eta + \xi) d\xi. \quad (1.80)$$

Le double changement de variables

$$\eta = t + 1 - s, \quad \xi = \sigma + \eta - t$$

montre mieux que le tourbillon engendré au point  $s$  du sillage ne dépend que de la variation subie par les fonctions  $\Gamma_1(s)$  et  $P(s)$  sur une longueur de corde précédant le point en question :

$$-\varepsilon(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s-2}^{s} \frac{\Gamma'_1(\sigma)}{\sqrt{(s - \sigma)(2 + \sigma - s)}} d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{s-2}^{s} \sqrt{\frac{s - \sigma}{2 + \sigma - s}} P'(\sigma) d\sigma.$$

La substitution de (1.80) dans (1.59) ou (1.63) conduit à une équation intégrale reliant directement les fonctions  $\Gamma_1(t)$  et  $P(t)$ .



## CHAPITRE II.

### MOUVEMENT HARMONIQUE.

---

#### 2.1. Fréquence réduite.

Dans le plan physique les mouvements du profil sont supposés suivre une loi harmonique caractérisée par une fréquence absolue  $\nu$  et une période correspondante

$$T = 1/\nu.$$

Rapportée à l'unité de temps naturelle  $c/2U$ , laps requis pour que la corde se déplace de la moitié de sa longueur, la période devient la période réduite

$$\frac{2U}{\nu c}$$

et la fréquence réduite correspondante est

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{\nu c}{2U}.$$

La dépendance du temps sera donc caractérisée en grandeurs non dimensionnelles par les fonctions

$$\sin kt \quad \text{et} \quad \cos kt.$$

La fréquence réduite dont dépendent les forces aérodynamiques en mouvement périodique résulte aussi d'une comparaison entre la corde du profil et la longueur d'onde du mouvement (fig. 7). Cette dernière étant égale au produit de la vitesse d'avancement par la période

$$L = UT = U/\nu,$$

nous avons la relation

$$\frac{k}{2\pi} = \frac{c}{2L}.$$

Le paramètre  $k$  marque donc clairement dans quelle mesure relative le sillage varie quand on s'éloigne du bord de fuite. Il est clair que les faibles valeurs de  $k$  seront corrélatives de faibles valeurs pour le quotient différentiel  $d\Gamma/ds$  qui

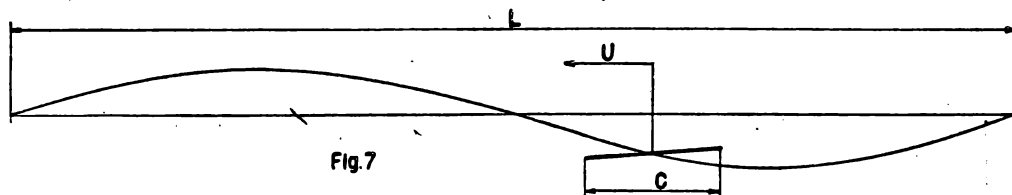
mesure l'intensité tourbillonnaire locale du sillage. Les forces aérodynamiques s'écartent relativement peu dans ce cas de leur valeur quasi-permanente. Au contraire, un effet de sillage de plus en plus important doit se manifester avec l'augmentation de la fréquence réduite.

## 2.2. Mouvement harmonique généralisé.

Suivant en cela la méthode du repère tournant, on peut avantageusement convenir de représenter un mouvement harmonique du profil sous la forme

$$h(x, t) = \bar{h}(x) e^{i\omega t}, \quad (2.1)$$

où  $h(x)$  est une amplitude complexe localement variable.



Dans ce cas, si l'amplitude est séparée dans ses parties réelle et imaginaire,

$$\bar{h}(x) = \bar{h}_1(x) + i \bar{h}_2(x);$$

le mouvement réel est obtenu en prenant la partie réelle de (2.1) :

$$h(x, t) = \bar{h}_1(x) \cos kt - \bar{h}_2(x) \sin kt.$$

Cette loi est un cas particulier de la représentation

$$h(x, t) = \bar{h}(x) e^{\omega t}, \quad (2.2)$$

où

$$\omega = \mu + ik. \quad (2.3)$$

Le mouvement réel qui en résulte :

$$h(x, t) = e^{\mu t} [\bar{h}_1(x) \cos kt - \bar{h}_2(x) \sin kt],$$

et qu'on peut appeler harmonique généralisé, sera divergent ou convergent, suivant que la partie réelle  $\mu$  de  $\omega$  est positive ou négative.

## 2.3. Détermination de l'effet d'intensité du sillage.

Nous nous bornons momentanément à la détermination de la solution de régime si elle existe. Dans cette hypothèse il faut que le sillage soit étendu jusqu'à l'infini pour faire disparaître cette partie transitoire de la solution qui marque le raccord entre le repos et le début des oscillations harmoniques du profil.

Par définition de la « solution de régime », toutes les grandeurs vont varier suivant la même loi temporelle que le profil.

Posons en conséquence, pour la circulation totale,

$$\Gamma = \bar{\Gamma} e^{\omega t}.$$

Par suite de la loi (1.24) résumant le mécanisme de formation du sillage, il vient alors

$$\varepsilon(\eta, t) = -\omega e^{\omega t} e^{-\omega \eta} \bar{\Gamma} e^{\omega t}. \quad (2.4)$$

Introduisant cette expression dans (1.59), nous sommes amenés à examiner la signification d'une relation entre l'amplitude connue  $\bar{\Gamma}_1$  et l'amplitude inconnue  $\bar{\Gamma}$  :

$$\bar{\Gamma}_1 = \omega e^{\omega} \bar{\Gamma} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} e^{-\omega \eta} d\eta. \quad (2.5)$$

L'intégrale généralisée ne converge que si la partie réelle de  $\omega$  est positive. Si elle est négative, cette intégrale est divergente infinie. A la frontière de ces deux cas ( $\omega = ik$ ) son caractère divergent est simplement indéterminé <sup>(1)</sup>.

Il faut en conclure qu'une solution de régime est inexistante en cas de mouvement généralisé convergent ( $\mu < 0$ ). Cette conclusion n'implique pas que dans un mouvement convergent les forces aérodynamiques dues au sillage deviennent en elles-mêmes infiniment grandes, mais seulement qu'elles deviennent telles en comparaison des forces quasi-permanentes qui décroissent comme  $e^{\mu t}$ . Ceci est en relation avec le fait, démontré plus tard, que la partie proprement transitoire ne décroît asymptotiquement que comme  $1/t$ .

L'intégrale de (2.5) peut être décomposée en deux parties qui, en cas de convergence, représentent chacune une fonction de BESSEL modifiée de seconde espèce <sup>(2)</sup>. Tout d'abord

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-\omega \eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta = K_0(\omega). \quad \mu > 0. \quad (2.6)$$

Cette intégrale converge encore à la frontière  $\mu = 0$ . Il n'en est pas de même pour la suivante obtenue en dérivant par rapport à l'argument  $\omega$  :

$$\int_1^{\infty} \frac{\eta e^{-\omega \eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}} d\eta = -K'_0(\omega) = K_1(\omega). \quad \mu > 0 \quad (2.7)$$

<sup>(1)</sup> CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Analyse infinitésimale*, t. II, chap. I.

<sup>(2)</sup> Étant donnée la confusion de notations et définitions qui existe à leur sujet, il faut préciser qu'il s'agit des fonctions  $K_n(z)$  introduites par MAC DONALD et reprises dans (10) et (11).

Il vient alors pour (2.5) :

$$\bar{\Gamma}_1 = \omega e^{\omega} [K_0(\omega) + K_1(\omega)] \bar{\Gamma} \quad \mu > 0$$

et pour le sillage (2.4) :

$$\epsilon(\eta, t) = - \frac{\bar{\Gamma}_1}{K_0(\omega) + K_1(\omega)} e^{-\omega\eta} e^{\omega t} \quad \mu > 0. \quad (2.8)$$

Substituant ce dernier résultat dans l'expression (1.63) de l'intensité d'effet du sillage et utilisant à nouveau (2.6), il vient pour amplitude

$$\bar{P} = - \frac{K_0(\omega)}{K_0(\omega) + K_1(\omega)} \bar{\Gamma}_1. \quad \mu > 0 \quad (2.9)$$

En passant à la limite  $\mu \rightarrow 0$  et par suite de la continuité des fonctions de BESSEL, l'indétermination de (2.7) est levée pour  $\mu = 0$  et les résultats (2.8) et (2.9) subsistent comme solutions de régime en mouvement purement harmonique.

#### 2.4. Nouvelle dérivation par l'équation intégrale directe.

La méthode suivie au paragraphe précédent pour obtenir (2.9) suit essentiellement le raisonnement de SCHWARZ (5). Tout appel à la continuité des fonctions de BESSEL peut cependant être évité, soit par un artifice mathématique décrit par VON KÁRMÁN et SEARS (2), soit en appliquant au problème le calcul du sillage par l'équation intégrale (1.80) déduite du tourbillon de BIRNBAUM. En effet, si dans cette dernière équation on introduit les hypothèses du mouvement harmonique

$$\Gamma_1 = \bar{\Gamma}_1 e^{\omega t}, \quad P = \bar{P} e^{\omega t},$$

il vient

$$\epsilon(\eta, t) = - \omega e^{\omega(t-\eta)} \left[ \frac{\bar{\Gamma}_1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\omega\xi} d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\bar{P}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} e^{\omega\xi} d\xi \right]$$

Mais, par la théorie des fonctions de BESSEL, on a

$$J_0(+i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\omega\xi} d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (2.10)$$

sans aucune restriction sur  $\omega$ . Par dérivation,

$$+i J_0(+i\omega) = -i J_1(+i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{\omega\xi} d\xi, \quad (2.11)$$

et la relation précédente devient

$$\epsilon(\eta, t) = - \omega e^{\omega(t-\eta)} \{ \bar{\Gamma}_1 J_0(i\omega) + \bar{P} [J_0(i\omega) + i J_1(i\omega)] \}. \quad (2.12)$$

$J_0$  et  $J_1$  désignent, dans leur notation habituelle, les fonctions de BESSEL de première espèce d'ordres zéro et un. La substitution de (2.12) dans (1.63) conduit à la seule intégrale (2.6), convergente tant que  $\mu \leq 0$ . On trouve finalement

$$\bar{P} = - \frac{\omega J_0(i\omega) K_0(\omega)}{1 + \omega [J_0(i\omega) + i J_1(i\omega)] K_0(\omega)} \bar{\Gamma}_1. \quad (2.13)$$

L'identité entre (2.9) et (2.13) a lieu si l'équation

$$J_0(i\omega) K_1(\omega) - i J_1(i\omega) K_0(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad (2.14)$$

est vérifiée. Sous la forme équivalente

$$W(\omega) = K_0(\omega) \frac{dJ_0(i\omega)}{d\omega} - J_0(i\omega) \frac{dK_0(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega}$$

elle apparaît immédiatement comme une relation de WRONSKI entre deux solutions de l'équation de BESSEL modifiée d'ordre zéro :

$$\frac{d^2 y}{d\omega^2} + \frac{1}{\omega} \frac{dy}{d\omega} - y = 0.$$

En effet, le wronskien  $W(\omega)$  des deux solutions  $K_0(\omega)$  et  $J_0(i\omega)$  satisfait à l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dW}{d\omega} + \frac{W}{\omega} = 0,$$

dont la solution générale est

$$W = A/\omega.$$

La valeur de la constante  $A$  peut s'obtenir en observant que, si l'on fait tendre  $\omega$  vers zéro,

$$J_0(i\omega) \rightarrow 1, \quad \omega K_1(\omega) \rightarrow 1, \quad J_1(i\omega) \rightarrow 0, \quad \omega K_0(\omega) \rightarrow 0.$$

Il en résulte  $A = 1$  et la preuve de (2.14) est achevée.

### 2.5. La Fonction $C$ de THEODORSEN.

Reprenant la partie circulatoire de la portance, qui ne fait abstraction que des effets d'inertie virtuelle indépendants du sillage,

$$L_c = L_1 + L_2 = -2[\Gamma_1(t) + P(t)],$$

on peut exprimer l'effet du sillage en régime harmonique par le rapport entre l'amplitude complexe  $\bar{L}_c$  et l'amplitude complexe de sa partie quasi-permanente

$$\bar{L}_c / \bar{L}_1 = |1 + \bar{P} / \bar{\Gamma}_1| = C(-i\omega). \quad (2.15)$$

Cette fonction de la seule fréquence réduite a été introduite pour la première fois par THEODORSEN (12) sous le nom de « lift deficiency factor ». Elle constitue en effet un « facteur de perte de sustentation » par lequel il faut multiplier l'amplitude complexe fournie par la théorie du mouvement permanent.

Une fonction analogue

$$T(-i\omega) = 2C - 1$$

a été introduite par KUESSNER (18) dans la littérature allemande.

Il découle du résultat (2.9) que la fonction de THEODORSEN a pour valeur

$$C(-i\omega) = \frac{K_1(\omega)}{K_1(\omega) + K_0(\omega)}. \quad (2.16)$$

Il en résulte que

$$\frac{C-1}{C} = -\frac{K_0(\omega)}{K_1(\omega)}.$$

Dérivant les deux membres par rapport à  $\omega$  et utilisant les formules de dérivation pertinentes aux fonctions de BESSEL  $K_n$ ,

$$\frac{dK_0}{d\omega} = -K_1(\omega), \quad \frac{dK_1}{d\omega} = -K_0(\omega) - \frac{1}{\omega} K_1(\omega), \quad (2.17)$$

il vient

$$\frac{1}{C} \frac{dC}{d\omega} = 1 + \frac{K_0}{K_1} \left( -K_0 - \frac{1}{\omega} K_1 \right) = 1 - \left( \frac{C-1}{C} \right)^2 + \frac{1}{\omega} \frac{C-1}{C}.$$

La fonction de THEODORSEN satisfait donc à l'équation différentielle de RICCATI :

$$\frac{dC}{d\omega} = 2C - 1 + \frac{1}{\omega} C(C-1). \quad (2.18)$$

Aux fonctions  $K_n$  on peut préférer les fonctions de HANKEL de deuxième espèce reliées aux précédentes par

$$K_n(x) = -\frac{\pi i}{2} e^{-n\frac{\pi i}{2}} H_n^{(2)}(-ix);$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0^{(2)}(-i\omega) = i\frac{2}{\pi} K_0(\omega), \\ H_1^{(2)}(-i\omega) = -\frac{2}{\pi} K_1(\omega), \end{array} \right.$$

et il ressort qu'on a aussi

$$C(-i\omega) = \frac{H_1^{(2)}(-i\omega)}{H_1^{(2)}(-i\omega) + iH_0^{(2)}(-i\omega)}, \quad \omega > 0,$$

La première de ces fonctions de HANKEL prend des valeurs purement imaginaires, la seconde des valeurs purement réelles quand  $\omega$  est purement réel ( $k=0$ ). La fonction de THEODORSEN pour un mouvement purement exponentiel divergent ne prend donc que des valeurs réelles. Un certain nombre de celles-ci ont été calculées au moyen des tables de JAHNKE-EMDE et figurent à la colonne intitulée C ( $-i\mu$ ) de la table I.

L'allure correspondante de la fonction est reprise graphiquement à la figure 8.

La fonction  $K_0(\omega)$  tend vers l'infini comme  $\log \omega$ , la fonction  $K_1(\omega)$  comme  $1/\omega$ . Aussi une expression dérivée de (2.13) est-elle plus pratique pour le calcul numérique de la fonction de THEODORSEN aux faibles valeurs de  $\omega$ ; explicitement :

$$C(-i\omega) = \frac{1 + i\omega J_1(i\omega) K_0(\omega)}{1 + \omega [J_0(i\omega) + iJ_1(i\omega)] K_0(\omega)}. \quad (2.19)$$

Elle fait apparaître directement l'existence de la limite

$$\lim C = 1. \quad \omega \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

Par ailleurs,  $K_0$  et  $K_1$  ayant même expression asymptotique

$$e^{-\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}},$$

il en résulte la limite

$$\lim C = \frac{1}{2}. \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

De (2.19) on obtient aussi facilement un développement de C en puissances combinées de  $\omega$  et  $\log \omega$ . Les premiers termes seront contenus dans l'expression

$$\begin{aligned} & [1 + i\omega J_1(i\omega) K_0] [1 - \omega J_0(i\omega) K_0(\omega) - i\omega J_1(i\omega) K_0(\omega)] \\ & = 1 - \omega J_0(i\omega) K_0(\omega) + \omega^2 J_1(i\omega) K_0(\omega). \end{aligned}$$

Avec les développements connus

$$\begin{aligned} J_0(i\omega) &= 1 + \dots; \\ K_0(\omega) &= -\left(\log \frac{\omega}{2} + \gamma\right) + \dots, \end{aligned}$$

il vient, en ne retenant que les trois termes principaux,

$$C(-i\omega) \sim 1 + \omega \log \frac{\omega}{2} + \omega \gamma, \quad (2.22)$$

où

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = 0.577 \ 215 \ 665 \dots$$

est la constante d'EULER.

Cette dernière formule permet d'examiner avec quelle rapidité l'effet de sillage disparaît quand  $\omega \rightarrow 0$ .

On en déduit en effet que pour les faibles valeurs de  $\omega$ , la partie réelle et la partie imaginaire de C sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} F \sim 1 + \mu \log \frac{\sqrt{\mu^2 + k^2}}{2} - k \operatorname{arc} \tan \frac{k}{\mu} + \mu \gamma; \\ G \sim k \log \frac{\sqrt{\mu^2 + k^2}}{2} + \mu \operatorname{arc} \tan \frac{k}{\mu} + k \gamma. \end{array} \right.$$

Les pentes des courbes  $F(\mu, k)$  et  $G(\mu, k)$  tracées en fonction de  $k$  à  $\mu$  constant sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial k} \sim - \operatorname{arc} \tan \frac{k}{\mu}; \\ \frac{\partial G}{\partial k} \sim 1 + \gamma + \log \frac{\sqrt{\mu^2 + k^2}}{2}. \end{array} \right.$$

Leurs valeurs limites pour  $k \rightarrow 0$  sont alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \frac{\partial F}{\partial k} = 0 \quad \text{si } \mu > 0; \\ \lim \frac{\partial F}{\partial k} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } \mu = 0; \\ \lim \frac{\partial G}{\partial k} = 1 + \gamma + \log \frac{\mu}{2}. \end{array} \right.$$

Dans le cas de la courbe figure 8, qui est au contraire tracée en fonction de  $\mu$  pour  $k = 0$ , on a

$$G = 0, \quad F \sim 1 + \mu \log \frac{\mu}{2} + \mu \gamma, \quad \frac{dF}{d\mu} \sim 1 + \gamma + \log \frac{\mu}{2}$$

et

$$\lim \frac{dF}{d\mu} = -\infty, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Pour les valeurs plus élevées de  $\omega$ , les pentes peuvent être calculées au moyen de (2.17).

En particulier dans le cas du mouvement harmonique pur ( $\mu = 0$ ) il vient, en posant  $\omega = ik$ ,  $C = F + iG$  dans (2.18),

$$\left\{ \begin{array}{l} k \frac{dF}{dk} = -2kG + F(F-1) - G^2; \\ k \frac{dG}{dk} = (2F-1)(k+G). \end{array} \right.$$



Les valeurs de  $C(k)$  relatives au mouvement harmonique pur sont consignées dans la table I. Elles s'obtiennent aisément à partir de (2.18), devenue

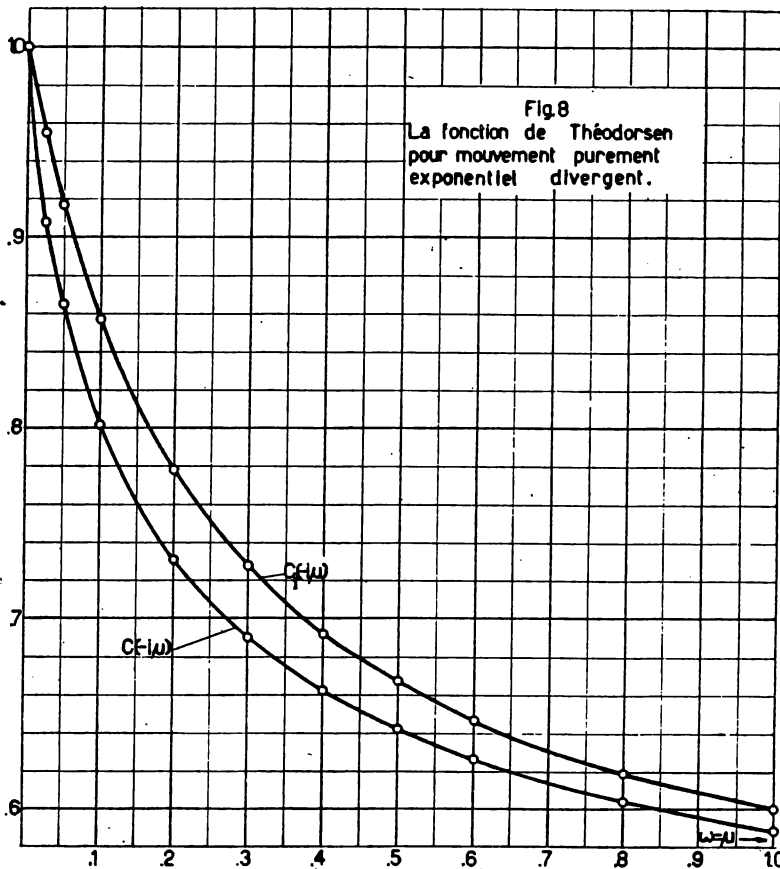
$$C(k) = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)},$$

en séparant les fonctions de HANKEL en leurs parties réelle et imaginaire :

$$H_0^{(2)}(k) = J_0(k) - iY_0(k);$$

$$H_1^{(2)}(k) = J_1(k) - iY_1(k),$$

pour lesquelles plusieurs tables existent <sup>(1)</sup>.

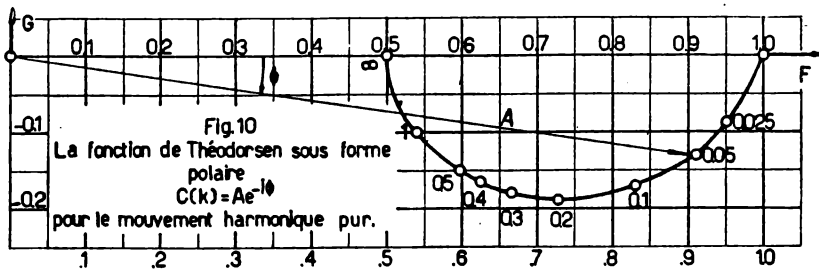
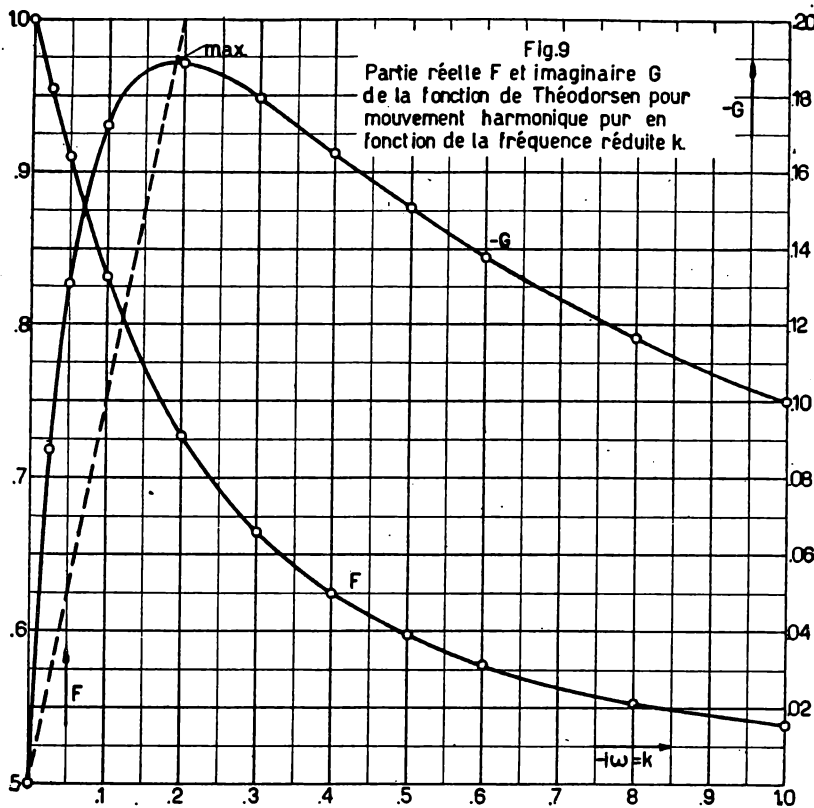


La figure 9 décrit les parties réelle et imaginaire  $F(k)$  et  $G(k)$  en diagramme cartésien. Le diagramme polaire de la figure 10 met au contraire en évidence le facteur d'amplitude et l'angle de retard de phase qui sont caractéristiques de l'effet du sillage.

<sup>(1)</sup> A noter que dans JAHNKE et EMDE, les fonctions de NEUMANN-WEBER  $Y_n(x)$  sont dénotées  $N_n(x)$ .

Les courbes  $F(\mu, k)$  et  $G(\mu, k)$  pour  $\mu < 0$  ne peuvent être calculées qu'à partir de tables des fonctions de BESSEL d'argument complexe. Utilisant les tables (13) et (14), LUKE et DENGLER ont publié (15) des tables étendues de la fonction de THEODORSEN sous la forme

$$F(\rho e^{i\theta}) \text{ et } G(\rho e^{i\theta}), \text{ où } \rho e^{i\theta} = -i\omega = k - i\mu.$$



Dans leur notation, le mouvement harmonique généralisé est convergent pour  $0 < \theta < \pi/2$ , divergent pour  $-\pi/2 < \theta < 0$ . Leurs tables sont publiées pour l'intervalle  $\theta : -5^\circ (5^\circ) 30^\circ$ . Elles concernent donc principalement le mouvement convergent, et l'extension de la fonction de THEODORSEN à ce cas a été basée sur un argument de continuité des fonctions de BESSEL à la traversée de l'axe des  $k$  posi-

tifs. En fait, la divergence à l'infini de l'intégrale (2.6) pour  $\mu < 0$  indique clairement l'absence d'une solution de régime dans le sens où elle est normalement définie. Nous revenons par la suite sur la signification qu'on peut accorder aux extensions proposés sur la base d'arguments de continuité (§ 5.4).

**2.6. Distribution de la pression en mouvement harmonique.**

Appliquons à ce calcul la formule générale (1.62).

Après élimination du facteur commun  $e^{i\omega t}$  il vient, pour l'amplitude complexe de la solution de régime,

$$-\frac{i1}{2} \Delta \bar{p} = \omega \int_{-1}^{+x} \bar{\gamma}_0 dx + \bar{\gamma}_1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \bar{P}. \quad (2.22)$$

Suivant la loi (2.2), qui gouverne le mouvement du profil, on trouve pour expression de « l'effet piston » du profil :

$$h_{\xi} + h_t = \left( \frac{d\bar{h}}{d\xi} + \omega \bar{h} \right) e^{i\omega t} = \bar{w}(\xi) e^{i\omega t} \quad (2.23)$$

et, par conséquent, suivant (1.42), (1.41) et (1.43),

$$\bar{\gamma}_0 = \frac{-2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \oint_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} \bar{w}(\xi) d\xi; \quad (2.24)$$

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_0 + \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \bar{\Gamma}_1; \quad (2.25)$$

$$\bar{\Gamma}_1 = 2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \bar{w}(\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

Notant encore que  $\bar{P}$  et  $\bar{\Gamma}_1$  sont liés par l'intermédiaire de la fonction de THEODORSEN, sous la forme

$$\bar{P} = [C(-i\omega) - 1] \bar{\Gamma}_1,$$

on trouve une première forme pratique de calcul :

$$\Delta \bar{p} = -2 \left( \bar{\gamma}_0 + \omega \int_{-1}^{+x} \bar{\gamma}_0 dx \right) - \frac{2}{\pi} \bar{\Gamma}_1 \left[ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C(-i\omega) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right]. \quad (2.27)$$

La substitution de  $\bar{\gamma}_0$  dans la première parenthèse et l'évaluation de l'intégrale (cfr. Annexe II)

$$\int_{-1}^{+x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\xi-x} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \Lambda(x, \xi),$$

où

$$\Lambda(x, \xi) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-x\xi + \sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}}{1-x\xi - \sqrt{(1-\xi^2)(1-x^2)}} \quad (2.28)$$

conduit à mettre cette parenthèse sous la forme

$$\frac{2}{\pi} \oint_{-1}^{+1} \left[ \omega \wedge (x, \xi) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} \right] \bar{w}(\xi) d\xi,$$

qui permet une identification plus aisée avec l'expression obtenue par KUESSNER et SCHWARZ (20), au moyen d'une sommation de série de FOURIER et redémontrée par SCHWARZ (5) au moyen de l'inversion de l'équation intégrale de la nappe tourbillonnaire. Un calcul effectif de distributions de pressions en mouvement harmonique pur a été présenté par POSTEL et LEPPERT (17). Il concerne le mouvement de translation du profil, sa rotation autour du foyer avant et le mouvement d'une gouverne articulée à 75 % de la corde.

### CHAPITRE III.

## ANALYSE DE QUELQUES TYPES DE RÉGIMES HARMONIQUES.

Il s'agit ici d'examiner l'application de la formule (2.23) permettant d'évaluer en détail la distribution de la pression sur un profil en mouvement harmonique quand les degrés de liberté sont restreints à ceux usuellement considérés par la technique.

Le problème plus général qui se présente quand la dépendance de la variable temps n'est plus restreinte à une loi harmonique nécessite pour toute modification le remplacement de la relation

$$P(t) = \bar{P}e^{i\omega t} = [C(-i\omega) - 1] \bar{\Gamma}_1 e^{i\omega t}$$

par la relation générale entre  $P(t)$  et  $\Gamma_1(t)$  dérivant de leurs liaisons (1.59) et (1.63) avec le sillage.

Le calcul effectif de cette liaison générale fait l'objet des méthodes développées aux chapitres IV et V.

Les résultats obtenus ici trouvent leur principale utilité dans les calculs de « flutter » à deux dimensions et l'établissement de critères pour la compensation et l'équilibrage dynamique des gouvernes, afin de prévenir l'éventualité dangereuse de ces oscillations auto-entretenuës.

#### 3.1. Degrés de liberté principaux.

Pour un profil indéformable subsistent deux degrés de liberté qui sont parfois définis comme une translation verticale et une rotation autour d'un point particulier, généralement le centre du profil ou son foyer avant.

En vue de conserver une grande latitude quant aux choix des coordonnées, nous traiterons le cas général d'un « mouvement  $\alpha$  ». Nous entendons par là une rotation d'angle cabreur  $\alpha$ , autour d'un axe, dont la position reste un paramètre  $a$  (fig. 11). Les ordonnées du profil suivent alors la loi

$$h(\xi, t) = (a - \xi) \alpha(t). \quad (3.1)$$

et l'effet piston effectif est distribué comme

$$h_z + h_s = w(-\cos u, t) = -\alpha + \dot{\alpha}(a + \cos u). \quad (3.2)$$

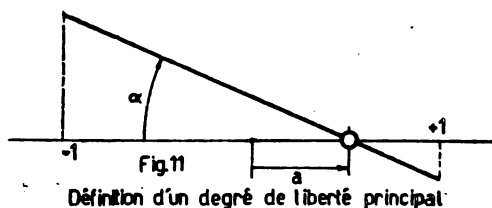
Le changement de variables

$$\xi = -\cos u, \quad x = -\cos \theta$$

permet un calcul plus aisé des intégrales

$$\gamma_0(\theta, t) = \frac{-2}{\pi \sin \theta} \int_0^\pi \frac{\sin^2 u}{\cos u - \cos \theta} w(-\cos u, t) du, \quad (1.42)$$

$$\Gamma_1(t) = 2 \int_0^\pi (1 - \cos u) w(-\cos u, t) du. \quad (1.43)$$



Dans le cas présent elles fournissent comme résultats

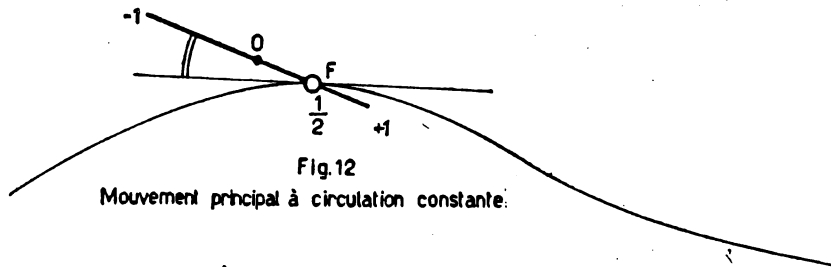
$$\gamma_0 = \frac{1}{\sin \theta} [-2\alpha \cos \theta + \dot{\alpha}(2a \cos \theta + \cos 2\theta)]; \quad (3.3)$$

$$\Gamma_1 = -2\pi\alpha - \pi\dot{\alpha}(1 - 2a). \quad (3.4)$$

KUESSNER (18) a fait observer que ce dernier résultat est aussi

$$\Gamma_1 = 2\pi w\left(\frac{1}{2}, t\right), \quad (3.5)$$

quel que soit le paramètre  $a$ . Il en résulte une propriété remarquable du point  $\xi = 1/2$ , appelé pour cette raison « foyer arrière du profil ».



« Dans un mouvement quelconque du profil rigide, la circulation quasi-permanente ne dépend que de l'effet piston effectif au niveau du foyer arrière ». Il en découle en particulier que, si le profil fait un angle constant avec la tangente à la trajectoire décrite par le foyer arrière (fig. 12), la circulation demeure con-

stante. Elle est en particulier nulle si l'angle en question est nul. Nous revenons au problème de la distribution de la pression en régime harmonique en posant

$$\alpha = \bar{\alpha} e^{i\omega t}.$$

Calculant séparément les deux contributions au second membre de (2.23), on trouve

$$\overline{\Delta p_1} / \bar{\alpha} = 4 \cot \theta - 2\omega \frac{2a \cos \theta + \cos 2\theta - 2 \sin^2 \theta}{\sin \theta} - 2\omega^2 (2a + \cos \theta) \sin \theta; \quad (3.6)$$

$$\overline{\Delta p_2} / \bar{\alpha} = 2 \left[ 2 + \omega (1 - 2a) \right] \left[ -\cot \theta + C(-i\omega) \cot \frac{\theta}{2} \right]. \quad (3.7)$$

Le choix d'une rotation comme type de degré de liberté principal n'exclut pas l'applicabilité de ces formules au cas de la translation. Celle-ci, définie par

$$h(\xi, t) = h(t),$$

dérive de la rotation par le passage à la limite

$$\lim \alpha = 0, \quad \lim \alpha a = h, \quad a \rightarrow +\infty. \quad (3.8)$$

Il suffit donc de retenir le coefficient de  $a$  dans les formules précédentes et de remplacer  $\alpha$  par  $h$ .

Additionnant les deux contributions et après une réduction, il vient, pour le cas de la translation,

$$\overline{\Delta p} / \bar{h} = -4\omega^2 \sin \theta - 4\omega C(-i\omega) \cot \frac{\theta}{2}. \quad (3.9)$$

Le premier terme, contenant les effets d'inertie virtuelle, est dans ce cas susceptible d'une représentation physique simple. En effet, revenant aux grandeurs dimensionnelles, on peut voir que le même terme serait obtenu en attachant à chaque bande  $d\xi$  du profil la masse de fluide contenue dans une colonne de même base, limitée vers le haut et vers le bas par une circonférence ayant la corde pour diamètre. Du point de vue du mouvement de translation rigide, tout se passe donc comme si le profil entraînait avec lui le cylindre de fluide circonscrit.

### 3.2. Effet d'un mouvement $\alpha$ sur un degré de liberté $\beta$ .

Un degré de liberté  $\beta$  consiste en un braquage vers le bas d'une gouverne. La charnière et le bord d'attaque en cas de compensation aérodynamique sont repérés par les paramètres (fig. 13)

$$b = -\cos \varphi, \quad e = -\cos \varepsilon.$$

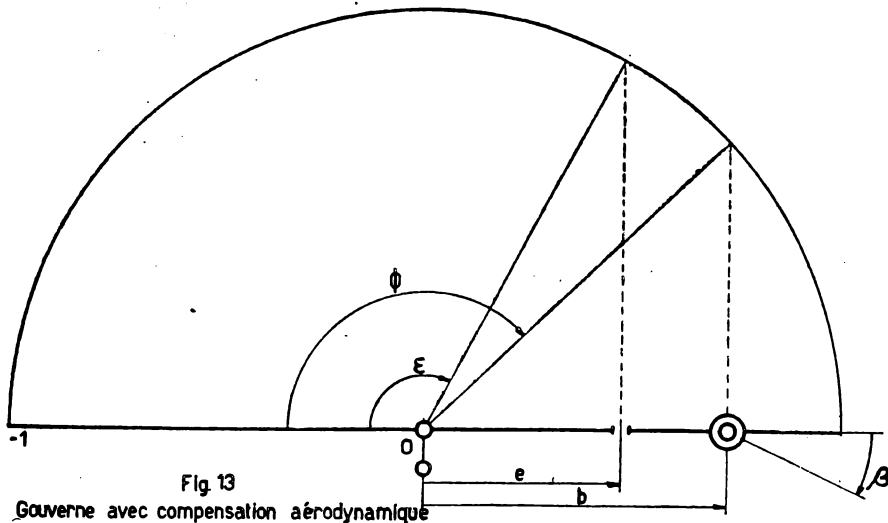
Le braquage  $\beta$ , positif vers le bas, est défini par rapport à l'alignement de la partie sur laquelle la gouverne est articulée.

L'objet du calcul est le moment aérodynamique moteur appliqué à la gouverne; il est compté positivement dans le même sens que le braquage.

La notation suivante sera utilisée par l'amplitude de ce moment :

$$\bar{\alpha} \cdot A_a(b, e) = \int_0^\pi (\overline{\Delta p}) (\cos \theta + b) \sin \theta d\theta. \quad (3.10)$$

La lettre A rappelle que le moment est celui provoqué par la distribution de pression d'un mouvement  $\alpha$ ; il est évidemment proportionnel à l'amplitude  $\alpha$  du mouvement. L'indice  $a$  marque la position de l'axe du mouvement. Les arguments  $b$  et  $e$  rappellent la position de la charnière et du bord d'attaque de la gouverne.



Remplaçant  $\overline{\Delta p}$  par sa valeur et effectuant les intégrations trigonométriques de caractère élémentaire, il vient

$$A_a(b, e) = \omega (-E_1 + 2b E_2) + 2\omega^2 [-E_5 + 2a E_4 + b E_4 - ab E_3] + [2 + \omega(1 - 2a)] [E_6 + 2b E_7] C(-i\omega). \quad (3.11)$$

Dans cette expression les fonctions E ne dépendent que du paramètre  $e$  :

$$E_1 = \pi - \epsilon - \sin \epsilon \cos \epsilon - \frac{2}{3} \sin 3\epsilon;$$

$$E_2 = \pi - \epsilon + \sin \epsilon + \sin 2\epsilon = \Phi_{21};$$

$$E_3 = \pi - \epsilon + \sin \epsilon \cos \epsilon = \Phi_3;$$

$$E_4 = \frac{1}{3} \sin^3 \epsilon;$$

$$E_5 = \frac{1}{8} \left( \pi - \epsilon + \frac{\sin 4\epsilon}{4} \right);$$

$$E_6 = \pi - \epsilon - \sin \epsilon \cos \epsilon - 2 \sin \epsilon;$$

$$E_7 = \pi - \epsilon - \sin \epsilon = \Phi_{31}.$$



Trois seulement de ces fonctions figurent parmi les fonctions  $\Phi$  introduites successivement par KUESSNER (18), DIETZE (19) et KUESSNER-SCHWARZ (20). Ceci provient du choix qu'ont fait à priori ces auteurs pour les degrés de liberté principaux : à savoir une translation et une rotation autour du foyer avant.

La translation rentre comme cas particulier de la formule (3.11) avec la définition

$$\bar{h} \cdot A_{\infty}(b, e),$$

conduisant à isoler simplement le coefficient de  $a$  :

$$A_x(b, e) = 2\omega^2 [2E_4 - bE_3] - 2\omega [E_4 + 2bE_7] C(-i\omega). \quad (3.12)$$

En identifiant  $b$  à  $-\cos \varepsilon = e$ , c'est-à-dire en supposant l'absence de compensation aérodynamique, nous retrouvons, comme il fallait s'y attendre, deux relations avec des fonctions de KUESSNER :

$$\left. \begin{aligned} 2E_4 + \cos \varepsilon E_3 &= \frac{1}{2} \Phi_4; \\ E_4 - 2 \cos \varepsilon E_7 &= -\Phi_6. \end{aligned} \right\}$$

De même, dans le cas particulier d'une rotation autour du foyer avant ( $a = -1/2$ ) :

$$A_{-0.5}(b, e) = \omega (-E_1 + 2bE_2) + 2\omega^2 [-(E_4 + E_5) + \frac{1}{2}b(E_3 + 2E_4)] + 2(1 + \omega) C(E_6 + 2bE_7), \quad (3.13)$$

on trouve la relation

$$E_3 + 2E_4 = \frac{1}{2} \Phi_4$$

et, identifiant encore  $b$  à  $-\cos \varepsilon$ ,

$$\left. \begin{aligned} E_1 + 2 \cos \varepsilon E_2 &= \Phi_2; \\ 2(E_4 + E_5) + \cos \varepsilon (E_3 + 2E_4) &= \frac{1}{2} \Phi_7. \end{aligned} \right\}$$

### 3.3. Effet d'un mouvement $\alpha$ sur un degré de liberté $\alpha'$ .

Il suffit de faire dans (3.11)

$$b = a', \quad e = -1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 0$$

pour obtenir le moment aérodynamique dû au mouvement  $\alpha$  d'axe  $a$  sur un degré de liberté principal  $\alpha'$  d'axe  $a'$ .

Dans ce cas, observant que

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_6 = E_7 = \pi, \quad E_5 = \pi/8, \quad E_4 = 0,$$

$$A_x(a', -1) = \pi\omega(2a' - 1) - 2\pi\omega^2 \left( \frac{1}{8} + aa' \right) + \pi[2 + \omega(1 - 2a)](1 + 2a') C(-i\omega). \quad (3.14)$$

L'indépendance des effets du sillage, déjà reconnue antérieurement, pour le choix  $a' = 1/2$ , est clairement marquée. C'est la raison pour laquelle la rotation autour du foyer avant est généralement choisie comme degré de liberté principal. On remarquera que le choix  $a = + 1/2$  entraîne également des simplifications.

Quand le mouvement  $a$  est une translation ( $a \rightarrow \infty$ ), il suffit d'isoler le coefficient de  $a$  :

$$A_{\infty}(a', -1) = -2\pi\omega^2 a' - 2\pi\omega(1 + 2a') C(-i\omega). \quad (3.15)$$

Quand, au contraire, le mouvement  $a'$  est une translation ( $a' \rightarrow \infty$ ) :

$$A_a(\infty, -1) = 2\pi\omega - 2\pi\omega^2 a + 2\pi[1 + \omega(1 - 2a)] C(-i\omega). \quad (3.16)$$

Enfin, pour l'influence de la translation sur elle-même :

$$A_{\infty}(\infty, -1) = -2\pi\omega^2 - 4\pi\omega C(-i\omega). \quad (3.17)$$

#### 3.4. Distribution de la pression due au mouvement d'une gouverne.

L'idéalisation du mouvement d'une gouverne par la déformation du squelette soulève un point délicat en cas de compensation aérodynamique par recul de la charnière.

Si la fente qui apparaît par soulèvement du bord d'attaque n'est pas obturée, on peut idéaliser la situation par la figure 14 a. Dans ce cas les travaux de

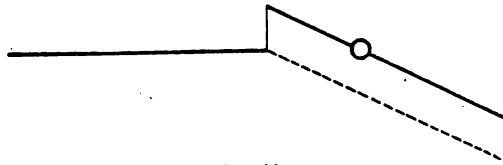


Fig. 14 a

KLEINWÄCHTER (21) et de SOEHNGEN (22) ont montré que la distribution quasi stationnaire de la pression s'établit comme si la gouverne était articulée au bord d'attaque. L'extension de cette propriété au problème instationnaire est une hypothèse qui a été utilisée par KUESSNER et SCHWARZ (20). Pour le cas d'une fente obturée, ces auteurs adoptent le modèle de la figure 14 b, dans lequel apparaît

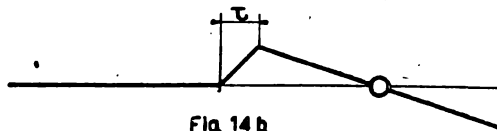


Fig 14 b

le paramètre supplémentaire  $\tau$ . Pour éviter que ce paramètre n'intervienne de façon trop compliquée et rende la construction de tables impraticable, les termes

sont pris à la limite  $\tau \rightarrow 0$ . Cependant, il est immédiatement apparent que pour  $\tau = 0$ , la portion verticale de liaison viole les hypothèses initiales qui permettent la linéarisation. Les termes qui pour cette raison deviendraient infinis sont seuls conservés avec la valeur réelle de  $\tau$ .

Les versions modernes de la compensation, par exemple la compensation interne esquissée à la figure 15 a, évitent la projection de la gouverne en avant

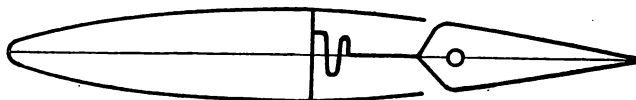


Fig. 15 a  
Gouverne avec compensation aérodynamique interne.

de la charnière. Une telle situation peut être schématisée par le squelette 15 b. La distribution de pression est alors celle provoquée par une gouverne non compensée articulée au même endroit, mais la partie débordant en avant de celle-ci

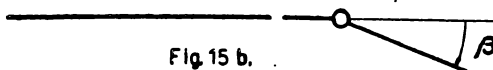


Fig. 15 b.

est retenue dans l'évaluation du moment de charnière. Ce point de vue a été retenu par DIETZE (19) et, suivant DÖRR (23), a donné lieu à une bonne concordance entre calculs et essais de maquettes en soufflerie. Il sera le seul retenu ici.

Avec les notations de la figure 13 on a pour le braquage de la gouverne :

$$h(\xi, t) = \begin{cases} 0 & \xi < b \\ \beta(b - \xi) & \xi > b \end{cases} \quad w(\xi, t) = \begin{cases} 0 & \xi < b \\ -\beta + \dot{\beta}(b - \xi) & \xi > b \end{cases}$$

Les intégrales (1.42) et (1.43) ne sont donc étendues qu'à l'intervalle angulaire  $\varphi \leq u \leq \pi$ . Il vient

$$\Gamma_1 = -2\beta\Phi_1(\varphi) - \dot{\beta}\Phi_2(\varphi), \quad (3.18)$$

où les fonctions suivantes ont été retenues avec la notation de KUESSNER :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi) &= \pi - \varphi + \sin \varphi; \\ \Phi_2(\varphi) &= (\pi - \varphi)(1 + 2 \cos \varphi) + \sin \varphi(2 + \cos \varphi). \end{aligned}$$

Avec l'hypothèse  $\beta = \bar{\beta} e^{\omega t}$  du mouvement harmonique, on trouve, par application de (2.23), la répartition

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p} / \bar{\beta} &= \frac{4}{\pi} \left[ \wedge(\varphi, \theta) + (\pi - \varphi) \cot \theta - \sin \varphi \operatorname{cosec} \theta \right] \\ &+ \frac{4}{\pi} \omega \left[ 2(\cos \varphi - \cos \theta) \wedge(\varphi, \theta) + \frac{\pi - \varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2 \sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
 & + (\pi - \varphi) \cot \theta (\cos \varphi - \cos \theta) + (\pi - \varphi) \sin \theta + \sin \varphi \cot \theta \Big] \\
 & + \frac{2}{\pi} \omega^2 \left[ (\cos \varphi - \cos \theta)^2 \wedge (\varphi, \theta) + \sin \varphi \sin \theta + (\pi - \varphi) \sin \theta (2 \cos \varphi - \cos \theta) \right] \\
 & + \frac{2}{\pi} \left[ 2 \Phi_1(\varphi) + \omega \Phi_2(\varphi) \right] \left[ -\cot \theta + \cot \frac{\theta}{2} C(-i\omega) \right].
 \end{aligned}$$

Dans cette expression la fonction

$$\wedge(\varphi, \theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(\varphi + \theta)}{1 - \cos(\varphi - \theta)}$$

est l'expression trigonométrique de la fonction introduite en (2.24). Les intégrales de cette fonction nécessaires à l'établissement de (3.19) sont rassemblées à l'annexe II.

### 3.5. Moments aérodynamiques dus au braquage de gouverne.

Le moment aérodynamique relatif à un mouvement principal

$$\bar{\beta} B_b(a, -1) = \int_0^\pi \overline{\Delta p} (a + \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

et celui relatif à une charnière de gouverne

$$\bar{\beta} B_b(b', c') = \int_{c'}^\pi \overline{\Delta p} (b' + \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

s'obtiennent en remplaçant  $\overline{\Delta p}$  par sa valeur (3.19). Les intégrations peuvent se faire par les formules rassemblées au 7° de l'annexe I. Les expressions compliquées ne sont pas reproduites ici.

CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION APPROCHÉE  
DES EFFETS DE SILLAGE PAR OPÉRATEURS  
DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES  
A COEFFICIENTS CONSTANTS.

4.1. Intégrales de sillage obtenues par dérivation.

La liaison fondamentale entre l'intensité héréditaire  $P(t)$  et la circulation quasi-permanente  $\Gamma_1(t)$  a été obtenue par l'intermédiaire de l'intensité tourbillonnaire du sillage, au moyen des intégrales

$$-\Gamma_1(t) = \int_1^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)} \varepsilon(\eta, t) d\eta; \quad (1.59)$$

$$P(t) = \int_1^{\infty} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\sqrt{\eta^2-1}} d\eta. \quad (1.63)$$

Si, au lieu de  $P(t)$ , nous préférons calculer la partie circulatoire de la portance totale, nous avons aussi

$$L_c(t) = -2(\Gamma_1 + P) = 2 \int_1^{\infty} \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (1.67)$$

Plusieurs combinaisons analogues peuvent ainsi être formées; une seule conduit à un noyau qui ne tend pas vers l'infini quand  $\eta \rightarrow 1$  et permet la dérivation suivant la méthode indiquée au paragraphe 1.9 : c'est

$$A_1(t) = L_c + \Gamma_1 = \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{1/2} \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (4.1)$$

Cette intégrale a même structure que celle exprimant la fonction connue

$$A_0(t) = -\Gamma_1 = \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{-1/2} \varepsilon(\eta, t) d\eta; \quad (4.2)$$

il n'y a qu'un changement d'une unité dans l'exposant.

Indiquons symboliquement par  $D$  l'opération de dérivation par rapport au temps et appliquons la formule (1.32) à l'intégrale (4.1), en remarquant que  $f(1) = 0$ . Il vient

$$DA_1 = \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{-1/2} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{(\eta+1)^2} d\eta. \quad (4.3)$$

Le noyau devient de nouveau infini à la limite inférieure, mais il est encore possible, en combinant (4.3), (4.2) et (4.1), de former de nouvelles intégrales ayant la propriété  $f(1) = 0$ .

Plus particulièrement nous formerons

$$A_2(t) = (4D + 2) A_1 - A_0 = \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{3/2} \varepsilon(\eta, t) d\eta, \quad (4.4)$$

de même structure que les précédentes.

On établit facilement la formule de récurrence

$$A_{n+1}(t) = \left(\frac{4}{2n-1} D + 2\right) A_n - A_{n-1} = \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}} \varepsilon(\eta, t) d\eta. \quad (4.5)$$

#### 4.2. Opérateurs différentiels osculateurs.

Reprenons la formule de récurrence sous la forme plus symétrique

$$A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1} = \frac{4}{2n-1} DA_n \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (4.6)$$

Il vient, en additionnant les  $q$  premières relations,

$$(A_0 - A_1) + (A_{q+1} - A_q) = 4D \left( A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \dots + \frac{1}{2q-1} A_q \right). \quad (4.7)$$

De (4.5) on déduit que

$$A_{q+1} - A_q = 2 \int_1^{\infty} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{q-\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\eta+1} d\eta. \quad (4.8)$$

D'autre part, il est évident que l'intégrale (1.59), étant nécessairement convergente de par l'existence de  $\Gamma_1$ , l'intégrale (4.8) est convergente, et, de plus,

$$A_{q+1} - A_q \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad q \rightarrow \infty.$$

De façon plus précise, si le sillage débute au temps  $t = 0$ , on a, à une époque  $\tau$  quelconque du mouvement,

$$A_{q+1} - A_q = 2 \int_1^{1+\tau} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{q-\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\eta+1} d\eta. \quad (4.8')$$

et cette intégrale tend uniformément vers zéro dans l'intervalle  $0 \leq t \leq \tau$ , en même temps que

$$\left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{q-\frac{1}{2}} \quad \text{dans l'intervalle} \quad 1 < \eta < 1 + \tau,$$

quand  $q \rightarrow \infty$ .

Une approximation à l'identité (4.7) est donc

$$A_0 - A_1 = 4D \left( A_1 + \frac{1}{3} A_2 + \dots + \frac{1}{2q-1} A_q \right). \quad (4.9)$$

Elle est d'autant meilleure que  $q$  est plus élevé.

Éliminant  $(A_q, A_{q-1}, \dots, A_2)$  au moyen des relations de récurrence, (4.9) devient une relation différentielle à coefficients constants entre  $A_0$  et  $A_1$ , ou, ce qui revient au même, entre  $\Gamma_1$  et  $L_c$ , ou encore, si l'on veut, entre  $\Gamma_1$  et  $P$ .

Comme (4.7) est une identité, on obtient le même résultat d'une façon plus simple en partant de l'équation

$$A_{q+1} - A_q = 0. \quad (4.10)$$

Remarquons encore que si dans (4.9) nous substituons aux  $A$  leurs expressions par des intégrales de sillage, nous sommes amenés à considérer cette équation comme résultant d'un développement en série tronqué d'un noyau :

$$2 \int_1^\infty \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon(\eta, t)}{\eta+1} d\eta = 4 \int_1^\infty \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{\eta-1}{\eta+1} + \dots + \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{q-1} \right] \frac{\varepsilon(\eta, t)}{(\eta+1)^2} d\eta.$$

En effet, la série géométrique

$$\frac{1}{1-u} = \sum_0^\infty u^n,$$

convergente pour  $|u| < 1$ , se transforme par la substitution

$$u = \frac{\eta-1}{\eta+1}$$

dans la série

$$1 + \eta = 2 \sum_0^\infty \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^n,$$

convergente pour  $\eta > 0$ .

Prenant successivement  $q = 1, 2, 3$  et  $4$ , les quatre premiers opérateurs osculateurs ont été calculés :

$$\begin{aligned}
 q = 1 & \quad (1 + 4D) L_c + (2 + 4D) \Gamma_1 = 0; \\
 q = 2 & \quad (3 + 20D + 16D^2) L_c + (6 + 24D + 16D^2) \Gamma_1 = 0; \\
 q = 3 & \quad \left\{ \begin{aligned} (15 + 136D + 208D^2 + 64D^3) L_c \\ + (30 + 180D + 224D^2 + 64D^3) \Gamma_1 = 0; \end{aligned} \right. \\
 q = 4 & \quad \left\{ \begin{aligned} (105 + 1192D + 2640D^2 + 1600D^3 + 256D^4) L_c \\ + (210 + 1680D + 3008D^2 + 1664D^3 + 256D^4) \Gamma_1 = 0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Écrivant l'opérateur sous la forme

$$(a_0 + a_1 D + \dots + a_q D^q) L_c + (b_0 + b_1 D + \dots + b_q D^q) \Gamma_1 = 0,$$

il est possible de montrer, au moyen des relations de récurrence, que  $a_1/a_0 \rightarrow \infty$  et  $b_1/b_0 \rightarrow \infty$  quand  $q \rightarrow \infty$ , ce qui entraîne l'absence de forme asymptotique pour ces opérateurs.

#### 4.3. Conditions aux limites.

L'utilisation d'un opérateur osculateur d'approximation ramène le problème de la connaissance de  $L_c$  à la résolution d'une équation différentielle à coefficients constants avec second membre. Les constantes arbitraires de la solution générale doivent être déterminées par le nombre requis de conditions aux limites.

Nous examinerons uniquement le cas du mouvement débutant à l'instant  $t = 0$ . Par conséquent,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1(t) &= 0 & t < 0; \\ \Gamma_1(t) &= -A_0(t) = -\int_0^{1+t} \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \epsilon(\eta, t) d\eta & t > 0. \end{aligned} \right\} (4.12)$$

Et nous ferons de plus l'hypothèse suivante, qui ne restreint en rien les applications pratiques :

$$\Gamma_1(+0) \text{ fini.}$$

Une telle discontinuité finie de  $\Gamma_1$  à l'instant initial requiert que l'intensité tourbillonnaire se comporte à l'origine du sillage suivant la loi

$$\epsilon(s) \sim -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2-s}{s}} \Gamma_1(0).$$

Tant que  $\epsilon(s)$  ne tend pas plus rapidement vers l'infini quand  $s \rightarrow 0$ , les intégrales

$$A_n(t) = \int_0^{1+t} \left(\frac{\eta-1}{\eta+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} \epsilon(\eta, t) d\eta \quad (n = 1, 2, \dots, q), \quad (4.13)$$



dont le noyau s'annule à la limite inférieure, tendent vers zéro avec l'intervalle d'intégration. Par conséquent,

$$A_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, q) \quad (4.14)$$

sont des conditions aux limites (initiales) cherchées.

Utilisant les relations de récurrence, on les ramène explicitement à la forme

$$\left. \begin{aligned} L_c(0) &= -\Gamma_1(0); \\ L'_c(0) &= -\Gamma'_1(0) - \frac{1}{4}\Gamma_1(0); \\ L''_c(0) &= -\Gamma''_1(0) - \frac{1}{4}\Gamma'_1(0) + \frac{1}{8}\Gamma_1(0); \\ L'''_c(0) &= -\Gamma'''_1(0) - \frac{1}{4}\Gamma''_1(0) + \frac{1}{8}\Gamma'_1(0) - \frac{7}{64}\Gamma_1(0). \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Le nombre de ces conditions initiales utilisé correspond naturellement au degré de l'opérateur.

La première condition est particulièrement intéressante. Elle montre que la portance ne prend à l'instant initial que la moitié de sa valeur quasi-permanente.

Il est par ailleurs évident qu'une discontinuité de la circulation  $\Gamma_1$  entraîne pour un fluide incompressible des effets d'inertie virtuelle infiniment grands. Il n'en est pas moins vrai que la réponse indicielle de la partie circulatoire de la portance, correspondant à la loi

$$\Gamma_1 = 0; \quad t < 0; \quad \Gamma_1 = 1; \quad t > 0,$$

joue un rôle important comme auxiliaire de calcul dans les méthodes opérationnelles (cfr. 4.7).

#### 4.4. Opérateurs différentiels de minimum.

Il suffit d'examiner (4.8') pour se rendre compte que l'approximation fournie par un opérateur osculateur sera surtout bonne pour les faibles valeurs du temps. En effet, la convergence du noyau vers zéro est d'autant plus forte que  $\eta$  dépasse peu l'unité. A cet égard la série tronquée au second membre de (4.9) se comporte d'une façon analogue à la série de TAYLOR; elle constitue une approximation osculatrice qui se détériore avec l'accroissement de la variable. Le test numérique d'application des opérateurs osculateurs à la réponse indicielle de WAGNER confirme pleinement ces prévisions. Il faudrait en général une valeur de  $q$  prohibitive pour obtenir un comportement asymptotique acceptable de l'approximation.

En dehors de la série de TAYLOR il existe des méthodes d'approximation des fonctions basées sur des développements en série dans lesquels on s'attache à

rendre minimum l'erreur quadratique moyenne. La moyenne peut être pondérée de diverses façons en vue d'avantager certaines zones de l'intervalle de variation. La série de TAYLOR peut même entrer comme cas particulier de ce procédé quand tout le poids est ramené à une extrémité de l'intervalle. L'extension de cette idée aux noyaux des intégrales de sillage conduit à la notion d'opérateurs différentiels de minimum.

La série (4.9) suggère l'essai d'une approximation de la forme

$$A_0 - A_1 = 4D [a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots],$$

dans laquelle les coefficients  $a_n$  sont à déterminer.

Revenant aux intégrales de sillage,

$$A_0 - A_1 - 4D [a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots] = 4 \int_1^\infty \sqrt{\frac{\eta+1}{\eta-1}} \left[ \frac{\eta+1}{2} - a_1 - 3a_2 \frac{\eta-1}{\eta+1} \dots \right] \frac{\epsilon d\eta}{(\eta+1)^2},$$

et les  $a_n$  doivent être déterminés de façon à rendre le second membre petit quel que soit le sillage.

Cherchons, dans ce but, à rendre le noyau minimum au sens des moindres carrés. Ceci exige

$$\int_1^\infty \frac{\eta+1}{\eta-1} \left[ \frac{\eta+1}{2} - a_1 - 3a_2 \frac{\eta-1}{\eta+1} \dots \right]^2 \frac{d\eta}{(\eta+1)^4} \quad \text{minimum.}$$

La convergence de l'intégrale à la limite inférieure exige immédiatement

$$a_1 = 1.$$

Dès lors, la condition devient

$$\int_1^\infty \frac{\eta-1}{(\eta+1)^2} \left[ \frac{1}{2} - 3a_2 \frac{1}{\eta+1} - 5a_3 \frac{\eta-1}{(\eta+1)^2} \dots \right]^2 d\eta \quad \text{minimum,}$$

et, après le changement de variable,

$$u = \frac{\eta-1}{\eta+1},$$

$$I = \int_0^1 u [1 - 3a_2(1-u) - 5a_3 u(1-u) \dots]^2 du \quad \text{minimum.} \quad (4.16)$$

Dérivant partiellement par rapport à chacune des constantes, les conditions de minimum apparaissent

$$\int_0^1 u^p (1-u)^p [1 - 3a_2(1-u) - 5a_3 u(1-u) \dots]^2 du = 0 \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (4.17)$$

Si les constantes  $a_n$  sont en nombre infini, la solution

$$a_1 = \frac{1}{3} \quad a_2 = \frac{1}{5} \quad \dots \quad a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \dots$$

est immédiatement apparente. Ce choix nous ramène donc aux opérateurs osculateurs, mais il ne satisfait pas aux conditions de minimum quand on se limite à  $q$  termes ( $p = 1, 2 \dots q - 1$ ). Dans ce cas, la résolution des équations de condition conduit, par exemple, aux valeurs suivantes :

$q =$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	I	I'
1	1	—	—	—	1/2	1/2
2	1	2/3	—	—	1/6	1/3
3	1	0	1	—	1/12	1/4
4	1	2/3	-7/5	2	1/20	1/5

Outre les valeurs des coefficients, on a porté dans les deux dernières colonnes les valeurs prises par l'erreur quadratique moyenne sur le noyau dans le cas où les conditions de minimum sont satisfaites (colonne I) et dans le cas du choix des opérateurs osculateurs (colonne I').

En fonction du nombre de constantes retenues on a

$$I = \frac{1}{q(q+1)},$$

tandis que  $I' = \frac{1}{q}$ . Cette remarque permet de mesurer l'avantage qu'on peut espérer retirer des opérateurs de minimum.

Les quatre premiers opérateurs de minimum, le premier étant identique au premier osculateur, sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 q = 1 & \quad (1 + 4D) L_c + (2 + 4D) \Gamma_1 = 0; \\
 q = 2 & \quad (3 + 28D + 32D^2) L_c + (6 + 36D + 32D^2) \Gamma_1 = 0; \\
 q = 3 & \quad \left\{ \begin{aligned} & (3 + 48D + 128D^2 + 64D^3) L_c \\ & + (6 + 72D + 144D^2 + 64D^3) \Gamma_1 = 0; \end{aligned} \right. \\
 q = 4 & \quad \left\{ \begin{aligned} & (15 + 368D + 1632D^2 + 1856D^3 + 512D^4) L_c \\ & + 2(15 + 300D + 1016D^2 + 992D^3 + 256D^4) \Gamma_1 = 0. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Leur utilisation peut être combinée avec les mêmes conditions initiales (4.14) ou (4.15) que celles prévues pour les opérateurs osculateurs.

4.5. Approximations à la fonction de THEODORSEN.

Un premier test fonctionnel des opérateurs différentiels découle d'un examen des valeurs numériques qu'ils fournissent pour la fonction de THEODORSEN.

Posant dans (4.12)

$$\Gamma_1 = \overline{\Gamma}_1 e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad L_c = \overline{L}_c e^{i\omega t}$$

et notant que, de par sa définition (1.15),

$$C(-i\omega) = \overline{L}_c / \overline{L}_1 = -\frac{1}{2} \overline{L}_c / \overline{\Gamma}_1,$$

il vient une approximation rationnelle à la fonction de THEODORSEN :

$$C_c(-i\omega) = \frac{1}{2} \frac{b_0 + \omega b_1 + \omega^2 b_2 + \dots + \omega^n b_n}{a_0 + \omega a_1 + \omega^2 a_2 + \dots + \omega^n a_n}. \quad (4.18)$$

C'est ainsi que l'approximation fournie par le premier opérateur osculateur et de minimum est

$$C_1(-i\omega) = \frac{1 + 2\omega}{1 + 4\omega}. \quad (4.19)$$

En cas de mouvement harmonique pur elle conduit à

$$F_1(k) = \frac{1 + 8k^2}{1 + 16k^2}; \quad G_1(k) = -\frac{2k}{1 + 16k^2}.$$

Des courbes correspondantes, tracées à la figure 16, il résulte que l'approximation est encore grossière, quoique l'allure générale soit bien observée. La même conclusion peut être tirée d'un examen comparatif de  $C(-i\mu)$  et  $C_1(-i\mu)$  (fig. 8) relatifs au mouvement purement exponentiel divergent.

La deuxième approximation fournie par les opérateurs de moyenne marque un progrès sensible :

$$C_2(-i\omega) = \frac{3 + 18\omega + 16\omega^2}{3 + 28\omega + 32\omega^2}, \quad (4.20)$$

comme on peut s'en rendre compte à l'examen des courbes

$$F_2(k) = \frac{9 + 360k^2 + 512k^4}{9 + 592k^2 + 1024k^4}; \quad G_2(k) = -\frac{30k + 128k^3}{9 + 592k^2 + 1024k^4},$$

également tracées à la figure 16.

Dans ce cas, la différence entre  $C_2(-i\mu)$  et  $C(-i\mu)$  n'excède pas 0.015 dans l'intervalle  $0 \leq \mu \leq 0.1$  et 0.008 au delà.

La comparaison numérique a encore été poursuivie pour les opérateurs de moyenne  $q = 3$  et  $q = 4$ .

$$C_3(-i\omega) = \frac{3 + 36\omega + 72\omega^2 + 32\omega^3}{3 + 48\omega + 128\omega^2 + 64\omega^3}; \quad (4.21)$$

$$C_4(-i\omega) = \frac{15 + 300\omega + 1016\omega^2 + 992\omega^3 + 256\omega^4}{15 + 368\omega + 1632\omega^2 + 1856\omega^3 + 512\omega^4}. \quad (4.22)$$

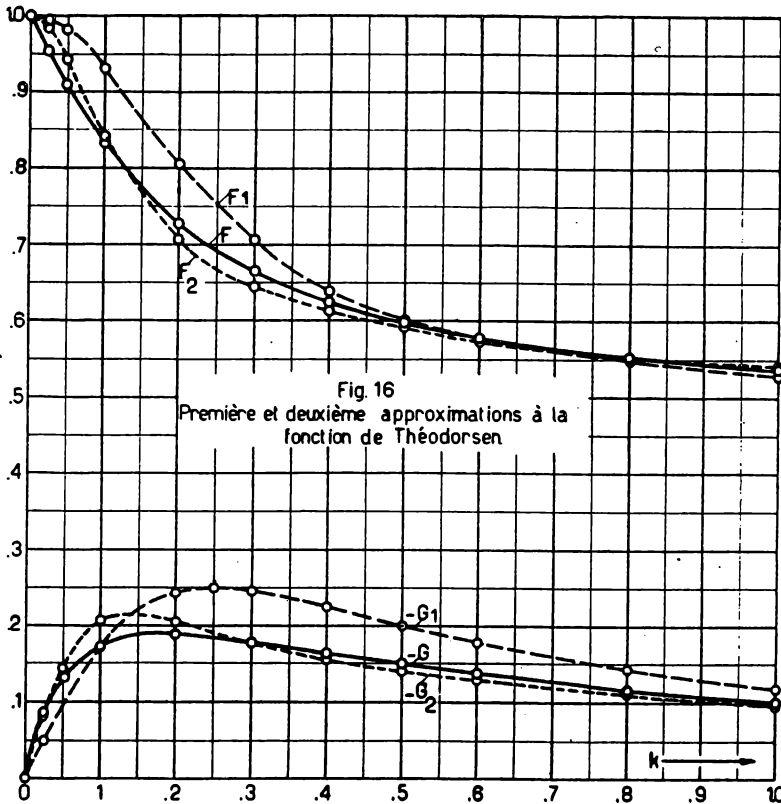


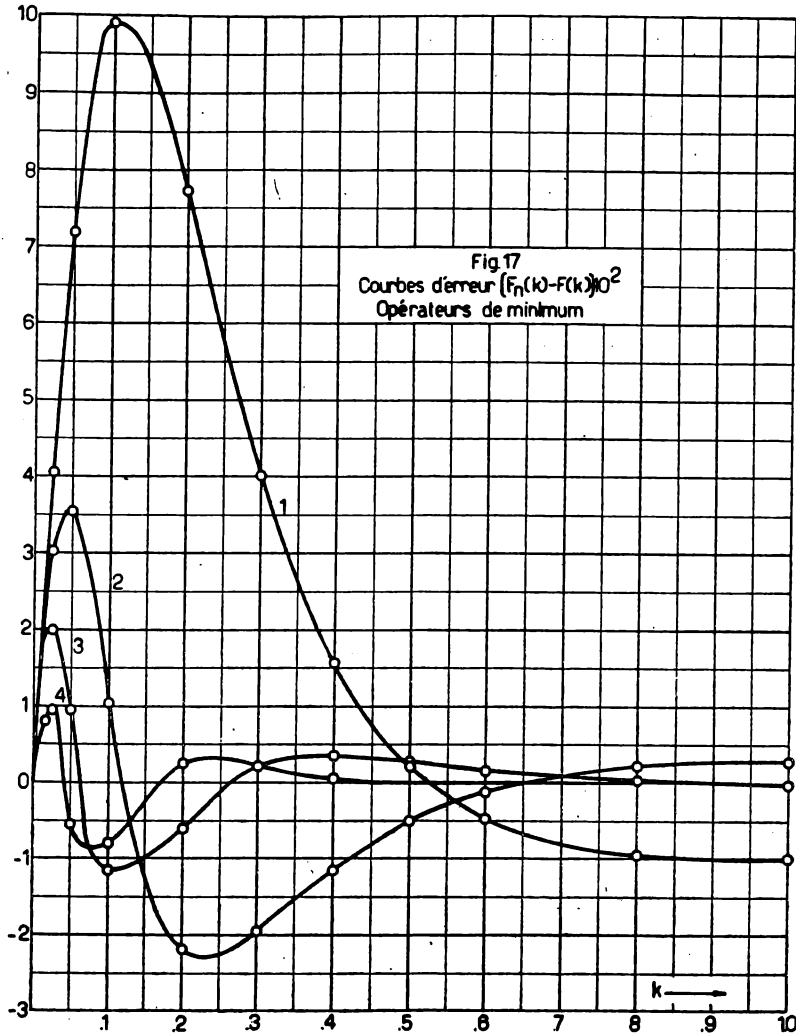
Fig. 16  
Première et deuxième approximations à la fonction de Théodorsen

Un résumé de la situation est fourni par les courbes d'erreur des figures 17, 18 et 19.

L'approximation, remarquablement bonne à haute fréquence, présente au voisinage de zéro des oscillations dont le nombre croît avec le degré de l'opérateur en même temps que l'amplitude décroît. Ce fait est en relation avec le point de branchement logarithmique que possède la fonction de THEODORSEN à l'origine. Le gain relatif présenté par le passage du troisième au quatrième opérateur est déjà faible et il semble douteux qu'il puisse être intéressant d'utiliser en pratique

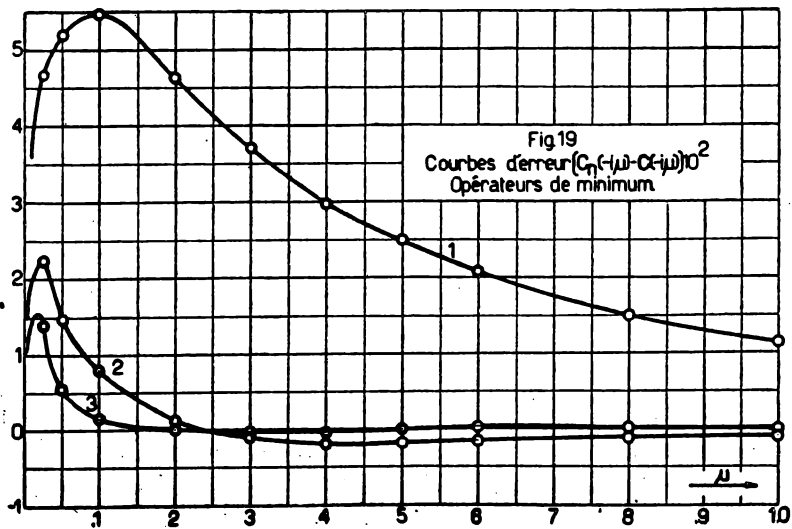
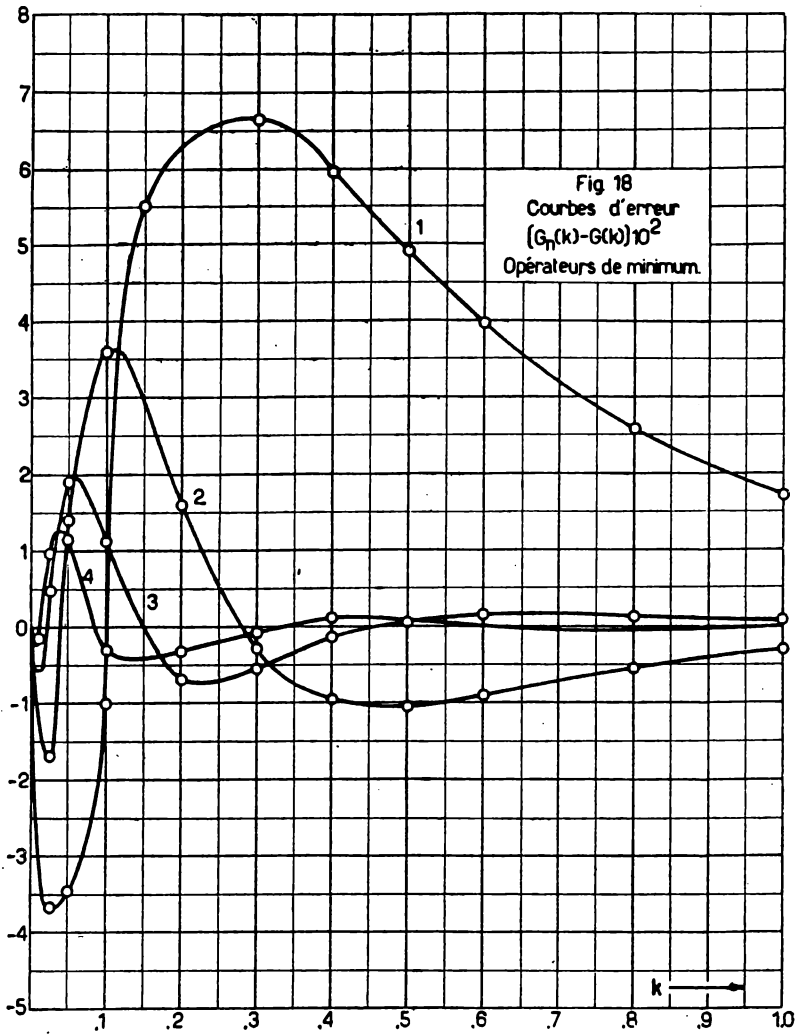
un degré supérieur au quatrième. Dans ce dernier cas, l'erreur commise sur la partie réelle ou imaginaire de la fonction de THEODORSEN est inférieure à 0.013 dans toute la bande des fréquences.

L'utilisation des expressions (4.19) à (4.21) permet évidemment un calcul



approché de  $C(-i\omega)$  pour toute valeur complexe de  $\omega$  dont la partie réelle  $\mu$  est plus grande que zéro.

Le caractère divergent de la solution de régime pur,  $\mu$  plus petit que zéro, apparaît dans le fait que les racines du dénominateur sont réelles et plus petites que zéro.



**4.6. Solutions opérationnelles approchées.**

Prenons la transformée de LAPLACE de (4.11) en multipliant par  $e^{-pt}$  et intégrant par rapport à  $t$  de zéro à l'infini.

Si

$$l(p) = \int_0^{\infty} L_c(t) e^{-pt} dt; \quad \gamma(p) = \int_0^{\infty} \Gamma_1(t) e^{-pt} dt \quad (4.23)$$

désignent les transformées de LAPLACE de la partie circulaire de la portance et de la circulation quasi-permanente, la relation (4.11) devient

$$(a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) l(p) + (b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n) \gamma(p) = 0. \quad (4.24)$$

Il faut pour cela montrer que les termes aux limites provenant des intégrations par partie se détruisent en vertu des conditions initiales (4.14) ou (4.15). La méthode la plus simple consiste à revenir aux relations de récurrence (4.6) et à en prendre la transformée de LAPLACE :

$$\alpha_{n+1}(p) - 2\alpha_n(p) + \alpha_{n-1}(p) = \frac{4}{2n-1} p \alpha_n(p) \quad (n = 1, 2, \dots, \infty),$$

le terme aux limites du second membre disparaissant précisément en vertu de (4.14). Ceci démontre qu'il suffit bien de remplacer  $D$  par  $p$  pour que (4.11) devienne la relation (4.24) entre les transformées de LAPLACE.

La solution de (4.24) est naturellement

$$l(p) = - \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \gamma(p) = - 2C_0(-ip) \gamma(p), \quad (4.25)$$

en accord avec la solution opérationnelle exacte de SEARS (9) :

$$l(p) = - 2C(-ip) \gamma(p). \quad (4.26)$$

Cette dernière se démontre en observant que (2.67), sous la forme obtenue par le changement de variable,

$$s = t + 1 - \eta,$$

et, supposant que le mouvement débute à l'instant  $t = 0$ ,

$$L_c = 2 \int_0^t \frac{t+1-s}{\sqrt{(t-s)(t+2-s)}} \varepsilon(s) ds \quad (1.67)$$

est le produit de composition (faltung) des fonctions

$$+ 2\varepsilon(t) \quad \text{et} \quad \frac{t+1}{\sqrt{t(t+2)}}.$$



Par conséquent, sa transformée de LAPLACE est le produit des transformées de LAPLACE (1) :

$$l(p) = + 2\Omega \left[ \varepsilon(t) \right] \cdot \Omega \left[ \frac{t+1}{\sqrt{t(t+2)}} \right].$$

De façon analogue pour (1.73),

$$\gamma(p) = - \Omega \left[ \varepsilon(t) \right] \cdot \Omega \left( \sqrt{\frac{t+2}{t}} \right).$$

Observant alors (2) que  $K_0(p)$  est la transformée de LAPLACE de la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} & t > 1, \end{cases}$$

il vient, en remplaçant  $t$  par  $t + 1$  (3),

$$e^p K_0(p) = \Omega \left[ \frac{1}{\sqrt{t(t+2)}} \right].$$

Puis, en dérivant cette transformée (4),

$$e^p \left[ K_0(p) + K_0'(p) \right] = e^p (K_0 - K_1) = \Omega \left[ \frac{-t}{\sqrt{t(t+2)}} \right],$$

dont il résulte que

$$\begin{aligned} l(p) &= 2\Omega(\varepsilon) e^p K_1(p); \\ \gamma(p) &= - \Omega(\varepsilon) e^p (K_0 + K_1), \end{aligned}$$

et, par élimination de la transformée du sillage,

$$l(p) = - 2 \frac{K_1(p)}{K_0(p) + K_1(p)} \gamma(p),$$

identique à (4.26), en vertu de (2.16).

Grâce à leur forme rationnelle en  $p$ , les approximations  $C_n$  à la fonction de THEODORSEN permettent un retour plus aisé à la fonction primitive  $L_c(t)$ . Dans ce but il est indiqué de les développer en série de fractions simples.

(1) CHURCHILL, *Modern operational Mathematics in Engineering*, p. 37.

(2) *Loc. cit.*, p. 301.

(3) *Loc. cit.*, p. 21.

(4) *Loc. cit.*, p. 29.

Avec la notation

$$C_q(-ip) = \frac{g_q(p)}{h_q(p)}; \quad m_r = g_r(p_r) / h'_r(p_r)$$

ce développement est de la forme

$$C_q(-ip) = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^q \frac{m_r}{p - p_r}$$

Les racines  $p_r$  ont été calculées pour les quatre premiers opérateurs de chaque espèce et livrent les développements que voici :

Opérateurs osculateurs :

$$C_1(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{1}{p + 0.25};$$

$$C_2(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{0.079837}{p + 0.1743} + \frac{0.045163}{p + 1.0757};$$

$$C_3(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{0.056131}{p + 0.13830} + \frac{0.065193}{p + 0.70378} + \frac{0.003677}{p + 2.40792};$$

$$C_4(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{0.041448}{p + 0.11569} + \frac{0.072825}{p + 0.53769} + \frac{0.010520}{p + 1.68612} + \frac{0.000207}{p + 3.91050}.$$

Opérateurs de minimum :

$$C_2(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{1}{20(p + 1/8)} + \frac{3}{40(p + 3/4)};$$

$$C_3(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{0.020949}{p + 0.07815} + \frac{0.086413}{p + 0.39209} + \frac{0.017636}{p + 1.52976};$$

$$C_4(-ip) = \frac{1}{2} + \frac{0.009356}{p + 0.052092} + \frac{0.072202}{p + 0.264495} + \frac{0.040251}{p + 0.873131} + \frac{0.003191}{p + 2.435281}.$$

#### 4.7. La fonction $k_1(t)$ de WAGNER.

Le calcul de la fonction  $k_1(t)$  de WAGNER constitue une application directe importante des formules opérationnelles approchées développées au paragraphe précédent.

Si le mouvement du profil est tel que la circulation quasi-permanente suit la loi

$$\Gamma_1(t) = H(t),$$

où

$$H(t) = 0 \quad t < 0, \quad H(t) = 1 \quad t > 0$$

désignent la fonction perturbation-unité de HEAVISIDE (par exemple application brusque d'un angle d'incidence général au profil, à une gouverne, ou d'une vitesse

de translation verticale d'ensemble), nous pouvons convenir d'appeler « réponse indicielle » la loi conséquente de variation de la partie circulatoire de la portance.

D'après (1.65) nous obtenons pour partie quasi-permanente :

$$L_1 = -2H(t).$$

Tout comme la fonction de THEODORSEN est le quotient de la partie circulatoire de la portance à sa partie quasi-permanente en régime harmonique, la fonction  $k_1(t)$  de WAGNER est le quotient de la réponse indicielle à sa partie quasi-permanente. Elle correspond donc à une variation

$$\Gamma_1(t) = -\frac{1}{2} H(t)$$

de la circulation quasi-permanente.

La transformée de LAPLACE de cette dernière est

$$\gamma(p) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}[H(t)] = -\frac{1}{2p}.$$

Par (4.26) nous trouvons alors la transformée de LAPLACE de la fonction de WAGNER :

$$\mathcal{L}[k_1(t)] = \frac{1}{p} C(-ip).$$

Prenant pour la fonction de THEODORSEN une des approximations livrées par les opérateurs osculateurs ou de minimum, cette transformée se laisse développer en fractions simples :

$$\mathcal{L}\{k_1(t)\} = \frac{1}{p} + \sum_{r=1}^q \frac{m_r}{p_r} \frac{1}{p - p_r},$$

permettant un retour élémentaire à la fonction primitive

$$k_1(t) = 1 + \sum_{r=1}^q \frac{m_r}{p_r} e^{p_r t} \quad t > 0. \quad (4.27)$$

Ainsi les opérateurs différentiels fournissent-ils de façon rationnelle des approximations exponentielles à la fonction de WAGNER, dont un grand nombre ont été proposées dans la littérature sur la base d'ajustements numériques aux valeurs calculées par WAGNER et par KUESSNER et SCHWARZ.

Les approximations fournies par les opérateurs osculateurs sont :

$$(k_1)_1 = 1 - 0.5 e^{-0.25t};$$

$$(k_1)_2 = 1 - 0.458 e^{-0.1743t} - 0.042 e^{-1.0257t};$$

$$(k_1)_3 = 1 - 0.40585 e^{-0.12530t} - 0.09262 e^{-0.70375t} + 0.00153 e^{-2.40792t};$$

$$(k_1)_4 = 1 - 0.35827 e^{-0.12500t} - 0.13544 e^{-0.53769t} - 0.00624 e^{-1.86612t} + 0.00005 e^{-3.91020t}.$$

Celles fournies par les opérateurs de minimum :

$$(k_1)_2 = 1 - 0.4 e^{-0.125t} - 0.1 e^{-0.75t};$$

$$(k_1)_3 = 1 - 0.26807 e^{-0.074653t} - 0.22040 e^{-0.39209t} - 0.01153 e^{-1.52776t};$$

$$(k_1)_4 = 1 - 0.17961 e^{-0.05202249t} - 0.27298 e^{-0.26445467t} - 0.04610 e^{-0.87313131t} - 0.00131 e^{-2.43528143t}.$$

En accord avec la première condition initiale (4.15), la portance initiale est exactement la moitié de sa valeur quasi-permanente, cette dernière n'étant atteinte qu'asymptotiquement.

Le tableau II résume la comparaison numérique avec les valeurs calculées de façon très précise par SCHWARZ (cfr. § 5.1).

Le caractère oscilateur est nettement marqué par une fidélité remarquable aux faibles valeurs du temps et un écart systématique par excès qui, même pour l'opérateur de troisième approximation, devient déjà sensible à partir de  $t = 4$ .

Par contre, les opérateurs de minimum fournissent des approximations oscillantes. La deuxième est déjà fidèle jusqu'à  $t = 10$ , où l'écart atteint 0.01. La quatrième ne présente pas d'écart supérieur à 0.0015 dans l'intervalle  $0 < t < 20$ . Au delà, l'erreur maxima d'environ 0.013 se présente aux environs de  $t = 50$ . Elle présente donc un intérêt certain pour des applications numériques.

Parmi les approximations empiriques utilisables dans tout l'intervalle, signalons celle de R. T. JONES (24) :

$$k_1(t) \sim 1 - 0.165 e^{-0.0455t} - 0.335 e^{-0.3t},$$

qui se rapproche dans les deux premiers termes exponentiels de la quatrième de minimum.

#### 4.8. Effets aéroélastiques.

Une classe de problèmes où la méthode des opérateurs différentiels d'approximation peut conduire à de grandes simplifications de calcul est celle de l'aéroélasticité. Un exemple très simple illustre bien les caractéristiques principales de ces problèmes. Il s'agit de l'étude des oscillations de translation d'un profil avec rappel élastique, dans un courant de vitesse  $U$ . L'équation du mouvement du profil est

$$\ddot{h} = -\frac{k}{m} \left(\frac{c}{2U}\right)^2 \dot{h} + \frac{\rho bc^2}{8m} L \ddot{h}$$

où  $h$  est l'élongation non-dimensionnelle,

$k$  le module de rappel du ressort,

$m$  la masse totale du profil,

$b$  l'envergure considérée.

La dérivée est prise par rapport au temps non-dimensionnel et  $L$  désigne comme d'habitude la portance non-dimensionnelle.

L'application des formules du chapitre I permet facilement d'établir les relations suivantes :

$$\Gamma_1 = 2\pi \dot{h}; \quad L_0 = -2\pi \ddot{h}. \quad (4.28)$$

Substituant dans l'équation du mouvement

$$L = -2\pi \ddot{h} + L_c,$$

celle-ci peut être mise sous la forme

$$\ddot{h} + \omega_0^2 h = \frac{1}{2\pi\lambda} L_c, \quad (4.29)$$

où

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \left( \frac{c}{2U} \right)^2 \left( 1 + \frac{\pi\rho bc^2}{4m} \right)^{-1};$$

$$\lambda = \left( 1 + \frac{4m}{\pi\rho bc^2} \right).$$

Ce dernier paramètre représente l'influence du rapport de la masse du profil à la masse du cylindre de fluide circonscrit;  $\omega_0$  est la fréquence circulaire propre de vibration, non pas *in vacuo*, mais dans les conditions physiques d'un essai normal, c'est-à-dire sans vitesse de translation par rapport au fluide environnant. Comme elle est exprimée au moyen de l'unité naturelle de temps, elle dépend cependant de la vitesse de translation  $U$  qui intervient dans le problème.

Il faut adjoindre à (4.29) les équations liant la partie circulaire de la portance à la circulation quasi-permanente (1.59) et (1.67), c'est-à-dire en définitive à la vitesse d'élongation (4.28). La solution exacte n'est guère possible qu'en éliminant le sillage par intégration numérique pas à pas ou en évaluant pas à pas un produit de composition entre  $\Gamma_1$  et la fonction  $k_1(t)$  de WAGNER.

L'emploi des opérateurs différentiels d'approximation conduit au contraire à un problème élémentaire. Il suffit pour le montrer d'utiliser le premier opérateur d'approximation, qui, eu égard à (4.28), fournit la relation

$$L_c + 4\dot{L}_c + 2\pi(2\dot{h} + 4\ddot{h}) = 0. \quad (4.30)$$

Eliminant  $L_c$  entre (4.29) et (4.30),

$$4\lambda \ddot{h} + (4 + \lambda) \dot{h} + (2 + 4\omega_0^2\lambda) h + \lambda\omega_0^2 h = 0. \quad (4.31)$$

Cette équation différentielle à coefficients constants est associée aux conditions initiales

1°

$$h(0) = A; \quad \dot{h}(0) = B,$$

qu'on est libre de s'imposer comme dans le problème des vibrations *in vacuo* :

$$2^{\circ} \quad L_c(0) = -\Gamma_1(0) \quad [\text{cfr. (4.15)}],$$

imposée par l'utilisation du premier opérateur.

Eu égard à (4.28) et (4.29), cette dernière condition est plus explicitement

$$\lambda \left[ \ddot{h}(0) + \omega_0^2 h(0) \right] + \dot{h}(0) = 0. \quad (4.32)$$

A titre d'exemple numérique on a pris

$$\begin{aligned} 2\pi\lambda &= 25 & \omega_0^2 &= 1; \\ h(0) &= 1 & \dot{h}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

dont il résulte, par la condition (4.32),

$$\ddot{h}(0) = -1.$$

La solution trouvée :

$$h(t) = 0.060 e^{-0.222t} + e^{-0.133t} \left[ 0.940 \cos(1.022)t + 0.136 \sin(1.022)t \right],$$

est représentée graphiquement à la figure 20 dans l'intervalle

$$0 < t < 10.$$

Il est intéressant de comparer l'amortissement des oscillations à celui qui résulterait de l'emploi des forces aérodynamiques quasi-stationnaires. Dans ce cas,

$$L_c = -2\Gamma_1 = -4\pi\dot{h}$$

et l'équation différentielle résultante :

$$\lambda(\ddot{h} + \omega_0^2 h) + 2\dot{h} = 0,$$

associée aux mêmes conditions initiales (4.33), a pour solution :

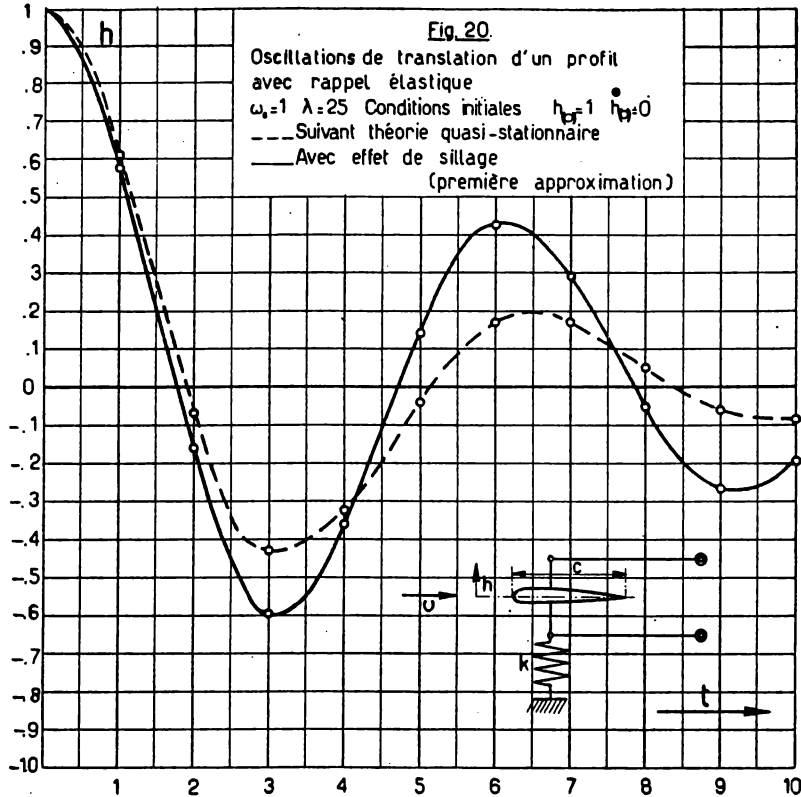
$$h = e^{-0.222t} \left[ \cos(0.968)t + 0.260 \sin(0.968)t \right].$$

Elle figure en traits interrompus.

Quand on tient compte du sillage il y a évidemment une réduction marquée de l'amortissement. Elle s'accompagne d'une augmentation de la fréquence des oscillations. L'emploi d'un opérateur de degré plus élevé en vue de tenir un compte plus exact de l'effet de sillage a pour effet d'augmenter l'ordre de l'équa-

tion différentielle et le nombre correspondant de conditions initiales. La principale difficulté d'ordre pratique qui en résulte est l'extraction des racines (complexes) d'une équation algébrique de degré plus élevé.

L'examen des racines décide évidemment de la stabilité du mouvement. Le problème du « flutter » consiste à déterminer les plages de vitesse  $U$  pour les-



quelles une racine au moins possède une partie réelle positive entraînant des amplitudes croissantes d'oscillation.

Cette détermination peut être menée de façon exacte au moyen de la fonction de THEODORSEN. Les racines sont alors celles d'une équation transcendante. La méthode des opérateurs différentiels ramène cette détermination par approximation à la recherche des racines d'une équation algébrique.

CHAPITRE V.

MÉTHODES OPÉRATIONNELLES.

5.1. Intégrale de FOURIER.

Si  $\Gamma_1(t)$  possède un spectre de FOURIER

$$S(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1(t) e^{-ikt} dt, \quad (5.1)$$

le théorème de l'intégrale de FOURIER permet de retrouver la fonction par

$$\Gamma_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k) e^{ikt} dk. \quad (5.2)$$

Comme toute composante périodique élémentaire de  $\Gamma_1(t)$ ,

$$d\Gamma_1 = S(k) e^{ikt} dk,$$

est associée à une portance circulatoire élémentaire

$$dL_c = -2 C(k) d\Gamma_1,$$

où  $C(k)$  est la fonction de THEODORSEN en régime harmonique pur, la portance circulatoire peut être déduite du spectre de  $\Gamma_1$  par la relation

$$L_c(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(k) C(k) e^{ikt} dk. \quad (5.3)$$

5.2. Relations opérationnelles entre la fonction de THEODORSEN et la fonction de WAGNER.

Le calcul des résidus permet d'établir que la fonction perturbation-unité de HEAVISIDE peut être représentée par l'intégrale

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{zt} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

étendue à tout l'axe réel du plan  $z$ , le pôle simple à l'origine étant contourné par en dessous.



Si nous considérons cette représentation comme une représentation de FOURIER dans un sens légèrement étendu, nous pouvons, comparant (5.4) à (5.2), parler du spectre

$$S(k) = 1/(ik) \quad (k \text{ partie réelle de } z, \text{ fig. 21})$$

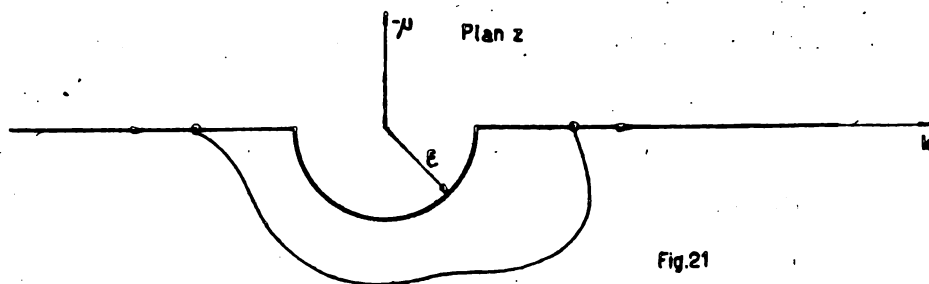
de la fonction de HEAVISIDE.

Dans le problème de WAGNER, la circulation quasi-permanente suit la loi (cfr. § 4.7)

$$\Gamma_1(t) = -\frac{1}{2} H(t), \text{ de spectre } -\frac{1}{2ik}$$

Il résulte alors de (5.3) la représentation suivante de la fonction de WAGNER :

$$k_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} C(z) e^{izt} \frac{dz}{z} \quad (5.5)$$



Pour les valeurs négatives du temps nous avons simultanément

$$k_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \frac{dz}{z} = 0 \quad t < 0.$$

Par conséquent également,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [C(z) - 1] e^{izt} \frac{dz}{z} = 0 \quad t < 0.$$

Sous cette forme la contribution de la demi-circonférence tend vers zéro quand le rayon  $\epsilon$  tend vers zéro (fig. 21).

Il subsiste un infini logarithmique à l'origine qui est un point de branchement. Pour obtenir la détermination correcte de la fonction sur les portions positive et négative de l'axe réel, il est important de souligner que le passage d'une valeur à l'autre doit se faire par un chemin tracé dans le demi-plan inférieur.

Moyennant cette précaution on peut écrire, au sens de valeur principale de CAUCHY,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ C(k) - 1 \right] e^{ikt} \frac{dk}{k} = 0 \quad t < 0. \quad (5.6)$$

De plus, les déterminations correctes entraînent l'existence de la propriété de symétrie

$$C(-k) = F(k) - iG(k).$$

Faisant usage de celle-ci, (5.6) devient

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{F(k) - 1}{k} \sin kt + \frac{G(k)}{k} \cos kt \right) dk = 0 \quad t < 0,$$

et, changeant le signe de  $t$ , une propriété utile pour les valeurs positives du temps :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(k) - 1}{k} \sin kt \, dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{k} \cos kt \, dk \quad t > 0. \quad (5.7)$$

Traisons maintenant (5.5) pour les valeurs positives du temps en la combinant de nouveau avec (5.4) :

$$k_1(t) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ C(k) - 1 \right] e^{ikt} \frac{dk}{k} \quad t > 0. \quad (5.8)$$

Par les mêmes considérations de symétrie, il vient

$$k_1(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{F - 1}{k} \sin kt + \frac{G}{k} \cos kt \right) dk. \quad t > 0.$$

Enfin, tenant compte de (5.7) :

$$k_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{k} \cos kt \, dk = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(k) - 1}{k} \sin kt \, dk \quad t > 0. \quad (5.9)$$

Ces résultats sont dus à GARRICK (25); ils expriment chacun la fonction de WAGNER au moyen d'une intégrale réelle portant soit sur la partie réelle, soit sur la partie imaginaire de la fonction de THEODORSEN.

Les relations inverses

$$\frac{G(k)}{k} = \int_0^{\infty} \left[ k_1(t) - 1 \right] \cos kt \, dt; \quad \frac{F(k) - 1}{k} = \int_0^{\infty} \left[ k_1(t) - 1 \right] \sin kt \, dt \quad (5.10)$$

existent en vertu de la théorie des transformées de FOURIER des types cosinus et sinus.

Par ailleurs, (5.6) et (5.8) montrent l'existence d'un spectre au sens propre pour la fonction

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0; \\ k_1(t) - 1 & \text{pour } t > 0; \end{cases} \quad (5.11)$$

d'où

$$\frac{C(k) - 1}{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-ikt} dt = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-ikt} dt, \quad (5.12)$$

dont découlent encore immédiatement (5.10) par séparation des parties réelle et imaginaire.

L'utilisation de (5.9) pour le calcul numérique effectif de la fonction de WAGNER serait possible grâce à la technique proposée par FILON (26). Cependant, il existe une transformation du chemin d'intégration utilisée par SEARS (9) et SCHWARZ (8) qui fournit une représentation beaucoup plus intéressante à cet égard.

Tandis que (5.12) a été obtenue mathématiquement par inversion d'une intégrale de FOURIER (5.5) suggérée par un raisonnement physique, inversement (5.12) peut constituer le support physique restituant (5.8) et (5.5).

Il suffit pour cela d'observer que si

$$\Gamma_1 = H(t),$$

nous avons, par définition de la fonction de WAGNER,

$$L_c(t) = -2k_1(t)$$

et (§ 1.13)

$$P(t) = -\frac{1}{2}L_c - \Gamma_1 = k_1(t) - H(t) = f_1(t),$$

la fonction  $f_1(t)$  étant définie comme plus haut.

Si maintenant  $\Gamma_1$ , nul pour les valeurs négatives du temps, suit une loi continue quelconque pour  $t > 0$ , tout accroissement élémentaire  $d\Gamma_1$  à l'instant  $t = s$  donne lieu à un élément d'intensité

$$dP = f(t - s) d\Gamma_1;$$

par superposition :

$$P(t) = f_1(t) \Gamma_1(0) + \int_0^t f_1(t - s) \frac{d\Gamma_1}{ds} ds. \quad (5.13)$$

De façon similaire on aurait

$$L_c(t) = -2k_1(t) \Gamma_1(0) - 2 \int_0^t k_1(t - s) \frac{d\Gamma_1}{ds} ds. \quad (5.14)$$

Observons, en passant, que ces intégrales de DUHAMEL fournissent souvent un moyen commode pour le calcul numérique de l'effet du sillage.

Appliquons (5.13) à la loi de variation :

$$\Gamma_1 = 0 \quad t < 0; \quad \Gamma_1 = \bar{\Gamma}_1 e^{kt} \quad t > 0.$$

Il vient

$$P(t) = f_1(t) \bar{\Gamma}_1 + ik \bar{\Gamma}_1 \int_0^t f_1(t-s) e^{ks} ds.$$

Changeant de variable par  $u = t - s$ ,

$$P(t) = f_1(t) \bar{\Gamma}_1 + ik \bar{\Gamma}_1 e^{kt} \int_0^t f_1(u) e^{-ku} du.$$

Quand on laisse tendre  $t$  vers l'infini,  $f_1(t) \rightarrow 0$ , et l'on trouve pour solution de régime

$$P(t) = ik \bar{\Gamma}_1 e^{kt} \int_0^\infty f_1(u) e^{-ku} du = \bar{P} e^{kt}. \quad (5.15)$$

Enfin, par définition de la fonction de THEODORSEN,

$$[C(k) - 1] = \bar{P} / \bar{\Gamma}_1,$$

et (5.15) est alors reconnue équivalente à (5.12).

### 5.3. Transformation du chemin d'intégration.

Partant de (5.5) et revenant au plan complexe plus familier (<sup>1</sup>),

$$\omega = iz = \mu + ik;$$

$$k_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C (-i\omega) e^{k_1 \omega} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5.16)$$

Le chemin d'intégration a tourné de 90 degrés et suit maintenant l'axe imaginaire en contournant la singularité par la droite.

Dans la technique de la transformée de LAPLACE, (5.16) n'est évidemment autre que l'intégrale de BROMWICH permettant d'inverser la relation opérationnelle (4.27).

(<sup>1</sup>) SCHWARZ utilise au contraire le plan  $z$ . A quelques autres détails près nous suivons son raisonnement.

De façon analogue, (5.4) devient

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{s t} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (5.17)$$

inversant la relation

$$\mathfrak{L}[H(t)] = 1/p.$$

Combinant (5.16) et (5.17),

$$k_1 - \frac{1}{2} H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ C(-i\omega) - \frac{1}{2} \right] e^{s t} \frac{d\omega}{\omega}; \quad (5.18)$$

une transformation destinée à modifier le comportement asymptotique de la fonction intégrée.

Considérons maintenant les chemins d'intégration de la figure 22.

Si dans chacun des secteurs hachurés la fonction  $C(-i\omega)$  qui y est uniforme est aussi dépourvue de pôles, on peut écrire par le théorème de CAUCHY :

$$j_1 = j_4 + j_5 + j_6; \quad j_3 = j_7 + j_8 + j_9,$$

$j_i$  désignant l'intégrale au second membre de (5.18) étendue au chemin correspondant à l'indice.

Il en résulte

$$j_1 + j_2 + j_3 = (j_4 + j_5) + (j_6 + j_2 + j_7) + (j_8 + j_9). \quad (5.19)$$

Quand on fait tendre  $R$  vers l'infini, le premier membre tend vers la fonction définie par (5.18).

Au second membre  $j_4$  et  $j_9$  tendent alors vers zéro si  $t > 0$ . En effet, il résulte des expressions asymptotiques de  $K_0(\omega)$  et  $K_1(\omega)$  (§ 2.5), valables dans le secteur

$$-3 \frac{\pi}{2} < \arg \omega < +3 \frac{\pi}{2},$$

qui recouvre complètement les secteurs de  $j_4$  et de  $j_9$ , que

$$\left| C(-i\omega) - \frac{1}{2} \right| < \frac{A}{|\omega|} \quad \text{pour} \quad |\omega| > R.$$

De plus, le long de 4 et de 9,

$$|e^{s t}| \leq 1 \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Il en résulte, par exemple, pour le module des intégrales :

$$|j_5|, |j_6| < \frac{1}{2\pi} \frac{A \pi}{R^4},$$

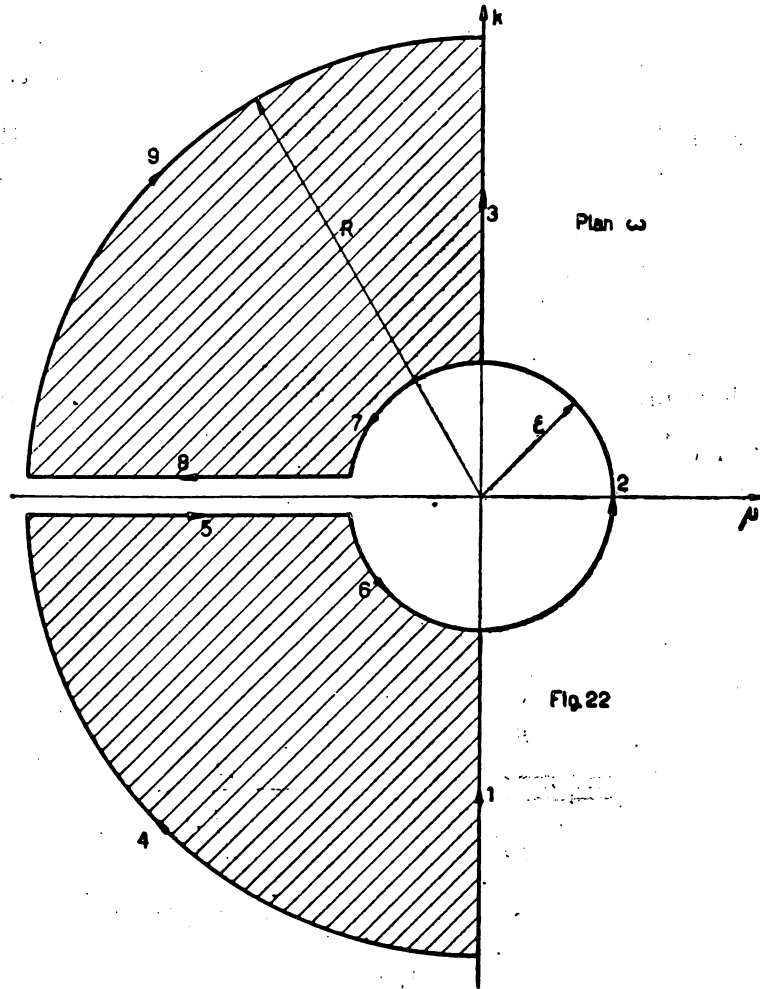
ce qui tend bien vers zéro avec  $R \rightarrow \infty$ .

Faisons maintenant tendre  $\varepsilon$  vers zéro. Dans ce cas,

$$(j_6 + j_7 + j_8) \rightarrow \frac{1}{2},$$

car, suivant (2.22), on a au voisinage de l'origine

$$C(-i\omega) - \frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} + \omega \log \frac{\omega}{2} + \dots$$



Le premier terme du second membre fournit la contribution

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{c.c.}} \frac{1}{2} e^{m\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2},$$

indépendante de  $\varepsilon$ .

Il suffit de montrer que la contribution du terme suivant disparaît avec  $\varepsilon$ .  
Sur la circonférence,

$$\omega = \varepsilon e^{i\theta}; \quad |e^{i\theta}| < e^{i\theta} \quad t > 0$$

et

$$\left| \log \frac{\omega}{2} \right| < \sqrt{\left( \log \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \pi^2};$$

le module de la contribution est inférieur ou égal à

$$e^{t\varepsilon} \varepsilon \sqrt{\left( \log \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \pi^2} \begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0. \end{matrix}$$

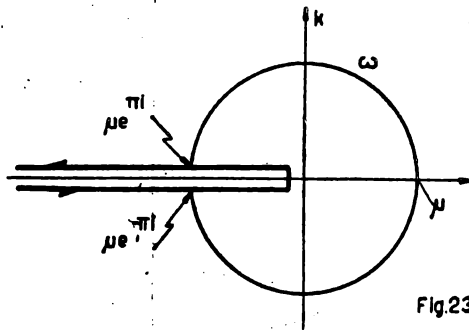
Le passage aux limites  $R \rightarrow \infty$  et  $\varepsilon \rightarrow 0$  transforme donc (5.19) en

$$k_1 = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ C(-i\omega) - \frac{1}{2} \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega} \quad t > 0. \quad (5.20)$$

L'intégrale est étendue aux deux lèvres de la coupure pratiquée le long de l'axe réel négatif (fig. 23).

En vertu de la propriété de symétrie de la fonction de THEODORSEN on a pour les points qui se font face sur les deux branches :

$$\begin{cases} F(\mu e^{\pi i}) = F(\mu e^{-\pi i}); \\ G(\mu e^{\pi i}) = -G(\mu e^{-\pi i}). \end{cases}$$



Posant alors  $\omega = \mu e^{-\pi i}$  pour la branche inférieure et

$\omega = \mu e^{+\pi i}$  pour la branche supérieure,

(5.20) devient

$$k_1(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\mu e^{\pi i}) e^{-\mu t} \frac{d\mu}{\mu} = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\mu e^{-\pi i}) e^{-\mu t} \frac{d\mu}{\mu} \quad t > 0. \quad (5.21)$$

Le calcul de la partie imaginaire de la fonction de THEODORSEN le long d'une branche de l'axe réel négatif peut se faire au moyen des formules suivantes déduites de la théorie des fonctions de BESSEL :

$$\left. \begin{aligned} K_0(\omega e^{+\pi i}) &= K_0(\omega) - \pi i J_0(i\omega); \\ K_0(\omega e^{-\pi i}) &= K_0(\omega) + \pi i J_0(i\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Les formules correspondantes nécessaires pour étudier le comportement de  $K_1$  peuvent être obtenues en dérivant les précédentes par rapport à  $\omega$ . Ce sont :

$$\left. \begin{aligned} K_1(\omega e^{+\pi i}) &= -K_1(\omega) - \pi J_1(i\omega); \\ K_1(\omega e^{-\pi i}) &= -K_1(\omega) + \pi J_1(i\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Quand, dans ces formules,  $\omega = \mu$  réel et positif, les seconds membres font immédiatement ressortir la séparation en partie réelle et imaginaire, car  $K_1(\mu)$ ,  $K_0(\mu)$  et  $J_0(i\mu)$  sont alors réels,  $J_1(i\mu)$  purement imaginaire. De plus, le caractère complexe conjugué est apparent quand on passe d'une branche à l'autre.

Il en résulte pour la fonction de THEODORSEN le long de la branche supérieure :

$$C(-i\mu e^{\pi i}) = \frac{K_1(\mu e^{\pi i})}{K_0(\mu e^{\pi i}) + K_1(\mu e^{\pi i})} = \frac{K_1(\mu) + \pi J_1(i\mu)}{K_1(\mu) - K_0(\mu) + \pi [J_1(i\mu) + i J_0(i\mu)]}.$$

Séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$F(\mu e^{\pi i}) = \frac{K_1(\mu) [K_1(\mu) - K_0(\mu)] - i \pi^2 J_1(i\mu) [J_0(i\mu) - i J_1(i\mu)]}{D(\mu)}; \quad (5.24)$$

$$G(\mu e^{\pi i}) = -\pi \frac{J_0(i\mu) K_1(\mu) - i J_1(i\mu) K_0(\mu)}{D(\mu)},$$

où le dénominateur

$$D(\mu) = [K_1(\mu) - K_0(\mu)]^2 + \pi^2 [J_0(i\mu) - i J_1(i\mu)]^2. \quad (5.25)$$

Par la relation (2.14) de WRONSKI, la partie imaginaire prend encore une forme plus simple :

$$G(\mu e^{\pi i}) = -\frac{\pi}{\mu D(\mu)}. \quad (5.26)$$

SCHWARZ a introduit la fonction

$$U(\mu) = -\frac{G(\mu e^{\pi i})}{\pi \mu} = \frac{1}{\mu^2 D(\mu)}, \quad (5.27)$$

de sorte que la représentation (5.21) devient

$$k_1(t) = 1 - \int_0^\infty U(\mu) e^{-\mu t} d\mu. \quad t > 0 \quad (5.28)$$



L'allure de la fonction  $U(\mu)$  et le facteur exponentiel assurent de bonnes conditions de quadrature numérique. Pour les détails d'exécution du calcul nous renvoyons au mémoire cité de SCHWARZ, d'où les valeurs de comparaison utilisées à la table II ont été reprises.

Il reste à prouver l'exactitude de l'hypothèse qui autorise l'application du théorème de CAUCHY.

Il suffit pour cela que  $K_0(\omega) + K_1(\omega)$  ne s'annule pas dans les secteurs

$$\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \pi \quad \text{et} \quad -\pi < \arg \omega < -\frac{\pi}{2}.$$

Nous allons prouver que cette propriété est vraie pour l'entièreté du plan  $\omega$ .  
L'intégrale

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(K_0 + K_1)'}{K_0 + K_1} d\omega$$

étendue au contour  $c$  de la figure 24, à l'intérieur duquel la fonction  $K_0 + K_1$  est uniforme et sans pôles, est égale au nombre de zéros de la fonction dans le domaine entouré.

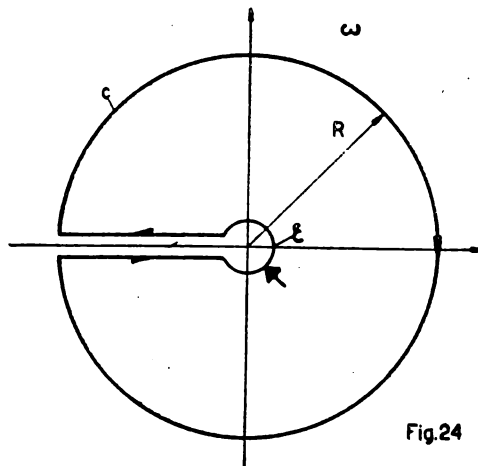


Fig.24

Par (2.17) on établit que

$$\frac{(K_0 + K_1)'}{K_0 + K_1} = -1 - \frac{1}{\omega} \left( C - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\omega}.$$

Substituant ce résultat et laissant de côté les termes dont la contribution est nulle en vertu du théorème de CAUCHY :

$$N = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \left( C - \frac{1}{2} \right) \frac{d\omega}{\omega}$$

Faisant tendre  $R$  vers l'infini et  $\epsilon$  vers zéro on obtient par des considérations de comportement asymptotique et au voisinage de l'origine parallèles aux précédentes, que l'intégrale sur la grande circonférence s'évanouit, celle sur la petite fournissant au contraire une contribution  $-\frac{1}{2}$ . Finalement le nombre de zéros pour tout le plan est donné par

$$N = -\frac{1}{2} + \int_0^{\infty} U(\mu) d\mu.$$

Mais, faisant  $t = 0$  dans (5.28),

$$N = -\frac{1}{2} + 1 - k_1(0) = 0,$$

car on sait par des considérations générales de valeurs initiales [cfr. (4.15)] que la valeur prise par la fonction de WAGNER est exactement  $k_1(0) = \frac{1}{2}$ . C.Q.F.D.

**5.4. Généralisation de la fonction de WAGNER. Signification physique de la fonction de THEODORSEN pour mouvements harmoniques convergents.**

L'équation (5.21) ou (5.28) montre clairement que la fonction de WAGNER est constituée par un premier terme représentant la valeur asymptotique ou « de régime permanent » et une intégrale représentant un terme transitoire qui s'évanouit quand  $t \rightarrow \infty$ . De façon plus précise, SEARS (9) puis SCHWARZ (8) ont montré que ce terme disparaît asymptotiquement comme  $1/t$  :

$$k_1(t) \sim 1 - \frac{1}{t}.$$

Il est assez remarquable d'observer que le terme transitoire peut être analysé en une superposition de réponses exponentielles convergentes infinitésimales, dont les représentations du § 4.7 sont une image simplifiée.

Avec l'idée de préciser la raison pour laquelle une solution de régime en mouvement harmonique généralisé convergent est inexistante, examinons le cas d'un profil qui à l'instant  $t = 0$  commence subitement à décrire un mouvement harmonique (fig. 25) :

$$\Gamma_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \bar{\Gamma}_1 e^{\omega t} & t > 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

La transformée de LAPLACE de ce mouvement est

$$\gamma(p) = \frac{\bar{\Gamma}_1}{p - \omega}$$

et, par (4.26), la transformée de LAPLACE de la partie circulaire de la portance sera

$$l(p) = -2C(-ip) \frac{\bar{\Gamma}_1}{p - \omega}.$$

Pour obtenir le comportement asymptotique requis en vue de transformer le chemin d'intégration par la méthode de SHWARZ, nous considérerons plutôt la combinaison

$$l(p) + \gamma(p) = -2 \left[ C(-ip) - \frac{1}{2} \right] \frac{\bar{\Gamma}_1}{p - \omega}.$$

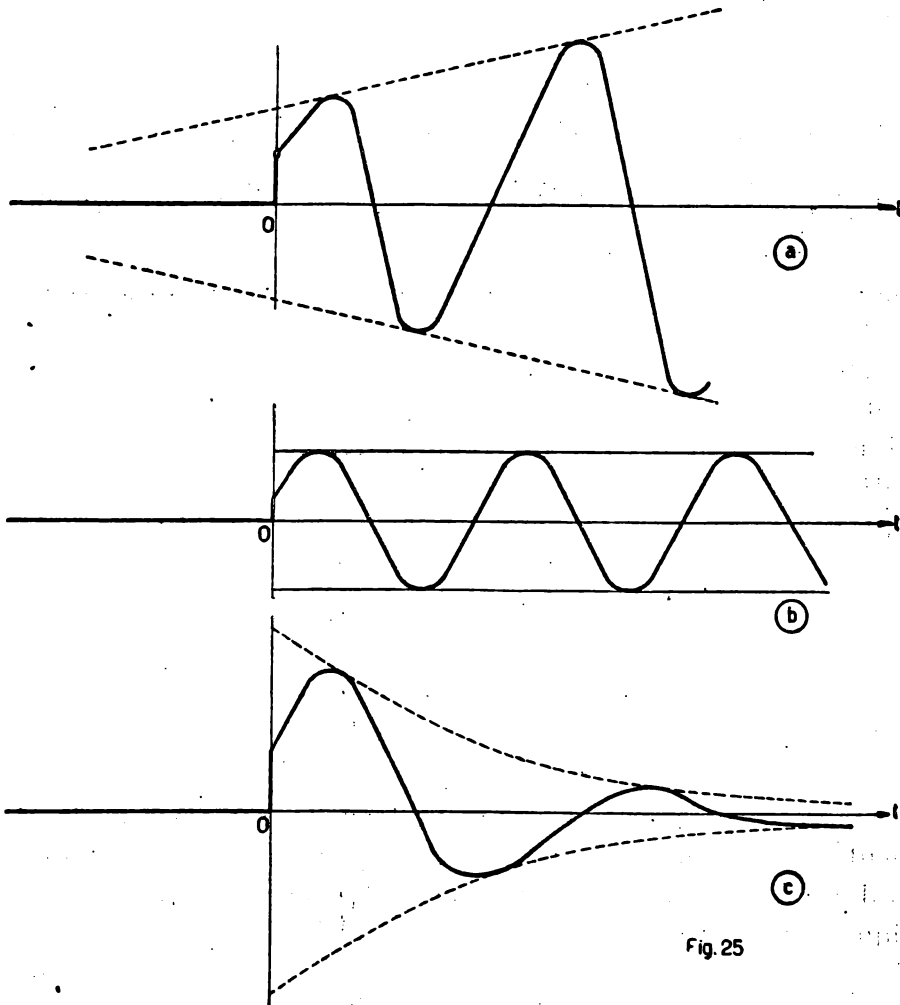


Fig. 25

Revenant aux fonctions primitives par l'intégrale de BROMWICH,

$$L_c(t) + \Gamma_1(t) = -\frac{\bar{\Gamma}_1}{\pi i} \int_{\mu - i\infty}^{\alpha + i\infty} \left[ C(-ip) - \frac{1}{2} \right] e^{pt} \frac{dp}{p - \omega},$$

où  $\alpha > \mu$  partie réelle de  $\omega$ .

On voit facilement au cours de la transformation du chemin d'intégration que le résidu au pôle  $p = \omega$  remplace l'ancienne contribution de  $(j_0 + j_1 + j_2)$  et il vient

$$L_0 + \Gamma_1 = -2\overline{\Gamma}_1 \left[ C(-i\omega) - \frac{1}{2} \right] e^{\omega t} - \frac{\overline{\Gamma}_1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left( C - \frac{1}{2} \right) e^{pt} \frac{dp}{p - \omega},$$

ou, finalement,

$$L_c(t) = -2\overline{\Gamma}_1 C(-i\omega) e^{\omega t} - \frac{2\overline{\Gamma}_1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\varphi e^{\pi i}) e^{-\varphi t} \frac{d\varphi}{\varphi + \omega}.$$

Cette équation généralise manifestement (5.20), qui s'en déduit comme cas particulier en faisant  $\omega = 0$ ;  $\overline{\Gamma}_1 = -1/2$ .

Nous proposons donc d'appeler « fonction de WAGNER généralisée » la solution divisée par  $(-2\overline{\Gamma}_1)$  :

$$k_1(-i\omega, t) = C(-i\omega) e^{\omega t} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\varphi e^{\pi i}) e^{-\varphi t} \frac{d\varphi}{\varphi + \omega}. \quad (5.29)$$

Cette fonction est valable pour une valeur complexe quelconque de  $\omega$ , étant sous-entendu que seule la partie réelle de  $L_c$  constitue la réponse physique.

Posons

$$k_1(-i\omega, t) = f_1(\mu, k, t) + i g_1(\mu, k, t), \quad \omega = \mu + ik,$$

et isolons les parties réelle et imaginaire de la fonction généralisée :

$$\left. \begin{aligned} f_1(\mu, k, t) &= e^{\mu t} \left[ F \cos kt - G \sin kt \right] + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\varphi e^{\pi i}) e^{-\varphi t} \frac{(\varphi + \mu) d\varphi}{(\varphi + \mu)^2 + k^2}; \\ g_1(\mu, k, t) &= e^{\mu t} \left[ F \sin kt + G \cos kt \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\varphi e^{\pi i}) e^{-\varphi t} \frac{k d\varphi}{(\varphi + \mu)^2 + k^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

où F et G désignent en abrégé les parties réelle et imaginaire de la fonction de THEODORSEN :

$$C(-i\omega) = F(\mu, k) + iG(\mu, k).$$

Avec  $\overline{\Gamma}_1 = A + iB$ , et donc un mouvement réel du type

$$\Gamma_1(t) = e^{\omega t} [A \cos kt - B \sin kt] \quad t > 0,$$

la réponse physique de la portance circulaire sera

$$L_c(t) = -2A f_1(\mu, k, t) + 2B g_1(\mu, k, t). \quad (5.31)$$

A l'examen de (5.29) il est naturel, par comparaison avec (5.21), de considérer le premier terme comme la « solution de régime » et le second comme la « solution transitoire ». Dans le cas particulier  $\mu = 0$  (fig. 25 b), cette interpréta-

tion est manifestement correcte. Quand  $t \rightarrow \infty$  le terme transitoire s'efface devant le premier, qui représente la solution périodique de caractère stable, dont l'investigation indépendante est le sujet du chapitre II et conduit à l'introduction de la fonction de THEODORSEN  $C(k)$  pour argument réel.

Dans le cas  $\mu > 0$  (fig. 25 a) la théorie du chapitre II fournit une solution particulière constituée par le premier terme de (5.29). Quoique non stable (divergente), cette solution peut encore être appelée solution de régime, la partie transitoire s'effaçant encore plus rapidement devant elle. Enfin, dans le cas  $\mu < 0$  (fig. 25 c), le premier terme s'obtient en étendant les valeurs de la fonction  $C$  aux valeurs complexes de  $\omega$  dans le demi-plan gauche, ce qui semble justifier les arguments de continuité avancés par certains auteurs (cfr. II 2.5). Il est cependant abusif de considérer ce terme isolément, comme s'il était encore une solution de régime ou même une solution particulière. En effet, c'est maintenant le second terme qui, tout en décroissant avec le temps, devient finalement prépondérant. Le premier terme décroît comme  $e^{\mu t}$  ( $\mu < 0$ ), le second asymptotiquement comme  $t^{-1}$  seulement. Ceci explique pourquoi une tentative d'isoler le premier terme comme solution particulière conduit à des intégrales de sillage divergentes.

Concernant encore la question discutée de savoir s'il faut étendre les valeurs de  $C(-i\omega)$  par continuité dans le quart de plan gauche supérieur ou inférieur, il ressort de (5.30) et (5.31) que le résultat final est indifférent à toute décision à ce sujet, pourvu qu'elle soit appliquée de façon cohérente à la loi du mouvement et à la réponse. Car le changement de  $k$  en  $-k$  revient à changer le signe de  $B$  dans le mouvement. Si nous changeons simultanément  $k$  en  $-k$  et  $B$  en  $-B$  la réponse (5.31) n'est pas altérée non plus du fait que

$$G(\mu, -k) = -G(\mu, k), \quad F(\mu, -k) = F(\mu, k).$$

entraînent

$$f_1(\mu, -k, t) = f_1(\mu, k, t); \quad g_1(\mu, -k, t) = -g_1(\mu, k, t).$$

Remarquons, pour terminer, que le remplacement dans l'intégrale de BROMWICH de la fonction de THEODORSEN par une de ses approximations rationnelles  $C_q(-ip)$  fournit par le truchement du calcul des résidus une approximation à la fonction de WAGNER généralisée :

$$k_1(-i\omega, t) = C_q(-i\omega) e^{\omega t} + \sum_1^q \frac{m_r}{p_r - \omega} e^{p_r t}.$$

### 5.5. Mouvements de l'atmosphère.

Nous supposons qu'en plus de son mouvement propre le profil soit influencé par une distribution de vitesses verticales le long de son axe  $V(x, 0, t)$  dues à des perturbations atmosphériques. La condition aux limites (1.8) est alors modifiée comme suit :

$$v(x) \pm 0, t) + \frac{V(x, 0, t)}{U} = h_0 + h_1,$$

le premier terme conservant sa nature de vitesse de perturbation induite par les tourbillons liés et libres.

La théorie reste donc applicable en prenant comme « effet piston effectif » l'ensemble

$$(h_x + h_t) - \frac{V(x, 0, t)}{U}.$$

En fait, nous nous bornons ci-après à la considération du second terme, l'effet du premier, déjà traité, pouvant toujours être additionné par le principe de superposition valable par suite de la linéarisation des équations du mouvement.

Dans les applications qui suivent, la configuration des perturbations atmosphériques sera de caractère permanent pour l'observateur au repos et indépendant de l'altitude; dans les coordonnées du profil on aura donc

$$V(x, y, t) = V(x - t).$$

Le profil traversera donc des colonnes de fluide en translation verticale variable d'une abscisse à l'autre. Dans ce cas le tourbillon atmosphérique

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} = \omega(x - t)$$

possède la propriété essentielle des tourbillons libres :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega_t + (1 + u) \omega_x + v \omega_y = 0,$$

car

$$u = 0; \quad \omega_y = 0 \quad \text{et} \quad \omega_x + \omega_t = 0,$$

et ce champ permanent est cinématiquement compatible.

#### 5.6. Trajectoire rectiligne d'un profil à travers une rafale de caractère harmonique.

$$V = V_0 e^{i\omega(t-x)}. \tag{5.32}$$

Insérant l'effet piston effectif dans (1.43),

$$\Gamma_1(t) = -2 \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{1 + \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-i\omega \xi} d\xi \right\}.$$

L'intégrale s'exprime par les relations (2.10) et (2.11) au moyen des fonctions de BESSEL :

$$\Gamma_1(t) = -2\pi \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \left[ J_0(-i\omega) - J_1(-i\omega) \right]. \tag{5.33}$$

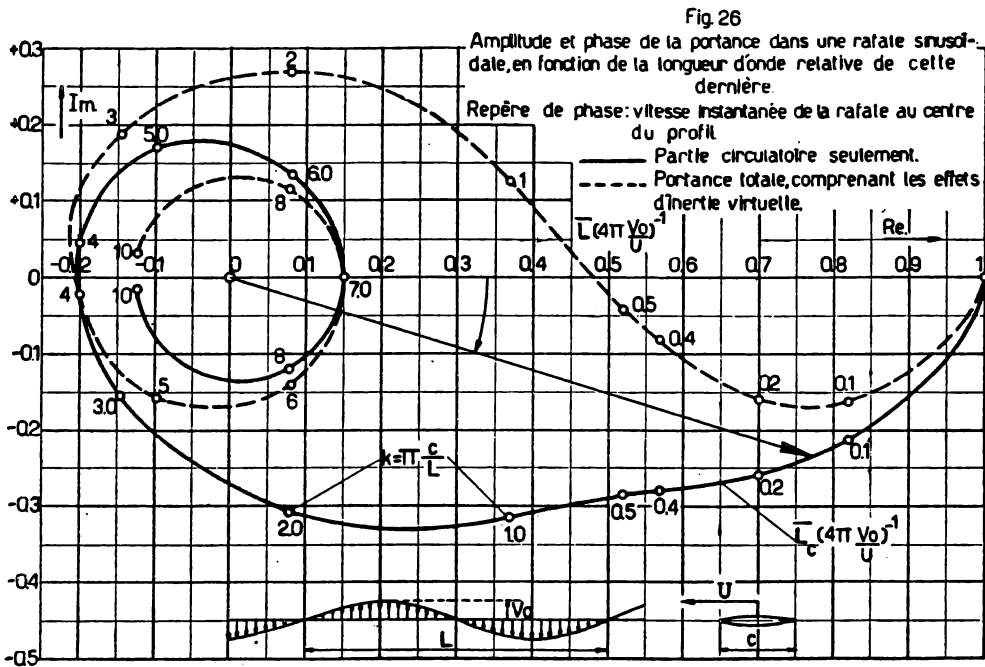
Par (2.15) on trouve l'amplitude « de régime » ( $\mu > 0$ ) de la partie circulaire de la portance :

$$\bar{L}_c = -2C(-i\omega) \bar{\Gamma}_1 = 4\pi \frac{V_0}{U} C(-i\omega) [J_0(-i\omega) - iJ_1(-i\omega)]. \quad (5.34)$$

La courbe en trait plein de la figure 26 fournit les parties réelle et imaginaire de cette amplitude complexe, sous la forme

$$\bar{L}_c (4\pi V_0/U)^{-1} = C(k) [J_0(k) - iJ_1(k)],$$

relative au cas purement harmonique :  $\omega = ik$ .



Tandis que plusieurs types de déformation harmonique du profil peuvent conduire à la même amplitude de variation de la circulation quasi-permanente, mais à des intensités différentes pour les effets d'inertie virtuelle, ces derniers ont une seule expression caractéristique pour la rafale harmonique.

Dans le but d'éviter le calcul compliqué de  $\gamma_0$ , substituons (1.42) dans (1.64) et résolvons d'abord l'intégrale en  $x$  (cfr. annexe II) :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{(x - \xi) \sqrt{1 - x^2}} = \pi; \quad (5.35)$$

d'où

$$L_0 = -4 \frac{d}{dt} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} (h_\xi + h_i) d\xi, \quad (5.35)$$

ou ici

$$L_0 = 4 \frac{V_0}{U} \omega e^{i\omega t} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} e^{-\omega \xi} d\xi.$$

Pour évaluer l'intégrale, dérivons (2.11) par rapport à  $\omega$ ,

$$J_1'(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi^2}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{\omega \xi} d\xi,$$

et combinons avec (2.10) :

$$J_0(+i\omega) - J_1'(i\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - \xi^2} e^{\omega \xi} d\xi = \frac{1}{i\omega} J_1(i\omega), \quad (5.36)$$

le dernier résultat provenant des formules de récurrence satisfaites par les fonctions de BESSEL.

Avec le changement de signe de  $\omega$ ,

$$L_0 = \left(4\pi \frac{V_0}{U}\right) i e^{i\omega t} J_1(-i\omega).$$

La portance totale en régime sinusoïdal est donc

$$L = L_0 + L_c = \left(4\pi \frac{V_0}{U}\right) e^{i\omega t} \left[ C(k) [J_0(k) - i J_1(k)] + i J_1(k) \right], \quad (5.37)$$

en accord avec le résultat donné par GARRICK (27), KUESSNER (16) et GREENBERG (28), suivant des voies quelque peu différentes. Cette solution est représentée en amplitude complexe par le trait interrompu de la figure 27. On observera que les effets d'inertie virtuelle sont du même ordre de grandeur que les effets de circulation. Enfin il est intéressant de noter que la portance totale est toujours appliquée exactement au foyer avant du profil.

Pour cela calculons  $M_0^*$  par (1.71). Substituant (1.42) et résolvant d'abord l'intégrale en  $x$  (cfr. annexe II) :

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{x(1+x)}{\sqrt{1+x^2} x - \xi} dx = \pi(1+\xi);$$

$$M_0^* = 2 \frac{d}{dt} \int_{-1}^{+1} (1+\xi) \sqrt{1-\xi^2} (h_\xi + h_i) d\xi = -2 \frac{V_0}{U} \omega e^{i\omega t} \int_{-1}^{+1} (1+\xi) \sqrt{1-\xi^2} e^{-\omega \xi} d\xi. \quad (5.38)$$



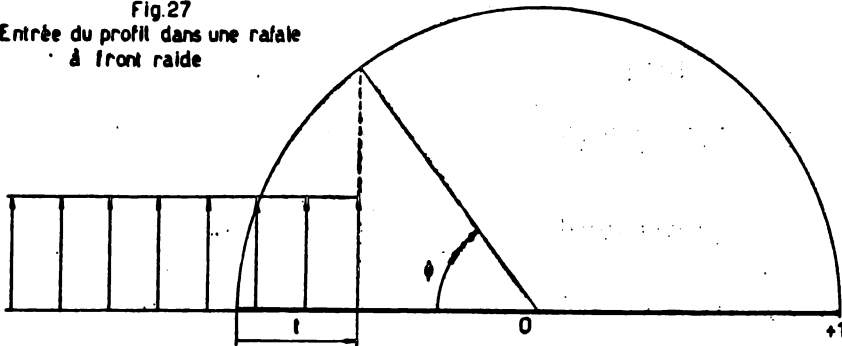
Dérivant (5.36) par rapport à  $\omega$ ,

$$-\frac{J_1(i\omega)}{i\omega^2} + \frac{J_1'(i\omega)}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \xi \sqrt{1-\xi^2} e^{i\omega\xi} d\xi,$$

et, additionnant (5.36) et changeant le signe de  $\omega$ ,

$$M_0^* = 2\pi \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \left[ J_1'(-i\omega) - i J_1(-i\omega) + \frac{J_1(-i\omega)}{i\omega} \right].$$

Fig.27  
Entrée du profil dans une raiale  
à front raide



Calculant maintenant  $M_1^*$  par (1.72) :

$$\oint_{-1}^{+1} (1+2x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x-\xi} = \pi(1-2\xi) \quad (\text{cfr. Annexe II});$$

$$M_1^* = -2 \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} (1-2\xi) (h_f + h_i) d\xi; \quad (5.39)$$

$$M_1^* = 2 \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \int_{-1}^{+1} \frac{1-\xi-2\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-i\omega\xi} d\xi$$

$$= 2\pi \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \left[ J_0(-i\omega) + i J_1(-i\omega) - 2 J_1'(-i\omega) \right].$$

Et finalement, pour le moment total,

$$M_0^* + M_1^* = 2\pi \frac{V_0}{U} e^{i\omega t} \left[ J_0(-i\omega) - J_1'(-i\omega) + \frac{J_1(-i\omega)}{i\omega} \right] = 0,$$

en vertu d'une relation de récurrence.

5.7. Distribution de la pression sur un profil abordant une rafale à front raide.

Le cas de la rafale à front raide est important en raison de son aspect idéalisé d'un cas pratique de calcul et du fait qu'il constitue une solution type à partir de laquelle l'entrée dans une rafale de profil quelconque peut être déduite par une intégrale de DUHAMEL.

Si le bord d'attaque touche le front de la rafale à l'instant initial  $t = 0$ , le profil de la rafale est défini par (fig. 27)

$$V(t-x) = VH(t-1-x) = \begin{cases} 0 & x > t-1 \\ V & x < t-1. \end{cases}$$

Voici quelques détails sur le calcul de la répartition de pressions qui en résulte : Par (1.42),

$$\gamma_0 = \frac{2V}{\pi U} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{-1+t} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{x-\xi} d\xi \quad 0 < t < 2.$$

Avec  $\xi = -\cos u$  et  $1-t = \cos \varphi$ ,

$$\gamma_0 = \frac{2V}{\pi U} \frac{1}{\sin \theta} \int_0^\varphi \frac{\sin^2 u du}{\cos u - \cos \theta}.$$

Utilisant les formules de l'annexe II (6° et 1°),

$$\gamma_0 = \frac{2V}{\pi U} \left\{ \wedge(\varphi, \theta) - \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \theta}{\sin \theta} \right\}.$$

Ensuite :

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \varphi};$$

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial t} = \frac{2V}{\pi U} \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos \varphi - \cos \theta} - \frac{\cos \varphi + \cos \theta}{\sin \theta} \right\} \frac{1}{\sin \varphi};$$

$$\int_{-1}^x \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx = \int_0^\theta \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} \sin \theta d\theta = -\frac{2V}{\pi U} \wedge(\varphi, \theta).$$

Par (1.43),

$$\Gamma_1 = -2 \frac{V}{U} \int_0^\varphi (1 - \cos u) du = -2 \frac{V}{U} (\varphi - \sin \varphi)$$

et par (1.41),

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\pi \sin \theta} = \frac{2V}{\pi U} \left[ \wedge(\varphi, \theta) - \varphi \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right].$$

Enfin, par (1.62),

$$\Delta p = \int_{-1}^x \frac{\partial \gamma_0}{\partial t} dx + \gamma_1 + \frac{1}{\pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} P(t);$$

$$\Delta p = \frac{4V}{\pi U} \left\{ \varphi(t) - \frac{U}{2V} P(t) \right\} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (5.40)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \arccos(1-t) && \text{pour } 0 < t < 2; \\ &= \pi && \text{pour } t > 2, \end{aligned}$$

et  $P(t)$  est l'intensité héréditaire définie par l'intégrale de sillage (1.63).

Ce résultat est très remarquable par sa simplicité. La pression est constamment répartie en profondeur suivant la loi

$$\cot \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

qui régit le simple effet d'incidence en régime permanent.

Il en résulte, entre autres propriétés, que la portance totale est toujours appliquée au foyer avant.

L'achèvement de la solution comporte naturellement le calcul de l'intensité héréditaire.

Avant d'aborder ce problème, remarquons que

$$L_0 = 4 \frac{V}{U} \sin \varphi = \begin{cases} 4 \frac{V_0}{U} \sqrt{t(2-t)} & 0 < t < 2; \\ 0 & t > 2, \end{cases} \quad (5.41)$$

formule qu'on peut obtenir, soit en appliquant (1.64), soit plus rapidement en appliquant (5.35). Les effets d'inertie virtuelle sur la portance sont donc limités à la période de pénétration dans la rafale.

Pour la partie circulaire de la portance,

$$L_c = L_1 + L_2 = -2(\Gamma_1 + P) = 4 \frac{V}{U} (\varphi - \sin \varphi) - 2P.$$

La valeur asymptotique de la portance sera  $4\pi V/U$ , puisque

$$\varphi = \pi \quad \text{et} \quad P \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \rightarrow \infty.$$

Par analogie avec la définition de la fonction  $k_1(t)$  de WAGNER nous définissons donc (1)

$$k_2(t) = L_c(4\pi V/U)^{-1} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1. \quad (5.42)$$

La portance totale correspondante sera

$$k_2^*(t) = k_2(t) + \frac{1}{\pi} \sin \varphi \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 \quad (k_2^* = k_2, \quad t > 2). \quad (5.43)$$

Il en résulte pour la pression en général :

$$\Delta p = \frac{4V}{\pi U} \cot \frac{\theta}{2} \left[ \sin \varphi + \pi k_2(t) \right] = 4 \frac{V}{U} \cot \frac{\theta}{2} k_2^*(t). \quad (5.44)$$

La fonction  $k_2(t)$  sera maintenant déterminée.

### 5.3. Calcul de la partie circuloire de la portance dans une rafale à front raide.

Par l'analyse harmonique (5.4) de la fonction  $H(t)$  de HEAVISIDE, le profil d'une rafale à front raide a la représentation

$$V(t-x) = \frac{V}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(t-1-z)} \frac{dz}{z}, \quad (5.45)$$

et nous sommes ramenés à une superposition de rafales sinusoidales.

Il résulte alors de (5.32) et (5.34) que

$$k_2(t) = \frac{V}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} C(z) \left[ J_0(z) - i J_1(z) \right] e^{iz(t-1)} \frac{dz}{z}. \quad (5.46)$$

Cette expression opérationnelle résulte aussi de la technique de la transformation de LAPLACE. De

$$\Gamma_1 = -2 \frac{V}{U} \int_{-1}^{-1+t} \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} d\xi \quad 0 < t < 2$$

il résulte immédiatement

$$\frac{d\Gamma_1}{dt} = \begin{cases} -2 \frac{V}{U} \sqrt{\frac{t}{2-t}} & 0 < t < 2; \\ 0 & t > 2, \end{cases} \quad (5.47)$$

(1) N. B.— Ceci n'est pas la définition de KUESSNER. Les relations entre les fonctions  $U_2(t)$  et  $k_2(t)$  introduites par KUESSNER et les nôtres sont

$$U_2(t-1) = \frac{1}{\pi} (\sin \varphi - \varphi) + 2 k_2(t); \quad k_2(t-1) = 2 \left( k_2 + \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right) = 2 k_2^*(t).$$

Le  $k_2$  de VON KÁRMÁN et SEARS est identique à notre  $k_2^*$ .

et pour sa transformée de LAPLACE,

$$\mathfrak{L}\left(\frac{d\Gamma_1}{dt}\right) = -2\frac{V}{U}\int_0^2 e^{-st}\sqrt{\frac{t}{2-t}}dt = -2\frac{V}{U}e^{-s}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}e^{-s}ds,$$

au moyen du changement de variable  $t = 1 + s$ .

Dès lors, par (2.10) et (2.11),

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Gamma_1}{dt}\right) &= -2\pi\frac{V}{U}e^{-s}\left[J_0(-ip) - iJ_1(-ip)\right]; \\ \gamma(p) = \mathfrak{L}(\Gamma_1) &= \frac{1}{p}\mathfrak{L}\left(\frac{d\Gamma_1}{dt}\right).\end{aligned}$$

La transformée de LAPLACE de  $L_c$  s'en déduit par (4.26). Divisant encore par la valeur asymptotique de  $L_c$ ,

$$\mathfrak{L}\left[k_2(t)\right] = \frac{e^{-p}}{p}C(-ip)\left[J_0(-ip) - iJ_1(-ip)\right]. \quad (5.48)$$

L'intégrale de BROWICH inversant cette relation,

$$k_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} C(-i\omega)\left[J_0(-i\omega) - iJ_1(-i\omega)\right]\frac{e^{\omega(t-1)}}{\omega}d\omega, \quad (5.49)$$

est identifiable à (5.46) par le changement de variable  $iz = \omega$ .

La transformation du chemin d'intégration se fait suivant une voie parallèle à celle utilisée pour  $k_1(t)$ . Cependant, le comportement asymptotique des fonctions  $J_0$  et  $J_1$  :

$$\frac{e^{-\omega}}{\sqrt{2\pi\omega}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right] \pm \frac{e^{-\omega}}{\sqrt{2\pi\omega}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right],$$

ne fait tendre vers zéro la contribution de  $j_+$  et  $j_-$ , que si  $t > 2$ . La formule résultante

$$k_2(t) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G(\mu e^{\pi i})\left[J_0(i\mu) - iJ_1(i\mu)\right]e^{-\mu(t-1)}\frac{d\mu}{\mu} \quad (5.50)$$

ne représente donc  $k_2(t)$  qu'à partir du moment  $t = 2$ , où le profil a pénétré entièrement dans la rafale.

La même remarque s'applique au calcul par SCHWARZ de la fonction  $U_2(s)$ , dont les valeurs numériques ont été utilisées comme références pour les valeurs de  $k_2(t)$  figurant à la table III.

Les valeurs numériques afférentes à l'intervalle  $0 < t < 2$  ont été calculées par KUESSNER (16) au moyen d'une série de puissances fractionnaires.

Cependant, l'intégrale généralisée de (5.50) converge dans l'intervalle  $0 < t < 2$ . Nous allons montrer qu'une simplification remarquable, et apparem-

ment inutilisée de (5.49), permet d'interpréter (5.50) comme représentant  $k_2^*(t)$  dans tout l'intervalle  $t > 0$ .

Ceci n'est pas en contradiction avec (5.50), puisque pour  $t > 2$  les effets d'inertie virtuelle disparaissent et

$$k_2^*(t) = k_2(t) \quad \text{pour } t > 2.$$

**5.9. Calcul de la portance totale dans une rafale à front raide.**

Prenons pour la fonction de THEODORSEN la représentation (2.16) et utilisons la relation (2.14) de WRONSKI, sous la forme

$$J_0(-i\omega) K_1(\omega) = \frac{1}{\omega} - i J_1(-i\omega) K_0(\omega);$$

il vient alors

$$C(-i\omega) \left[ J_0(-i\omega) - i J_1(-i\omega) \right] = \frac{1}{\omega [K_0(\omega) + K_1(\omega)]} - i J_1(-i\omega) \quad (5.51)$$

et, par conséquent,

$$k_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega(t-1)}}{K_0(\omega) + K_1(\omega)} \frac{d\omega}{\omega^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} i J_1(-i\omega) e^{i\omega(t-1)} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5.52)$$

Montrons maintenant que le second terme représente les effets d'inertie virtuelle. Divisant (5.41) par la valeur asymptotique de la portance, ceux-ci deviennent

$$\frac{1}{\pi} \sin \varphi = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{t(2-t)} & 0 < t < 2; \\ 0 & t > 2; \end{cases}$$

$$\Omega \left( \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sqrt{t(2-t)} dt = \frac{e^{-p}}{\pi} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-s^2} e^{-ps} ds,$$

et, suivant (5.36),

$$\Omega \left( \frac{1}{\pi} \sin \varphi \right) = \frac{e^{-p}}{p} i J_1(-ip).$$

Enfin, par une intégrale de BROMWICH,

$$\frac{1}{\pi} \sin \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} i J_1(-i\omega) e^{i\omega(t-1)} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (5.53)$$

Combinant ce résultat avec (5.52),

$$k_2^*(t) = k_2(t) + \frac{1}{\pi} \sin \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega(t-1)}}{K_0(\omega) + K_1(\omega)} \frac{d\omega}{\omega^2}. \quad (5.54)$$

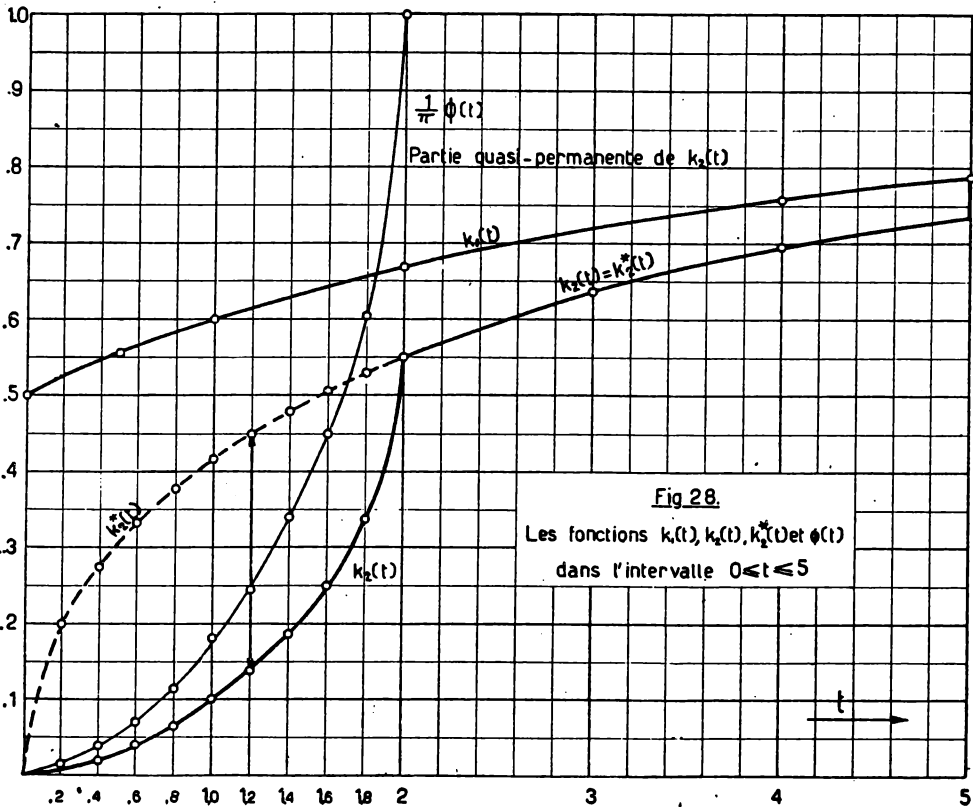
Le même résultat pouvait être obtenu en partant de l'expression (5.37) de la portance totale en régime sinusoïdal et transformant l'intégrale de FOURIER, qui en résulte pour  $k_2^*(t)$  par (5.45), au moyen de (5.51).

Grâce au comportement asymptotique de  $K_0$  et  $K_1$  (cfr. § 2.5), les intégrales  $j_4$  et  $j_5$  s'évanouissent pour  $t > 0$  quand  $R \rightarrow \infty$ . La contribution de ( $j_6 + j_2 + j_7$ ) quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  est égale à 1, car

$$\frac{1}{\omega(K_0 + K_1)} = 1 + \omega \log \frac{\omega}{2} + \omega \gamma + \dots,$$

et, enfin, appliquant (5.22) et (5.23), il vient

$$k_2^*(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty G(\mu e^{\pi t}) \left[ J_0(i\mu) - i J_1(i\mu) \right] e^{-\mu(t-1)} \frac{d\mu}{\mu}. \quad (5.55)$$



Comme annoncé, le second membre est identique à (5.50), mais l'équation en étend maintenant la signification aux valeurs  $0 < t < 2$  du temps.

La figure 28 montre d'ailleurs bien que  $k_2^*(t)$  est continue au point  $t = 2$ .

**5.10. Relation entre  $k_1(t)$  et  $k_2(t)$ .**

Considérant  $L_c(t)$  comme engendré par une succession de perturbations infinitésimales  $d\Gamma_1$ , il vient pour l'intégrale de DUHAMEL (5.24), en substituant (5.47) et divisant par la valeur asymptotique de la portance,

$$k_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t k_1(t-s) \sqrt{\frac{s}{2-s}} ds,$$

ou encore

$$k_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{t^2} k_1(t-s) \sqrt{\frac{s}{2-s}} ds, \tag{5.56}$$

puisque  $k_1(t-s)$  est nul pour  $s > t$ . Cette formule est alors valable quel que soit  $t$ . Elle est due à GARRICK (25), qui l'a déduite des représentations opérationnelles de  $k_1$  et  $k_2$ .

Cette formule peut servir au calcul numérique de  $k_2(t)$  à partir de  $k_1(t)$ .

Prenant en particulier l'expression approchée (4.27) (qui elle ne s'annule pas pour  $t < 0$ ), il vient, en substituant dans (5.56) et notant que les intégrales pour  $t > 2$  s'expriment par les fonctions de BESSEL,

$$k_2(t) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{J_0(-ip_r) - i J_1(-ip_r)}{p_r h'(p_r)} g(p_r) e^{p_r(t-1)},$$

valable seulement pour  $t > 2$ .

La même expression s'obtient d'ailleurs en substituant  $C_q(-i\omega)$  à  $C(-i\omega)$  dans (5.49), notant que la fonction intégrée est devenue uniforme et évaluant les résidus aux pôles de  $C_q(-i\omega)$  sur l'axe réel négatif.

La méthode des opérateurs du chapitre IV ne conduit pas à une expression exponentielle valable pour  $k_2^*(t)$ ; notons cependant l'expression empirique de R. T. JONES :

$$k_2^*(t) \sim 1 - 0.5 e^{-0.180t} - 0.5 e^{-t}.$$



ANNEXE I.

INVERSION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE  
DE LA NAPPE TOURBILLONNAIRE.

---

La transformation

$$z = \frac{1}{2}(Z + 1/Z)$$

fournit une représentation conforme de l'aire extérieure à la coupure

$$y = \pm 0 \quad -1 < x < +1$$

du plan  $z$  sur l'aire extérieure à la circonférence-unité

$$Z = e^{i\theta}.$$

La branche dite d'extrados correspond à

$$y = +0 \quad 0 < \theta < \pi,$$

la branche d'intrados à

$$y = -0 \quad \pi < \theta < 2\pi.$$

Si  $f(z)$  est le potentiel complexe d'un écoulement irrotationnel incompressible dans le plan  $z$ , la correspondance entre les vitesses dans les plans  $z$  et  $Z$  est

$$U - iV = df/dZ = (df/dz)(dz/dZ) = (u - iv)\frac{1}{2}(1 - 1/Z^2);$$

ceci peut être mis sous la forme

$$Z \frac{df}{dZ} = \frac{1}{2}(Z - 1/Z)(u - iv), \tag{A. 1}$$

relation qui sur la circonférence même devient

$$e^{i\theta} \frac{df}{dZ} = u_r - i u_\theta = i \sin \theta (u - iv);$$

soit encore

$$u = -u_\theta / \sin \theta; \quad v = u_r / \sin \theta, \quad (\text{A. 2})$$

où  $u_r$  et  $u_\theta$  sont les composantes radiale et tangentielle de la vitesse pour les points de la circonférence.

L'équation intégrale (1.15), qui, eu égard à (1.14), peut s'écrire sous la forme

$$v(x, \pm 0) = \frac{-1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{u(\xi, \pm 0) d\xi}{x - \xi}, \quad (\text{A. 3})$$

avec

$$u(\xi, -0) = -u(\xi, +0),$$

constitue en fait une relation entre parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique  $u-iv$ , de symétrie donnée, sur le segment  $y = \pm 0; -1 < x < 1$ .

L'inversion cherchée sera obtenue en examinant les relations entre  $u_r$  et  $-u_\theta$ , parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique du plan  $Z$ , régulière à l'intérieur de la circonférence-unité.

Le point de départ est le théorème de CAUCHY :

$$\oint \frac{f(\rho') d\rho'}{\rho' - Z'} = 2\pi i f(Z') \quad |Z'| < 1,$$

appliqué à une fonction  $f(Z')$  analytique régulière à l'intérieur de la circonférence-unité. Le chemin d'intégration est constitué par la circonférence elle-même parcourue dans le sens direct antihorlogique.

Par une inversion

$$ZZ' = 1; \quad \rho\rho' = 1,$$

il vient, pour une fonction  $f(Z)$  analytique régulière à l'extérieur de la circonférence-unité,

$$\oint \frac{f(\rho) d\rho}{\rho^2(1/\rho - 1/Z)} = 2\pi i f(Z) \quad |Z| > 1.$$

Le changement de signe après substitution des variables est dû au maintien du sens direct d'intégration, alors que  $\rho$  parcourt la circonférence dans le sens rétrograde quand  $\rho'$  le faisait dans le sens direct.

Si le point  $Z$  est pris sur la circonférence même, on sait que l'on n'obtient que le demi-résidu. Dès lors avec

$$\rho = e^{i\alpha}; \quad Z = e^{i\theta}$$

et

$$f = \varphi + i\psi,$$

il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\alpha) + i\psi(\alpha)}{1 - e^{i(\alpha-\theta)}} d\alpha = \pi [\varphi(\theta) + i\psi(\theta)].$$

Séparant partie réelle et partie imaginaire,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\theta) &= a - \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha - \theta)}{1 - \cos(\alpha - \theta)} \psi(\alpha) d\alpha; \\ \psi(\theta) &= b + \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} \frac{\sin(\alpha - \theta)}{1 - \cos(\alpha - \theta)} \varphi(\alpha) d\alpha, \\ \text{où } a &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha; \quad b = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \right\} \text{(A. 4)}$$

Les valeurs prises sur la circonférence par une fonction harmonique régulière à l'extérieur définissent donc à une constante près la fonction harmonique conjuguée.

Les formules (A.4) peuvent être considérées comme une paire de formules d'inversion entre  $\varphi$  et  $\psi$ .

Si nous douons  $\varphi$  d'antisymétrie,

$$a = 0; \quad \varphi(-\theta) = -\varphi(\theta),$$

il vient

$$\psi(\theta) = b + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{\cos \theta - \cos \alpha} \varphi(\alpha) d\alpha, \quad \text{(A. 5)}$$

et  $\psi$  devient symétrique :

$$\psi(-\theta) = \psi(\theta);$$

par conséquent,

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{(A. 6)}$$

et

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cos \alpha} \psi(\alpha) d\alpha. \quad \text{(A. 7)}$$

Cette nouvelle paire de formules d'inversion (cas particulier de la précédente) fournit la solution cherchée, car l'appliquant à la fonction analytique (A.1), pour laquelle les parties réelle et imaginaire

$$\varphi(\theta) = v \sin \theta; \quad \psi(\theta) = u \sin \theta$$

ont la symétrie requise, on trouve, par (A.7),

$$v(\theta) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{u(\alpha) \sin \alpha}{\cos \theta - \cos \alpha} d\alpha, \quad \text{(A. 7')}$$

transformée de la relation intégrale donnée (A.3) par le passage du plan  $z$  au plan  $Z$  ( $x = \cos \theta$   $\xi = \cos \alpha$ ).

Et par (A.5) et (A.6), l'inversion cherchée :

$$u(\theta) \sin \theta = b + \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{v(\alpha) \sin^2 \alpha \, d\alpha}{\cos \theta - \cos \alpha}, \quad (\text{A. 5'})$$

avec

$$b = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u \sin \alpha \, d\alpha. \quad (\text{A. 6'})$$

Revenant finalement au plan  $z$  par

$$\gamma = -2u; \quad \sin \theta = + \sqrt{1-x^2} \quad \text{si} \quad 0 < \theta < \pi;$$

$$b = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \gamma(\xi) \, d\xi = -\frac{\Gamma}{2\pi},$$

et par suite, pour (A.5'),

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma}{\pi \sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \oint_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} \, v(\xi) \, d\xi}{x-\xi}$$

La solution particulière

$$\gamma_0(x) = -\frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}} \oint_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2} \, v(\xi) \, d\xi}{x-\xi},$$

pour laquelle

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_0 \, dx = 0,$$

peut être construite d'une façon très différente [VON KÁRMÁN et BURGERS (7), THEODORSEN (12)] qui met bien en évidence son caractère non circulaire, puisqu'elle est obtenue à partir d'une répartition de sources et de puits sur la circonférence du plan  $Z$ .

ANNEXE II.

Propriétés de la fonction

$$\wedge(u, \theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos(u + \theta)}{1 - \cos(u - \theta)} = \wedge(\theta, u).$$

Avec

$$x = -\cos \theta; \quad \xi = -\cos u,$$

cette fonction devient celle définie par (2.24) :

$$\wedge(u, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{quand soit} \quad \left. \begin{array}{l} u \rightarrow 0 \\ u \rightarrow \pi \\ \theta \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow \pi, \end{array} \right\}$$

$$\wedge(u, \theta) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad u \leftrightarrow \theta.$$

$$1^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{du} \wedge(u, \theta) = \frac{\sin \theta}{\cos u - \cos \theta}; \\ \frac{d}{d\theta} \wedge(u, \theta) = \frac{\sin u}{\cos \theta - \cos u}. \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$2^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos u} = \frac{1}{\sin u} \wedge(u, \theta); \\ \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\xi-x} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \wedge(x, \xi) \quad (\text{cfr. 2.24}); \end{array} \right.$$

$$3^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_0^{\theta} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos u} = \oint_0^{\theta} \left( 1 + \frac{\cos u}{\cos \theta - \cos u} \right) d\theta = \theta + \cot u \wedge(u, \theta); \\ \int_{-1}^x \frac{x dx}{(x-\xi)\sqrt{1-x^2}} = \arccos(-x) - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \wedge(x, \xi). \end{array} \right.$$

Cette dernière intégrale vaut donc  $\pi$  quand la limite supérieure est égale à + 1. (cfr. 5.35).

4° Pour l'intégrale conduisant à (5.38), passant à  $u$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \oint_0^\pi \cos \theta (1 - \cos \theta) \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos u} &= \oint_0^\pi \left[ 1 - (\cos \theta + \cos u) + \frac{\cos u (1 - \cos u)}{\cos \theta - \cos u} \right] d\theta \\ &= \left[ \theta (1 - \cos u) - \sin \theta + \cot u (1 - \cos u) \wedge (u, \theta) \right]_0^\pi = \pi (1 - \cos u) = \pi (1 + \xi). \end{aligned}$$

5° Pour l'intégrale conduisant à (5.39) :

$$\begin{aligned} & - \int_0^\pi (1 - 2 \cos \theta) (1 + \cos \theta) \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos u} \\ &= \int_0^\pi \left( 1 + 2 (\cos \theta + \cos u) - \frac{(1 - 2 \cos u) (1 + \cos u)}{\cos \theta - \cos u} \right) d\theta \\ &= \pi (1 + 2 \cos u) = \pi (1 - 2\xi). \end{aligned}$$

6° Pour le calcul de  $\gamma_0$  du § 5.7 :

$$\oint_0^\varphi \frac{\sin^2 u \, du}{\cos u - \cos \theta} = \oint_0^\varphi \left[ \frac{\sin^2 \theta}{\cos u - \cos \theta} - (\cos u + \cos \theta) \right] du,$$

et, suivant 1°,

$$= \sin \theta \wedge (\varphi, \theta) - (\sin \varphi + \varphi \cos \theta).$$

7° Pour les calculs du chapitre III. Toutes les intégrales faisant intervenir  $\Lambda(u, \theta)$  sont réductibles au type

$$I_m = \int_\varphi^\pi (\cos \theta - \cos u)^m \wedge (u, \theta) \sin \theta \, d\theta \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Par la propriété 1° il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[ (\cos \theta - \cos u)^{m+1} \wedge (u, \theta) \right] &= -(m+1) (\cos \theta - \cos u)^m \wedge (u, \theta) \sin \theta \\ &+ \sin u (\cos \theta - \cos u)^m, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} & (m+1) \int_\varphi^\pi (\cos \theta - \cos u)^m \wedge (u, \theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= \sin u \int_\varphi^\pi (\cos \theta - \cos u)^m \, d\theta - \left[ (\cos \theta - \cos u)^{m+1} \wedge (u, \theta) \right]_\varphi^\pi \\ &= \sin u \int_\varphi^\pi (\cos \theta - \cos u)^m \, d\theta + (\cos \varphi - \cos u)^{m+1} \wedge (u, \varphi). \end{aligned}$$

la ramène à une intégrale élémentaire, pour laquelle on peut utiliser, après développement du binôme, les formules de réduction

$$\int \cos^p \theta d\theta = \frac{1}{p} \cos^{p-1} \theta \sin \theta + \frac{p-1}{p} \int \cos^{p-2} \theta d\theta.$$

Il vient en particulier

$$I_0 = (\pi - \varphi) \sin u + (\cos \varphi - \cos u) \wedge(u, \varphi);$$

$$2 I_1 = -\sin u \left[ \sin \varphi + (\pi - \varphi) \cos u \right] + (\cos \varphi - \cos u)^2 \wedge(u, \varphi);$$

$$3 I_2 = \sin u \left[ \frac{\pi - \varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{2} + 2 \cos u \sin \varphi + (\pi - \varphi) \cos^2 u \right] \\ + (\cos \varphi - \cos u)^3 \wedge(u, \varphi);$$

$$4 I_3 = -\sin u \left[ \frac{1}{3} \sin \varphi \cos^3 \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi + \frac{3}{2} \cos u \left( \pi - \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \right) \right. \\ \left. + 3 \cos^2 u \sin \varphi + (\pi - \varphi) \cos^3 u \right] + (\cos \varphi - \cos u)^4 \wedge(u, \varphi).$$

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

---

1. BIRNBAUM, W., *Das ebene Problem des Schlagenden Flügels*. Z.A.M.M., Bd 4 (1924), S. 277-292.
2. VON KÁRMÁN, TH. and SEARS, W. R., *Airfoil Theory for Non-Uniform Motion*. J.A.S., vol. 5, n° 10, 1938.
3. BETZ, A., *Tragflügeltheorie, Berichte und Abhandlungen der WGL*. Bd 1, Heft 2 (1920).
4. SOEHNGEN, H., *Mathematische Zeitschrift*. Bd 45 (1939), pp. 245-264.
5. SCHWARZ, L., *Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung*. Luftfahrtforschung. Bd 17 (1940), S. 379-386.
6. WAGNER, H., *Ueber die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln*. Z.A.M.M. Bd 5, Heft 1, 1925.
7. VON KÁRMÁN, T. et BURGERS, J. M., *Aerodynamic Theory*, vol. II, pp. 43-48. (Ed. Durand), Springer, 1935.
8. SCHWARZ, L., *Berechnung der Funktionen  $U_1(s)$  und  $U_2(s)$  für grössere Werte von  $s$* . Luftfahrtforschung, Bd 17 (1940), S. 362-369.
9. SEARS, W. R., *Operational methods in the theory of airfoils in non-uniform motion*. Journal of the Franklin Institute, vol. 230 (1940), pp. 95-111.
10. GRAY, MATHEWS, MAC ROBERT, *Bessel Functions*. Mac Millan and Co., London, 1931.
11. WATSON, G. N., *A Treatise on the theory of Bessel Functions*. Cambridge, 1922.
12. THEODORSEN, T., *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. T. R. 496, N.A.C.A., 1935.
13. — *Table of the Bessel functions  $J_0(z)$  and  $J_1(z)$  for complex arguments*. Math. Tables Project, National Bureau of Standards, Columbia Univ. Press., 1947.
14. — *Table of the Bessel functions  $Y_0(z)$  and  $Y_1(z)$  for complex arguments*. Math. Tables Project, National Bureau of Standards, Columbia Univ. Press., 1950.
15. LUKE, Y. L. and DENGLER, M. A., *Tables of the Theodorsen Circulation function for generalised motion*. J.A.S., vol. 18 (1951), pp. 478-484.
16. KUESSNER, H. G., *Das zweidimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung von Partialbewegung der Flüssigkeit*. Luftfahrtforschung, Bd 17 (1940), S. 355-361.
17. POSTEL, E. E. and LEPPERT, E. L., *Theoretical pressure distributions for a thin airfoil in incompressible flow*. J.A.S., vol. 15 (1948), pp. 486-492.



18. KUESSNER, H. G., *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*. Luftfahrtforschung, Bd 13 (1936), p. 410.
19. DIETZE, F., *Zum Luftkraftgesetz der harmonisch schwingendem, knickbaren Platte*. Luftfahrtforschung, Bd 16 (1939), S. 84-96 et Bd 18 (1941), S. 135.
20. KUESSNER, H. G. und SCHWARZ, L., *Der Schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder*. Luftfahrtforschung, Bd 17 (1940), S. 337-354.
21. KLEINWÄCHTER, J., *Beitrag zur ebenen Leitwerktheorie*. Luftfahrtforschung, Bd 15 (1938), S. 127-129.
22. SOEHNGEN, H., *Auftrieb und moment der geknickten Platte mit Spalt*. Luftfahrtforschung, Bd 17 (1940), S. 17-22.
23. DÖRR, *Détermination des Forces aérodynamiques instationnaires*. Publication n° 9 (1948), O.N.E.R.A.
24. JONES, R. T., *The unsteady lift of a finite wing*. T.N. 682, N.A.C.A., 1939. Aussi T.R. 681, N.A.C.A., 1940.
25. GARRICK, I. E., *On some reciprocal relations in the theory of non-stationary flows*. T.R. 629 (1938), N.A.C.A.
26. FILON, L. N. G., Proc. Roy. Soc. Edimb., XLIX (1928-1929), pp. 38-47.
27. GARRICK, I. E., Proceedings of the V. International Congress of Applied Mechanics (1938), pp. 590-593.
28. GREENBERG, J. M., *Some considerations on an airfoil in an oscillating stream*. T.N. 1372 (1947), N.A.C.A.

TABLE I. — La fonction de THEODORSEN  $C(-i\omega) = C(k-i\mu)$ .

$\mu, k$	$k = 0$ $C(-i\mu)$	$\mu = 0$	
		$F(k)$	$-G(k)$
0	1	1	0
0.025	0.9077	0.9543	0.0872
0.05	0.8647	0.9090	0.1306
0.1	0.8024	0.8319	0.1723
0.2	0.7315	0.7276	0.1886
0.3	0.6901	0.6650	0.1793
0.4	0.6625	0.6250	0.1650
0.5	0.6418	0.5979	0.1507
0.6	0.6262	0.5788	0.1378
0.8	0.6039	0.5541	0.1165
1.0	0.5885	0.5394	0.1003
2.0	0.5512	0.5129	0.0577
4.0	0.5280	0.5037	0.0305
10	0.5119	0.5006	0.0206
$\infty$	0.5	0.5	0

TABLE II. — La fonction  $k_1(t)$  de WAGNER et les valeurs fournies par diverses approximations exponentielles.

$t$	Exacte	1 <sup>er</sup> opérateur	2 <sup>e</sup> opérateur		3 <sup>e</sup> opérateur		4 <sup>e</sup> opérateur
			minimum	osculateur	minimum	osculateur	
0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.5	0.5557	0.5588	0.5555	0.5557	0.5557	0.5557	0.55566
1	0.6006	0.6106	0.5998	0.6009	0.6007	0.6006	0.60060
2	0.6693	0.6967	0.6662	0.6716	0.6696	0.6695	0.66927
4	0.75795	0.8161	0.7524	0.7711	0.75794	0.7610	0.75800
10	0.8751	0.9590	0.8853	0.9198	0.8730	0.8981	0.87393
20	0.93665	0.9966	0.9672	0.9860	0.94375	0.97447	0.93526
$\infty$	1	1	1	1	1	1	1

TABLE III.

$t$	$\frac{1}{\pi} \sin \varphi$	$k_1(t)$	$k_2^*(t)$
0	0	0	0
0.2	0.19099	0.00705	0.19804
0.4	0.25465	0.02101	0.27566
0.6	0.29173	0.04072	0.33245
0.8	0.31188	0.06629	0.37817
1.0	0.31831	0.09838	0.41669
1.2	0.31188	0.13815	0.45003
1.4	0.29173	0.18769	0.47942
1.6	0.25465	0.25100	0.50565
1.8	0.19099	0.33832	0.52931
2.0	0	0.55081	0.55081
3.0	—	→	0.6351
4.0	—	→	0.6945
5.0	—	→	0.7388
10.0	—	→	0.8561
16.0	—	→	0.9117
$\infty$	—	→	1