Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 70, nº I, p. 37-61

Deuxième Section

Sciences Physiques et Chimiques

Matrices de projection et techniques d'itération

PAR

B. FRAEYS de VEUBEKE

SOMMAIRE. La détermination par itération des solutions de problèmes aux valeurs propres est un procédé d'un grand intérêt pratique. Pour la recherche d'un mode supérieur on peut éliminer le phénomène de régression vers le mode fondamental (de valeur caractéristique la plus élevée) en modifiant la matrice d'itération ou le noyau de l'équation intégrale. Certains procédés proposés à cet effet constituent implicitement des projections orthogonales ou obliques sur un sous-espace vectoriel orthogonal aux modes à éliminer. L'introduction explicite de matrices de projection permet d'unifier ces méthodes, de les généraliser et d'en clarifier l'application.

Dans une prémière partie la notion de matrice de projection simple est introduite et discutée ainsi que la construction systématique de projections multiples par un enchaînement de projections simples en pré- ou en postmultiplication.

Dans une seconde partie les matrices de projection sont appliquées à la détermination des modes supérieurs dans les problèmes auto-adjoints. La « déflation » et le « balayage » sont retrouvés à titre de cas particuliers. Les avantages d'un nouveau cas particulier le « balayage en prémultiplication » sont exposés, et la méthode appliquée dans la troisième partie à un exemple numérique simple.

§ I. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES MATRICES DE PROJECTION

I. 1. *Définition*

Dans un espace vectoriel à n dimensions soient a et b des matrices colonnes représentant deux vecteurs, M une matrice symétrique et définie positive. Avec la condition d'un produit scalaire différent de zéro

$$a' \mathrm{M}\, b = b' \mathrm{M}\, a \neq 0$$

définissons des matrices

$$\mathrm{P} = \frac{a\, b' \mathrm{M}}{b' \mathrm{M}\, a} \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{E} - \mathrm{P} = \mathrm{E} - \frac{a\, b' \mathrm{M}}{b' \mathrm{M}\, a} \tag{1.1}$$

où E désigne la matrice unité.

Il est clair que la multiplication de a ou de b par un scalaire n'affecte pas ces matrices et que seule la direction des vecteurs qui les constituent est significative. Les composantes

$$p = \mathrm{P}\, x \qquad\qquad q = \mathrm{Q}\, x$$

d'un vecteur quelconque x ont les propriétés, de vérification élémentaire,

$$p + q = x$$

$$p = \left(\frac{b'\,\mathrm{M}\, x}{b'\,\mathrm{M}\, a}\right) a$$

$$b'\,\mathrm{M}\, q = 0$$

Le vecteur x se trouve décomposé dans la somme d'un vecteur parallèle à a et d'un vecteur perpendiculaire à b. La matrice Q, considérée comme un opérateur, projette tout vecteur parallèlement à a sur le sous-espace orthogonal à b; c'est une matrice de projection simple. Les définitions introduites sont en accord avec les définitions générales des matrices de projection telles que celle de HAMBURGER et GRIMSHAW (1).

I. 2. *Structure d'une matrice de projection*

Mettons en évidence la structure de Q par la recherche de ses vecteurs caractéristiques à droite, qui obéissent à l'équation

$$\mathrm{Q}\, x = \xi\, x \tag{1.2}$$

Substituant la définition de Q il vient

$$(1 - \xi)\, x = \left(\frac{b'\,\mathrm{M}\, x}{b'\,\mathrm{M}\, a}\right) a \tag{1.3}$$

et, multipliant à gauche par $b'\,\mathrm{M}$

$$(1 - \xi)\; b'\,\mathrm{M}\, x = b'\,\mathrm{M}\, x$$

Cette dernière équation a pour solutions soit $\xi = 0$, soit $b'\,\mathrm{M}\, x = 0$, auxquelles correspondent respectivement par (1.3)

$$x \doteq a \text{ (*)} \qquad \text{et} \qquad \xi = 1.$$

L'équation (1.2) a donc les seules solutions, de vérification immédiate,

$$\mathrm{Q}\, a = 0 \tag{1.4 a}$$

$$\mathrm{Q}\, x = x \quad \text{pour} \quad b'\,\mathrm{M}\, x = 0 \tag{1.4 b}$$

(*) Le symbole $\doteq$ signifie l'égalité à un facteur scalaire près et s'applique de façon générale aux vecteurs caractéristiques.

Elles sont d'ailleurs géométriquement intuitives; (1.4 *a*) exprime qu'un vecteur parallèle au rayon *a* est annulé par la projection, (1.4 *b*) que tout vecteur du sous-espace orthogonal à *b* est conservé.

La recherche des vecteurs caractéristiques à gauche, répondant à l'équation

$$y' \mathrm{M} \mathrm{Q} = \eta \, y' \mathrm{M} \tag{1.5}$$

se ramène à celle des vacteurs caractéristiques à droite pour la matrice duale $\mathrm{Q}^{(d)}$, obtenue par échange des rôles de *a* et de *b*.

$$\mathrm{Q}^{(d)} = \mathrm{E} - \frac{b \, a' \mathrm{M}}{b' \mathrm{M} \, a} \tag{1.6}$$

En effet si l'on transpose (1.5) et fait usage de l'identité

$$\mathrm{Q}' \mathrm{M} = \mathrm{M} \, \mathrm{Q}^{(d)}$$

il vient en simplifiant à gauche par M

$$\mathrm{Q}^{(d)} y = \eta \, y$$

Les solutions ($\eta = 0$, $y \doteq b$) et ($\eta = 1$, $y' \mathrm{M} \, a = 0$) de ce problème correspondent donc à

$$b' \mathrm{M} \mathrm{Q} = 0 \tag{1.7 a}$$

$$y' \mathrm{M} \mathrm{Q} = y' \mathrm{M} \quad \text{pour} \quad y' \mathrm{M} \, a = 0 \tag{1.7 b}$$

L'équation (1.7 *a*) exprime que tout vecteur projeté appartient au sous-espace orthogonal à *b*; (1.7 *b*) que le produit scalaire de tout vecteur avec un vecteur orthogonal au rayon est conservé.

De (1.7 *a*) il résulte que pour tout *x*

$$\mathrm{Q} \, (\mathrm{Q} \, x) = \mathrm{Q} \, x \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$$

De même $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$. Cette propriété d'idempotence est caractéristique de toute matrice de projection et lui sert parfois de définition générale. Enfin il est utile de remarquer que si la projection est orthogonale, la matrice de projection s'identifie à la matrice duale et le produit M Q devient symétrique.

$$a \doteq b \longrightarrow \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^{(d)} \quad \text{et} \quad \mathrm{M} \mathrm{Q} = \mathrm{Q}' \mathrm{M}$$

1.3. *Commutabilité d'une matrice Q avec une matrice quelconque A*

La commutabilité implique les conditions nécessaires

$$\mathrm{Q} \mathrm{A} \, a = \mathrm{A} \mathrm{Q} \, a \quad \text{et} \quad b' \mathrm{M} \mathrm{A} \mathrm{Q} = b' \mathrm{M} \mathrm{Q} \mathrm{A}$$

En vertu des propriétés (1.4 a) et (1.7 a) les seconds membres sont nuls. En vertu des mêmes propriétés la nullité des premiers membres requiert

$$A\,a = \alpha\,a \qquad b'\,M\,A = \beta\,b'\,M$$

Les vecteurs a et $M\,b$ doivent donc être respectivement vecteur caractéristique à droite et vecteur caractéristique à gauche de A. Dans un tel cas il vient par calcul direct

$$A\,Q - Q\,A = (\beta - \alpha)\,\frac{a\,b'\,M}{b'\,M\,a}$$

et il apparaît nécessaire et suffisant que ces vecteurs appartiennent à la même valeur caractéristique : $\alpha = \beta$; auquel cas d'ailleurs la condition $b'\,M\,a \neq 0$ est vérifiée.

1.4. *Produit de deux matrices Q*

Soient $Q_1(a_1, b_1)$ et $Q_2(a_2, b_2)$ deux matrices de projection. On a les conditions nécessaires

$$b'_1\,M\,a_1 \neq 0 \qquad b'_2\,M\,a_2 \neq 0 \tag{1.8}$$

Si a_1 est parallèle à a_2 le produit se comporte comme une projection simple

$$a_1 \doteq a_2 \longrightarrow Q_1\,Q_2 = Q_1 \tag{1.9}$$

Ce résultat se vérifie par calcul direct ou en observant que le vecteur $P_2\,x = (E - Q_2)\,x$ étant parallèle à a_2 et donc à a_1, la propriété (1.4 a) entraîne

$$Q_1\,(E - Q_2)\,x = 0$$

Cette relation ayant lieu quel que soit x implique (1.9).

De même si b_1 est parallèle à b_2

$$b_1 \doteq b_2 \longrightarrow Q_1\,Q_2 = Q_2 \tag{1.10}$$

Car $Q_2\,x$ étant pour tout x orthogonal à b_2 et donc à b_1, la propriété (1.4 b) entraîne $Q_1Q_2x = Q_2x$ et implique (1.10). En dehors de ces résultats géométriquement évidents examinons la nature du produit Q_1Q_2 dans le cas plus intéressant où les vecteurs (a_1, a_2) sont linéairement indépendants ainsi que (b_1, b_2). Cherchons dans ce but les vecteurs caractéristiques à droite qui répondent à l'équation

$$Q_1Q_2x = \xi\,x \tag{1.11}$$

Multipliant à gauche par $b'_1\mathrm{M}$ et utilisant (1.7 *a*) il vient

$$\xi\,(b'_1\,\mathrm{M}\,x) = 0$$

Deux cas sont donc à distinguer :

1) $$b'_1\,\mathrm{M}\,x \neq 0 \tag{1.12}$$

Dès lors $\xi = 0$, et il faut rechercher les solutions de

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2x = 0$$

En vertu de (1.4 *a*) elles doivent aussi satisfaire à la relation

$$\mathrm{Q}_2x = \alpha_1 a_1 \tag{1.13}$$

Multiplions à gauche par $b'_2\,\mathrm{M}$ et utilisons (1.4 *b*), il vient

$$\alpha_1\,b'_2\,\mathrm{M}\,a_1 = 0$$

Distinguons alors les deux sous-cas :

1.*a*) $b'_2\,\mathrm{M}\,a_1 \neq 0$ qui entraîne $\alpha_1 = 0$.

L'unique solution de (1.13) est alors $x \doteq a_2$. Dans l'équation (1.11) a_2 est le seul vecteur caractéristique associé à $\xi = 0$.

1.*b*) $b'_2\,\mathrm{M}\,a_1 = 0$.

Il en découle par (1.4 *b*) $\mathrm{Q}_2a_1 = a_1$ et par (1.4 *a*)

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2a_1 = 0$$

(1.11) possède ici deux vecteurs caractéristiques associés à la valeur zéro

$$x \doteq a_1 \qquad x \doteq a_2 \qquad \text{pour} \qquad \xi = 0.$$

Observons que les résultats des deux sous-cas ne sont compatibles avec (1.12) que si, outre la première des conditions (1.8) on ait aussi

$$b'_1\,\mathrm{M}\,a_2 \neq 0 \tag{1.12'}$$

2) $$b'_1\,\mathrm{M}\,x = 0 \tag{1.14}$$

Le vecteur caractéristique appartient au sous-espace orthogonal à b_1. Par conséquent

$$\mathrm{Q}_1x = x$$

Comme d'autre part, par définition de Q_2

$$\mathrm{Q}_2x = x - \left(\frac{b'_2\,\mathrm{M}\,x}{b'_2\,\mathrm{M}\,a_2}\right) a_2$$

il vient

$$Q_1 Q_2 x = x - \left(\frac{b'_2 \mathrm{M}\, x}{b'_2 \mathrm{M}\, a_2}\right) Q_1\, a_2$$

d'où, avec (1.11)

$$(1 - \xi)\, x = \left(\frac{b'_2 \mathrm{M}\, x}{b'_2 \mathrm{M}\, a_2}\right) Q_1\, a_2 \qquad (1.15)$$

Enfin, a_2 étant linéairement indépendant de a_1, $Q_1 a_2 \neq 0$ et il découle de (1.15) que

a) à la valeur caractéristique $\xi = 1$ correspondent $(n - 2)$ vecteurs linéairement indépendants satisfaisant à (1.14) et à

$$b'_2 \mathrm{M}\, x = 0 \qquad (1.16)$$

et formant par conséquent une base du sous-espace orthogonal à b_1 et b_2.

b) Il existe une valeur caractéristique $\xi \neq 1$ associée au vecteur caractéristique $x \doteq Q_1 a_2$ à condition que $b'_2 \mathrm{M}\, Q_1\, a_2 \neq 0$.

Le développement de cette condition quand on y remplace Q_1 par son expression devient équivalente à la condition sur le déterminant de Gram

$$\Gamma = \begin{vmatrix} b'_1 \mathrm{M}\, a_2 & b'_i \mathrm{M}\, a_2 \\ b'_2 \mathrm{M}\, a_1 & b'_2 \mathrm{M}\, a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.17)$$

Par (1.7 *a*) ce vecteur caractéristique satisfait à l'équation (1.14) et la valeur caractéristique explicite est

$$\xi = \frac{(b'_1 \mathrm{M}\, a_2)\ (b'_2 \mathrm{M}\, a_1)}{(b'_1 \mathrm{M}\, a_1)\ (b'_2 \mathrm{M}\, a_2)} \qquad (1.18)$$

La discussion suivante résume les situations possibles.

Cas général

Les solutions 1.*a* 2.*a* et 2.*b* existent c'est-à-dire

$\xi = 0$ est une racine simple de vecteur $x \doteq a_2$

$\xi = 1$ est une racine de multiplicité $(n - 2)$ associée à $(n - 2)$ vecteurs linéairement indépendants formant un complément orthogonal à b_1 et b_2.

La valeur (1.18) est une racine simple, différente de zéro et de un, associée au vecteur $x \doteq Q_1 a_2$.

Les diviseurs élémentaires sont donc tous linéaires et la matrice est diagonalisable.

Cas particuliers

1. $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 \neq 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ et par conséquent $\Gamma \neq 0$. Les solutions 1.*b* et 2.*a* existent.

$\xi = 0$ devient une racine double associée aux vecteurs indépendants $x \doteq a_1$ et $x \doteq a_2$.

La solution 2.*b* existe aussi mais elle n'est pas distincte. En effet l'hypothèse $b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ entraîne la confluence de (1.18) avec l'unique racine $\xi = 0$ du cas général tout en fournissant un vecteur associé indépendant de a_2. En fait ce vecteur est une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes trouvées sub 1.*b*.

2. $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 \neq 0$ et par conséquent $\Gamma \neq 0$. Seules les solutions 2.*a* et 2.*b* existent. La solution 2.*b* ne fournit qu'un vecteur caractéristique qui, en vertu de l'hypothèse $b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0$, est $x \doteq \mathrm{Q}_1 a_2 = a_2$ associé à la racine $\xi = 0$.

La même hypothèse entraîne d'ailleurs la relation remarquable

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 - \mathrm{E} \tag{1.19}$$

La matrice est défective et son diviseur élémentaire non-linéaire est relatif à la racine nulle. En effet, multipliant (1.19) à droite par le vecteur a_1, qui est manifestement linéairement indépendant des vecteurs caractéristiques,

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 a_1 = \mathrm{Q}_2 a_1 - a_1 = -\left(\frac{b'_2 \mathrm{M}\, a_1}{b'_2 \mathrm{M}\, a_2}\right) a_2 \tag{1.20}$$

on retrouve le vecteur associé à la racine nulle, multiplié par un facteur scalaire différent de zéro.

3. $\qquad b'_1 \mathrm{M}\, a_2 \neq 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 \neq 0 \quad \Gamma = 0.$

Les solutions 1.*a*, 2.*a* et 2.*b* existent.

Ici la solution 2.*b* correspond en vertu de $\Gamma = 0$ à une racine $\xi = 1$, qui par confluence avec la solution 2.*a* acquiert ainsi la multiplicité $(n - 1)$. Le vecteur associé de la solution 2.*b* n'est pas indépendant des solutions de 2.*a* car il appartient au complément orthogonal de (b_1, b_2). En effet, en vertu de (1.7 *a*) le vecteur $\mathrm{Q}_1 a_2$ est orthogonal à b_1; il l'est aussi à b_2 car

$$b'_2 \mathrm{M}\,(\mathrm{Q}_1 a_2) = (b'_2 \mathrm{M}\, a_2) - \frac{(b'_2 \mathrm{M}\, a_1)}{(b'_1 \mathrm{M}\, a_1)}\,(b'_1 \mathrm{M}\, a_2) = 0$$

précisément en vertu de $\Gamma = 0$.

La matrice produit est à nouveau défective mais le diviseur élémentaire non-linéaire est cette fois relatif à la racine $\xi = 1$.

Il reste à examiner le cas doublement particulier :

$$b'_1 \mathrm{M}\, a_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0 \text{ et par conséquent } \Gamma \neq 0.$$

4. Il se rattache logiquement au deuxième cas particulier, car il suffit d'y introduire la deuxième hypothèse au second membre de (1.20) pour voir que a_1 redevient un vecteur caractéristique associé avec a_2 à la racine double $\xi = 0$. Dans son résultat il ne se distingue donc guère du premier cas particulier. Par rapport à ce dernier il présente en plus un caractère de commutativité

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1$$

qui peut être établi par calcul direct. Les conditions générales de commutativité, établies à la section 1.3 sont d'ailleurs vérifiées. Par exemple, les hypothèses définissant ce cas assurent bien que a_1 et $\mathrm{M}\, b_1$ sont respectivement vecteur caractéristique à droite et à gauche de Q_2 pour la même racine $\xi = 1$.

Une discussion parallèle peut être conduite pour la recherche des vecteurs caractéristiques à gauche du produit. Il suffit d'ailleurs dans les résultats précédents de substituer y à x, η à ξ et de permuter les rôles de a et b et des indices 1 et 2. En effet η et y sont aussi solutions du problème dual

$$\mathrm{Q}_2^{(d)}\, \mathrm{Q}_1^{(d)}\, y = \eta\, y$$

Conclusions

Les seuls résultats explicites que nous voulons noter ici sont ceux relatifs au cas particulier

$$b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0 \text{ qui entraîne } \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 a_1 = 0 \quad \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 a_2 = 0 \qquad (1.21a)$$

$$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 x = x \quad \text{pour} \quad b'_1 \mathrm{M}\, x = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, x = 0 \qquad 1.21b)$$

$$b'_1 \mathrm{M}\, \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = 0 \quad b'_2 \mathrm{M}\, \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = 0 \qquad (1.21c)$$

$$y'.\mathrm{M}\, \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2 = y'\mathrm{M} \quad \text{pour} \quad y'\, \mathrm{M}\, a_1 = 0 \quad y'\, \mathrm{M}\, a_2 = 0 \qquad (1.21d)$$

Dans ce cas le produit $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ a le caractère d'un opérateur qui projette tout vecteur dans le sous-espace orthogonal à la fois à b_1 et à b_2; c'est une matrice de projection multiple.

La condition $b'_2 \mathrm{M}\, a_1 = 0$ est d'ailleurs géométriquement intuitive si l'on observe que, la projection Q_2 opérant la première, il s'indique de choisir le rayon de projection de la suivante dans le sous-espace de projection de la première.

La relation (1.19) est valable à condition d'échanger les indices

$$Q_2Q_1 = Q_1 + Q_2 - E$$

Multipliant alors à droite par Q_2 et faisant usage de l'idempotence de cette matrice

$$Q_2Q_1Q_2 = Q_1Q_2$$

Multipliant encore à gauche par Q_1 et faisant usage de son idempotence

$$(Q_1Q_2)^2 = Q_1Q_2$$

Ceci confirme le caractère général de projection du produit. Si de plus $b'_1 \, M \, a_2 = 0$ on a vu que les facteurs du produit deviennent commutables.

Dans la section suivante ces résultats seront généralisés pour un produit de plus de deux projections simples.

1.5. *Chaînes de projections en postmultiplication*

Soit

$$x_{(r)} \qquad\qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

une base, non nécessairement orthogonale, de l'espace vectoriel. Proposons nous de construire une suite de projections simples R_m, telles que $R_1R_2 \ldots R_m x$ soit orthogonal pour tout x aux m premiers vecteurs de base. Nous appellerons une telle suite une chaîne pour marquer son caractère de projection multiple.

Sur la base des résultats précédents nous pouvons construire a chaîne progressivement en supposant qu'un produit

$$A_{m-1} = R_1R_2 \ldots R_{m-1} \tag{1.22}$$

ait été construit avec les propriétés

$$A_{m-1} \, a_s = 0 \tag{1.23a}$$

$$x'_{(s)} \, M \, A_{m-1} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots m-1) \tag{1.23b}$$

et en recherchant les éléments (a_m, b_m) de la projection R_m. Les propriétés demandées du nouveau produit $A_m = A_{m-1} \, R_m$ sont

$$x'_{(r)} \, M \, A_m = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots m) \tag{1.24}$$

En multipliant (1.23*b*) à droite par R_m on voit que ces propriétés sont déjà vérifiées pour les valeurs $r = 1, 2, \ldots m-1$, il reste donc la condition

$$x'_{(m)} \, M \, A_m = (x'_{(m)} \, M \, A_{m-1}) \, R_m = 0$$

En vertu de (1.7*a*) elle est équivalente à

$$x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1} \doteq b'_m\,\mathrm{M} \tag{1.25}$$

La simple égalité peut être choisie sans nuire à la généralité du résultat car le facteur scalaire éventuel figure à la fois au numérateur et au dénominateur de l'expression de R_m :

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{a_m\,b'_m\,\mathrm{M}}{b'_m\,\mathrm{M}\,a_m}$$

Remplaçons y $b'_m\mathrm{M}$ par sa valeur, il vient

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{a_m\,x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1}}{x'_{(m)}\,\mathrm{M}\,\mathrm{A}_{m-1}\,a_m} \tag{1.26}$$

Dans cette formule le vecteur a_m est soumis à la seule condition de ne pas annuler le dénominateur. Les formules (1.22) et (1.26) permettent le calcul des projections R_m par récurrence.

Il reste à prouver que tout comme (1.24) étend les propriétés (1.23*b*) à une valeur supérieure de l'indice, (1.23*a*) subit l'extension analogue

$$\mathrm{A}_m a_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots\, m) \tag{1.27}$$

En effet par (1.22) et (1.25) il vient d'abord

$$b'_m\,\mathrm{M}\,a_s = 0 \qquad (s = 1, 2 \,\ldots\, m-1) \tag{1.28}$$

condition géométriquement intuitive si l'on observe que la projection R_m étant appliquée la première, les rayons des projections suivantes doivent naturellement être contenus dans le sous-espace de projection de R_m. Ensuite, il résulte des relations d'orthogonalité (1.28) et de (1.4 *b*) que

$$\mathrm{R}_m\,a_s = a_s \qquad (s = 1, 2 \,\ldots\, m-1) \tag{1.29}$$

En multipliant cette équation à gauche par A_{m-1} et eu égard à (1.22), la relation (1.27) est déjà vérifiée pour les valeurs $(1, 2 \ldots m-1)$ de l'indice r. Enfin pour $r = m$ elle découle d'une application de (1.4 *a*)

$$\mathrm{R}_m a_m = 0 \longrightarrow \mathrm{A}_m a_m = 0.$$

Il peut être intéressant d'observer qu'en faisant un usage systématique de la relation entre projections duales

$$\mathrm{R}'_m\,\mathrm{M} = \mathrm{M}\,\mathrm{R}_m^{(d)}$$

l'équation (1.25) transposée fournit la valeur explicite

$$b_m = \mathrm{R}_{m-1}^{(d)} \ldots \mathrm{R}_2^{(d)}\,\mathrm{R}_1^{(d)}\,x_m \tag{1.30}$$

Quand cette formule est développée par introduction des expressions

$$R_s^{(d)} = E - \frac{b_s a'_s M}{b'_s M a_s}$$

b_m apparaît comme une combinaison linéaire des b_s antérieurs ($s = 1, 2 \ldots m - 1$) organisée de façon à obtenir son orthogonalité avec les a_s antérieurs. Ce procédé est une extension du processus d'orthogonalisation de Schmidt.

1.6. *Chaînes de projections en prémultiplication*

Une méthode similaire est applicable pour la construction d'une chaîne de projections dont les facteurs sont appliqués successivement en prémultiplication. Une telle chaîne se déduit directement de la chaîne en post-multiplication. Il suffit d'observer qu'en multipliant (1.26) à gauche par $R_1 R_2 \ldots R_{m-1}$, le résultat peut être factorisé sous la forme

$$A_m = L_m R_1 R_2 \ldots R_{m-1} = L_m A_{m-1}$$

où

$$L_m = E - \frac{A_{m-1} a_m x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M A_{m-1} a_m} \qquad (1.31)$$

est une matrice de projection construite avec $A_{m-1} a_m$ comme rayon et $x_{(m)}$ comme complément orthogonal. De proche en proche

$$A_m = L_m L_{m-1} \ldots L_2 L_1 \qquad (1.32)$$

de sorte que suivant (1.31) et (1.32) une matrice L_m se laisse construire par récurrence à partir des L_s ($s = 1, 2 \ldots m - 1$). Ici les projections sont appliquées dans l'ordre de leur formation et l'expression d'un rayon satisfait manifestement aux conditions intuitives suivant lesquelles il appartient au sous-espace dans lequel les vecteurs ont été projetés par les opérations précédentes.

1.7. *Choix particuliers des rayons de projection*

Dans les applications aux problèmes d'itération le choix des rayons a_m sera guidé par les simplifications qui peuvent être obtenues pour la nouvelle matrice d'itération. Dans cette section nous examinons seulement les choix qui simplifient la structure de la matrice de projection elle-même ou qui lui confèrent des propriétés nouvelles.

1°) Le choix $$a_m = b_m \tag{1.33}$$

fait des R_m des projections orthogonales en même temps qu'il assure les conditions indispensables

$$b'_m \, M \, a_m = a'_m \, M \, b_m \neq 0.$$

De plus comme $R_m = R_m^{(d)}$ on aura par (1.29)

$$a_m = b_m = R_{m-1} \ldots R_2 R_1 \, x_{(m)} \tag{1.34}$$

Les vecteurs $a_m = b_m$ sont alors construits à partir de la base $x_{(r)}$ par le processus de Schmidt. De (1.29) on tire les propriétés nouvelles

$$R_m b_s = b_s \longrightarrow R_m x_{(s)} = x_{(s)} \quad (s = 1, 2 \ldots m - 1) \tag{1.35}$$

De (1.28) et (1.33) il découle que pour deux indices m et r différents

$$b'_m \, M \, a_r = 0 \quad b'_r \, M \, a_m = 0$$

et donc, étant dans le cas doublement particulier de la section 1.4, deux matrices R_m et R_r quelconques commutent.

Enfin on établit sans difficulté la généralisation de (1.19)

$$A_m = R_1 + R_2 + \ldots + R_m - (m - 1)\, E = E - \sum_1^m \frac{b_r \, b'_r \, M}{b'_r \, M \, b_r} \tag{1.36}$$

Par suite de la commutativité des matrices R ont peut remplacer (1.34) par

$$a_m = b_m = A_{m-1} \, x_{(m)} \tag{1.37}$$

Introduisant ceci dans (1.31) et notant que A_{m-1} étant une projection multiple est idempotente

$$L_m = E - \frac{A_{m-1} \, x_{(m)} \, x'_{(m)} \, M}{x'_{(m)} \, M \, A_{m-1} \, x_{(m)}} \tag{1.38}$$

2°) Le résultat (1.38) établit qu'on obtient la même chaîne de matrices en prémultiplication en faisant le choix simple

$$a_m = x_{(m)} \tag{1.39}$$

Il fournit une chaîne de post-multiplication

$$R_m = E - \frac{x_{(m)} \, x'_{(m)} \, M \, A_{m-1}}{x'_{(m)} \, M \, A_{m-1} \, x_{(m)}} \tag{1.40}$$

distincte de la précédente. En particulier ni ces matrices R_m ni les L_m ne sont commutables.

1.8. *Cas d'une base orthogonale*

Les problèmes aux valeurs caractéristiques auto-adjoints présentent le cas de vecteurs caractéristiques $x_{(r)}$ orthogonaux.

$$x'_{(r)}\,M\,x_{(s)} = 0 \qquad r \neq s \tag{1.41}$$

Dans ce cas on a les nouvelles propriétés générales

$$A_m\,x_{(t)} = x_{(t)} \qquad (t = m+1,\ m+2 \ldots n) \tag{1.42}$$

Il en résulte que pour l'un ou l'autre choix particulier examiné dans la section précédente

$$b_m = a_m = x_{(m)} \tag{1.43}$$

et

$$R_m = L_m = E - \frac{x_{(m)}\,x'_{(m)}\,M}{x'_{(m)}\,M\,x_{(m)}} \tag{1.44}$$

toutes matrices commutables et jouissant des propriétés sélectives

$$\begin{aligned} R_m\,x_{(r)} &= x_{(r)} \qquad && r \neq m \\ &= 0 && r = m. \end{aligned} \tag{1.45}$$

§ 2. — APPLICATION DES MATRICES DE PROJECTION AUX TECHNIQUES D'ITÉRATION

2.1. *Problèmes auto-adjoints. Le premier mode*

Seuls les processus d'itération dans les problèmes auto-adjoints seront envisagés ici. La forme typique d'un tel problème à n degrés de liberté est

$$(M - \lambda\,C)\,x = 0 \tag{2.1}$$

Dans le cas des petites oscillations autour d'une position d'équilibre, par exemple, M représente la matrice symétrique et définie positive des coefficients d'inertie et C la matrice symétrique des coefficients d'élasticité. La forme (2.1) dérive des équations générales des petits mouvements

$$M\,\ddot{q} + C\,q = p \tag{2.2}$$

en supprimant les forces extérieures appliquées au second membre et en séparant la variable temps

$$q = x\,e^{i\omega t} \qquad \lambda = 1/\omega^2$$

Si la position d'équilibre est stable C est aussi définie-positive et possède un inverse C^{-1}, qui n'est autre que la matrice des coefficients d'influence résolvant le problème statique

$$C\,q = p \qquad\qquad q = C^{-1}\,p \tag{2.3}$$

auquel (2.2) se réduit en l'absence d'accélérations.

Le cas où la position d'équilibre est indifférente et C semi-définie positive peut être traité par extension de la notion de coefficient d'influence (II).

Les valeurs caractéristiques sont toutes réelles et positives et nous les supposerons rangées par ordre de valeurs décroissantes

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$$

Des vecteurs caractéristiques ou modes correspondants $x_{(r)}$ on sait qu'ils sont orthogonaux par rapport à chacune des matrices M ou C.

$$\begin{aligned} x'_{(r)}\,M\,x_{(s)} &= 0 \\ x'_{(r)}\,C\,x_{(s)} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad r \neq s \tag{2.4}$$

Ceci a lieu automatiquement à l'intervention de l'équation

$$M\,x_{(r)} = \lambda_r\,C\,x_{(r)} \tag{2.5}$$

que satisfait chaque mode, à condition que $\lambda_r \neq \lambda_s$. Quand une valeur caractéristique est racine multiple on sait aussi que le nombre de modes linéairement indépendants correspond au degré de multiplicité. Dans ce cas, moyennant une éventuelle orthogonalisation de Schmidt, on peut considérer que les équations (2.4) sont toujours satisfaites.

Duncan et Collar (III) ont introduit pour la recherche des modes une technique d'itération basée sur la forme équivalente

$$C^{-1}\,M\,x = \lambda\,x \tag{2.6}$$

de l'équation (2.1). Un vecteur x quelconque admettant une expansion unique

$$x = \sum_1^n \alpha_r\,x_{(r)}$$

dans la base orthogonale des modes avec les coordonnées

$$\alpha_r = (x'_{(r)}\,M\,x)\,/(x'_{(r)}\,M\,x_{(r)})$$

on trouve après application de l'opérateur $C^{-1}\,M$ à gauche et utilisation des relations

$$C^{-1} M x_{(r)} = \lambda_r x_{(r)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

$$C^{-1} M x = \sum_1^n \alpha_r \lambda_r x_{(r)}$$

et, après m itérations

$$(C^{-1} M)^m x = \sum_1^n \alpha_r \lambda_r^m x_{(r)}$$

Sauf le cas fortuit $\alpha_1 = 0$, les vecteurs itérés convergent vers $x_{(1)}$, dont la valeur caractéristique λ_1 est la plus élevée. Le rapport d'éléments correspondants dans deux itérés successifs converge vers λ_1. Une valeur plus exacte est toujours fournie par l'un ou l'autre des quotients de Rayleigh

$$\lambda = \frac{x' M x}{x' C x} \qquad \lambda = \frac{x' M C^{-1} M x}{x' M x} \tag{2.7}$$

De façon générale pour des erreurs du premier ordre sur les éléments d'un mode ces expressions fournissent la valeur caractéristique avec des erreurs du second ordre seulement.

Si la valeur numérique de λ_1 diffère appréciablement de l'unité les éléments d'un itéré finissent par croître ou décroître démesurément. Le mode n'étant défini qu'à un facteur près une technique usuelle consiste soit à ramener un des éléments du vecteur à une valeur numérique constante avant de répéter l'itération, soit à diviser ce vecteur par son quotient de Rayleigh. La stabilisation du rapport des éléments de deux itérés successifs et sa comparaison avec le quotient de Rayleigh sont alors des indices qui permettent de décider l'arrêt des opérations.

2.2. *Principe de la détermination des modes supérieurs*

Le mode $x_{(1)}$ étant supposé connu on forme une matrice de projection

$$R_1 = E - \frac{a_1 x'_{(1)} M}{x'_{(1)} M a_1} = L_1$$

telle que $R_1 x$ soit orthogonal pour tout x à $x_{(1)}$. Dès lors

$$R_1 x = \beta_2 x_{(2)} + \ldots + \beta_n x_{(n)}$$

ne contient plus en principe la coordonnée β_1.

Sauf le cas fortuit $\beta_2 = 0$, l'utilisation du vecteur initial $R_1 x$ doit assurer la convergence vers le second mode. En pratique cependant $x_{(1)}$ n'est jamais qu'une approximation, ne fût-ce que par la nécessité de limiter le nombre de décimales retenues. Avec $x_{(1)}$, R_1 est aussi une matrice approchée et $R_1 x$ peut contenir une composante qui, aussi faible soit-elle, est renforcée à chaque itération. Il s'impose alors pour forcer la convergence vers $x_{(2)}$ de répéter cycliquement l'application de l'opérateur R_1.

Quand R_1 est une projection orthogonale, l'opération cyclique

$$R_1 x = x - \left(\frac{x'_{(1)} M x}{x'_{(1)} M x_{(1)}} \right) x_{(1)}$$

est en fait l'orthogonalisation purificatrice répétée initialement préconisée par J. J. Koch (IV).

Si l'application de l'opérateur précède ou suit chaque itération il est plus avantageux de former au préalable l'un ou l'autre des produits

$$C^{-1} M R_1 \qquad L_1 C^{-1} M$$

Plus généralement, dans le but de déterminer par itération le mode $x_{(m+1)}$ connaissant les modes précédents, on formera l'une ou l'autre des matrices

$$C^{-1} M A_m \qquad\qquad A_m C^{-1} M$$

où, dans le premier cas A_m est progressivement constituée par une chaîne $R_1 R_2 \ldots R_m$, dans le second cas par une chaîne $L_m \ldots L_2 L_1$. Les problèmes modifiés

$$C^{-1} M A_m x = \mu x \qquad\qquad A_m C^{-1} M x = \mu x$$

possèdent chacun en vertu de l'équation (1.42) les valeurs caractéristiques $\mu = \lambda_t$ associées aux modes $x_{(t)}$ du problème initial pour les valeurs $(t = m + 1, \ldots, n)$.

De plus pour tous deux $\mu = 0$ est une valeur caractéristique de multiplicité m. Dans le premier cas elle se trouve associée par (1.27) aux modes

$$x \doteq a_r \qquad (r = 1, 2 \ldots m)$$

dans le second cas aux modes solutions du système linéaire à déterminant non-nul

$$C^{-1} M x \doteq a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

Il est alors évident que quel que soit le vecteur x initial il ne reste dès la première itération qu'une combinaison linéaire des

$$x_{(t)} \quad (t = m + 1, \ldots, n)$$

et que la convergence de principe vers $x_{(m+1)}$ est assurée.

2.3. *Choix particuliers des rayons de projection*

1°) *Déflation*

On fait l'un ou l'autre des choix de la section 1.7 qui, la base étant orthogonale, conduit aux matrices de projection orthogonale simples définies par (1.44).

Les éléments des deux chaînes étant identiques et commutables on peut à chaque stade les appliquer indifféremment en pré- ou post-multiplication. La justification de cette liberté de choix est d'ailleurs visible sur les propriétés sélectives exprimées par (1.45).

Soit $I^{(m)}$ la matrice d'itération ayant servi à déterminer $x_{(m)}$ de sorte que

$$I^{(m)} x_{(m)} = \lambda_m x_{(m)}$$

Appliquons maintenant l'opérateur

$$R_m = E - \frac{x_{(m)} x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M x_{(m)}}$$

en post-multiplication, il vient

$$I^{(m+1)} = I^{(m)} - \lambda_m \frac{x_{(m)} x'_{(m)} M}{x'_{(m)} M x_{(m)}} \tag{2.8}$$

Sous cette dernière forme on reconnaît une technique proposée (dans le cas particulier $M = E$) par HOTELLING (V) sous le nom de « déflation ».

Elle revient à supprimer successivement les termes du développement spectral de la première matrice d'itération fondamentale

$$I^{(1)} = C^{-1} M = \sum_1^n \lambda_r \frac{x_{(r)} x'_{(r)} M}{x'_{(r)} M x_{(r)}}$$

Elle revient aussi à soustraire de chaque colonne de $I^{(m)}$ la colonne $x_{(m)}$ multipliée par un facteur

$$\lambda_m \gamma_{mi} \frac{1}{x'_{(m)} M x_{(m)}}$$

où γ_{mi} est l'élément du vecteur $M x_{(m)}$ qui a le même indice i

que la colonne à modifier. Cette interprétation, obtenue en multipliant (2.8) à droite par le vecteur unité e_i, conduit à un calcul numérique plus économique.

2°) *Balayage en post-multiplication*

Traduction du terme « sweeping » introduit par BESKIN (VI), le balayage en post-multiplication est une technique qui remonte aux premiers travaux de DUNCAN et COLLAR (III). Sans le recours au concept de projection sa manipulation algébrique devient rapidement lourde comme en témoigne la théorie générale que FLOMENHOFT (VII) en a faite.

C'est un cas particulier de la technique des chaînes en post-multiplication correspondant aux choix

$$a_m = e_i$$

où e_i est un vecteur unité (dont l'élément figurant à la ligne d'indice i est égal à l'unité, les autres étant nuls).

Pour que le dénominateur de la matrice de projection ne soit pas nul il suffit que l'élément de la ligne $x_{(m)} \mathrm{MA}_{m-1}$ à l'intersection de la colonne d'indice i soit différent de zéro. Il est aussi préférable qu'il ne soit pas trop petit comparé aux autres éléments.

Avec la notation

$$x'_{(m)} \mathrm{M}\, \mathrm{A}_{m-1} = \| \mathfrak{H}_1\, \mathfrak{H}_2 \ldots \quad \mathfrak{H}_m \| \quad \mathfrak{H}_i \neq 0 \tag{2.9}$$

la structure explicite d'une matrice de la chaîne est

$$\mathrm{R}_m = \mathrm{E} - \frac{e_i\, x'_{(m)} \mathrm{M}\, \mathrm{A}_{m-1}}{x'_{(m)} \mathrm{M}\, \mathrm{A}_{m-1}\, e_i} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots 0 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{\mathfrak{H}_1}{\mathfrak{H}_i} & -\dfrac{\mathfrak{H}_2}{\mathfrak{H}_i} & \ldots 0 \ldots & -\dfrac{\mathfrak{H}_n}{\mathfrak{H}_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots 0 \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

Par suite du grand nombre d'éléments nuls la postmultiplication par cette matrice est une opération rapide. Notons cependant que la formation de la ligne (2.9) exige la connaissance de A_{m-1}. Pour se réserver la possibilité d'un balayage au stade suivant il est donc nécessaire en plus de la formation de la nouvelle matrice d'itération

$$I^{(m)} = I^{(m-1)} R_m$$

de former la nouvelle matrice de balayage globale

$$A_m = A_{m-1} R_m$$

Ceci double en pratique le nombre d'opérations et d'inscriptions. L'avantage principal du balayage résulte des propriétés dérivant de (1.27)

$$C^{-1} M A_m e_i = 0 \quad i = (i_1, i_2 \ldots i_m)$$

Elles expriment que la nouvelle matrice d'itération possède m colonnes de zéros correspondant aux indices i choisis dans les opérations de balayage. Ceci simplifie l'itération. Supposant, pour simplifier l'exposé, que les valeurs ($i = 1, 2 \ldots m$) aient pu être choisies, la structure de la matrice d'itération sera

$$C^{-1} M A_m = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & U \\ \hline 0 & V \end{array} \right\|$$

où U est une sous-matrice rectangulaire et V une sous-matrice carrée à $(n - m)$ lignes et colonnes. Décomposant alors un vecteur x en deux sous-vecteurs u et v comprenant respectivement les m premiers éléments et les $(n - m)$ restant, il faudra résoudre le problème

$$U v = \lambda u \qquad V v = \lambda v$$

L'itération peut être conduite sur la deuxième équation seulement, la partie u du mode étant obtenue par un usage final de la première équation.

3°) *Balayage en prémultiplication*

Un résultat semblable est obtenu avec une chaîne de prémultiplication basée sur les formules (1.31) et (1.32).

Pour la matrice L_1 faisons le choix

$$a = c_i^{(1)}$$

où $c_i^{(1)}$ est une colonne d'indice i de $C^{-1} M$ satisfaisant

$$x'_{(1)} M c_i^{(1)} \neq 0$$

L'application de L_1 en prémultiplication revient à modifier les colonnes de la matrice de première itération comme suit

$$c_r^{(2)} = c_r^{(1)} - \frac{(x'_{(1)}\, \mathrm{M}\, c_r^{(1)})}{(x'_{(1)}\, \mathrm{M}\, c_i^{(1)})}\; c_i^{(1)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

On voit que pour $r = i$ la colonne transformée est nulle. A un stade quelconque, désignant par $c_r^{(m)}$ les colonnes de la matrice $\mathrm{A}_m\, \mathrm{C}^{-1}\, \mathrm{M} = \mathrm{I}^{(m)}$ ayant servi à trouver $x_{(m)}$, le choix $a_m = c_j^{(1)}$ dans I_m, fournit pour colonnes de la nouvelle matrice d'itération

$$c_r^{(m+1)} = c_r^{(m)} - \frac{(x'_{(m)}\, \mathrm{M}\, c_r^{(m)})}{(x'_{(m)}\, \mathrm{M}\, \mathrm{A}_{m-1}\, c_j^{(1)})}\; \mathrm{A}_{m-1}\, c_j^{(1)}$$

Mais

$$\mathrm{A}_{m-1}\, c_j^{(1)} = c_j^{(m)}$$

d'où la formule récurrente

$$c_r^{(m+1)} = c_r^{(m)} - \frac{(x'_{(m)}\, \mathrm{M}\, c_r^{(m)})}{(x'_{(m)}\, \mathrm{M}\, c_j^{(m)})}\; c_j^{(m)} \qquad (r = 1, 2 \ldots n) \tag{2.10}$$

sur laquelle il est apparent que la colonne $c_j^{(m+1)}$ est annulée. Le balayage en prémultiplication a sur celui en postmultiplication l'avantage de ne pas nécessiter la calcul ni l'inscription de la matrice de balayage globale.

Pour une même suite des indices i les deux méthodes de balayage fournissent des matrices d'itération identiques. En effet pour la prémultiplication

$$\mathrm{I}^{(m+1)} = \mathrm{A}^m\, \mathrm{C}^{-1}\, \mathrm{M}$$

possède en vertu de (1.27) la valeur caractéristique zéro associée aux modes solutions de

$$\mathrm{C}^{-1}\, \mathrm{M}\, x \doteq c_i^{(1)} \qquad i = (i_1, i_2 \ldots i_m)$$

Ceux-ci étant manifestement $x \doteq e_i$ comme pour la matrice obtenue par le balayage en post-multiplication et toutes deux ayant, en vertu de (1.42), les mêmes modes $x_{(t)}$ associés aux mêmes valeurs caractéristiques λ_t $(t = m + 1, \ldots, n)$, l'identité annoncée en découle.

La technique de prébalayage, pourtant particulièrement avantageuse, en semble pas avoir été signalée dans la littérature.

§ 3. — APPLICATION NUMÉRIQUE

Considérons l'équation intégrale des vibrations libres de flexion d'une poutre homogène encastrée à une extrémité ($x = 0$) et libre à l'autre ($x = L$).

$$z(x) = \omega^2 \int_0^L G(x, \xi)\, \rho\, S\, z(\xi)\, d\xi \tag{33.1}$$

dans laquelle $z(x)$ est l'amplitude locale de la vibration, ρS la masse répartie constante et $G(x, \xi)$ la fonction de Green. Une méthode rationnelle pour ramener la solution de ce problème à un nombre fini de degrés de liberté consiste à diviser l'intervalle $(0, L)$ en n parties par des points de subdivision ($\xi_0 = 0, \xi_1 \dots \xi_n = L$) et à remplacer l'intégrale par une somme.

$$z(x) = \omega^2 \rho S \sum_{i=1}^{n} G(x, \xi_i)\, z(\xi_i)\, w(\xi_i) \tag{3.2}$$

Les $z(\xi_i)$ sont les valeurs de l'amplitude aux points de subdivision et les $w(\xi_i)$ des poids liés au type de quadrature numérique utilisé. Exigeons alors, par collocation, que l'équation (3.2) soit satisfaite aux points de subdivision ($x_1, \dots, x_n$) ; il vient un système homogène de n équations aux n inconnues $z(\xi_i) = z(x_i)$

$$z(x_j) = \omega^2 \rho S \sum_{i=1}^{n} G(x_j, \xi_i)\, z(\xi_i)\, w(\xi_i) \qquad (j = 1, 2 \dots n)$$

Le point $\xi_0 = 0$ n'intervient pas dans ce cas particulier, car $z(0) = 0$ et $G(0, \xi) = 0$ du fait de l'encastrement.

Avec les notations matricielles

$$z = (z(x_j)) \qquad C^{-1} = (G(x_j, \xi_i))$$

et M matrice *diagonale* des $\rho S w(\xi_i)$, le système est de la forme

$$z = \omega^2 C^{-1} M z$$

analogue à (2.6). Ce procédé revient physiquement à concentrer les masses de la poutre continue d'une façon rationnelle aux points de subdivision. Ainsi, pour quatre intervalles de même longueur $h = L/4$ et utilisant la quadrature de Simpson

$$M = \frac{\rho S h}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tandis que par la théorie de la flexion des poutres de raideur EI constante les coefficients d'influence locaux sont

$$C^{-1} = \frac{h^3}{6EI}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 5 & 16 & 28 & 40 \\ 8 & 28 & 54 & 81 \\ 11 & 40 & 81 & 128 \end{pmatrix}.$$

Effectuant la multiplication matricielle et posant $\lambda = \dfrac{18\,EI}{\omega^3 \rho S h^4}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 32 & 11 \\ 20 & 32 & 112 & 40 \\ 32 & 56 & 216 & 81 \\ 44 & 80 & 324 & 128 \end{pmatrix} z = \lambda z \qquad (3.3)$$

Prenant comme vecteur d'essai la première colonne l'itération converge très rapidement vers le premier mode. Nous nous arrêtons à un stade où le rapport des éléments de deux itérés successifs est stabilisé dans ses sept premiers chiffres significatifs

882.67053	328 955.78	372.6824
3082.12960	1148 655.48	372.6824
5975.24655	2226 869.24	372.6824
9078.65760	3383 455.59	372.6824

Prenant alors comme mode le dernier itéré figurant ci-dessus nous formons son produit scalaire avec les colonnes de la matrice d'itération (3.3). A cet effet on se sert de la partie numérique de la matrice des masses. Il vient

490 384 088   856 167 296   3319 659 648   1260 954 388

Pour un prébalayage annulant la première colonne de la nouvelle matrice d'itération on divise ces produits par le premier d'entre eux

1   1.745 912   6.769 509   2.571 361

A chaque colonne de l'ancienne matrice d'itération on soustrait alors la première colonne multipliée par le facteur correspondant déterminé ci-dessus. Il vient la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -3.967\,296 & -22.156\,072 & -9.570\,888 \\ 0 & -2.918\,240 & -23.390\,180 & -11.427\,220 \\ 0 & 0.130\,816 & -0.624\,288 & -1.283\,552 \\ 0 & 3.179\,872 & 26.141\,604 & 14.860\,116 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

L'itération avec les trois dernières lignes et colonnes assure théoriquement la convergence vers trois derniers éléments d'un second mode. La convergence est ici beaucoup plus lente du fait que la troisième valeur caractéristique est supérieure au cinquième de la seconde. Après une dizaine d'itérations on a trouvé

$$z_{10} = \begin{pmatrix} \\ 507\ 966 \\ 107\ 052 \\ -746\ 626 \end{pmatrix} \qquad z_{11} = \begin{pmatrix} 275\ 877.1 \\ 454\ 552.7 \\ 95\ 795.2 \\ -668\ 117.1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \\ 8.948\ 487 \\ 8.948\ 474 \\ 8.948\ 484 \end{matrix}$$

Le premier élément du dernier itéré a été obtenu à partir des trois éléments du vecteur précédent en utilisant la matrice (3.4) complète. A ce stade on a contrôlé l'exactitude du mode en itérant une fois avec la matrice primitive (3.3). Le nouveau vecteur et les quotients correspondants figurent ci-dessous

$$z_{12} = \begin{pmatrix} 2\ 468\ 702 \\ 4\ 067\ 607 \\ 857\ 296 \\ -5\ 978\ 535 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 8.948\ 557 \\ 8.948\ 592 \\ 8.949\ 263 \\ 8.948\ 335 \end{matrix}$$

L'uniformité des quotients est nettement moins bonne; ce qui est une indication de la présence d'une composante du premier mode introduite par les erreurs de troncature dans le balayage. Comme la valeur de λ_1 est connue avec précision, on peut purifier en formant $z_{13} = \lambda_1 z_{11} - z_{12}$. Ce faisant on renforce très légèremant les composantes parasites du troisième et quatrième mode qui sont multipliées respectivement par $(\lambda_1 - \lambda_3)$ et $(\lambda_1 - \lambda_4)$, tandis que le second mode lui-même l'est par $(\lambda_1 - \lambda_2)$. Néanmoins le résultat est meilleur

$$z_{13} = \begin{pmatrix} 100\ 345.8 \\ 165\ 336.2 \\ 34\ 843.9 \\ -243\ 016.9 \end{pmatrix} \qquad z_{14} = \begin{pmatrix} 897\ 947.3 \\ 1479\ 515.2 \\ 311\ 806.3 \\ -2174\ 628.4 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 8.948\ 528 \\ 8.948\ 525 \\ 8.948\ 662 \\ 8.948\ 465 \end{matrix}$$

Par un quotient de Rayleigh il vient $\lambda_2 = 8.948\ 508$.

On peut apprécier la valeur du modèle à masses concentrées en notant que la solution du problème exact par l'équation différentielle et les conditions aux limites donne

$$\lambda_1 = 372.74 \qquad\qquad \lambda_2 = 9.4905$$

Quoique les modes suivants ne puissent plus prétendre à un rapport raisonnable avec ceux du problème continu il est intéressant de poursuivre le calcul pour examiner l'efficacité de la méthode de balayage. Utilisant z_{13} comme mode, les produits scalaires avec les colonnes de (3.4) ont été formés ainsi que leur quotient par le second d'entre eux

0	—331 191 747	—2 306 742 412	—1 141 041 507
0	1	6.964 976	3.445 259

Un nouveau prébalayage obtenu en soustrayant à chaque colonne de (3.4) la deuxième colonne multipliée par les facteurs qui viennent d'être déterminés fournit la nouvelle matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5.476\ 049 & 4.097\ 474 \\ 0 & 0 & -3.064\ 709 & -1.373\ 128 \\ 0 & 0 & -1.535\ 418 & -1.734\ 247 \\ 0 & 0 & 3.993\ 872 & 3.904\ 634 \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Les dernières valeurs caractéristiques s'obtiennent ici directement en résolvant l'équation séculaire formée sur les éléments des deux dernières lignes et colonnes

$$\lambda_3 = 1.871\ 762 \qquad \lambda_4 = 0.497\ 454$$

Le contrôle entre la somme des valeurs caractéristiques et la trace de la matrice d'itération primitive est excellent. Examinons la forme du troisième mode. Le rapport de ses deux derniers éléments étant connu, le mode complet s'obtient en une seule itération avec la matrice (3.5) complète

	—5.232 680	— 9.791 774	1.871 273
	—0.746 064	— 1.384 944	1.856 334
2.032 872	3.805 052	— 7.144 070	1.877 522
—3.993 872	—7.475 578	—13.960 176	1.867 437

Les deux dernières colonnes donnent les résultats d'une itération de contrôle par la matrice primitive (3.3). La détérioration des quotients indique la propagation des erreurs de troncature. Une purification s'impose si l'on veut des résultats plus précis. Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à choisir chaque fois pour l'annuler la colonne dont le produit scalaire avec le mode à balayer est le plus élevé en valeur absolue. L'expérience semble indiquer que la déflation est moins sensible aux erreurs sur les modes, et une étude théorique de la propagation des erreurs dans les deux méthodes serait d'un intérêt considérable.

RÉFÉRENCES

(I) H. L. HAMBURGER and M. E. GRIMSHAW. Linear transformations in n-dimensional vector space. Cambridge 1951. §-10 pp. 49-57.

(II) B. M. FRAEYS de VEUBEKE. Iteration in semi-definite eigenvalue problems. *Journal of the Aeronautical Sciences.* Vol. 22, N° 10 pp. 710-720, 1955.

(III) W. J. DUNCAN and A. R. COLLAR. A method for the solution of oscillation problems by matrices. *Phil. Mag.* May 1934, p. 865.
voir aussi
R. A. FRAZER, W. J. DUNCAN and A. R. COLLAR. Elementary matrices. Cambridge 1938.
W. J. DUNCAN and D. D. LINDSAY. Methods for calculating the frequencies of overtones. *Aeronautical Research Council. Reports and Memoranda,* N° 1888, 1939.

(IV) J. J. KOCH. *Verhand. 2 Intern. Kongr. f. Techn. Mech.* Zürich 1926, pp. 213-218.

(V) H. HOTELLING. Simplified calculation of principal components. *Psychometrika.* Vol. I, pp. 27-35, 1936.

(VI) L. BESKIN and R. M. ROSENBERG. Higher modes of vibration by a method of sweeping. *Journal of the Aeronautical Sciences.* Vol. 13, N° 11, pp. 597-604, 1946.

(VII) H. I. FLOMENHOFT. A method for the determination of mode shapes and frequencies above the fundamental by matrix iteration. *Journ. Appl. Mech.* Vol. 7, pp. 249-257, 1950.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Laboratoire d'Aéronautique.