

Manuel d'Aérodynamique de  
AGARD (OTAN)

1ère PARTIE

CHAPITRE III

Université de Liège  
BST - Sciences Appliquées et Mathématiques  
1, Chemin des Chevreuils, Bât B52/4  
S-4000 LIEGE

**INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT INTERNE**

**SUR LA RESONANCE D'UN AVION**

par

**B.M. FRAELJS de VEUBEKE**

Universités de Liège et de Louvain

Belgique

# TABLE DES MATIERES

1 - Introduction .....	1
2 - Schémas mécaniques et mathématiques pour l'étude d'un ressort .....	3
2.1. - Amortissement interne simplement visqueux .....	3
2.2. - Amortissement interne héréditaire .....	5
2.3. - Amortissement structural .....	10
2.4. - Amortissement interne des milieux continus .....	13
3 - Facteurs d'amplification dynamique pour un système à un seul degré de liberté .....	14
3.1. - La résonance dans le cas d'un simple amortissement visqueux .....	14
3.2. - La résonance dans le cas d'un amortissement héréditaire .....	17
3.3. - La résonance dans le cas d'amortissement structural .....	19
4 - Influence de l'amortissement sur un système à plusieurs degrés de liberté .....	20
4.1. - Mise en équation matricielle du problème .....	20
4.2. - Modes propres non amortis .....	22
4.3. - Les déphasages caractéristiques .....	23
4.4. - Orthogonalité des modes de réponses normaux .....	26
4.5. - Extension de la réponse en fréquence au cas d'une excitation arbitraire .....	27
4.6. - Matrices de flexibilité dynamique .....	29
4.7. - Caractère stationnaire de l'énergie réactive pour un mode d'excitation pur <sup>10</sup> .....	29
4.8. - Modes purs obtenus par excitation partielle .....	31
4.8.1. - Le principe de résonance .....	31
4.8.2. - Le principe de résonance locale de phase .....	32
4.8.3. - Le principe de la pseudo-résonance .....	34
4.9. - Cas particuliers de résonance forcée .....	36
REFERENCES .....	39

## CHAPITRE III

---

### Influence de l'amortissement interne sur la résonance d'un avion

#### 1 - Introduction

Les hypothèses faites sur les effets de l'amortissement ont généralement pour base un schéma purement visqueux dans lequel l'énergie dissipée par cycle est proportionnelle à la fréquence ou une hypothèse "structurale" qui rend l'énergie indépendante de la fréquence. Cependant le recours aux intégrales de Fourier montre que le régime transitoire que l'on doit associer à l'amortissement "structural" est physiquement inacceptable. Néanmoins on peut conserver l'amortissement structural à titre d'approximation pourvu que l'on se borne à l'utiliser dans une bande de fréquence donnée.

Un schéma de Maxwell, avec une "variable cachée", fournit un exemple plus satisfaisant d'amortissement viscoélastique. Ici le régime transitoire est complètement déterminé par une fonction héréditaire qui montre comment la force d'amortissement dépend de l'histoire antérieure du mouvement. Ce concept de fonction héréditaire étendu à un nombre élevé, éventuellement infini, de degrés de liberté permet une expression correcte du phénomène. Le recours à l'expérience est toutefois nécessaire pour établir la forme exacte de la fonction héréditaire. Ces points sont discutés avec quelque détail dans la première partie de ce chapitre.

La seconde partie est consacrée à la résonance d'un système à un degré de liberté selon qu'on lui attribue l'un de ces divers types d'amortissement. Une difficulté se présente dans le cas de l'amortissement héréditaire. La rigidité du système devient une fonction de la fréquence d'excitation et le concept de fréquence propre non amortie n'est plus aussi net que dans les cas de l'amortissement simplement visqueux ou structural. Pour un schéma de Maxwell simple on peut définir deux fréquences propres non amorties légèrement différentes et la résonance de phase a lieu pour une valeur intermédiaire de la fréquence d'excitation.

Dans la troisième partie la résonance d'un système à plusieurs degrés de liberté s'étudie avec recours à l'emploi des matrices. Là encore l'amortissement héréditaire conduit à une matrice de rigidité effective dont les éléments sont fonction de la fréquence. On définit alors bien les modes propres comme ceux qui correspondent à la résonance de phase. Toute autre définition aurait un caractère artificiel et empêcherait la détermination expérimentale de ces modes, l'un des buts essentiels de l'essai en résonance.

Il est commode pour discuter de la réponse forcée en général et de la résonance, en particulier, de recourir au "déphasage caractéristique". Imaginée d'abord pour le cas particulier de l'amortissement purement visqueux, cette notion peut s'étendre à tous les types d'amortissement et permet de développer la réponse en "modes de réponse" orthogonaux. A chaque résonance de phase l'un des "modes de réponse" devient identique à l'un des modes propres non amortis, tels qu'on les a déjà définis. On montre encore qu'à la résonance de phase l'énergie réactive est, au total, égale à zéro et stationnaire vis-à-vis de petites variations arbitraires des forces d'excitation. Le problème le plus difficile est d'obtenir des modes propres suffisamment purs en utilisant seulement un nombre limité de points d'excitation. On peut alors recourir à diverses méthodes : résonance de phase locale, pseudo-résonance des modes voisins et stationnarité de l'énergie réactive partielle. Ceci sera discuté en utilisant les modes de réponse orthogonaux.

Sous certaines hypothèses restrictives la matrice des inerties, la matrice des raideurs et la matrice des amortissements peuvent être simultanément diagonales. Le système se résout alors en sous-systèmes à un seul degré de liberté.

Ces hypothèses, jadis considérées par lord Rayleigh<sup>2</sup> dans le cas d'un amortissement purement visqueux peuvent facilement s'étendre à tous les types d'amortissement. L'une sert de base à la méthode de réglage de la force d'excitation développée par Lewis et Wrisley<sup>3</sup>. La plus générale fut formulée en France par Basile<sup>4</sup>. L'opinion de l'Auteur est que ces hypothèses sont inutilement restrictives et n'ont aucune chance d'être confirmées par l'expérience.

## Notations et symboles

Les matrices carées sont en général désignées par une majuscule Romaine.

M matrice des coefficients d'inertie

K matrice des coefficients de rigidité

R matrice des coefficients d'amortissement visqueux équivalent

A - iB matrice des flexibilités dynamiques

Les matrices colonnes sont désignées par une minuscule romaine, d'où

- q      colonne des coordonnées
- f      colonne des excitations
- y      colonne des amplitudes de l'excitation
- x = a-ib    colonne des amplitudes de la réponse (complexe)
- r      colonne des amplitudes des modes de réponse
- z      colonne des amplitudes des modes propres

La transposée d'une matrice est désignée par un accent et la dérivée par rapport au temps, par un point.

Les éléments d'une matrice sont indiqués par des indices, par exemple :

$q_i$       est le  $i^{\text{ème}}$  élément de la colonne q

$A_{ij}$       est l'élément situé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de A

Les modes sont indiqués par un indice entre parenthèses, par exemple :

$z(r)$       est le  $r^{\text{ème}}$  mode propre (c'est une colonne)

La convolution ou intégrale de Duhamel entre deux fonctions du temps est marquée par un astérisque, par exemple :

$$\phi * q_1 = \int_0^t \phi(t-\tau) q_1(\tau) d\tau$$

## 2 - Schémas mécaniques et mathématiques pour l'étude d'un ressort

### 2.1. - Amortissement interne simplement visqueux

Le schéma le plus simple d'une structure où le mouvement d'un ressort s'accompagne de dissipation d'énergie apparaît sur la figure 1. Il consiste en un ressort, uniquement doué d'élasticité, de raideur  $k_1$ , et d'un dashpot monté en parallèle. La force développée par le dashpot est proportionnelle à la vitesse  $\dot{q}_1(t)$  du déplacement. La relation entre la force et le déplacement, pour un tel système, est donc du type

$$f_1 = k_1 q_1 + c_1 \dot{q}_1 \quad (1)$$

Cette équation fournit immédiatement la force de réaction du système lorsque le déplacement est connu en fonction du temps.

Inversement, si la force est connue en fonction du temps, la résolution de l'équation différentielle (1) nous donne

$$q_1(t) = q_1(0) + \frac{1}{c_1} \int_0^t e^{-\tau/t_1} f_1(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

ou  $t_1 = c_1/k_1$  est la "constante de temps" du système.

Par exemple si l'on applique soudainement une force constante  $f_1$ , au temps  $t = 0$ , au système au repos ( $q_1(0) = 0$ )

$$q_1 = \frac{f_1}{k_1} (1 - e^{-t/t_1})$$

et le déplacement tend finalement vers le déplacement statique  $f_1/k_1$ .

Quand la force appliquée soudainement est une fonction harmonique du temps,

$$f_1 = \text{Re}\{y_1 e^{i\omega t}\}$$

on trouve

$$q_1 = \text{Re}\left\{ \frac{y_1}{k_1 + i\omega c_1} (e^{i\omega t} - e^{-t/t_1}) \right\}$$

Ici le mouvement se compose donc d'un transitoire affecté de la constante de temps  $t_1$  et d'un régime permanent qui est la vibration forcée ou réponse en fréquence du système. La relation d'amplitude et de phase entre la force et le déplacement, dans le cas d'une réponse forcée, est encore obtenue par un procédé inverse, en imposant au système un déplacement harmonique

$$q_1 = \text{Re}\{x_1 e^{i\omega t}\} \quad (3)$$

et déterminant la force directement à partir de l'équation (1)

$$f_1 = \text{Re}\{(k_1 + i\omega c_1)x_1 e^{i\omega t}\} \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) sont simples à discuter; elle permettent une comparaison facile avec d'autres systèmes structuraux. Nous en tirons

$$q_1 = x_1 \cos \omega t$$

$$f_1 = x_1 (k_1 \cos \omega t - \omega c_1 \sin \omega t)$$

L'élimination du temps entre ces équations conduit aux courbes d'hystérésis tracées dans le plan des  $(f_1, q_1)$ . Pour rendre ces diagrammes sans dimension il est tout indiqué d'utiliser les variables réduites

$$\frac{q_1}{x_1} = \cos \omega t$$

$$\frac{f_1}{k_1 x_1} = \cos \omega t - \omega \frac{c_1}{k_1} \sin \omega t$$

Cela revient à prendre l'amplitude de la vibration comme unité de déplacement et la force statique nécessaire pour produire ce déplacement, comme unité de force. La famille des courbes d'hystérésis (fig. 2) dépend alors d'un seul paramètre  $(\omega c_1 / k_1)$ . Toutes les courbes ont une tangente verticale commune aux points  $(1, 1)$  et  $(-1, -1)$ .

L'énergie dissipée pendant un cycle est

$$\int_0^{2\pi} \omega f_1 \dot{q}_1 dt = \pi x_1^2 c_1 \omega$$

Pour une amplitude de vibration donnée on voit qu'elle croît proportionnellement à la fréquence.

## 2.2. - Amortissement interne héréditaire

L'amortissement visqueux peut être adopté comme une cause de dissipation d'énergie dans des schémas plus compliqués. Le schéma de Maxwell de la figure 3 comporte un deuxième ressort en série avec le dashpot et constitue en réalité un système à deux degrés de liberté. Son comportement est complètement exprimé par les deux équations

$$f_1 = k_1 q_1 + c_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \quad (6)$$

$$k_2 q_2 = c_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \quad (7)$$

Comme le degré de liberté interne  $q_2$  ne nous intéresse pas, nous résolvons l'équation (7) par rapport à  $q_2$  et portons le résultat dans l'équation (6) de façon à obtenir

$$f_1 = k_1 q_1 + \int_0^t \phi(t-\tau) \dot{q}_1(\tau) d\tau \quad (8)$$

où

$$\phi(t) = k_2 \exp\left(-\frac{k_2 t}{c_2}\right) \quad (9)$$

avec l'hypothèse sous-entendue que pour  $t = 0$  le système est au repos.

Dans l'équation (1) le terme d'amortissement était directement proportionnel à la vitesse instantanée du déplacement. Dans le cas présent on voit qu'il dépend de l'histoire antérieure de cette vitesse. Pour cette raison il est approprié de l'appeler "amortissement héréditaire" et la fonction  $\phi(t)$  est connue comme étant "la fonction héréditaire" de l'amortissement.

La forme opérationnelle de la relation force-déplacement est commode pour résoudre les problèmes concernant le régime transitoire de tels systèmes.

Avec la définition usuelle de la transformée de Laplace d'une fonction  $x(t)$

$$\bar{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

et supposant que  $q_1(0) = 0$  et  $q_2(0) = 0$ , les équations fondamentales (6) et (7) ont les transformées de Laplace ci-après

$$\bar{f}_1(s) = (k_1 + sc_2)\bar{q}_1 - sc_2\bar{q}_2$$

$$(k_2 + sc_2)\bar{q}_2 = sc_2\bar{q}_1$$

d'où, après élimination de  $\bar{q}_2$ ,

$$\bar{f}_1 = \left(k_1 + \frac{c_2 k_2 s}{k_2 + sc_2}\right) \bar{q}_1 \quad (10)$$

Dans cette relation opérationnelle le coefficient de  $\bar{q}_1$ , savoir

$$z_1(s) = k_1 + \frac{c_2 k_2 s}{k_2 + sc_2} \quad (11)$$

est connu comme étant le "module opérationnel" du système et son inverse, la "flexibilité opérationnelle". (Les termes impédance opérationnelle et admittance opérationnelle sont à proscrire car l'analogie électrique dont ils viennent n'est pas, ici, respectée).

Résolvant l'équation (10) par rapport à  $\bar{q}_1$  et revenant à l'original, nous obtenons



$$q_1(t) = \frac{f_1(t)}{k_1 + k_2} + \frac{1}{c_2} \left( \frac{k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \int_0^t e^{-\tau/t_2} f_1(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

où  $t_2 = c_2 \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$ .

Comparant cette solution générale à l'équation (2) on voit la différence de comportement significative qu'entraîne la présence à chaque instant d'un déplacement affecté d'une constante élastique ( $k_1 + k_2$ ). Un tel comportement est physiquement évident sur simple examen de la structure du système.

A partir de l'équation (12) on trouve facilement que la réponse du système à une force constante soudainement appliquée est

$$q_1(t) = \frac{f_1}{k_1} \left( 1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} e^{-t/t_2} \right)$$

et qu'elle tend finalement vers le même déplacement statique que dans le schéma précédent.

L'étude de la réponse forcée à une excitation harmonique comporte plus de développements. Utilisant la procédure inverse nous posons

$$q_1 = \text{Re}\{x_1 e^{i\omega t}\} \text{ et } q_2 = \text{Re}\{x_2 e^{i\omega t}\}$$

dans les équations (6) et (7) et, éliminant  $x_2$ , nous obtenons

$$f_1 = \text{Re} \left\{ \left( k_1 + i \frac{\omega c_2 k_2}{k_2 + i \omega c_2} \right) x_1 e^{i\omega t} \right\}$$

En accord avec la théorie générale, le module complexe de la réponse forcée

$$z_1(\omega) = k_1 + i \frac{\omega c_2 k_2}{k_2 + i \omega c_2} \quad (13)$$

s'obtient également à partir du module opérationnel (11) en substituant  $i\omega$  à  $s$ .

A partir de l'équation (4) on trouve que le module complexe dans le cas d'un simple amortissement visqueux est

$$z_1(\omega) = k_1 + i \omega c_1 \quad (14)$$

Si dans l'équation (13) nous séparons la partie réelle de la partie imaginaire nous pourrions utiliser une expression analogue

$$z_1(\omega) = k_e + i\omega c_e \quad (15)$$

avec

$$k_e = k_1 + k_2 \frac{\omega^2 c_2^2}{k_2^2 + \omega^2 c_2^2} \quad (16)$$

$$c_e = c_2 \frac{k_2^2}{k_2^2 + \omega^2 c_2^2} \quad (17)$$

Ainsi le comportement d'un système avec amortissement héréditaire se ramène à celui d'un système doué seulement d'amortissement visqueux. Cette façon de procéder convient bien pour permettre des comparaisons et, puisqu'elle se base sur la décomposition du module complexe en ses éléments réel et imaginaire, elle a aussi une signification physique.

On voit sur la figure 4 que la raideur équivalente  $k_e$  croît avec la fréquence jusqu'à la valeur asymptotique  $(k_1 + k_2)$ , pendant que le coefficient d'amortissement visqueux équivalent décroît de  $c_2$  à zéro. L'énergie dissipée par cycle,  $\pi x_1^2 \omega c_e$ , tend également vers zéro aux très hautes fréquences. Mais par unité de temps elle tend finalement vers la valeur finie  $\frac{1}{2} x_1^2 k_2^2 / c_2$ .

Il y a une fréquence circulaire caractéristique du système pour laquelle l'énergie dissipée par cycle passe par un maximum. On trouve facilement que le maximum du produit  $\omega c_2$  a lieu pour

$$\omega_2 = \frac{k_2}{c_2}$$

ce qui entraîne  $c_2 = \frac{1}{2} c_2$ .

Cette valeur convient bien comme valeur de référence pour le diagramme sans dimension de la figure 4, en sorte que la courbe

$$\frac{c_e}{c_2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \quad (18)$$

s'applique à tous les systèmes de Maxwell.

L'allure de  $c_2$ , fonction de la fréquence, se voit également sur les courbes d'hystérésis de la figure 5. A la fréquence nulle nous avons une ligne droite représentant le comportement d'un ressort seul; pour  $\omega = \omega_2$ , une courbe elliptique d'aire maxima; et quand la fréquence tend vers l'infini nous retrouvons le comportement d'un ressort, de constante  $(k_1 + k_2)$ , représenté.

par une droite de pente plus élevée que la première.

Le schéma de Maxwell n'est qu'un exemple simple d'un système doué d'amortissement héréditaire. On peut imaginer facilement des schémas plus compliqués. Par exemple, plusieurs systèmes de Maxwell, avec des constantes de temps différentes, peuvent être mis en parallèle. Le recours à un grand nombre de variables cachées facilitera la mise en accord de l'allure théorique de  $k_e$  et  $c_e$ , fonctions de la fréquence, et des résultats expérimentaux. Le comportement transitoire de tels systèmes dépend d'une relation de même forme que l'équation (8) avec une fonction héréditaire  $\phi(t)$  convenablement choisie. Partant de l'équation (9) nous pouvons mettre la fonction héréditaire sous une forme généralisée comportant un spectre de relaxation continu

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} F(r) e^{-rt} dr$$

ou, sous forme opérationnelle,

$$\bar{\phi}(s) = \int_0^{\infty} \frac{F(r)}{r+s} dr$$

D'où, à partir de la forme opérationnelle de l'équation (8), savoir .

$$\bar{I}_1 = z_1(s) \bar{q}_1 \quad (19)$$

$$\text{où } z_1(s) = k_1 + s \phi(s) \quad (20)$$

la possibilité d'obtenir le module opérationnel correspondant

$$z_1(s) = k_1 + s \int_0^{\infty} \frac{F(r)}{r+s} dr$$

L'exemple suivant est donné par Biot :

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{2}{\pi} k_1 g_1 \frac{1}{r} \text{ for } r > \epsilon \\ &= 0 \quad \text{for } r < \epsilon \end{aligned}$$

Alors

$$z_1(s) = k_1 - \frac{2}{\pi} k_1 g_1 \ln \frac{\epsilon}{\epsilon + s}$$

Après avoir remplacé  $s$  par  $i\omega$  le module complexe de la réponse en fréquence s'écrit

$$z_1(\omega) = k_1 \left( 1 + \frac{2}{\pi} g_1 \ln \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\epsilon^2}} \right) + ik_1 g_1 \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{\omega}{\epsilon}$$

Pour  $\epsilon$  petit, la partie imaginaire tend très rapidement vers la valeur asymptotique  $k_1 g_1$ . Lorsque  $g_1$  est petit la partie réelle, ou raideur équivalente, est alors pratiquement constante pour une large bande de fréquences, bien qu'elle finisse par croître à l'infini. Cette allure est à peu près d'accord avec la loi dite de l'amortissement "structural", examinée en détail dans le prochain paragraphe. La fonction héréditaire correspondante est

$$\phi(t) = \frac{2}{\pi} k_1 g_1 \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-rt}}{r} dr = -\frac{2}{\pi} k_1 g_1 \text{Ei}(-\epsilon t)$$

### 2.3. - Amortissement structural

Si l'impédance complexe est constante dans toute la gamme des fréquences

$$z_1(\omega) = k_1(1 + i g_1) \quad (21)$$

la courbe d'hystérésis (fig. 6) est elle aussi indépendante de la fréquence. On utilise largement cette "loi d'amortissement structural" dans les calculs de flottement. Cependant on ne saurait la suivre dans toutes ses implications car elle conduit, comme on va le montrer maintenant, à un comportement transitoire physiquement inacceptable. Ce comportement peut se déduire de la réponse en fréquence en faisant appel à l'intégrale de Fourier. Ce faisant il faut se souvenir que la partie imaginaire de l'impédance complexe est nécessairement une fonction impaire de la fréquence. Par conséquent l'équation (21) convient aux valeurs positives de  $\omega$  et s'étend aux valeurs négatives par un changement de signe de la partie imaginaire.

Commençons par supposer que  $q_1(t)$  suit une loi périodique quelconque exprimée par une série de Fourier convergente, de période  $T = 2\pi/\omega$ , de la forme

$$q_1(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\omega t}$$

où  $C_n = A_n + iB_n$  pour les valeurs positives de  $n$

$C_n = A_n + iB_n$  pour les valeurs négatives de  $n$

en sorte qu'on peut encore écrire

$$q_1(t) = C_0 + 2 \sum_1^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

Pour trouver la force correspondante exercée par le système nous multiplierons chaque terme de la série de Fourier complexe par  $k_1(1+ig_1)$ , si  $n$  est positif, par  $k_1(1-ig_1)$ , si  $n$  est négatif, et simplement par  $k_1$  pour le terme correspondant à  $n = 0$ . La force est alors donnée par

$$f_1(t) = k_1 q_1(t) + k_1 g_1 \sum_1^{\infty} \left[ i(A_n + iB_n)e^{-in\omega t} - i(A_n - iB_n)e^{-in\omega t} \right]$$

$$= k_1 q_1(t) - k_1 g_1 \sum_1^{\infty} (2A_n \sin n\omega t - 2B_n \cos n\omega t)$$

Cette dernière série est connue comme la "série de Fourier associée" à la série  $q_1(t)$  et, en accord avec la théorie de la sommation des séries de cette sorte, le résultat peut être mis sous la forme

$$f_1(t) = k_1 g_1(t) + \frac{k_1 g_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \omega q_1(\tau) \cot \frac{\omega(\tau - t)}{2} d\tau$$

Naturellement il est sous-entendu que l'intégrale est "en valeur principale de Cauchy". Passant à la limite pour  $\omega \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ), ou utilisant la méthode analytique convenable pour la sommation des "intégrales associées de Fourier", nous obtenons

$$f_1(t) = k_1 q_1(t) + \frac{1}{\pi} k_1 g_1 \int_{-\infty}^{\infty} q_1(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (22)$$

Il faut maintenant vérifier cette loi générale de l'amortissement "structural" en calculant de nouveau la réponse en fréquence.

Posant  $q_1 = x_1 e^{i\omega\tau}$  et  $f_1 = y_1 e^{i\omega t}$

nous avons

$$z_1(\omega) = k_1 + \frac{1}{\pi} k_1 g_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau-t)} \frac{d\tau}{\tau-t}$$

ou, en effectuant le changement de variable  $u = \omega(\tau - t)$

$$z_1(\omega) = k_1 + \frac{1}{\pi} k_1 g_1 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \right]$$

La première intégrale est nulle par raison de symétrie. Il est bien connu que la seconde est égale à  $\pi$ . Nous avons donc retrouvé l'équation (21) et nous devons noter que dans le cas où  $\omega$  est négatif, les limites de la seconde intégrale doivent s'échanger, puisque la partie imaginaire de  $z_1$  doit changer de signe.

Sans parler des conditions sévères imposées à  $q_1(t)$  pour assurer l'existence de l'intégrale, la forme générale obtenue pour celle-ci dans le cas de l'amortissement structural est physiquement absurde. Elle impliquerait que la force exercée par le système ne dépend pas seulement du passé du mouvement, mais bien encore de son futur. Bien que l'amortissement structural ne semble pas posséder une base physique saine, il constitue une approximation acceptable dans une bande de fréquence bien définie. Cela était déjà visible dans l'exemple de la fonction héréditaire généralisée. Cela se vérifie encore par comparaison avec le schéma de Maxwell le plus simple. Pour le montrer, tirons de l'équation (21) le coefficient d'amortissement visqueux équivalent

$$c_e = k_1 g_1 \frac{1}{\omega}$$

et comparons-le avec la relation (18). Cette comparaison est facile si nous écrivons

$$\frac{c_e}{c_2} = g_1 \frac{k_1}{k_2} \left( \frac{\omega}{\omega_2} \right)^{-1}$$

On peut faire que cette courbe soit tangente à la courbe définie par la relation (18), si l'on prend

$$g_1 = \frac{1}{2} \frac{k_2}{k_1} \tag{23}$$

et le point de contact est alors  $\omega = \omega_2$  (fig.4).

Si le schéma de Maxwell est acceptable, la relation (23) relie l'accroissement, observé, de la raideur du ressort avec la vitesse à la valeur qu'il faut adopter pour le coefficient  $g_1$ , quand on utilise la loi d'amortissement structural. La différence entre les modules isotherme et adiabatique des matériaux métalliques est estimée de l'ordre de 1%. Cela donne

$$g_1 = 0,005$$

L'ordre de grandeur de ce chiffre est probablement correct. Il faut cependant se souvenir que d'autres sources d'amortissement, telles que le glissement dans les joints rivés, existent aussi, en sorte que la valeur de  $g_1$  qui tiendrait compte de tous ces faits pourrait atteindre environ 0,02. L'usage croissant de structures à un seul tenant ou raidies intégralement pourrait réduire la valeur de ce coefficient d'amortissement à un taux correspondant au seul amortissement interne.

2.4. Amortissement interne des milieux continus

Enrico Volterra, qui s'est occupé des vibrations des systèmes discrets doués de caractéristiques héréditaires, a étendu le concept d'amortissement héréditaire aux milieux continus <sup>6</sup>. L'analyse montre que dans un milieu isotrope le tenseur des efforts  $\{\sigma_{ij}\}$  et le tenseur des fatigues  $\{e_{ij}\}$  sont reliés par deux fonctions héréditaires de sorte que

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \left( \lambda e + \int_0^t \phi(t-\tau) \frac{\partial l}{\partial \tau} d\tau \right) + 2\mu e_{ij} + 2 \int_0^t \psi(t-\tau) \frac{\partial e_{ij}}{\partial \tau} d\tau \quad (24)$$

Dans cette relation  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $e = \sum e_{ii}$  et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé.

Si l'on utilise une seule constante de relaxation pour chaque type d'hérédité, on trouve que sous forme opérationnelle la relation s'écrit

$$\bar{\sigma}_{ij} = \delta_{ij} \left( \lambda + \frac{sk_\phi c_\phi}{k_\phi + sc_\phi} \right) \bar{e} + 2 \left( \mu + \frac{sk_\psi c_\psi}{k_\psi + sc_\psi} \right) \bar{e}_{ij}$$

Ceci vérifie, à titre de cas particulier, les relations beaucoup plus générales entre efforts et fatigues que M. Biot a établies à partir de considérations thermodynamiques <sup>7,8</sup>.

Supposant que  $k_\phi$  et  $k_\psi$  tendent vers l'infini, nous obtenons une généralisation du cas d'un système doué uniquement d'amortissement visqueux (fig. 1), pour lequel

$$\bar{\sigma}_{ij} = \delta_{ij} (\lambda + sc_\phi) \bar{e} + 2(\mu + sc_\psi) \bar{e}_{ij}$$

Dans le cas d'un mouvement harmonique

$$e_{ij} = \text{Re}\{Y_{ij} e^{i\omega t}\}$$

et cela donne

$$\sigma_{ij} = \text{Re}\{\delta_{ij} (\lambda + i\omega c_\phi) \Sigma Y_{ii} e^{i\omega t} + 2(\mu + i\omega c_\psi) Y_{ij} e^{i\omega t}\} \quad (25)$$

La généralisation de la loi de l'amortissement structural serait

$$\sigma_{ij} = \text{Re}\{\delta_{ij} \lambda (1 + ig_\phi) \Sigma Y_{ii} e^{i\omega t} + 2\mu (1 + ig_\psi) Y_{ij} e^{i\omega t}\} \quad (26)$$

Résolvant cette relation par rapport à l'amplitude de la réponse  $Y_{pq}$ , il apparaît que le coefficient de Poisson a été ici remplacé par une quantité complexe

$$\nu(1 + ig_\nu) \quad (27)$$

où  $g_\nu$  dépend de  $g_\phi$  et  $g_\psi$ . Quant aux modules habituels de cisaillement,  $G$ , et de traction,  $E$ , ils sont respectivement à remplacer par

$$G(1 + ig_\psi) \quad (28)$$

et  $2G(1 + ig_\psi)[1 + \nu(1 + ig_\nu)] \quad (29)$

Dans le cas particulier où  $g_\phi = g_\psi = g$ , on trouve  $g = 0$ . Le coefficient de Poisson reste alors réel et le même facteur complexe affecte les deux modules,

$$\left. \begin{aligned} G(1 + ig) \\ E(1 + ig) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Comme on le verra plus loin, ceci introduit une importante simplification dans l'étude de la réponse forcée d'un milieu isotrope continu. La conséquence essentielle de tout ceci est que les modes découplés élastiquement sont également découplés par rapport à l'amortissement interne.

### 3 - Facteurs d'amplification dynamique pour un système à un seul degré de liberté

Avant d'entreprendre la discussion sur l'influence de l'amortissement interne sur la résonance d'un avion il est utile d'examiner le phénomène de la résonance dans le cas d'un système à un seul degré de liberté. Le fait nouveau essentiel sera l'introduction des effets de l'inertie.

#### 3.1. - La résonance dans le cas d'un simple amortissement visqueux

Après addition d'une masse  $m_1$  au schéma de la figure 1, l'équation (1) devient

$$f_1 = k_1 q_1 + c_1 \dot{q}_1 + m_1 \ddot{q}_1 \quad (31)$$

et dans l'hypothèse d'un déplacement harmonique simple, avec

$$q_1 = \text{Re}\{x_1 e^{i\omega t}\} \quad (32)$$



la force extérieure nécessaire est de la forme

$$f_1 = \operatorname{Re}\{y_1 e^{i\omega t}\}$$

où

$$y_1 = (k_1 + i\omega c_1 - \omega^2 m_1)x_1$$

Pendant la variation de fréquence nous garderons constante l'amplitude de l'excitation et nous utiliserons toujours la même référence de phase. Ce sera le cas si l'on prend  $y_1$  réel et constant. Résolvant l'équation (34) par rapport à  $x_1$  et substituant la valeur trouvée dans l'équation (32), on trouve que la réponse forcée est

$$q_1 = \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{k_1 + i\omega c_1 - \omega^2 m_1} e^{i\omega t}\right\} \quad (35)$$

Remarquant qu'à basse fréquence la réponse quasi-statique est

$$q_1 = \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{k_1} e^{i\omega t}\right\}$$

on peut encore écrire l'équation (35) sous la forme suivante

$$q_1 = \operatorname{Re}\left\{\frac{y_1}{k_1} D e^{i\omega t}\right\} \quad (36)$$

où

$$D = \frac{1}{1 + i\omega \frac{c_1}{k_1} - \omega^2 \frac{m_1}{k_1}} \quad (37)$$

est le "facteur d'amplification dynamique".

A ce point il est commode d'introduire les quantités

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{c_1}{2\omega_0 m_1} = \frac{c_1}{2\sqrt{m_1 k_1}} \quad (38)$$

qui sont des caractéristiques très importantes des vibrations libres du système. La vibration libre est régie par l'équation (31) dans laquelle on fait  $f_1 = 0$ . A l'aide des symboles définis en (38) on la transforme en

$$\omega_0^2 q_1 + 2\epsilon \omega_0 \dot{q}_1 + \ddot{q}_1 = 0$$

et les racines de l'équation caractéristique sont

$$\omega_0 [-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 1}]$$

En l'absence d'amortissement (quand  $c_1 = 0$  ou  $\xi = 0$ ) ces racines sont  $\pm i\omega_0$ , en sorte que  $\omega_0$  est la fréquence circulaire propre du système non amorti. La quantité sans dimension  $\xi$  conditionne seule la nature complexe des racines, elle mesure bien les effets dynamiques de l'amortissement. Puisque la valeur critique pour laquelle les racines deviennent réelles est  $\xi = 1$ ,  $\xi$  peut être considéré comme le rapport du coefficient d'amortissement  $c_1$  à sa valeur critique.

Les définitions (38) simplifient aussi l'expression (37) et nous obtenons

$$D = \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2i\epsilon \frac{\omega}{\omega_0} \right]^{-1} \quad (39)$$

La signification de D, quantité complexe, apparaît mieux sous sa forme polaire

$$D = Ae^{-i\phi} \quad (40)$$

où

$$A = \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4\epsilon^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{-1/2} \quad (41)$$

et

$$\tan \phi = \frac{2\epsilon \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad (42)$$

Portant la relation (40) dans l'équation (36) nous avons

$$q_1 = \frac{y_1}{k_1} A \cos(\omega t - \phi) \quad (43)$$

où A apparaît comme le facteur d'amplification dynamique de l'amplitude de la vibration et  $\phi$  comme le déphasage entre le mouvement et l'excitation.

La figure 7 est la représentation de D, quantité complexe, dans le plan d'Argand. La figure 8 représente classiquement A et  $\phi$  en fonction de la fréquence.

La résonance de phase se définit par la condition que le mouvement soit en quadrature avec l'excitation. On voit que la condition  $\text{tg } \phi = \pi/2$  est justement remplie pour  $\omega = \omega_0$ . Comme (du moins pour les faibles valeurs de  $\xi$ ) la phase est très sensible aux variations de fréquence au voisinage de la résonance, la mesure de la phase est un moyen idéal pour s'assurer que l'on s'y trouve bien.

L'amplitude de résonance se définit comme étant celle où  $A$  est maximum. Cela a lieu pour une fréquence légèrement inférieur  $\omega = \omega_0 \sqrt{1-2\xi^2}$ , et le maximum de  $A$ , qui est égal à  $[2\xi\sqrt{1-\xi^2}]^{-1}$ , n'est pas beaucoup supérieur à la valeur  $[2\xi]^{-1}$  qui est la sienne à la résonance de phase.

Sauf le cas d'un amortissement élevé, la résonance d'amplitude, quoique moins exacte, peut bien se substituer à la résonance de phase.

### 3.2. - La résonance dans le cas d'un amortissement héréditaire

L'addition d'une masse  $m_1$ , au schéma de Maxwell simplifié de la figure 3 donne, au bout de calculs analogues aux précédents, un facteur d'amplification dynamique,

$$D = \left( 1 + i \frac{\omega c_2 k_2}{k_1 (k_2 + i \omega c_2)} - \frac{\omega^2 m_1}{k_1} \right)^{-1} \quad (44)$$

La transformation et l'examen de cette expression font apparaître deux difficultés. La première est la définition de la fréquence propre du système non amorti. Si on pose  $c_2 = 0$  la fréquence propre est

$$\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1} \quad (45)$$

Mais quand  $c_2$  tend vers l'infini le système est aussi non amorti et sa fréquence propre est donnée par

$$\sqrt{(k_1 + k_2)/m_1} = \omega_0 \sqrt{1 + \kappa} \quad (46)$$

avec

$$\kappa = k_2/k_1 \quad (47)$$

Comme  $K$  est très petit, ces deux définitions de la fréquence propre non amortie ne sont pas très différentes. Cependant, on le verra plus loin, il y a des raisons pour adopter une troisième définition qui fournit une valeur intermédiaire.

La seconde difficulté git dans la définition du coefficient réduit d'amortissement. L'équation caractéristique de la vibration libre du système est du troisième degré et il est par conséquent difficile de se rendre compte de la nature des racines. Il sera suffisant pour atteindre notre but d'introduire le coefficient sans dimension

$$\epsilon = \frac{c_2}{\sqrt{m_1 k_1}} \quad (48)$$

Tenant compte de (45), (46) et (48), nous écrirons l'équation (44)

$$D = \left( 1 - a^2 + i \frac{\epsilon \kappa a}{\kappa_1 + i \epsilon a} \right)^{-1} \quad (49)$$

avec

$$a = \frac{\omega}{\omega_0}$$

L'angle de phase correspondant est donné par

$$\tan \phi = \frac{\kappa^2 \epsilon a}{(\kappa^2 + \epsilon^2 a^2)(1 - a^2) + \kappa \epsilon^2 a^2} \quad (50)$$

Le dénominateur de l'expression (50) est une forme quadratique en  $a^2$ . Une des racines est réelle et négative et n'a par conséquent aucune signification ici. L'autre racine est réelle et positive et on peut en conclure qu'il y a une valeur de la fréquence forcée qui correspond à une résonance de phase. On trouve aisément la position de la racine par rapport aux valeurs  $a = 1$  et  $a = \sqrt{1 + k}$  qui correspondent aux fréquences propres non amorties. L'emploi de la première valeur donne à la forme quadratique la valeur positive  $k \epsilon^2$ . L'emploi de la seconde donne la valeur négative  $-k^3$ . Le coefficient de  $a$  étant négatif, cela signifie que la résonance de phase a lieu entre les deux fréquences propres non amorties dont nous avons parlé.

Comme du point de vue physique la définition de la fréquence propre non amortie est nécessairement quelque peu artificielle, il y a intérêt à adopter une définition précise basée sur la résonance de phase. En d'autres termes les fréquences propres non amorties des systèmes linéaires élastico-visqueux doivent être considérées comme définies au mieux par leurs fréquences de résonance de phase. D'un autre point de vue le comportement de l'angle de phase à fréquence croissante est qualitativement semblable à

celui d'un système simplement doué d'amortissement visqueux. En raison de la réduction de l'amortissement équivalent aux hautes fréquences il se rapproche seulement plus vite de la valeur asymptotique de 180°.

L'examen de l'amplitude de résonance ne révèle rien digne de remarque.

### 3.3. - La résonance dans le cas d'amortissement structural

Le coefficient d'amplification dynamique tel que le définit l'équation (21) est

$$D = \left( 1 + ig_1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} \quad (51)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$

L'évolution de l'angle de phase

$$\tan\phi = \frac{g_1}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

montre une résonance de phase pour  $\omega = \omega_0$ , ce qui définit correctement la fréquence propre non amortie du système. Une différence digne de remarque est l'existence, à la fréquence nulle, d'un angle de phase petit mais non nul.

La représentation de D dans le plan d'Argand est exceptionnellement simple. L'inverse de D est sans ambiguïté une ligne droite parallèle à l'axe réel et, selon la théorie de l'inversion, le lieu de D lui-même est un cercle dont le centre est sur l'axe imaginaire (Fig.9).

Il est évident d'après ce diagramme circulaire que pour ce type d'amortissement la résonance d'amplitude et la résonance de phase coïncident.

Kennedy et Pancu<sup>9</sup> ont montré que, dans le cas de l'amortissement structural,  $d\phi/d\omega^2$  atteint également son maximum à la résonance. La méthode qui consiste à déterminer la résonance en mesurant le taux de variation de la phase en fonction de  $\omega^2$  présente l'avantage d'éviter la mesure des angles de phase en valeur absolue, ce qui offre des difficultés avec certains types d'excitation. Dans les cas différents de celui de l'amortissement structural le taux maximum de variation de phase ne coïncide pas exactement avec la résonance de phase, mais la différence est très petite dès que l'amortissement est faible.

4 - Influence de l'amortissement sur un système à plusieurs degrés de liberté

4.1. - Mise en équation matricielle du problème

Pour discuter du problème de la réponse en fréquence, en présence d'amortissement interne, d'un système ayant un nombre élevé, mais fini, de degrés de liberté il est fort indiqué d'utiliser les matrices en raison de la simplicité qu'elles apportent à la mise en équation. On peut approcher de près par ces méthodes le comportement des systèmes continus et bien des conclusions auxquelles on arrive peuvent s'étendre aux systèmes continus sans autre justification.

Reprenons l'équation du mouvement d'un système à un seul degré de liberté avec amortissement héréditaire; elle est de la forme

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 \dot{q}_1 + \phi * q_1 = f_1 \quad (53)$$

et n'est autre que l'équation (8) après addition des forces d'inertie. La notation employée pour la convolution ou intégrale de Duhamel

$$\phi * q_1 = \int_0^t \phi(t-\tau) q_1(\tau) d\tau \quad (54)$$

convient encore à la mise en équation matricielle. L'extension de l'équation (53) au cas de plusieurs degrés de liberté est tout simplement

$$M\ddot{q} + K\dot{q} + \Phi * q = f \quad (55)$$

où  $q$  désigne la matrice colonne des coordonnées et  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$  sont les colonnes de sa première et de sa seconde dérivée par rapport au temps.  $M$  est la matrice carrée, symétrique et définie positive, des coefficients d'inertie,  $K$  la matrice carrée, symétrique et semi-définie positive, des coefficients de raideur.  $\phi$  est une matrice carrée symétrique de fonctions héréditaires dont le produit par  $q$  donne une convolution intégrale du type (54) pour chacun des éléments du produit. Finalement  $f$  est la colonne des forces d'excitation extérieures.

Si chacune des fonctions héréditaires est du type (9) on a simplement un "amortissement de Maxwell". L'amortissement simplement visqueux peut être regardé comme un cas particulier où chaque rigidité  $k_2$  est supposée infinie. Lorsque  $k_2$  tend vers l'infini la fonction

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ k_0 \exp\left(-\frac{k_2 t}{c_2}\right) & \text{for } t > 0 \end{cases}$$

qui jouit de la propriété suivante

$$\int_0^{\infty} \phi(t) dt = c_2 \quad (\text{indépendante de } k_2)$$

se comporte comme un opérateur de Dirac  $c_2 \delta(t)$  et la convolution intégrale se ramène à

$$c_2 \int_0^t \delta(t-\tau) \dot{q}_1(\tau) d\tau = c_2 \dot{q}_1(t)$$

ce qui est conforme à la loi de l'amortissement simplement visqueux.

La matrice  $\Phi$  se ramène donc à  $\delta(t)C$ , où  $C$  est une matrice de viscosité à coefficients constants et l'équation (55) s'écrit

$$M\ddot{q} + Kq + C\dot{q} = f \quad (56)$$

L'amortissement "structural" ne saurait être inclus dans l'équation (55) puisqu'il n'admet pas de représentation par une intégrale de Duhamel.

La matrice opérationnelle de rigidité correspondant à (55) est

$$s^2M + K + s\Phi(s)$$

et la réponse en fréquence du système pour

$$\left. \begin{aligned} q &= e^{i\omega t} \mathbf{x} \\ f &= e^{i\omega t} \mathbf{y} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

qu'on en tire en substituant  $i\omega$  à  $s$ , est donnée par

$$[K - \omega^2 M + i\omega\Phi(i\omega)] \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (58)$$

Les éléments de  $\Phi$  sont des fonctions réelles de  $i\omega$  et un changement du signe de  $\omega$  est équivalent à un changement de  $i$  en  $-i$ . Par conséquent lorsqu'on sépare dans  $\Phi$  la partie réelle et la partie imaginaire le résultat est de la forme

$$\Phi(i\omega) = R(\omega^2) + i\omega I(\omega^2) \quad (59)$$

La matrice

$$\tilde{K} = K - \omega^2 I(\omega^2) \quad (60)$$

peut être considérée comme une matrice de raideurs effectives, fonctions de la fréquence, et la matrice  $R(\omega^2)$  comme une matrice d'amortissement visqueux équivalent. Ceci ramène la forme des équations à celle qu'on obtiendrait en traitant l'équation (56).

#### 4.2. - Modes propres non amortis

Utilisant la relation (59), nous allons écrire à nouveau l'équation (58) sous la forme suivante

$$[K - \omega^2 M + i\omega R] x = y \quad (61)$$

où  $K$  est mis à présent à la place de la matrice  $K$  définie en (60) et où le fait que les éléments de  $K$  et  $R$  sont fonction de la fréquence se trouve sous-entendu. Ainsi qu'on l'a exposé dans la Section 3.2., si le but poursuivi est d'obtenir les modes propres par un essai effectué à la résonance, ces modes sont définis de la meilleure manière lorsqu'on recourt au principe de la résonance de phase. Celle-ci a lieu, les éléments de  $y$  étant réels (tous les excitateurs sont en phase), lorsque la matrice des amplitudes de la réponse est de la forme  $x = iz$ ,  $z$  ayant tous ses éléments réels.

Séparant dans l'équation (61) la partie réelle de la partie imaginaire, nous avons

$$-\omega R z = y \quad (62)$$

$$(K - \omega^2 M) z = 0 \quad (63)$$

Cette dernière équation, qui est homogène définit donc les fréquences propres comme étant des valeurs propres et les modes propres correspondants,  $z_{(K)}$ , comme des vecteurs propres. L'excitation requise est définie ensuite par (62). A partir de (63) le carré de la fréquence propre s'exprime par le rapport

$$\omega_K^2 = \frac{z'_{(K)} K(\omega_K^2) z_{(K)}}{z'_{(K)} M z_{(K)}} \quad (64)$$

Il est sans doute important de remarquer que, du fait que  $K(\omega_r^2)$  et  $K(\omega_s^2)$  ne sont pas nécessairement des matrices proportionnelles, les modes  $z_{(r)}$  et  $z_{(s)}$  associés à deux fréquences propres distinctes  $\omega_r$  et  $\omega_s$  ne vérifient pas à tout coup la relation classique d'orthogonalité



L'abandon de cette propriété fait naître un doute sur la valeur de notre définition des modes propres. Mais des points de vue différents, tel que celui qui prend pour base les rigidités quasi-statiques  $K(0)$  ou  $K(\infty)$ , bien que sauvegardant les relations (65) sont d'un caractère artificiel et conduisent à des définitions des modes qui échappent à l'expérience. En pratique, la variation de rigidité avec la fréquence est assez faible pour n'introduire que des différences négligeables entre ces définitions. C'est pourquoi les modes obtenus à partir de la résonance satisfont approximativement les relations (65).

Dans le cas d'un amortissement purement visqueux, où  $I(\omega^2) = 0$  et  $R = C$  sont des matrices à éléments constants, comme  $K$ , et encore dans le cas d'un amortissement "structural", les définitions coïncident et la condition d'orthogonalité est exactement satisfaite. Mais ces cas sont une idéalisation de la réalité physique.

#### 4.3. - Les déphasages caractéristiques

Une analyse de la réponse en fréquence définie par l'équation (61) s'appuie commodément sur un développement orthogonal qui utilise la notion de "déphasage caractéristique". Dans sa forme initiale<sup>1</sup> ceci fut établi dans le cas d'un amortissement purement visqueux. Du moment qu'on n'utilise pas les relations (65) on peut facilement l'étendre au cas général où  $K$  et  $R$  sont des fonctions de la fréquence.

A une fréquence donnée on peut supposer que l'excitation et la réponse sont définies comme suit

$$\left. \begin{aligned} y &= y_{(K)} \text{ real} \\ x &= e^{-i\phi_K} r_{(K)} \text{ with real } r_{(K)} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Il faut donc que, pour un mode propre, toutes les coordonnées vibrent à la même phase  $\phi_K$  par rapport aux forces d'excitation qui sont toutes en phase.

Substituant ces relations dans l'équation (61) nous avons, après séparation des termes en phase et des termes en quadrature,

$$[\omega \cos \phi_K R - \sin \phi_K (K - \omega^2 M)] r_{(K)} = 0 \quad (67)$$

$$[\cos \phi_K (K - \omega^2 M) + \omega \sin \phi_K R] r_{(K)} = y_{(K)} \quad (68)$$

L'équation (67) est homogène et pose un problème de valeurs propres pour la détermination du "déphasage caractéristique". Les valeurs propres  $\tan \phi_K$  sont les racines d'une équation algébrique en  $\tan \phi$ , savoir

$$t | [\omega R - \tan \phi (K - \omega^2 M)] | = 0$$

Elles sont réelles puisque

$$\tan \phi_K = \frac{\omega r'_{(K)} R r_{(K)}}{r'_{(K)} (K - \omega^2 M) r_{(K)}} \quad (69)$$

et que, si l'on désigne par  $r'_{(K)}$  la transposée conjuguée de  $r_{(K)}$ , ceci est le rapport de deux formes hermitiennes. Quand  $\operatorname{tg} \phi_K$  est connue, les valeurs de  $\phi_K$  sont connues sans ambiguïté grâce à la condition

$$0 \leq \phi_K \leq \pi \quad (70)$$

On montrera que cette détermination est compatible avec une variation continue de  $\phi_K$  en fonction de la fréquence.

Une fois obtenu l'un des  $\phi_K$  le mode correspondant  $r_{(K)}$  est donné par l'équation (67) à un facteur près indéterminé. Le mode d'excitation correspondant se détermine par l'équation (68) ou par l'une des combinaisons ci-après des équations (67) et (68), savoir

$$\cos \phi_K y_{(K)} = (K - \omega^2 M) r_{(K)} \quad (71)$$

$$\sin \phi_K y_{(K)} = \omega R r_{(K)} \quad (72)$$

Evidemment  $r_{(K)}$  et  $y_{(K)}$  doivent être pris réels tous les deux. Ils vérifient alors l'hypothèse de base (66); et, en outre, dans l'équation (69) nous pouvons prendre  $r'_{(K)}$  comme la simple transposée de  $r_{(K)}$ .

L'énergie dissipée par cycle avec une excitation de ce type est

$$E_K = \pi \sin \phi_K r'_{(K)} y_{(K)} = \pi \omega r'_{(K)} R r_{(K)} \quad (73)$$

Elle correspond à très peu près au maximum de l'énergie de déformation, en sorte que la quantité

$$\gamma_K = \frac{\omega r'_{(K)} R r_{(K)}}{r'_{(K)} R r_{(K)}} \quad (74)$$

vaut à peu près l'unité.

Maintenant le fait que l'énergie se dissipe réellement au cours du cycle montre que la relation

$$\omega R \Gamma(K) = 0$$

ne convient pas, sauf peut-être pour  $\omega = 0$  ou  $\omega = \infty$ . Il s'ensuit pour l'équation (67) que la valeur  $\text{tg} \phi_K = 0$  ne peut se rencontrer dans toute la gamme des fréquences, excepté aux limites  $\omega = 0$  et  $\omega = \infty$ . Par conséquent la variation continue de la racine  $\text{tg} \phi_K$  entraîne une variation continue de  $\phi_K$  compatible avec la condition (70).

Introduisons maintenant la fréquence  $\lambda_K$  définie par

$$\lambda_K^2 = \frac{\Gamma'(K)^K \Gamma(K)}{\Gamma'(K)^M \Gamma(K)} \quad (75)$$

Utilisant cette définition et celle qui figure en (74) nous pouvons écrire l'équation (69)

$$\tan \phi_K = \frac{\gamma_K}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_K}\right)^2}$$

Notez que du moment que  $K$ ,  $R$  et  $r(K)$  dépendent de la fréquence,  $\lambda_K$  et  $\gamma_K$  sont eux-mêmes des fonctions de la fréquence d'excitation.

Tandis que  $\lambda_K^2$  reste toujours fini et positif (les raideurs ayant pour limites  $K(0)$  et  $k(\infty)$  en tant que rapport de deux formes quadratiques définies positives, le comportement de  $\gamma_K$  est différent, pour  $\omega = 0$  et  $\omega = \infty$ , suivant les hypothèses faites sur l'amortissement.

Dans le cas de l'amortissement héréditaire  $R$  a des limites finies et définies positives pour  $\omega = 0$  et  $\omega^2 R$ , pour  $\omega = \infty$ . Alors  $\gamma_K$  et  $\text{tg} \phi_K$  ont la même allure que  $\omega$  au voisinage de  $\omega = 0$  et que  $\omega^{-1}$  et  $\omega^{-3}$  respectivement au voisinage de  $\omega = \infty$ .

Dans le cas de l'amortissement purement visqueux  $K$  et  $R$  sont des matrices à termes constants et rien n'est changé pour elles au voisinage de  $\omega = 0$ . Par contre, au voisinage de  $\omega = \infty$ ,  $\gamma_K$  tend maintenant vers l'infini avec  $\omega$  (ces valeurs ne sont donc plus du tout petites aux hautes fréquences) et  $\text{tg} \phi_K$  tend toujours vers zéro mais seulement comme  $\omega^{-1}$ .

Dans le cas de l'amortissement structural  $K$  et  $\omega R$  sont des matrices à termes constants. A la fois  $\gamma_K$  et  $\text{tg} \phi_K$  tendent vers des quantités posi-

tives petites au voisinage de  $\omega = 0$ . Au voisinage de  $\omega = \infty$ ,  $\gamma_K$  reste fini tandis que  $\text{tg}\phi_K$  tend vers zéro comme  $\omega^{-2}$ .

Toujours à partir de l'équation (67) on voit que  $\text{tg}\phi_K = \infty$  peut être une valeur propre si  $r_{(K)}$  vérifie

$$(K - \omega^2 M)r_{(K)} = 0 \quad (76)$$

On reconnaît le problème posé par l'équation (63), ce qui justifie les relations suivantes

$$r_{(K)} = z_{(K)} \quad (77)$$

$$\phi_K = \pi/2 \quad (78)$$

$$\lambda_K^2 = \omega_K^2 \text{ pour } \omega = \omega_K \quad (79)$$

$$y_{(K)} = \omega_K R z_{(K)} \quad (80)$$

Pour résumer :

Il y a autant de modes d'excitation et de modes de réponse normaux que de degrés de liberté du système.

Tout déphasage caractéristique est nul à la fréquence nulle (ou petit et positif dans l'hypothèse de l'amortissement structural), passe par  $\pi/2$  pour une fréquence propre du système (le mode réponse étant alors identique au mode propre) et tend vers  $\pi$  à haute fréquence. Il a donc qualitativement l'allure du déphasage d'un système à un degré de liberté.

Pour un amortissement purement visqueux<sup>1</sup> et pour un amortissement structural<sup>10</sup> on peut également montrer que  $\omega^{-1}\text{tg}\phi_K$  et  $\text{tg}\phi_K$  respectivement croissent de façon monotone avec  $\omega^2$ .

#### 4.4. - Orthogonalité des modes de réponse normaux

Il suit de l'équation (67) qu'un mode de réponse normal satisfait à l'équation

$$\omega R r_{(K)} = \tan\phi_K (K - \omega^2 M)r_{(K)}$$

Soit  $r_{(j)}$  un autre mode de réponse à la même fréquence. Alors après avoir multiplié à gauche par  $r'_{(j)}$  nous obtenons

$$\omega r'_{(j)} R r_{(K)} = \tan\phi_K r'_{(j)} (K - \omega^2 M)r_{(K)}$$

De même si nous prenons l'équation vérifiée par  $r(j)$ , si nous la transposons et la multiplions à droite par  $r(k)$ , nous obtenons

$$\omega r'_{(j)} R r_{(k)} = \tan \phi_j r'_{(j)} (K - \omega^2 M) r_{(k)}$$

D'où, si  $\tan \phi_K = \tan \phi_j$  les propriétés suivantes, caractérisant une orthogonalité, se trouvent satisfaites

$$r'_{(j)} R r_{(k)} = 0 \quad (81)$$

$$r'_{(j)} (K - \omega^2 M) r_{(k)} = 0 \quad (82)$$

On peut montrer que ces relations restent vraies si le déphasage caractéristique possède une racine multiple en orthogonalisant les modes indépendants associés. (La théorie des matrices enseigne que le nombre des modes indépendants est celui du degré de multiplicité de la racine).

Multipliant à gauche l'équation (68) par  $r'_{(j)}$  et utilisant les relations d'orthogonalité nous obtenons

$$r'_{(j)} y_{(k)} = 0 \quad j \neq k \quad (83)$$

Ce qui établit une propriété très importante, savoir que l'énergie introduite par une excitation donnée se répartit seulement entre les modes de réponse qui lui sont associés.

#### 4.5. - Extension de la réponse en fréquence au cas d'une excitation arbitraire

A une fréquence donnée les  $y_{(k)}$  forment un ensemble complet ou base de l'espace vectoriel. En fait la relation annexe

$$\sum a_k y_{(k)} = 0$$

implique, après multiplication par  $r'_{(k)}$  et recours à l'équation (83), que

$$a_j [r'_{(j)} y_{(j)}] = 0 \quad \text{pour tout } j$$

A présent, on tire des équations (71) et (72)

$$[r'_{(j)} y_{(j)}]^2 = [r'_{(j)} (K - \omega^2 M) r_{(j)}]^2 + \omega^2 [r'_{(j)} R r_{(j)}]^2 > 0$$

et par conséquent tous les  $\alpha_j$  sont nécessairement nuls.

Un mode d'excitation quelconque peut toujours être représenté de la même façon comme un développement

$$y = \sum \beta_k y_{(k)}$$

On suppose que tous les excitateurs sont en phase en sorte qu'on n'a à considérer que des coefficients  $\beta$  réels; on peut les regarder comme les coordonnées généralisées d'une excitation arbitraire.

Le développement correspondant de la réponse en fréquence sera

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum \beta_k e^{-i\phi_k} r_{(k)} = a - ib \\ a &= \sum \beta_k \cos \phi_k r_{(k)} \end{aligned} \quad (85)$$

est la partie en phase avec l'excitation et

$$b = \sum \beta_k \sin \phi_k r_{(k)} \quad (86)$$

est la partie déphasée de  $90^\circ$  en arrière.

D'après les équations (84) et (83) et aussi d'après l'équation (72)

$$\beta_k = \frac{r'_{(k)} y}{r'_{(k)} y_{(k)}} = \sin \phi_k \frac{r'_{(k)} y}{\omega r'_{(k)} R r_{(k)}} \quad (87)$$

ou, utilisant les définitions (74) et (75)

$$\beta_k = \frac{\sin \phi_k}{\gamma_k \lambda_k^2} \frac{r'_{(k)} y}{r'_{(k)} M r_{(k)}} \quad (88)$$

Il est commode de normaliser les modes de réponse en attribuant à chacun la même masse généralisée

$$\mu = r'_{(k)} M r_{(k)} \quad (89)$$

Les réponses en phase et en quadrature à une excitation arbitraire telles que les donnent les relations (85) et (86) s'écrivent alors

$$a = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\sin\phi_K \cos\phi_K}{\gamma_K \lambda_K^2} [r'_{(K)} y] r_{(K)} \quad (90)$$

$$b = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\sin^2\phi_K}{\gamma_K \lambda_K^2} [r'_{(K)} y] r_{(K)} \quad (91)$$

#### 4.6. - Matrices de flexibilité dynamique

Si les termes correspondant à l'énergie introduite, placés ici entre crochets  $[r'_{(K)} y_{(K)}]$ , sont mis en facteurs dans chaque terme du développement (ce sont des quantités scalaires) et si l'on utilise les propriétés associatives de la multiplication matricielle, on peut mettre l'excitation en facteur à droite. On trouve alors

$$a = Ay \quad \text{and} \quad b = By \quad (92)$$

$$A = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\sin\phi_K \cos\phi_K}{\gamma_K \lambda_K^2} r_{(K)} r'_{(K)} \quad (93)$$

$$B = \frac{1}{\mu} \sum \frac{\sin^2\phi_K}{\gamma_K \lambda_K^2} r_{(K)} r'_{(K)} \quad (94)$$

Ce sont les matrices de flexibilité dynamique et elles apparaissent comme un développement de produits di-adiques des modes de réponse. Un élément  $A_{ij}(\omega)$  de A est l'amplitude de la réponse en phase de la coordonnée  $q_i$  pour une excitation unitaire appliquée à la coordonnée  $q_j$ ;  $B_{ij}(\omega)$  est la réponse correspondante en quadrature. Puisque

$$x = (A - iB)y$$

nous avons donc trouvé l'inverse de la relation (61)

$$[K - \omega^2 M + i\omega R]^{-1} = A - iB \quad (95)$$

#### 4.7. - Caractère stationnaire de l'énergie réactive pour un mode d'excitation pur <sup>10</sup>

Considérons l'énergie introduite par cycle par une excitation arbitraire, c'est-à-dire l'énergie "active"

$$E_a = \pi y' b = \pi b' y \quad (96)$$

et définissons l'énergie "réactive" par

$$E_r = \pi y'a = \pi a'y \quad (97)$$

Tirant y de l'équation (84), a et b des équations (85) et (86), utilisant l'équation (83) avec  $y_{(K)}$ , tiré de (71), nous obtenons

$$E_a = \pi \omega \sum \beta_K^2 [r'_{(K)} R r_{(K)}] \quad (98)$$

$$E_r = \pi \omega \sum \beta_K^2 \cot \phi_K [r'_{(K)} R r_{(K)}] \quad (99)$$

Manifestement  $E_a$  est une forme quadratique définie positive, ce qui correspond à sa nature d'énergie dissipée. D'un autre côté  $E_r$  n'est généralement pas définie positive. Chaque fois que l'on passe par une résonance de phase, l'un des coefficients  $\cot \phi_K$  passe d'une valeur positive à une valeur négative, d'où s'en suit un changement de signe de la forme.

Les conditions pour que l'énergie réactive demeure stationnaire vis-à-vis de petites variations arbitraires des coordonnées généralisées de l'excitation sont

$$\frac{\partial E_r}{\partial \beta_K} = 2\pi \omega \beta_K \cot \phi_K [r'_{(K)} R r_{(K)}] = 0 \quad \text{pour toute valeur de } K$$

Si l'on écarte la solution triviale de l'excitation nulle (tous les  $\beta_K$  sont nuls), ces conditions ne peuvent être satisfaites que si

- (1) Tous les  $\beta_K$  sont nuls à l'exception d'un seul, soit  $\beta_j$
- (2)  $\cot \phi_j = 0$  ou  $\phi_j = \pi/2$

Il s'en suit alors d'après les équations (77) à (80) que

$$\omega = \omega_j \quad (\text{l'une des fréquences propres})$$

$$x = -i \beta_j z_{(j)} \quad (\text{l'un des modes propres en quadrature})$$

$$y = \beta_j \omega_j R z_{(j)} \quad (\text{un mode d'excitation pur}).$$

A ces conditions la valeur stationnaire de  $E_r$  est zéro. Ainsi la propriété qu'a l'énergie réactive d'être stationnaire nous donne un critère pour reconnaître les cas d'excitation idéale et fournit un moyen expérimental de reconnaître un mode propre pur.



Un autre problème intéressant est le suivant. Des équations (97) et (92) on tire

$$E_r = \pi y' A y$$

et si nous considérons les éléments de  $y$  comme des coordonnées de l'excitation, les conditions pour obtenir les valeurs stationnaires sont

$$\delta E_r = \pi(\delta y' A y + y' A \delta y) = 2\pi \delta y' (A y) = 0$$

pour des variations arbitraires de  $\delta y$ . D'où

$$a = A y = 0 \quad (100)$$

De fait, la disparition de la réponse en phase implique un mode propre de réponse en quadrature ce qui peut seulement avoir lieu à la fréquence de résonance. Les fréquences propres du système sont donc aussi des solutions du déterminant

$$|A(\omega)| = 0 \quad (101)$$

et les modes d'excitation pure  $Rz_{(j)}$  sont les vecteurs propres correspondants de l'équation (100).

#### 4.8. - Modes purs obtenus par excitation partielle

Un mode d'excitation pure pour une structure continue exige une distribution de forces de volume et est évidemment impossible à réaliser. Avec un nombre fini de points recevant les excitateurs se pose le problème de rendre optima la distribution des amplitudes des forces pour obtenir une réponse aussi proche que possible d'un mode propre.

Les principes de la solution peuvent aussi bien être exposés dans le cas d'un système à nombre fini de degrés de liberté dont seulement quelques unes des coordonnées sont excitées.

##### 4.8.1. - Le principe de résonance

Soient  $z_{(r)}$  et  $\omega_{(r)}$  le mode propre et la fréquence propre que l'on cherche à déterminer par une mesure de résonance. Supposons alors (1) que  $\omega_r$  est suffisamment éloignée des autres fréquences propres pour que pour  $\omega = \omega_r$  on ait  $\sin \phi_r = 1$  et que les autres  $\sin \phi_k$  soient des quantités petites, de l'ordre de  $\gamma$  comme les  $\gamma_k$ ; (2) que le facteur d'énergie introduite  $[z'_{(r)} y]$  soit du même ordre (au moins) que les autres, la situation est alors la suivante pour  $\omega = \omega_r$  :

(a) le terme prépondérant dans la réponse en quadrature est

$$b_{(r)} = \frac{[z'_{(r)}\gamma]}{\mu\omega_r^2\gamma_r(\omega_r)} z_{(r)} \quad (102)$$

tous les autres termes étant petits, de l'ordre de  $\gamma^{\frac{1}{2}}$ , comparés à celui-ci.

(b) le terme en  $z_{(r)}$  disparaît de la réponse en phase ( $\cos \phi_r = 0$ ) et les autres termes sont petits, de l'ordre de  $\gamma$ , comparés au terme en quadrature prépondérant. Par conséquent nous pouvons déterminer expérimentalement le mode propre  $z_{(r)}$  avec des erreurs de l'ordre de  $\gamma^{\frac{1}{2}}$  seulement, en mesurant la réponse en quadrature à la résonance. Il est nécessaire pour cela de disposer de capteurs capables de discerner les composantes en phase et en quadrature. Si l'on utilise de simples capteurs donnant seulement l'amplitude crête à crête de la réponse, il faut faire attention au voisinage des noeuds de  $b_{(r)}$ . Car si l'amplitude locale de  $b_{(r)}$  est grande, l'addition de termes de l'ordre de  $\gamma^{\frac{1}{2}}$  en phase avec elle et de l'ordre de  $\gamma$ , en quadrature, donne une amplitude crête à crête correcte à  $\gamma^{\frac{1}{2}}$  près. Mais au voisinage des noeuds de  $b_{(r)}$  l'erreur peut être de l'ordre de  $\gamma$ .

Les résultats numériques dans le cas des vibrations de flexion et de torsion d'une poutre continue avec amortissement uniforme, excitée à l'une de ses extrémités, montrent que l'importance relative de la réponse en phase croît de façon notable avec l'ordre de la résonance.

Tout ce que l'on vient d'exposer constitue un cas limite et, pourvu qu'on n'en fasse pas application à une résonance d'ordre élevé, on peut obtenir d'excellents résultats avec des essais effectués avec un seul excitateur.

Pour réaliser pleinement les conditions exigées du terme d'énergie introduite il faut placer l'excitateur en un point où il y a de grandes amplitudes pour chaque cas particulier de résonance.

Mais une question se pose alors : comment est-on amené à déclarer que l'on se trouve bien dans un cas de résonance? La réponse est fournie par le recours au principe de résonance locale de phase.

#### 4.8.2. - Le principe de résonance locale de phase

Déterminons la variation de la réponse  $x$  pour de petites variations de la fréquence d'excitation,  $y$  étant gardé constant. Plus précisément calculons la matrice colonne

$$v = \frac{dx}{d\omega^2}$$

On peut le faire en première approximation en supposant que  $\omega R$  et  $K$  ne varient pas de façon appréciable en fonction de la fréquence. Alors en différentiant l'équation (61) par rapport à  $\omega^2$  nous obtenons

$$-Mx + [K - \omega^2 M + i\omega R] v = 0$$

et, à partir de l'équation (95)

$$v = (A - iB)Mx = (AMa - Bmb) - i(AMB + Bma) \quad (103)$$

Dans le cas limite décrit plus haut le terme prépondérant dans la partie réelle de  $v$  se détermine aisément à partir des équations (90), (91), (93) et (94) et on le trouve égal à

$$\frac{da}{d\omega^2} = - \frac{[z'_{(r)}y]}{\mu\omega_r^2 \gamma_r^2(\omega_r)} z_{(r)} \quad (104)$$

Les autres termes sont du même ordre que  $Y^r$ , si on les compare à celui-ci, et les termes de la partie imaginaire du même ordre que  $Y$ .

Supposons maintenant que nous réalisions la résonance en recueillant la réponse en phase de l'une des coordonnées, soit celle de rang 1, et en réglant la fréquence d'excitation de façon à annuler cette réponse. Cette façon de procéder peut recevoir le nom de principe de résonance locale de phase et se justifie si, en plus de la condition (2) du principe de résonance, l'amplitude de  $z_{(r)1}$ , pour la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée, est du même ordre que les autres  $r_{(k)1}$ . Pour cela la comparaison du terme correctif

$$\Delta\omega^2 \frac{d}{d\omega^2} a_1 = - \frac{\Delta\omega^2}{\omega_r^2} \frac{[z_{(r)}y]}{\mu\omega_r^2 \gamma_r^2(\omega_r)} z_{(r)1}$$

au terme  $a_1 (\omega_r^2)$  qu'il doit balancer (comme on peut le voir d'après l'équation (90) montre que

$$\frac{\Delta\omega^2}{\omega_r^2} = 0(\gamma^2) \quad \text{seulement}$$

On mesure donc la fréquence propre avec une erreur relative de l'ordre de  $\gamma^2$  et les corrections dues à  $\Delta\omega^2$  dans la réponse en quadrature consistent en termes de l'ordre de  $\gamma^2$  par rapport au terme prépondérant fourni

par l'équation (102).

En conclusion on peut escompter que, dans le cas où la fréquence propre est bien isolée et qu'on applique une excitation unique en un point de grande amplitude, l'observation de la résonance locale de phase en un autre (ou au même) point de grande amplitude assure la mesure de la fréquence propre et de la déformée du mode, l'une et l'autre avec des erreurs relatives de l'ordre de  $\gamma^2$ .

On peut remarquer que ce principe revient à remplacer l'équation de la fréquence (101) par l'équation approchée

$$A_{ij}(\omega) = 0$$

où  $j$  est l'indice de la coordonnée excitée et  $i$  l'indice de la coordonnée où la réponse en phase s'annule.

#### 4.8.3. - Le principe de la pseudo-résonance

Dans les structures compliquées les fréquences propres ne sont pas toujours bien séparées. En théorie deux ou plusieurs modes ayant des déformées distinctes peuvent posséder la même fréquence propre <sup>11,12</sup>. Dans de tels cas et plus généralement pour les spectres de fréquences élevées où les fréquences propres ont tendance à se rapprocher les unes des autres, il est impossible d'obtenir des modes de résonance pure sans avoir recours à de multiples points d'excitation. En utilisant plusieurs excitateurs il devient théoriquement possible de réaliser la pseudo-résonance de modes de réponse dont la fréquence est trop proche de celle du mode que l'on veut mesurer. En d'autres termes les facteurs d'énergie de ces modes de réponse peuvent tendre vers zéro, supprimant ainsi dans le développement (91) des termes qui seraient par ailleurs relativement importants car les valeurs de leur  $\sin \phi_K$  ne sont pas éloignées de 0 ( $\gamma$ ).

Reste cependant le problème de décider par l'expérience si ces cas de pseudo-résonances se trouvent actuellement réalisés.

Pour simplifier nous allons commencer par le problème posé par deux fréquences voisines que nous appellerons  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Prenant seulement les termes prépondérants, lorsque la fréquence d'excitation est voisine de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , nous avons

$$b = \frac{\sin^2 \phi_1}{\mu \gamma_1 \lambda_1^2} [r'_{(1)} y] r_{(1)} + \frac{\sin^2 \phi_2}{\mu \gamma_2 \lambda_2^2} [r'_{(2)} y] r_{(2)}$$

$$a = \frac{\sin \phi_1 \cos \phi_1}{\mu \gamma_1 \lambda_1^2} [r'_{(1)} y] r_{(1)} + \frac{\sin \phi_2 \cos \phi_2}{\mu \gamma_2 \lambda_2^2} [r'_{(2)} y] r_{(2)}$$

Supposons que  $\omega = \omega_1$  exactement. Alors  $\cos \phi_1 = 0$ ,  $\sin \phi_1 = 1$ ,  $r_{(1)} = z_{(1)}$  et le second terme de  $b$  est le terme parasite qui doit être éliminé par un vecteur d'excitation  $y$ , tel que  $[r'_{(2)}y] = 0$  et que  $[r'_{(1)}y]$  soit du même ordre que le facteur d'énergie. On voit que le terme dominant conservé en  $a$  disparaît à la résonance et que nous avons alors une véritable résonance de phase en chacune des coordonnées.

En pratique, si nous avons deux excitateurs nous pouvons ajuster l'amplitude relative de leurs forces de façon à avoir exactement résonance de phase en un point de grande amplitude. Ensuite par un petit réglage de  $\Delta \omega^2 / \omega_1^2$  qui est de l'ordre de  $\gamma^2$ , nous pouvons, en tenant compte des termes négligés dans  $a$ , assurer une résonance de phase exacte en un autre point de grande amplitude. On peut donc conclure que toutes les conditions requises pour des mesures soigneuses, en particulier pour celle de la pseudo-résonance du mode parasite, sont remplies par l'emploi de deux excitateurs, placés de préférence en des points de grande amplitude, et par le réglage de la fréquence et de l'amplitude des forces d'excitation qui assure la résonance de phase en deux autres (ou éventuellement les mêmes) points de grande amplitude.

Si nous désignons par les indices  $j_1$  et  $j_2$  les coordonnées excitées et par  $i_1$  et  $i_2$  les coordonnées mesurées, cette méthode revient à remplacer la condition pour une excitation pure de l'équation (100) par ces conditions approchées

$$a_{i_1} = A_{i_1 j_1}(\omega)y_{j_1} + A_{i_1 j_2}(\omega)y_{j_2}$$

$$a_{i_2} = A_{i_2 j_1}(\omega)y_{j_1} + A_{i_2 j_2}(\omega)y_{j_2}$$

L'extension de ce principe à un nombre quelconque d'excitateurs est immédiate et conduit aux conditions

$$A_{(s)}y_{(s)} = 0 \quad (105)$$

où  $A_{(s)}$  est la sous-matrice de  $A$  obtenue en prenant les éléments communs aux lignes  $(i_1, i_2 \dots i_m)$  et aux colonnes  $(j_1, j_2 \dots j_m)$ , et  $y_{(s)}$  la colonne des amplitudes d'excitation utilisées à l'essai.

Nous noterons que dans le cas particulier où

$$i_t = j_t \quad (t = 1, 2 \dots m)$$

c'est-à-dire quand la résonance de phase est imposée aux points où sont les excitateurs, le principe est une expression de la stationnarité de l'énergie réactive de l'excitation partielle.

La réalisation pratique des conditions (105) est d'une difficulté croissante avec le nombre des excitateurs en usage. Bien des recherches sont nécessaires pour examiner la convergence des méthodes d'approximation successive que l'on peut envisager. On peut, par exemple, penser à la possibilité d'étendre la méthode de Gauss-Seidel à l'équation (105). Cela consisterait en pratique à régler successivement l'amplitude de la force de chaque excitateur  $y_{jt}$  pour assurer la résonance de phase sur la coordonnée  $q_{jt}$  avec le réglage de fréquence convenable.

Une autre méthode serait de mesurer expérimentalement chacune des colonnes de  $A_{(s)}$  (en mettant en oeuvre seulement un excitateur) et la phase des réponses. On trouverait alors la fréquence en calculant numériquement  $|A_{(s)}|$  de façon à ce qu'il soit nul et l'excitation nécessaire, en résolvant numériquement le système compatible des équations (105). Cette façon de procéder a été proposée de nos jours par Traill-Nash <sup>13</sup>.

Une bonne vérification des conditions de la pseudo-résonance pour des modes voisins est assurée par la pureté des boucles de réponse (terme en quadrature en fonction de la phase de la réponse) quand la fréquence varie au voisinage de la fréquence propre cherchée. Une bonne boucle de réponse doit ressembler à celle d'un système à un degré de liberté, qui est presque un cercle, un point sur lequel ont spécialement insisté Kennedy et Pancu <sup>9</sup>.

#### 4.9. - Cas particuliers de réponse forcée

Si nous supposons que

$$K(\omega^2) = [1 + \theta(\omega)]K(0) \quad \text{with} \quad \theta(0) = 0 \quad (106)$$

les modes propres sont orthogonaux par rapport aux deux matrices M et K(0) et

$$\left. \begin{aligned} z'_{(r)} M z_{(s)} &= 0 \\ z'_{(r)} K(0) z_{(s)} &= 0 \quad r \neq s \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Si maintenant nous faisons l'hypothèse supplémentaire que  $R(\omega^2)$  est défini par

$$R = \gamma(\omega)K(0) \quad (108)$$

nous avons une extension du cas considéré par Rayleigh<sup>2</sup> qui conduit à des résultats très simples. En effet l'introduction de ces hypothèses dans l'équation (67) et la comparaison avec l'équation vérifiée par un mode propre montrent qu'à toute fréquence on peut écrire

$$r_{(K)} = z_{(K)}$$

$$\tan \phi_K = \frac{\omega \gamma(\omega)}{1 + \theta(\omega) - [1 + \theta(\omega_K)] \frac{\omega^2}{\omega_K^2}}$$

tandis qu'en raison de l'équation (72) et des résultats précédents

$$y_{(K)} = \frac{\omega \gamma(\omega)}{1 + \theta(\omega_K)} Mz_{(K)}$$

Ainsi l'allure de la réponse forcée devient indépendante de la réponse, l'expression du déphasage caractéristique est obtenue de façon explicite et l'allure du mode normal d'excitation ne dépend que de la matrice des inerties M.

Ce dernier fait est important car à partir de la connaissance de la distribution des masses et de la mesure des amplitudes de la réponse on peut régler progressivement la distribution des forces des excitateurs pour la rendre optima. Telle est la base de la méthode proposée par Lewis et Wrisley<sup>3</sup>.

Revenant aux équations les plus générales du mouvement (55), faisons l'hypothèse que

$$\Phi = \phi(t)K(o) \quad (109)$$

qui affecte les deux équations (106) et (108) quand on les utilise spécifiquement dans le cas d'une réponse forcée. (Notez que dans l'équation (55) K est réel, c'est pourquoi nous l'appelons ici K(o)). Alors, introduisant les coordonnées normales  $\eta_k(t)$ , nous obtenons

$$q = \sum_1^n \eta_k(t) z_{(K)}$$

et multipliant à gauche par  $z'_{(r)}$ , puis utilisant les relations d'orthogonalité (107), nous obtenons les équations normales

$$[z'_{(r)} M z_{(r)}] \ddot{\eta}_r + [z'_{(r)} K(o) z_{(r)}] (\eta_r + \phi'' \eta_r) = z'_{(r)} f \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Où, normalisant les modes propres comme en (89) et tenant compte de l'équation (64) nous obtenons

$$\ddot{\eta}_r + \frac{\omega_r^2}{1 + \theta(\omega_r)} (\eta_r + \phi^* \dot{\eta}_r) = \frac{1}{\mu} (z'_{(r)} f) \quad (110)$$

En raison des hypothèses (109) les coordonnées normales sont entièrement découplées. Dans ce cas un essai avec une excitation pure devient possible dans lequel le mode propre  $z_{(r)}$  est le seul qui soit excité et si l'excitation est soudainement coupée,  $z_{(r)}$  est encore un mode d'amortissement. De plus l'analyse du régime d'amortissement de l'une des amplitudes locales renseigne sur la nature exacte de la fonction héréditaire  $\phi(t)$ .

Dans le cas général où l'équation (109) n'est pas valable,  $z_{(r)}$  n'est pas un mode d'amortissement; le couplage dû à l'amortissement introduit peu à peu les autres modes dans la réponse décroissante.

L'hypothèse faite en (109) n'est pas la plus générale qui puisse conduire à des modes entièrement découplés. Comme l'a mis en évidence Rayleigh<sup>2</sup> (dans le cas particulier d'un amortissement simplement visqueux) le même type de simplification est possible lorsque  $\Phi$  est une fonction linéaire de K et M, savoir

$$\Phi = \phi(t)K(o) + \psi(t)M \quad (111)$$

D'autre part, suivant la théorie des matrices, on peut montrer que c'est l'hypothèse la plus générale pour laquelle on ait

$$z'_{(r)} \phi z_{(s)} = 0 \quad r \neq s$$

en même temps que les équations (107). Alors K(o),  $\Phi$  et M peuvent se transformer en matrices diagonales, propriété connue en France sous le nom d'"hypothèse de Basile". L'équation normale correspondant à l'hypothèse (111) est

$$\ddot{\eta}_r + \left( \psi + \frac{\omega_r^2}{1 + \theta(\omega_r)} \phi \right) \dot{\eta}_r + \frac{\omega_r^2}{1 + \theta(\omega_r)} \eta_r = \frac{1}{\mu} (z'_{(r)} f)$$

et l'on en déduit facilement toutes les propriétés de la réponse forcée.



R E F E R E N C E S

- - - - -

- 1 - Fraeijs de Veubeke, B.M. Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti. Acad. R. de Belgique, Bull. de la Classe des Sc. XXXIV, 1948, pp.626-641.
- 2 - Rayleigh, Lord The Theory of Sound. Dover, N.Y., Vol. I, Chap. V, Sect. 97, 1950.
- 3 - Lewis, A.C. Wrisley, D.L. A System for the Excitation of Pure Modes of Complex Structures. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.17, Nov. 1950, pp.705-722.
- 4 - Basile, B. Recherche des Caractéristiques Dynamiques des Systèmes Continus. Actes du Colloque International de Mécanique, Poitiers, P.S.T., N°261, 1950. 1950.
- 5 - Jeffreys, H. Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1946, Sections 14.04 and 14.113.
- 6 - Volterra, Enrico On Elastic Continua with Hereditary Characteristics. Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, n°3, sept. 1951, p.273.
- 7 - Biot, M.A. Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Viscoelasticity. The Physical Review, Vol.97, N°6, March 1955, pp.1463-1469.
- 8 - Biot, M.A. Theory of Stress-strain Relations in Anisotropic Visco-elasticity and Relaxation Phenomena. Journal of Applied Physics, Vol.25, nov. 1955, pp.1385-1391.
- 9 - Kennedy, C.C. Pancu, C.D.P. Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14, Nov. 1947, pp.603-630.
- 10 - Fraeijs de Veubeke, B.M. A Variational Approach to Pure Mode Excitation Based on Characteristic Phase Lag Theory. AGARD Report N°39, April 1956.

- 11 - Gauzy, H. Un Avion peut-il Avoir Deux Fréquences Propres Egales ? La Recherche Aéronautique, N°64, Mai-Juin 1958, pp.43-48.
- 12 - Fraeijs de Veubeke, B.M. Quelques Propriétés des Structures Ayant Deux ou Plusieurs Fréquences Propres Confondues. Actes de 3ème Congrès Aéronautique Européen, Bruxelles, Septembre 1958.
- 13 - Traill-Nash, R.W. On the Excitation of Pure Natural Modes in Aircraft Resonance Testing. Aeronautical Research Laboratories of Australia, Report S.M. 254, July 1957.
- 14 - Biot, M.A. Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids. Proceedings of the Third U.S. National Congress of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, June 1958.

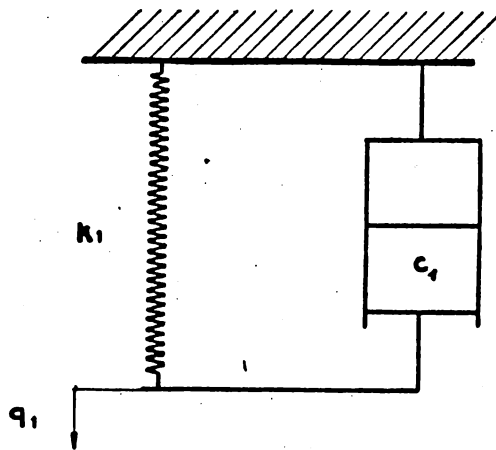


Fig. 1 - Système avec amortissement simplement visqueux

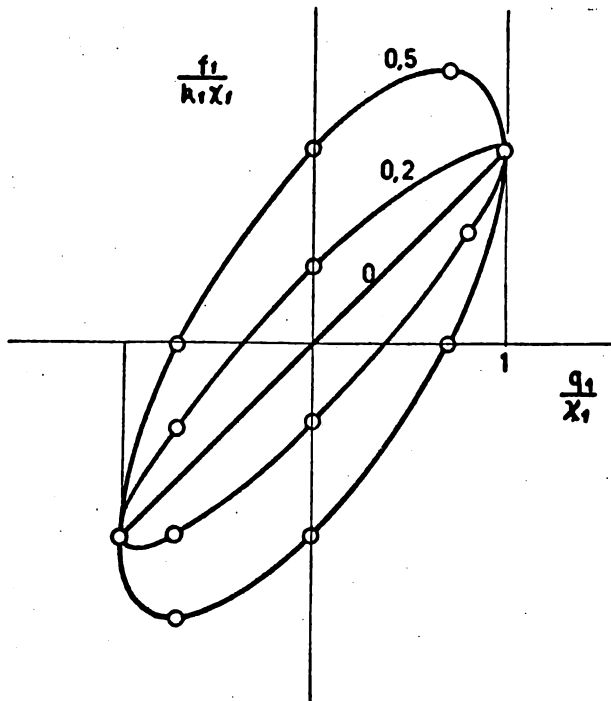


Fig. 2 - Courbes d'hystérésis d'un système structural doué uniquement d'amortissement visqueux pour différentes valeurs du paramètre  $\omega c_1/k_1$

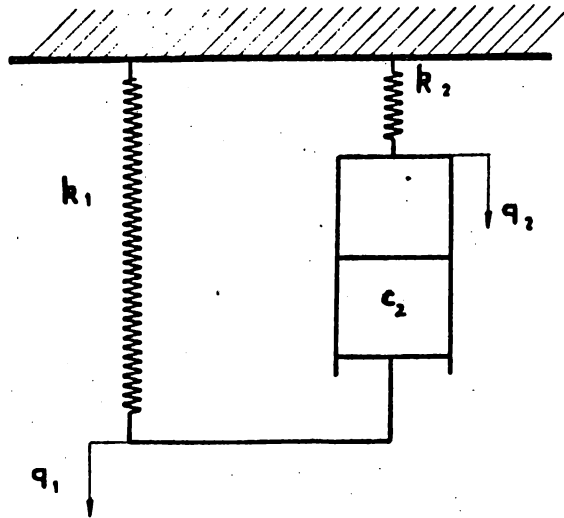


Fig. 3 - Exemple de système structural de Maxwell

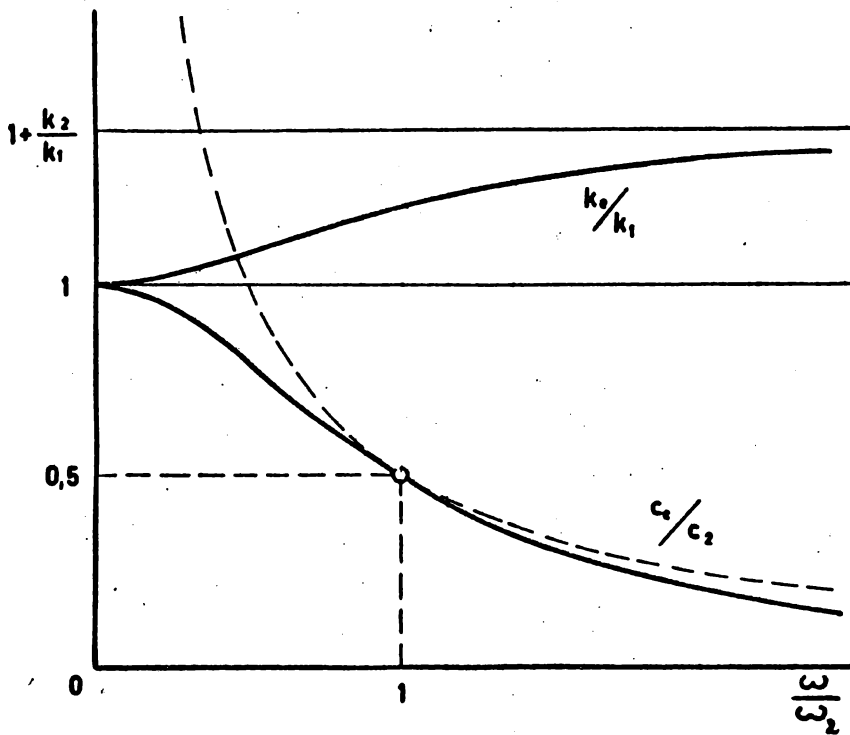


Fig. 4 - Raideur effective  $R_2$  et coefficient visqueux équivalent  $c_2$  pour un système de Maxwell

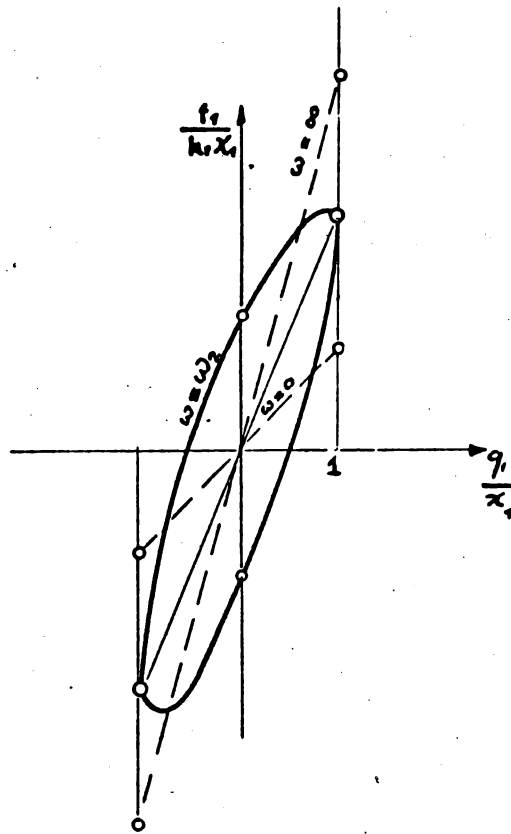


Fig. 5 - Courbes d'hystérésis pour un système de Maxwell

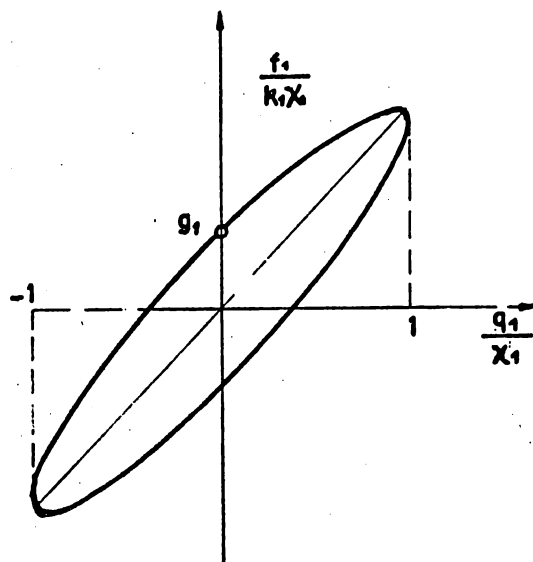


Fig. 6 - Courbe d'hystérésis de l'amortissement structural

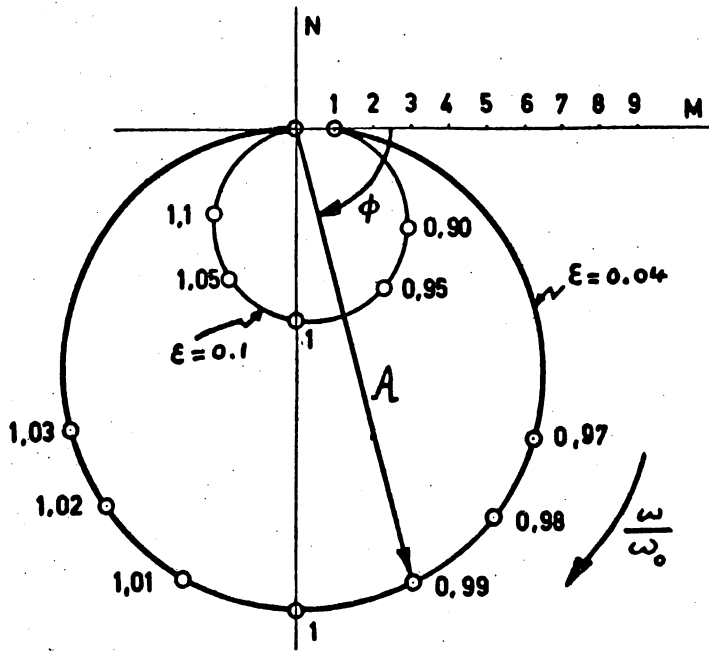


Fig. 7 - Représentation polaire du facteur d'amplification dynamique. Amortissement simplement visqueux

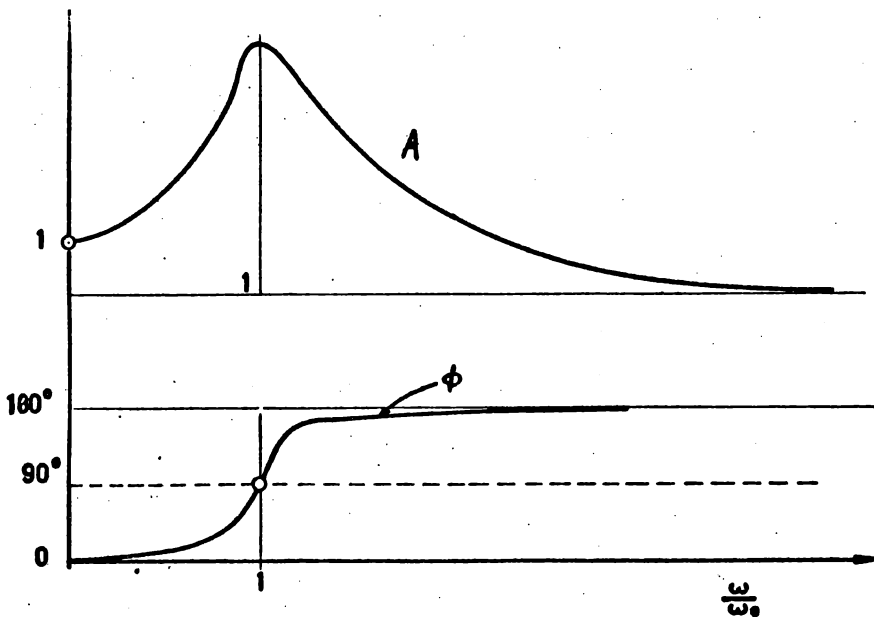


Fig. 8 - Amplitude et phase du facteur d'amplification dynamique. Amortissement simplement visqueux

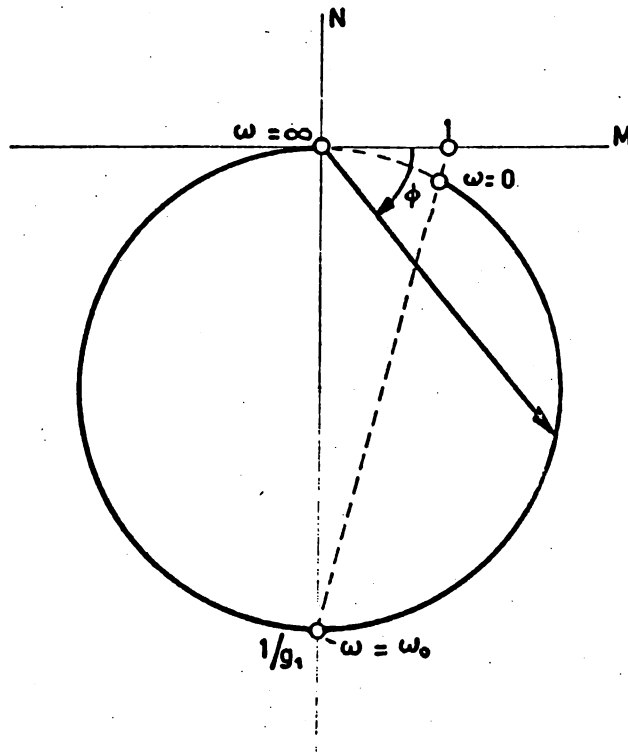


Fig. 9 - Cercle lieu du facteur d'amplification dynamique dans le cas de l'amortissement structural