ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

EXTRAIT

L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. - Un principe de variation des accélérations

PAR

B. FRAEIJS de VEUBEKE
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique de Bruxelles
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11
Chèques postaux : 2027.46

1959

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Tome 73, n° III, p. 327-344

L'énergie potentielle complémentaire dans les problèmes dynamiques. - Un principe de variation des accélérations

PAR

B. FRAEIJS de VEUBEKE
Professeur aux Universités de Liège et de Louvain

SOMMAIRE

Tout comme le principe de variation des déplacements en élasticité, le principe de Hamilton peut être transformé en un principe canonique autorisant des approximations indépendantes sur les déplacements et sur les forces de liaison.

On en déduit un principe dual à celui de Hamilton lorsque les équations d'équilibre dynamique sont exactement satisfaites. Pour des liaisons indépendantes du temps et une énergie cinétique fonction des seules vitesses ce principe dual prend la forme plus élégante d'un principe de variation des accélérations.

Ces idées sont d'abord exposées pour les systèmes à nombre fini de coordonnées lagrangiennes et appliquées, à titre d'exemple, à la recherche de valeurs approchées à la période d'oscillation d'un pendule. Elles sont ensuite étendues au cas de l'élastodynamique linéaire et appliquées à un cas simple de vibrations d'une poutre hyperstatique.

1. Généralisation du principe de Hamilton

Soient $q_r (r = 1, 2 \dots n)$ des coordonnées généralisées permettant de décrire la configuration d'un système holonome à n degrés de liberté. Le principe de Hamilton (¹)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathrm{T}(q_r, \dot{q}_r, t) - \mathrm{V}(q_r) \right] dt = 0 \tag{1}$$

$$\delta q_r = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \tag{2}$$

conduit aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_r} = 0 \tag{3}$$

qui gouvernent le mouvement du système.

Le principe de Hamilton est aussi un outil puissant pour obtenir des solutions approchées aux équations du mouvement. Dans ce but on peut y substituer à une ou plusieurs des fonctions inconnues $q_r(t)$ des fonctions dépendant d'un certain nombre de paramètres à varier; les limites d'intégration étant choisies de façon à satisfaire les conditions (2).

Nous élargissons le champ des solutions approchées en permettant à l'énergie potentielle V du système d'être calculée dans une configuration qui ne coïncide pas nécessairement à chaque instant avec celle qui nous sert à calculer son énergie cinétiqueT. Dans ce but nous introduisons pour le calcul de V n nouvelles coordonnées lagrangiennes $h_r (r = 1, 2, \ldots n)$ indépendantes des q_r. Les n contraintes

$$h_r - q_r = 0 \tag{4}$$

sont incorporées au principe de Hamilton à l'aide de n multiplicateurs lagrangiens f_r. Le principe ainsi modifié s'écrit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathrm{T}(q_r, \dot{q}_r, t) - \mathrm{V}(h_r) + \sum_r f_r (h_r - q_r)\right] dt = 0 \tag{5}$$

La variation des q_r avec les conditions (2) donne

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} - f_r = 0 \tag{6}$$

La variation des h_r

$$-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial h_r} + f_r = 0 \tag{7}$$

Tandis que la variation des f_r restitue les contraintes (4). Par élimination des f_r et des h_r on retrouve les équations (3) de Lagrange.

2. Introduction de l'énergie potentielle complémentaire

Les multiplicateurs f_r ayant été identifiés par les équations (7) nous substituons leur valeur dans le principe généralisé (5). Cette substitution suggère l'introduction de l'énergie potentielle complémentaire ψ définie par la transformation de contact de Legendre

$$\psi(f_r) = \sum_r f_r\, h_r - \mathrm{V} \tag{8}$$

Comme la notation l'indique il faut résoudre les équations (7) par rapport aux h_r afin de substituer au second membre de (8) les h_r au profit des f_r.

Eu égard aux équations (7) la définition de (8) entraîne les relations duales de (7)

$$h_r = \frac{\partial\psi}{\partial f_r} \tag{9}$$

Après remplacement des multiplicateurs le principe généralisé prend la forme canonique

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathrm{T}(q_r, \dot{q}_r, t) + \psi(f_r) - \sum_r f_r\, q_r \right] dt = 0 \tag{10}$$

Les équations d'Euler de ce principe variationnel sont : pour les variations δq_r toujours conditionnées par (2)

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_r} = f_r \tag{11}$$

ce sont les équations de l'équilibre dynamique; pour les variations δf_r

$$\frac{\partial\psi}{\partial f_r} = q_r \tag{12}$$

Rapprochées des équations (9) on voit qu'elles impliquent le respect des contraintes (4) et pour cette raison nous les appellerons les équations de compatibilité.

Le principe canonique permet l'introduction d'approximations non seulement sur les fonctions $q_r(t)$ mais aussi et indépendamment sur les fonctions $f_r(t)$. Dans ce cas les équations d'équilibre et de compatibilité ne seront plus satisfaites exactement. En général les équations fournies par l'application du principe canonique demanderont que soient satisfaites un certain nombre de moyennes temporelles pondérées des équations (11) et (12) dans l'intervalle de temps considéré.

Quand on satisfait a priori aux équations de compatibilité (12) il revient évidemment au même d'appliquer le principe canonique ou le principe de Hamilton sous sa forme primitive. Quand on satisfait a priori aux équations (11) de l'équilibre dynamique, le principe canonique doit se réduire à un principe dual de celui de Hamilton, exactement comme dans la théorie de l'élasticité le principe de l'énergie complémentaire (ou de variation des tensions) est dual au principe de l'énergie totale (ou de variation des déplacements).

Ce principe dual ne prend cependant une forme élégante que dans le cas particulier important des systèmes à liaisons indépendantes du temps et à énergie cinétique fonction des seules vitesses.

Supposant les équations (11) satisfaites, commençons par substituer formellement dans (10) les f_r par leur valeur, ce qui transformera ψ en une fonction notée par

$$\psi(t, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$$

Nous obtenons comme principe dual

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[T(q_r, \dot{q}_r, t) + \psi(t, q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r) - \\ - \sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial q_r} + \sum_r q_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)\Big] dt = 0$$

Il peut être quelque peu simplifié en décomposant l'énergie cinétique

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

dans ses parties respectivement homogènes de degré zéro, un et deux dans les vitesses généralisées $\dot{q}_r$. Par le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes on peut écrire

$$T = \sum \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - T_2 + T_0$$

Si cette nouvelle expression de T est substituée pour le premier terme et comme

$$\sum_1 \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} + \sum_r q_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)$$

il vient après une intégration

$$\delta\left[\sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2}\left[\psi + T_0 - T_2 - \sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial q_r}\right] dt = 0 \qquad (13)$$

Notons ici que les conditions (2) ne font pas disparaître complètement les termes aux limites.

Pour des liaisons indépendantes du temps on sait que l'énergie cinétique se réduit à T_2 et le principe devient plus simplement

$$\delta\left[\sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2}\left[\psi - T - \sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial q_r}\right] dt = 0 \qquad (14)$$

où ψ ne dépend plus explicitement du temps.

Enfin dans certains cas particuliers, mais toujours quand les oscillations autour d'une position d'équilibre sont petites, T ne dépend pas explicitement des q_r et on a

$$\delta\left[\sum_r q_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right]_{t_1}^{t_2} + \delta \int_{t_1}^{t_2}\left[\psi(\ddot{q}_r) - T(\dot{q}_r)\right] dt = 0 \qquad (15)$$

En effet les f_r deviennent dans ce cas des fonctions linéaires des accélérations $\ddot{q}_r$:

$$f_r = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\sum_s a_{rs}\, \dot{q}_s\right) = -\sum_s a_{rs}\, \ddot{q}_s \qquad (16)$$

en désignant par a_{rs} les constantes

$$a_{rs} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r\, \partial \dot{q}_s} = a_{sr} \qquad (17)$$

Le principe (15) est alors plus avantageusement interprété comme un principe de variation des accélérations. En effet par (16)

$$\delta\psi = \sum_r \frac{\partial \psi}{\partial f_r}\, \delta f_r = -\sum_r \sum_s \frac{\partial \psi}{\partial f_r}\, a_{rs}\, \delta\ddot{q}_s$$

et d'autre part

$$\delta T = \sum_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\, \delta\dot{q}_s = \sum_s \sum_r a_{rs}\, \dot{q}_r\, \delta\dot{q}_s$$

Le principe (15) devient donc

$$\left[\sum_s \delta q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \sum_s \sum_r a_{rs}\, q_r\, \delta \dot{q}_s \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_s \sum_r a_{rs} \left[\frac{\partial \psi}{\partial f_r}\, \delta \ddot{q}_s + \dot{q}_r\, \delta \dot{q}_s\right] dt = 0$$

En intégrant le dernier terme par parties il vient

$$\left[\sum_s \delta q_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_s \left(\sum_r a_{rs} \left(\frac{\partial \psi}{\partial f_r} - q_r\right)\right) \delta \ddot{q}_s\right] dt = 0$$

Les termes aux limites disparaissent en vertu de (2) et l'annulation des coefficients des variations sur les accélérations est équivalente aux équations de compatibilité (12), du fait que le déterminant

$$|a_{rs}| \neq 0$$

En effet, l'énergie cinétique étant une forme quadratique définie positive, ce déterminant est strictement positif. Une dernière simplification du principe (15) s'impose. Elle consiste à supprimer les termes aux limites et à le réduire au principe de variation des accélérations

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[T(\dot{q}_r) - \psi(\ddot{q}_r)\right] dt = 0 \qquad (18)$$

Il suffit pour le justifier de remplacer les conditions (2) par les conditions aux limites sur les vitesses

$$\delta \dot{q}_r = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \qquad (19)$$

Sous cette forme sa dualité avec le principe de Hamilton est formellement mieux dégagée.

4. Application du principe généralisé aux oscillations pendulaires de grande amplitude

Cette application à un problème dont la solution exacte est bien connue a l'avantage de permettre une comparaison numérique directe avec des solutions approchées, d'ailleurs plus compliquées que la solution exacte.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la masse m suspendue à un fil de longueur r dans un champ uniforme de gravité d'accélération g sont respectivement

$$T = \tfrac{1}{2}\, mr^2\dot{\theta}^2 \tag{20}$$

$$V = -\, mgr \cos\theta \tag{21}$$

où θ est l'angle que fait le fil avec la verticale.

L'équation de Lagrange correspondante

$$mr(r\ddot{\theta} + g \sin\theta) = 0 \tag{22}$$

a pour solution bien connue

$$t - t_{\theta=0} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{du}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}$$

où α désigne l'écart angulaire maximum. Pour $\theta = \alpha$ cette expression donne le quart de la période d'oscillation T_α qui, moyennant le changement de variable

$$\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

devient

$$T_\alpha = 4\sqrt{\frac{r}{g}}\, K\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right) \tag{23}$$

où $K(k)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Pour k tendant vers zéro en même temps que α on trouve la formule classique de la période des petites oscillations

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \qquad \left(K = \frac{\pi}{2}\right) \tag{24}$$

Utilisons directement le principe de Hamilton en formulant l'hypothèse que l'oscillation est harmonique

$$\theta = \alpha \sin\omega t \tag{25}$$

Nous considérons ω, et donc la période, comme une donnée et nous chercherons l'amplitude α approchée correspondante en prenant la variation sur ce paramètre. Pour satisfaire aux conditions

$$\delta\theta = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2$$

quel que soit α nous prenons

$$\omega t_1 = 0 \quad \omega t_2 = \pi$$

Grâce à la formule suivante de la théorie des fonctions de Bessel

$$\int_0^{\pi} \cos(\alpha \sin \omega t)\, d(\omega t) = \pi\, J_0(\alpha) \tag{26}$$

le principe de Hamilton devient

$$\delta \left[\frac{\pi}{4} mr^2 \alpha^2 \omega + \pi \frac{mgr}{\omega} J_0(\alpha)\right] = 0$$

Annulant le coefficient de la variation $\delta\alpha$ il vient

$$\frac{1}{\omega^2} = -\frac{r}{2g} \frac{\alpha}{J_0'(\alpha)}$$

Ce résultat peut finalement être mis sous la forme

$$T_\alpha / T_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2J_1(\alpha)}} \tag{27}$$

Par le développement en série de la fonction de Bessel on vérifie facilement que le second membre tend bien vers l'unité quand l'amplitude tend vers zéro. L'approximation à la période donnée par (27) ne commence à se détériorer que pour des amplitudes supérieures à 120°.

L'énergie complémentaire a ici pour expression

$$\psi(f) = mgr\, [\mu \arcsin \mu + \sqrt{1 - \mu^2}] \tag{28}$$

avec

$$\mu = \frac{f}{mgr}$$

Utilisons le principe de variation canonique (10) avec les approximations indépendantes

$$\theta = \alpha \sin \omega t \qquad \mu = \lambda \sin \omega t \tag{29}$$

Les variations seront prises indépendamment sur α et λ avec les limites d'intégrations précédentes. Toutes les intégrales à évaluer sont soit élémentaires soit réductibles à des intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèce de module λ. On trouve que la variation sur α demande

$$\lambda = \frac{r}{g}\,\omega^2\,\alpha \tag{30}$$

Ce résultat rapproché des hypothèses (29) permet de vérifier que l'équation d'équilibre dynamique

$$mr^2\,\ddot{\theta} + f = 0$$

est satisfaite de façon exacte. L'approximation qui sera obtenue aura donc un caractère dual à la précédente. Ce sera l'équation de compatibilité

$$\theta = arc\,\sin\,\mu$$

qui ne sera satisfaite qu'en moyenne. La variation sur λ nous livre cette condition de compatibilité en moyenne sous la forme

$$\alpha = \frac{4}{\pi\lambda}\,[\mathrm{E}(\lambda) - (1 - \lambda^2)\,\mathrm{K}(\lambda)] \tag{31}$$

où $\mathrm{E}(\lambda)$ est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce.

Ce résultat combiné avec la forme équivalente de (30)

$$\mathrm{T}_\alpha/\mathrm{T}_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \tag{32}$$

constitue une représentation paramétrique de la période réduite en fonction de l'amplitude. Comme

$$\frac{\mathrm{E}(\lambda) - (1 - \lambda^2)\,\mathrm{K}(\lambda)}{\lambda^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\varphi}}$$

il se vérifie facilement que la période tend vers celle des petites oscillations quand le paramètre λ tend vers zéro. Par contre quand le paramètre tend vers sa limite supérieure, qui est l'unité, l'amplitude et la période réduite tendent vers des limites respectives

$$\lim\,\alpha = \frac{4}{\pi} \qquad \lim\,\mathrm{T}_\alpha/\mathrm{T}_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Cette solution approchée n'autorise donc pas d'amplitude angulaire supérieure à environ 72,95°. Le tableau suivant donne quelques valeurs numériques comparatives.

Amplitude	Période réduite		
	par (27)	par (32)	exacte
0°	1	1	1
30°	1,0174	1,0174	1,0174
60°	1,0727	1,0778	1,0732
72°95	1,1107	1,1284	1,1119
90°	1,1772		1,1804
120°	1,3567		1,3729
150°	1,6764		1,7622
180°	2,3493		

Il est intéressant d'observer que les deux types d'approximation encadrent la valeur exacte. Ceci doit cependant être attribué au type de non-linéarité du problème, car pour les problèmes d'oscillations linéaires on sait que les deux approximations se font par défaut.

5. Application a la théorie des vibrations linéaires des milieux continus

Si les fonctions

$$u_i(x_r, t) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ r = 1, 2, 3 \end{array}$$

décrivent le champ des déplacements d'un corps élastique par rapport à un repère cartésien, l'énergie cinétique, peut s'écrire

$$T = \tfrac{1}{2} \int_{\text{Vol.}} \rho \left(\sum_i \dot{u}_i^2 \right) d\tau \tag{33}$$

L'énergie potentielle due à la déformation élastique

$$V = \int_{\text{Vol.}} W(\varepsilon_{ij})\, d\tau \tag{34}$$

est l'intégrale de la densité d'énergie W, une fonction des six grandeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ii} = \partial u_i / \partial x_i \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad i \neq j \end{array} \right. \tag{35}$$

qui caractérisent la déformation quand les rotations matérielles sont suffisamment petites. Dans cette définition des ε_{ij} l'omission du facteur $\frac{1}{2}$ est faite à dessein pour simplifier l'écriture des relations énergétiques. Le tenseur des déformations est constitué par le tableau à deux indices de nos ε_{ii} et de la moitié de nos ε_{ij}. Ces grandeurs sont aussi supposées être petites et dans ce cas la masse volumique ρ peut être considérée comme n'étant fonction que des coordonnées initiales x_r. Le volume du corps est délimité par une surface S, sur une portion S_1 de laquelle les déplacements seront supposés devoir rester nuls

$$u_i = 0 \text{ sur } S_1 \tag{36}$$

(l'extension aux cas de déplacements imposés non nuls est triviale). L'application du principe de Hamilton (1) avec les conditions

$$\delta u_i = 0 \text{ pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \tag{37}$$

fournit les conditions d'équilibre en volume

$$-\rho \ddot{u_i} + \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ir}}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{38}$$

et des conditions d'équilibre sur la portion de surface S_2 complémentaire de S_1

$$\sum_r l_r \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ir}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{39}$$

où les l_r sont les cosinus directeurs de la normale extérieure.

En vue d'obtenir un principe canonique on introduit six grandeurs γ_{ij}, indépendantes des ε_{ij}, à l'aide desquelles on calcule la densité d'énergie de déformation $W(\gamma_{ij})$. Les conditions

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = 0$$

sont considérées comme des contraintes. On les incorpore automatiquement dans le principe en lui ajoutant le terme

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\text{vol.}}\left[\sum_{i \geqslant j} \sigma_{ij}(\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij})\right] d\tau\, dt$$

comportant six multiplicateurs lagrangiens σ_{ij}. Le procédé est formellement identique à celui de l'élasticité (7).

Les variations sur les γ_{ij} permettent d'identifier les multiplicateurs; on trouve

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} \tag{40}$$

Ce sont donc les tensions correspondant aux déformations γ_{ij}. Introduisant la densité d'énergie complémentaire

$$\Phi(\sigma_{pq}) = \sum_{i \geqslant j} \sigma_{ij}\, \gamma_{ij} - W \tag{41}$$

qui possède les propriétés duales de (40)

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \Phi(\sigma_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{42}$$

et l'énergie complémentaire elle-même

$$\psi = \int_{\text{Vol.}} \Phi(\sigma_{pq})\, d\tau \tag{43}$$

apparaît le principe canonique équivalent à (10)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[T + \psi - \int_{\text{Vol.}} \left(\sum_{j \geqslant i} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij} \right) d\tau \right] dt = 0 \tag{44}$$

Dans ce principe, les grandeurs u_i et σ_{ij} peuvent être variées indépendamment.

Les variations sur les u_i donnent les équations d'équilibre dynamique

$$\left.\begin{aligned} -\rho \ddot{u}_i + \sum_r \frac{\partial \sigma_{ijr}}{\partial x_r} = 0 \\ \sum_r l_r\, \sigma_{ir} = 0 \text{ sur } S_2 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{45}$$

Les variations sur les σ_{ij} des conditions de compatibilité

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \tag{46}$$

manifestement équivalentes aux contraintes en vertu de (42).

Passons maintenant au principe dual de celui de Hamilton. Pour satisfaire a priori aux équations d'équilibre (45) nous décomposons le champ des tensions en un champ σ^0_{pq} qui en est une solution particulière et un champ σ'_{pq}, qui en est la solution générale sans les termes d'inertie. Autrement dit σ'_{pq} est un champ général d'équilibre statique sans forces extérieures. Dans la plupart des problèmes techniques, où la distribution des tensions est schématisée de telle façon que l'intégration des équations d'équilibre se réduit à des quadratures le long de fibres moyennes, le champ σ'_{pq} ne dépendra en fait que d'un certain nombre d'inconnues hyperstatiques, liées à la topologie des circuits formés par ces fibres.

Le champ particulier choisi pour équilibrer les forces d'inertie s'exprimera en fonction des accélérations $\ddot{u}_i$; nous écrirons en conséquence pour symboliser la densité d'énergie complémentaire l'expression

$$\Phi(\ddot{u}_i\,,\ \sigma'_{pq})$$

Examinons maintenant comment modifier (44) en tenant compte de (45). Intégrons par parties le dernier terme de (44)

$$\int_{\text{Vol.}}\Big(\sum_{j\geqslant i}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}\Big)\,d\tau = \int_{S_2+S_1}\sum_i\Big(\sum_r l_r\,\sigma_{ir}\Big)\,u_i\,dS\,-$$

$$-\int_{\text{Vol.}}\sum_i\Big(\sum_r\frac{\partial\sigma_{ir}}{\partial x_r}\Big)\,u_i\,d\tau \qquad (47)$$

Remplaçons T par

$$\mathrm{T} = \int_{\text{Vol.}}\rho\Big(\sum_i\dot{u}_i^2\Big)\,d\tau - \mathrm{T} \qquad (48)$$

Substituons dans (44) et intégrons le premier terme par parties

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\text{Vol.}}\rho\Big(\sum_i\dot{u}_i^2\Big)\,d\tau\,dt = \Big[\int_{\text{Vol.}}\rho\Big(\sum_i\dot{u}_i\,u_i\Big)\,d\tau\Big]_{t_1}^{t_2} -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\text{Vol.}}\rho\Big(\sum_i\ddot{u}_i\,u_i\Big)\,d\tau\,dt \qquad (49)$$

Le résultat de ces opérations permet de simplifier quelques termes à l'aide des équations d'équilibre (45) et de (36), le principe dual émerge sous la forme

$$\delta\Big[\int_{\text{Vol.}}\rho\Big(\sum_i\dot{u}_i\,u_i\Big)\,d\tau\Big]_{t_1}^{t_2} - \delta\int_{t_1}^{t_2}\Big[\mathrm{T} - \int_{\text{Vol.}}\Phi(\ddot{u}_i,\ \sigma_{pq})\,d\tau\Big]\,dt = 0 \quad (50)$$

En fait il se scinde en une partie dynamique et une partie qui relève de la statique. La partie dynamique consiste à prendre les variations sur les accélérations $\ddot{u}_i$; ceci fait disparaître dans les termes aux limites les seules variations qui subsistaient après l'application des conditions (57), tandis que les coefficients des $\delta\ddot{u}_i$ sous le signe intégral fournissent les conditions de compatibilité

$$\rho u_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{u}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{51}$$

La partie statique du principe s'identifie avec le principe de l'énergie complémentaire en élasticité. Il revient en effet au même en prenant dans (50) les variations sur le champ σ'_{pq} d'écrire

$$\delta' \int_{\text{Vol.}} \Phi(\ddot{u}_{ii}, \sigma'_{pq}) d\tau = 0 \tag{52}$$

le symbole δ' indiquant que seul le champ σ'_{pq} est à varier.

Dans le principe complet (50) on a vu que l'intégration par parties sur la variation de l'énergie cinétique, nécessaire pour faire apparaître les $\delta\ddot{u}_i$ sous le signe intégral, avait en même temps pour effet d'éliminer les variations aux limites. On obtient finalement le même résultat en laissant tomber les termes aux limites de (50) à condition de substituer aux conditions (57) des conditions analogues sur les variations aux limites des vitesses :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\text{Vol.}} \left[\tfrac{1}{2}\rho \sum_i \dot{u}_i^2 - \Phi(\ddot{u}_i, \sigma'_{pq}) \right] d\tau \, dt = 0 \tag{53}$$

$$\delta \dot{u}_i = 0 \quad \text{pour} \quad t = t_1 \; et \; t = t_2 \tag{54}$$

On obtient ainsi l'analogie complète avec la formulation (18) et (19).

9. Vibrations transversales d'une poutre hyperstatique

La portée des principes qui viennent d'être élaborés ne peut être dégagée que sur un exemple concret. Celui qui va être traité est un des plus simples qui fasse cependant intervenir toutes les particularités intéressantes.

La poutre est de raideur de flexion EI et de masse répartie m constantes. Elle est encastrée en $x = 0$ et articulée en $x = l$. Le déplacement transversal est représenté de façon approchée par la loi

$$v(\xi, t) = A(t)\, \xi^2(1 - \xi) \qquad \xi = x/l \tag{55}$$

et vérifie les conditions cinématiques (analogues de (36)) du problème

$$v(0, t) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi}(0, t) = 0 \qquad v(1, t) = 0 \tag{56}$$

Le calcul de l'énergie cinétique donne

$$\mathrm{T} = \tfrac{1}{2} \int_0^l m \left(\frac{\partial v}{dt}\right)^2 dx = \frac{ml}{2} \dot{\mathrm{A}}^2 \frac{1}{105} \tag{57}$$

En calculant l'énergie de déformation par flexion au moyen des dérivées du déplacement on trouve

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{2} \int_0^l \mathrm{EI} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx = \frac{2\mathrm{EI}}{l^3} \mathrm{A}^2 \tag{58}$$

Ces deux expressions, introduites dans le principe de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathrm{T} - \mathrm{V})\, dt = 0$$

fournissent par variation de la fonction inconnue $\mathrm{A}(t)$ avec conditions aux limites $\delta\mathrm{A}(t_1) = \delta\mathrm{A}(t_2) = 0$ l'équation différentielle d'une oscillation harmonique

$$\frac{ml}{105} \ddot{\mathrm{A}} + \frac{4\mathrm{EI}}{l^3} \mathrm{A} = 0 \tag{59}$$

Le carré de la fréquence circulaire du mode fondamental ainsi estimée a pour valeur

$$\omega^2 = 420 \frac{\mathrm{EI}}{ml^4} \tag{60}$$

Elle est en fait considérablement surestimée.

Passons à l'application du principe canonique (44) ici représenté sous la forme

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathrm{T} + \psi - \int_0^l \mathrm{M} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx\right] dt = 0 \tag{61}$$

avec

$$\psi = \tfrac{1}{2} \int_0^l \frac{\mathrm{M}^2}{2\mathrm{EI}}\, dx \tag{62}$$

Il faut se donner une loi indépendante de distribution du moment fléchissant; nous essayons la loi à deux fonctions inconnues

$$M = B(t)(1-\xi) + C(t)(1-\xi)^2 \tag{63}$$

qui satisfait à l'unique condition aux limites sur les tensions (analogue des conditions d'équilibre sur S_2)

$$M(1, t) = 0 \tag{64}$$

Notons d'ailleurs que le principe canonique n'exige nullement que cette condition soit remplie a priori, comme nous le faisons ici avec l'intention d'améliorer l'approximation. Après évaluation des intégrales nous obtenons l'expression suivante à varier

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{ml}{210} \dot{A}^2 + \frac{B^2 l}{6EI} + \frac{BCl}{4EI} + \frac{C^2 l}{10EI} - \frac{AC}{6l} \right] dt = 0 \tag{65}$$

Les variations indépendantes sur $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ livrent

$$\left.\begin{aligned} \frac{ml}{105}\ddot{A} + \frac{1}{6l}C &= 0 \\ 4B + 3C &= 0 \\ 5B + 4C &= \frac{10}{3}\frac{EI}{l^2}A \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Après élimination de B et C, il vient

$$\ddot{A} + \omega^2 A = 0 \tag{67}$$

avec cette fois l'estimation

$$\omega^2 \frac{ml^4}{EI} = \frac{20 \times 35}{3} = 233 + \frac{1}{3} \tag{68}$$

Appliquons enfin le principe de variation des accélérations. Dans ce but nous nous servons encore de (55) pour le calcul des accélérations transversales mais nous intégrons exactement l'équation d'équilibre dynamique

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -m\ddot{v} = -m\ddot{A}\,\xi^2(1-\xi) \tag{69}$$

La condition aux limites (64) est ici obligatoirement incorporée; elle ne fixe qu'une des constantes d'intégration (ce sont en réalité des fonctions du temps). L'autre subsiste comme une inconnue hyperstatique; c'est l'analogue de la partie σ'_{pq} du champ des tensions. On trouve après les deux quadratures

$$M = -ml^2 \ddot{A} \frac{1}{60} (5\xi^4 - 3\xi^5 - 2) + B(1 - \xi) \tag{70}$$

Après calcul l'énergie complémentaire (62) devient

$$\psi = \frac{257}{60 \times 60 \times 99} \frac{m^2 l^5}{2EI} \ddot{A}^2 + \frac{19}{60 \times 21} \frac{ml^3}{EI} B\ddot{A} + \frac{1}{3} \frac{l}{2EI} B^2 \tag{71}$$

Substituant les expressions (57) et (71) dans le principe de variation des accélérations

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \psi)\, dt = 0 \tag{72}$$

avec annulation des variations aux limites

$$\delta\dot{A}(t_1) = 0 \qquad \delta\dot{A}(t_2) = 0$$

nous sommes conduits aux équations d'Euler suivantes :

$$\frac{ml}{105} A + \frac{m^2 l^5}{EI} \frac{257}{60 \times 60 \times 99} \ddot{A} + \frac{ml^3}{EI} \frac{19}{60 \times 21} B = 0 \tag{73}$$

résultant de l'annulation du coefficient de $\delta\ddot{A}$ et

$$ml^2 \frac{19}{60 \times 21} \ddot{A} + \frac{1}{3} B = 0 \tag{74}$$

résultant de l'annulation du coefficient de δB.

Après élimination de B on retrouve (67) avec la nouvelle estimation

$$\omega^2 \frac{ml^4}{EI} = \frac{18.860.688}{77.112} = 244{,}588 \tag{75}$$

Ces résultats se retrouvent encore en faisant d'emblée l'hypothèse d'une oscillation harmonique des variables et en partant alors du principe équivalent

$$\delta T_{max} = \delta V_{max} \tag{76}$$

où les variations portent maintenant sur les amplitudes. L'utilisation du principe dual

$$\delta T_{max.} = \delta \psi_{max.} \tag{77}$$

basé sur une analogie avec l'élasticité a été suggérée par E. Reissner(3) et appliquée à des problèmes de vibration par P. Libby et R.C. Sauer [4]. Antérieurement R. Grammel [2] avait proposé cette méthode sans la rapprocher de la notion d'énergie complémentaire.

Il est bien connu [5] que (76) donne une borne supérieure à la fréquence du mode fondamental. On peut aussi démontrer [2, 6] que, partant des mêmes hypothèses sur les déplacements, (77) donne une borne supérieure plus exacte. Ceci n'est pas étonnant si l'on observe que l'énergie potentielle est calculée par intégration sur les déplacements au lieu de l'être par dérivation. Quant au principe canonique, l'approximation qu'il fournit est malheureusement indéterminée, étant tantôt une valeur par excès, tantôt par défaut.

La forme que nous avons donnée à ces principes dynamiques a l'avantage d'étendre leur champ d'application à des cas non-linéaires. Ils sont aussi susceptibles d'être étendus aux systèmes attaqués par des forces extérieures, fonctions arbitraires du temps.

REFERENCES

(1) E.T. WHITTAKER, Analytical Dynamics, Dover Pub. N.Y. 1944.

(2) R. GRAMMEL, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. *Ing. Archiv* 10 p. 35 1939.

(3) E. REISSNER, Complementary energy procedure for flutter calculations, *J.A.S.R.F.* 16-5, p. 316, May 1949.

(4) P.A. LIBBY and R.C. SAUER, Comparison of the Rayleigh-Ritz and complementary energy methods in vibration analysis, *J.A.S.R.F.* 16-11, p. 700, Nov. 1949.

(5) Lord RAYLEIGH, The Theory of Sound, Dover Pub. N.Y. 1945.

(6) A.I. van de VOOREN and J.H. GREIDANUS, Complementary energy methods in vibration analysis. *J.A.S.R.F.* 17-7 p. 454, July 1950.

(7) B. FRAEIJS de VEUBEKE, Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longerons couplés. *Bulletin du S. Techn. de l'Aéron*, 24, 1951.