

Académie royale de Belgique

CLASSE DES SCIENCES

MÉMOIRES

Collection in-8°. — Tome XXXI  
Fascicule 6.

Koninklijke Academie van België

KLASSE DER WETENSCHAPPEN

VERHANDELINGEN

Verzameling in-8° — Boek XXXI  
Afllevering 6.



---

# FLEXION ET EXTENSION DES PLAQUES D'ÉPAISSEUR MODÉRÉE

PAR

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

*Professeur aux Universités de Liège et de Louvain.*



BRUXELLES  
PALAIS DES ACADEMIÉS  
RUE DU CALE, 1

BRUSSEL  
PALEIS DER ACADEMIËN  
HERTOGELIJKESTRAAT, 1

1959

N° 1698.

# LISTE DES PUBLICATIONS RÉCENTES DE L'ACADÉMIE

## CLASSE DES SCIENCES

### Mémoires in-8° — 2<sup>e</sup> Série

#### TOME XX

- |    |       |  |      |
|----|-------|--|------|
| 1. | 1548. | <b>Brien, P.</b> Etudes sur deux Hydroïdes gymnoblastiques; 1942; 4 pl., 15 fig., 116 p. ....  | 80 " |
| 2. | 1555. | <b>Prigogine, I.</b> Contribution à l'étude spectroscopique dans l'infra-rouge proche de la liaison d'hydrogène et la structure des solutions; 1943; 37 fig., 93 p. ....                           | 70 " |
| 3. | 1556. | <b>Gillis, P.</b> Sur les formes différentielles et la formule de Stokes; 1943; 95 p. ....   | 70 " |
| 4. | 1558. | <b>Van Dormael, A.</b> Le nitrile $\gamma$ hydroxy-crotonique; 1945; 34 p. ....  | 20 " |
| 5. | 1559. | <b>Lahaye, Ed.</b> Les développements des intégrales des équations $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ dans le domaine des valeurs qui annulent simultanément $P$ et $Q$ ; 1945; 123 p. .... | 70 " |
| 6. | 1560. | <b>Defay, R.</b> Des diverses manières de définir l'adsorption; 1946; 2 fig., 71 p. ....   | 50 " |

#### TOME XXI

- |    |       |  |      |
|----|-------|--|------|
| 1. | 1561. | <b>Smets, G.</b> Contribution à l'étude de l'Isométrie géométrique. Les alcools a éthyléniques; 1947; 72 p. ....   | 40 " |
| 2. | 1562. | <b>Conard, A.</b> Sur la division cellulaire chez oedogonium; 1947; 8 tabl., 4 pl., 88 p. ....   | 60 " |
| 3. | 1565. | <b>Ansiaux, J. R.</b> Recherches sur une fonction écologique, la pression osmotique chez les végétaux; 1948; 20 tabl., 5 graph., 56 p. ....  | 40 " |
| 4. | 1567. | <b>Bosquet, J.</b> Introduction à l'électrodynamique des conducteurs en mouvement, 1948; 86 p. ....  | 60 " |
| 5. | 1569. | <b>Géhéniau, J.</b> Etude sur les champs spinoriels et leur quantification; 1948; 58 p. ....   | 50 " |
| 6. | 1570. | <b>Bureau, Fl.</b> Sur l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperbolique d'ordre quatre et à trois variables indépendantes; 1948; 6 fig.; 64 p. ....                       | 50 " |
| 7. | 1574. | <b>Capron, P. G.</b> L'isométrie nucléaire du Radio-Brome Br. 80/35 et ses niveaux de capture; 1948; 12 fig.; 36 p. ....   | 40 " |
| 8. | 1575. | <b>Lahaye, E.</b> Le problème de Cauchy et la résolution de certaines catégories d'équations linéaires du second ordre et d'ordres supérieurs à multiplicités caractéristiques décomposables; 1949; 80 p. .... | 80 " |
| 9. | 1576. | <b>Mortier, P.</b> Bijzonder geval van wisselwerking tussen dipolen en ionen in een electrolytische oplossing, mede in verband met de dielectrische constante van het oplosmiddel; 1949; 9 fig., 32 p. ....    | 40 " |

#### TOME XXII

**De Wildeman, É.** Stérilité ou vieillissement et disparition des espèces végétales

- |                     |   |         |
|---------------------|---|---------|
| 1564.               | 1 <sup>er</sup> volume; 1948; 3 fig., 705 p. ....         | } 500 " |
| 1564b <sup>is</sup> | 2 <sup>me</sup> volume; 1948; 5 fig., 29 pl.; 697 p. .... |         |

#### TOME XXIII

- |    |       |  |       |
|----|-------|--|-------|
| 1. | 1577. | <b>Pissard, N.</b> Sur les surfaces à sections hyperplanes hyperelliptiques; 1949; 35 p. ....  | 40 "  |
| 2. | 1578. | <b>Jungers, J. C.</b> et <b>Verhulst, J.</b> Photosynthèse des bromures de deuteroéthylènes et des bromures de deutero-vinyles; 1949; 9 fig., 44 p. .... | 45 "  |
| 3. | 1579. | <b>Lecat, M.</b> Azéotropes de dérivés du glycol, de maléates et de fumarates; 1949; 1 fig., 34 p. ....  | 40 "  |
| 4. | 1580. | <b>Jongmans, Fr.</b> Mémoire sur les surfaces et les variétés algébriques à courbes-sections de genre quatre; 1949; 96 p. ....                           | 100 " |
| 5. | 1582. | <b>Teghem, J.</b> Sommes de Weyl. Sur la méthode de Vinogradovvan der Corput; 1949; 50 p. ....   | 50 "  |
| 6. | 1583. | <b>Nollet, L.</b> Sur la classification et la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches; 1949; 112 p. ....                             | 100 " |
| 7. | 1585. | <b>De Wildeman, É.</b> Les liquides laticifomes des guttiféracées ( <i>supplément</i> ); 1949; 80 p. ....  | 75 "  |

FLEXION ET EXTENSION  
DES PLAQUES  
D'ÉPAISSEUR MODÉRÉE

P A R

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

*Professeur aux Universités de Liège et de Louvain.*

---

Impression décidée le 11 Avril 1959.

---



## INTRODUCTION

On sait que la théorie de Kirchhoff [1] pour la flexion des plaques est essentiellement basée sur une hypothèse concernant les déplacements, toute perpendiculaire au feuillet moyen conservant cette propriété au cours de la déformation. Cette théorie conduit à deux conditions naturelles le long des bords. En particulier les efforts tranchants et les moments de torsion ne peuvent y être spécifiés indépendamment mais doivent être combinés d'une façon, dont l'interprétation a été donnée par Kelvin et Tait. Cette théorie est satisfaisante pour les plaques dont l'épaisseur est faible comparée aux dimensions transversales.

Une théorie des plaques d'épaisseur modérée peut être définie comme une théorie faisant intervenir les déformations dues aux efforts tranchants mais dont les conditions aux limites ne concernent encore que les résultantes (un moment fléchissant, un moment de torsion et un effort tranchant) et des déplacements moyens associés (une pente de flexion, une de torsion et un déplacement vertical).

Enfin une théorie complète des plaques épaisses permettrait de satisfaire en détail à la répartition des tensions et des déplacements imposés le long des bords cylindriques limites.

Une classe de solutions exactes pour la flexion des plaques d'épaisseur modérée est due à J. H. Michell [2] et peut s'exprimer à l'aide de deux fonctions analytiques arbitraires comme dans la formulation de A. C. Stevenson [4]. Elle ne permet pas de satisfaire à des conditions aux limites complètes et ne possède pas non plus de conditions naturelles restreintes du genre de Kirchhoff.

E. Reissner a formulé une théorie approchée de la flexion [5], essentiellement basée sur le principe de variation des tensions, et complète du point de vue des conditions aux limites à remplir par les plaques d'épaisseur modérée. Il a montré par ailleurs [6] qu'outre l'intervention de fonctions harmoniques, la solution de ses équations dépend d'une fonction de tension obéissant à

l'équation des ondes (avec vitesse de propagation imaginaire). A. E. Green [7] a donné une autre dérivation de la théorie de Reissner et a formulé la partie de la solution qui dépend de fonctions harmoniques à l'aide de fonctions analytiques.

Dans un autre mémoire [8], il a montré comment l'addition à la classe de solutions de Michell d'un autre type de solution exacte fournissait une solution exacte ayant un caractère complet vis-à-vis des conditions frontières des plaques d'épaisseur modérée. La solution additionnelle de Green, qui est gouvernée par une équation des ondes presque identique à celle de Reissner, n'est d'ailleurs qu'un membre d'une famille de solutions propres qui lui permet de résoudre en principe le problème des plaques épaisses.

Après avoir redécouvert les contributions de Green, il nous a paru utile de rassembler les éléments du problème des plaques d'épaisseur modérée et de préciser les relations étroites qui existent entre la solution de Reissner, la solution de Michell et la solution additionnelle de Green.

Dans ce but la solution de Michell a été décomposée en un champ primaire et un champ secondaire sans résultantes. Les tensions du champ primaire sont distribuées de la façon postulée par Reissner et le champ secondaire mis sous une forme qui souligne sa dépendance vis-à-vis de la somme des moments de flexion principaux du champ primaire. Le développement de la solution complète des équations de Reissner fait apparaître que sa partie harmonique s'identifie à un champ primaire de Michell.

Il a paru intéressant pour la compréhension physique de « l'effet de bord » contenu dans la partie de la solution gouvernée par l'équation des ondes d'analyser de façon plus précise l'état de déformation qu'elle représente. On peut montrer qu'il s'agit d'un état de torsion antisymétrique par rapport au feuillet moyen qui n'affecte pas la flèche de la plaque. L'intensité de cette torsion est directement proportionnelle à la fonction de tension et, en raison de la nature de l'équation dont elle dépend, doit disparaître à une distance du bord de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque.

Cette analyse a permis la construction d'une solution exacte des équations de l'élasticité pour un tel état de torsion, qui s'est avéré correspondre à la solution additionnelle de Green.

Les différentes solutions ont été dérivées à partir d'une méthode simple qui repose sur deux propositions préliminaires concernant l'opérateur complexe  $(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$  (\*).

Une application préliminaire de cette méthode au cas de l'extension des plaques permet de retrouver très simplement la solution de N. I. Mushkelishvili [3] et sa généralisation au problème tridimensionnel.

Il a paru opportun de scinder le problème de la plaque chargée transversalement de celui de la plaque sollicitée le long des bords. L'introduction des charges transversales est abordée de deux manières différentes. L'une, dans un sens la plus naturelle, consiste à rechercher une solution singulière représentant l'effet d'une charge transversale concentrée. La solution complète s'en déduit par superposition de singularités et addition d'une solution complémentaire pour la plaque non-chargée.

L'autre a le mérite de fournir une solution particulière exacte, dans laquelle les tensions sont distribués de la façon postulée par la théorie de Reissner. Elle dépend de la solution en cascade de deux équations de Poisson et est d'une application particulièrement élémentaire pour les répartitions polynomiales de la charge transversale.

Dans les deux cas la charge est appliquée, au moins en partie, à l'intervention de forces de volume, en contraste avec le type de mise en charge par pressions de surface introduit par Reissner. Le passage d'un type à l'autre n'affecte vraisemblablement de façon appréciable que la tension directe transversale et mériterait une étude plus approfondie.

---

(\*) Cette méthode a fait l'objet d'un exposé au colloque de Mécanique Appliquée de l'École Polytechnique de Delft, le 2 décembre 1957. Je tiens à remercier ici le Professeur W. T. KORTER pour la référence au dernier travail cité de Green.

---

# RÉFÉRENCES

1. KIRCHHOFF, *J. f. Math. (Crelle)*, Bd 40, 1850. Voir aussi A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, section 297.
  2. J. H. MICHELL, *London Math. Soc. Proc.* 31, p. 100, 1900. Voir aussi A. E. H. LOVE, loc. cit., section 299.
  3. N. I. MUSHKELISHVILI, *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, chap. 5, Noordhoff, Groningen, 1953.
  4. A. C. STEVENSON, *Phil. Mag. (7)*, 33, p. 639, 1942.
  5. E. REISSNER, *J. Math. Phys.*, 23, p. 184, 1944.
  6. E. REISSNER, *Qu. Appl. Math.* 5, p. 55, 1947.
  7. A. E. GREEN, *Qu. Appl. Math.* 7, p. 223, 1949.
  8. A. E. GREEN, *Proc. R. Soc. London*, A. 195, p. 531, 1949.
  9. G. L. NEIDHARDT, and E. STERNBERG, *Journal of Applied Mechanics*, p. 541, 1956.
-

# 1. DEUX PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR $\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$ .

Si  $F = u(x, y) + iv(x, y)$  est une fonction analytique de la variable complexe  $\zeta = x + iy$ , on dispose des équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

et des expressions suivantes, exprimant la dérivée de cette fonction à partir de la seule partie réelle ou de la seule partie imaginaire :

$$F' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$F' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

En les additionnant ou en les soustrayant l'une de l'autre, apparaissent les formules

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) F = 2F'$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u - iv) = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \bar{F} = 0$$

qui peuvent être considérées comme exprimant des propriétés de l'opérateur complexe  $\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ .

De ces deux formules découle la proposition plus générale suivante :

I. Si  $F$  et  $G$  sont deux fonctions analytiques de la variable complexe  $\zeta = x + iy$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) F \bar{G} = 2\bar{G}F'.$$

Enfin les mêmes formules justifient encore la proposition réciproque :

II. Si  $F(\zeta)$  et  $G(\zeta)$  sont deux fonctions analytiques données, la solution générale de l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) H(x, y) = 2\bar{G}F'$$

est donnée par

$$H = F\bar{G} + \bar{K}$$

où  $K(\zeta)$  est une fonction analytique arbitraire.

En effet, le premier terme de  $H$  est une solution particulière de l'équation proposée, le second en est la solution générale sans second membre.

Ces deux propositions sont utiles pour mécaniser la recherche des solutions de problèmes physiques en terme de fonctions analytiques. Des propositions semblables s'obtiennent évidemment pour l'opérateur conjugué  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)$  en remplaçant partout  $i$  par  $-i$ .

2. Considérons les équations suivantes exprimant l'équilibre en l'absence de forces de volume et la compatibilité des déformations pour un milieu isotrope

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (4)$$

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (5)$$

$$E \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x) \quad (6)$$

$$G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy} \quad (7)$$

$$G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{yz} \quad (8)$$

$$G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \tau_{xz} \quad (9)$$

### 3. SOLUTION POUR L'EXTENSION D'UNE PLAQUE.

L'hypothèse des tensions planes

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad (10)$$

assure que les faces  $z = \pm h$  de la plaque ne soient pas chargées et que l'équation d'équilibre (3) soit de plus identiquement satisfaite.

Soustrayant (6) de (4) puis de (5)

$$\sigma_x = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (11)$$

$$\sigma_y = 2G \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (12)$$

et substituant ces valeurs et celle de  $\tau_{xy}$  donnée par (7) dans les équations d'équilibre (1) et (2), celles-ci prennent la forme

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (13)$$

où l'on a posé

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \quad (14)$$

$$2\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (15)$$

La grandeur  $\omega$  n'est autre que la rotation matérielle perpendiculaire au plan de la plaque.

Les équations (13) étant du type de Cauchy-Riemann,  $\epsilon + i\omega$  est, pour toute valeur de  $z$ , une fonction analytique de la variable complexe  $\zeta = x + iy$ .

En éliminant  $w$  entre (8) et (9), il vient, compte tenu de (10)

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\epsilon + i\omega = 4a(z) + 4P'(\zeta) \quad (17)$$

où  $a(z)$  est une fonction réelle de  $z$  et  $P'$  une fonction analytique de  $\zeta$ . Cette fonction est prise sous forme d'une dérivée de fonction analytique  $P$  pour faciliter les intégrations ultérieures. Pour la même raison, des facteurs numériques ont été affectés aux deux termes de la solution.

Il résulte de (17) que

$$\epsilon = 4a(z) + 2(P' + \overline{P'}) \quad (18)$$

$$i\omega = 2(P' - \overline{P'}). \quad (19)$$

Pour intégrer complètement les déplacements, additionnons membre à membre (4) et (5), tenant compte de (10) :

$$E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = (1 - \nu)(\sigma_x + \sigma_y)$$

et, si on en soustrait encore (6)

$$E\epsilon = \sigma_x + \sigma_y. \quad (20)$$

D'où, par élimination de  $(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = (1 - \nu)\epsilon. \quad (21)$$

Cette équation, combinée avec (15), peut s'écrire

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = (1 - \nu)\epsilon + 2i\omega. \quad (22)$$

Remplaçons-y au second membre, les valeurs fournies par (18) et (19) et groupons les termes

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = 4(1 - \nu)a(z) + 2(3 - \nu)P' - 2(1 + \nu)\overline{P'} \quad (23)$$

L'intégrale générale de cette équation s'obtient par application directe de la proposition II, car chaque terme du second membre a la forme requise ; il vient

$$u + iv = 2(1 - \nu)\zeta a + (3 - \nu)P - (1 + \nu)\zeta\overline{P'} + \overline{K}(\zeta, z) \quad (24)$$

Le dernier terme est la solution générale de l'équation homogène. La structure de la fonction analytique  $K(\zeta, z)$  qui contient  $z$  comme un paramètre, s'obtient par l'examen des conditions d'intégrabilité du déplacement transversal  $w$ . Une de ces conditions n'est autre que (16), déjà satisfaite. Les deux autres s'obtiennent en éliminant  $w$  entre l'équation

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\nu\epsilon \quad (25)$$

conséquence de (6) et (20), et chacune des équations (8) et (9). Les équations résultantes se laissent écrire sous la forme complexe

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u - iv) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\nu\epsilon. \quad (26)$$

Au premier membre, on peut substituer l'expression conjuguée à (24) ; au second, la valeur fournie par (18). Appliquant alors au second membre la proposition I

$$2(1 - \nu)\zeta\frac{d^2a}{dz^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 4\nu P''. \quad (27)$$

On a donc séparément

$$\frac{d^2a}{dz^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 4\nu P''.$$

Cette dernière donne par intégration et en tenant compte du fait que  $K$  doit être une fonction paire en  $z$

$$K = 2\nu z^2 P'' + (1 + \nu)Q. \quad (28)$$

$Q$  est une nouvelle fonction analytique, affectée du facteur  $(1 + \nu)$  pour l'esthétique de la solution finale. La fonction  $a(z)$ , qui doit aussi être paire, se réduit donc à une constante. Il n'y a aucune restriction à l'omettre car elle peut être absorbée dans la fonction  $P$ . Finalement

$$u - iv = (3 - \nu)\bar{P} - (1 + \nu)\bar{\zeta}P' + 2\nu z^2 P'' + (1 + \nu)Q \quad (29)$$

Pour l'intégration du déplacement transversal, les équations (8) et (9) s'écrivent par exemple

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) w = -\frac{\partial}{\partial z} (u - iv). \quad (30)$$

Substituant (29) au second membre et appliquant la proposition II :

$$w = -2\nu z P' + \bar{L} \quad (31)$$

où la fonction  $L$  est déterminée à une fonction impaire de  $z$  près par la nécessité de rendre  $w$  réel :

$$w = -2\nu z(P' + \bar{P}') + b(z).$$

La fonction impaire inconnue  $b(z)$  est enfin déterminée par la nécessité de satisfaire à (25), ce qui établit qu'elle est identiquement nulle. En définitive

$$w = \text{Re} \{ -4\nu z P' \} \quad (32)$$

Le champ des tensions est déterminé par la combinaison de (20) et (18)

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} = \text{Re} \{ 4 P' \} \quad (33)$$

et la combinaison de (11), (12) et (7)

$$\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy} = 2G \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) (u - iv) \quad (34)$$

D'où, par substitution de (29) au second membre, application de la proposition I, puis division par  $(1 + \nu)$  :

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}}{E} = -2 \bar{\zeta} P'' + \frac{4\nu}{1 + \nu} z^2 P''' + 2Q'. \quad (35)$$

Avec les hypothèses (10) de départ, ceci achève la détermination du champ des tensions.

#### 4. LE CHAMP PRINCIPAL POUR L'EXTENSION D'UNE PLAQUE.

La solution exacte fournie par les expressions (29), (32), (10), (33) et (35) se distingue de la solution bien connue de Mushkelishvili [3] par la présence des termes dépendant de la coordonnée  $z$ .

La solution de Mushkelishvili peut être considérée comme celle du problème des résultantes :

$$N_x = \int_{-h}^h \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-h}^h \sigma_y dz \quad T_{xy} = \int_{-h}^h \tau_{xy} dz \quad (36)$$

pour lesquelles nous trouvons les expressions

$$\begin{aligned} \frac{N_x + N_y}{2Eh} &= \operatorname{Re} \{ 4P' \} \\ \frac{N_x - N_y - 2iT_{xy}}{2Eh} &= -2\bar{\zeta}P'' + 2Q_*' \end{aligned} \quad (38)$$

où  $Q_*$  désigne la fonction analytique

$$Q_* = Q + \frac{2\nu}{3(1+\nu)} h^2 P''.$$

Les équations d'équilibre satisfaites par les résultantes s'obtiennent, soit par raisonnement direct, soit en intégrant les équations (1) et (2) avec (10) sur la hauteur de la plaque, ce qui donne :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (39)$$

On définit un « champ principal des tensions » en formulant l'hypothèse que les tensions sont distribuées *uniformément* sur la hauteur de la plaque

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} \quad \sigma_y = \frac{N_y}{2h} \quad \tau_{xy} = \frac{T_{xy}}{2h}. \quad (40)$$

Ce champ satisfait toujours aux équations (1) et (2) ; il reste donc un champ exact d'équilibre. Cependant ce n'est plus un champ exactement compatible car il ne permet que de satisfaire en moyenne à la compatibilité des déformations.

Le champ des déplacements moyens associés au champ principal des tensions est logiquement défini par correspondance énergétique. L'énergie de déformation par unité de surface de la plaque :

$$Z = \int_{-h}^h \left( \frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y}{2G} \right) dz \quad (41)$$

calculée à partir du champ (40) devient

$$Z_1 = \frac{(N_x + N_y)^2}{4Eh} + \frac{T_{xy}^2 - N_x N_y}{4Gh}. \quad (42)$$

Les déplacements moyens  $U(x, y)$  et  $V(x, y)$  sont maintenant définis par les relations énergétiques

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial Z_1}{\partial N_x} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial Z_1}{\partial N_y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial Z_1}{\partial T_{xy}}. \quad (43)$$

De cette façon, par le Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes du second degré appliqué à (42), on garde la validité du théorème de CLAPEYRON :

$$Z_1 = \frac{1}{2} \left[ N_x \frac{\partial U}{\partial x} + N_y \frac{\partial V}{\partial y} + T_{xy} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right].$$

Les équations (43) deviennent, après calcul des seconds membres, les relations explicites entre les résultantes et les déformations moyennes :

$$\begin{aligned} 2 Eh \frac{\partial U}{\partial x} &= N_x - \nu N_y \\ 2 Eh \frac{\partial V}{\partial y} &= N_y - \nu N_x \\ 2 Gh \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= T_{xy} \end{aligned} \quad (44)$$

On observe que ces relations s'obtiennent aussi à partir de (4), (5) et (7) par simple intégration sur la hauteur de la plaque, à condition d'introduire les définitions

$$U = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u dz \quad V = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v dz \quad (45)$$

qui montrent que ces déplacements sont les moyennes au sens ordinaire des déplacements exacts. L'introduction de la solution exacte (29) dans les seconds membres de (45) donne

$$U - iV = (3 - \nu)\bar{P} - (1 + \nu)\bar{\zeta}P' + (1 + \nu)Q_*. \quad (46)$$

La solution complète fournie par les équations (37) et (46) pour le champ principal correspond, aux notations près, à celle donnée par Mushkelishvili [3]. On aurait pu la découvrir en appliquant directement l'analyse du paragraphe 3 aux équations de départ (39) et (44) qui constituent la formulation du *problème plan* de l'extension.

#### 5. CHAMP SECONDAIRE POUR L'EXTENSION DES PLAQUES.

Par différence entre le champ exact et le champ principal des tensions, nous obtenons un champ secondaire. Il est statiquement équivalent à zéro puisque ses résultantes sont nulles par définition.

On peut donner une forme particulièrement suggestive de sa dépendance vis-à-vis des variations du champ principal en notant que, par les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} P''' &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\operatorname{Re}P') - i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\operatorname{Re}P') \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\operatorname{Re}P') - i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\operatorname{Re}P') \end{aligned}$$

Le champ complet peut alors être mis sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2h} \left[ N_x + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_x + N_y) \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{2h} \left[ N_y + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x + N_y) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2h} \left[ T_{xy} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (N_x + N_y) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

On y vérifie que le champ secondaire a une distribution parabolique en  $z$  de résultante nulle

$$\int_{-h}^h \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) dz = 0 \quad (48)$$

qu'il est dû à l'existence du coefficient de Poisson et dépend des variations secondes de  $N_x + N_y$ . Il est peu important si ces variations sont faibles sur une distance égale à la hauteur de la plaque. On peut aussi écrire

$$\begin{aligned} u &= U + \frac{\nu}{4Eh} \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} (N_x + N_y) \\ v &= V + \frac{\nu}{4Eh} \left( z^2 - \frac{h^2}{3} \right) \frac{\partial}{\partial y} (N_x + N_y) \\ w &= -\frac{\nu}{2Eh} z(N_x + N_y). \end{aligned} \quad (49)$$

L'énergie totale de déformation (41), obtenue en insérant les valeurs (47) au second membre est scindée en deux parties

$$Z = Z_1 + Z_2.$$

La première est celle (42) due au seul champ principal, la seconde

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{\nu^2 h^3}{180(1+\nu)^2 G} \\ &\times \left[ \left( \frac{\partial^2 (N_x + N_y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (N_x + N_y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (N_x + N_y)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

est due au seul champ secondaire. L'énergie d'interférence entre les deux champs est nulle en vertu de (48).

## 6. CONDITIONS AUX LIMITES DANS LE PROBLÈME DE L'EXTENSION.

Les deux fonctions analytiques permettent de satisfaire à deux conditions aux limites sur les bords.

Soient

$$l = \cos \phi \quad m = \sin \phi$$

les cosinus directeurs de la normale extérieure au contour.

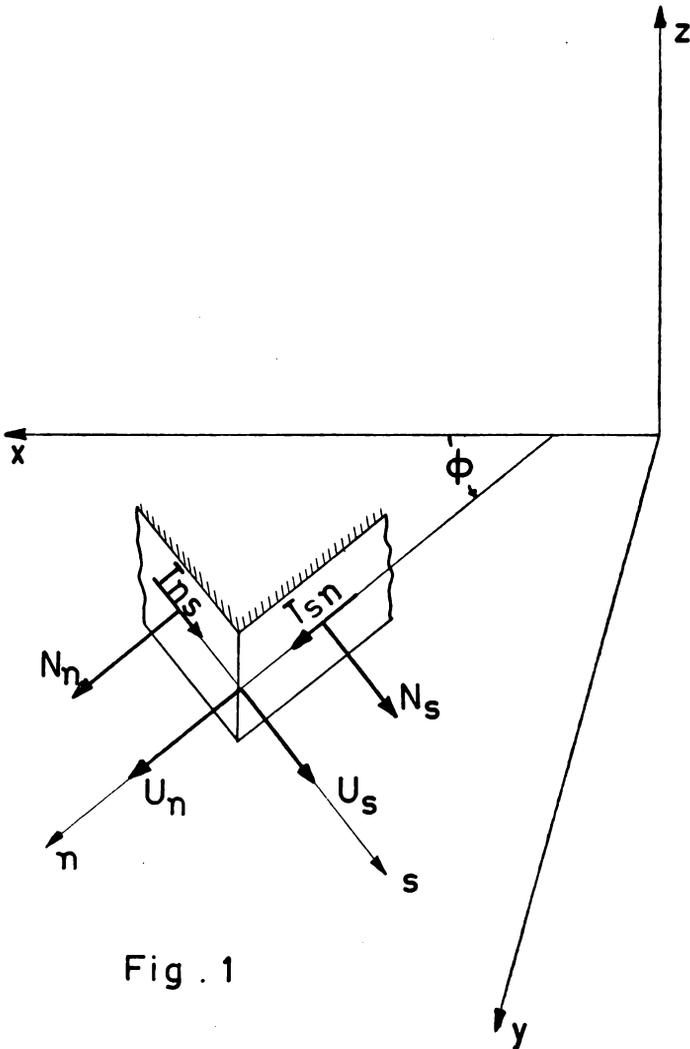


Fig . 1

Définissons (fig. 1) les déplacements moyens.

$$U_n = lU + mV \quad U_s = lV - mU$$

ou

$$U_n - iU_s = e^{i\phi}(U - iV)$$

et les résultantes

$$N_n = l^2 N_x + m^2 N_y + 2lm T_{xy}$$

$$N_s = m^2 N_x + l^2 N_y - 2lm T_{xy}$$

$$T_{ns} = T_{ns} = (l^2 - m^2) T_{xy} + lm(N_y - N_x)$$

ou

$$\begin{aligned} N_n + N_s &= N_x + N_y \\ N_n - N_s - 2i T_{sn} &= e^{2i\phi}(N_x - N_y - 2i T_{xy}) \end{aligned}$$

Des conditions typiques sont alors

$$\begin{aligned} U_n &= \bar{U}_n \quad \text{ou} \quad N_n = \bar{N}_n \\ U_s &= \bar{U}_s \quad \text{ou} \quad T_{ns} = \bar{T}_{ns} \end{aligned}$$

où les grandeurs surlignées désignent des valeurs imposées.

Les conditions aux limites sur le champ principal définissent partout les résultats et les déplacements moyens. Le champ secondaire s'en trouve complètement déterminé.

Aussi cette solution n'est-elle qu'approchée si les conditions aux limites sont spécifiées de façon détaillée sur la hauteur de la plaque.

## 7. SOLUTION DU PROBLÈME DE LA FLEXION.

Les hypothèses admises au départ sont équivalentes à celle de Michell [2]

$$\sigma_z = 0 \tag{51}$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= + G(h^2 - z^2) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= - G(h^2 - z^2) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \tag{52}$$

Elles assurent encore que les faces  $z = \pm h$  soient libres de tensions et que l'équation d'équilibre (3) soit identiquement satisfaite. Le procédé de construction de la solution ne diffère du cas précédent que par la présence de la fonction  $\theta(x, y)$  et le changement de symétrie ou de parité vis-à-vis de la coordonnée  $z$ .

Avec les mêmes définitions (14) et (15) on obtient, au lieu de (13)

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\omega + z\theta) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} (\omega + z\theta) \tag{53}$$

et  $\epsilon + i(\omega + z\theta)$  est, pour toute valeur de  $z$ , fonction analytique de  $x + iy$ . Il en résulte que

$$\Delta^2 \omega + z \Delta^2 \theta = 0 \quad (54)$$

et, en dérivant par rapport à  $z$ ,

$$\Delta^2 \frac{\partial \omega}{\partial z} + \Delta^2 \theta = 0. \quad (55)$$

L'équation (16) est remplacée par

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} + (h^2 - z^2) \Delta^2 \theta = 0. \quad (56)$$

Il en résulte que pour  $z = h$ , par exemple,  $\partial \omega / \partial z$  est nul, quels que soient  $x$  et  $y$ . L'équation (55) ne peut alors être vérifiée que si indépendamment

$$\Delta^2 \theta = 0. \quad (57)$$

Ce résultat, substitué dans (56), établit que pour tout  $z$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

et finalement, à cause de la parité que doit avoir une solution de flexion, que

$$\omega \equiv 0. \quad (58)$$

Cette conséquence des hypothèses de Michell est très importante, car, comme on le verra par la suite, elle supprime une possibilité de déformation de la plaque par torsion antisymétrique qui est intimement liée au nombre de conditions aux limites que les résultantes peuvent satisfaire.

En vertu de (58) et (53) on peut maintenant poser que

$$\epsilon + iz\theta = 12zR'(\zeta) + 4c(z) \quad (59)$$

en introduisant une première fonction analytique  $R(\zeta)$  et une fonction réelle et impaire  $c(z)$ .

Par conséquent

$$\epsilon = 6z(R' + \bar{R}') + 4c$$

$$i\theta = 6(R' - \bar{R}')$$

et l'équation correspondant à (23) est

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) = 6(1 - \nu)z(R' + \bar{R}') + 4(1 - \nu)c$$

qui, après application de la deuxième proposition, donne

$$u + iv = 3(1 - \nu)z(R + \zeta\bar{R}') + \bar{K}(\zeta, z) + 2(1 - \nu)\zeta c.$$

L'équation (26) est maintenant remplacée par

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u - iv) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\nu\epsilon - 2iz\theta)$$

soit encore

$$2(1 - \nu)\bar{\zeta}\frac{d^2c}{dz^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = -12(2 - \nu)zR''$$

qui se sépare en

$$\frac{d^2c}{dz^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = -12(2 - \nu)zR''.$$

La première montre que  $c = Cz$ . Cette fonction peut être omise en absorbant la constante  $C$  dans la fonction  $R$ .

La seconde donne, eu égard au type de parité de la solution

$$K = -2(2 - \nu)z^3R'' + (1 + \nu)zS'$$

et introduit une deuxième fonction analytique  $S(\zeta)$ .

En définitive

$$\boxed{u - iv = 3(1 - \nu)z(\bar{R} + \zeta\bar{R}') - 2(2 - \nu)z^3R'' + (1 + \nu)zS'.} \quad (60)$$

Le calcul du déplacement transversal suit une voie identique à celle du cas précédent et livre

$$\boxed{w = \text{Re} \{ -3(1 - \nu)\bar{\zeta}R + 6(2h^2 - \nu z^2)R' - (1 + \nu)S \}.} \quad (61)$$

On en déduit pour le champ de tensions correspondant

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_{xz} - i\tau_{yz}}{G} &= 12(h^2 - z^2)R'' & \sigma_z &= 0 \\
 \frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} &= \operatorname{Re} \{ 12zR' \} \\
 \frac{\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau_{xy}}{E} &= 6 \frac{1-\nu}{1+\nu} z\bar{\zeta}R'' - 4 \frac{2-\nu}{1+\nu} z^3R''' + 2zS''.
 \end{aligned} \tag{62}$$

### 8. CHAMP PRINCIPAL DES TENSIONS EN FLEXION.

Définissons les résultantes de la façon habituelle

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h}^h \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h}^h \sigma_y z dz & H_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz \\
 V_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz & V_y &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Le champ principal des tensions est défini par l'hypothèse que les tensions ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) sont réparties proportionnellement à la distance  $z$  au feuillet moyen :

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^3} z \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3} z \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3} z. \tag{64}$$

Tout comme pour le cas de l'extension, il faut noter que ces hypothèses ne sont pas arbitraires mais directement suggérées par l'examen des termes principaux de la solution exacte (62). La distribution en hauteur des autres tensions est déjà formulée dans les hypothèses de départ que nous réécrivons comme suit :

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = \frac{3V_x}{4h^3} (h^2 - z^2) \quad \tau_{yz} = \frac{3V_y}{4h^3} (h^2 - z^2). \tag{65}$$

Le champ (64) et (65) vérifie encore exactement les équations d'équilibre (1) (2) et (3) et reste donc un champ d'équilibre.

L'énergie de déformation par unité de surface

$$Z = \int_{-h}^h \left[ \frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \sigma_x \sigma_y}{2G} \right] dz$$

calculée à partir des expressions du champ principal fournit

$$Z_1 = \frac{3(M_x + M_y)^2}{4Eh^3} + \frac{3}{4Gh^3} (H_{xy}^2 - M_x M_y) + \frac{3}{10Gh} (V_x^2 + V_y^2) \quad (66)$$

Les déformations moyennes associées seront de nouveau les variables énergétiquement conjuguées. Pour trouver leurs expressions en fonction des déplacements, considérons le théorème de Clapeyron.

$$Z = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \dots \right] dz. \quad (67)$$

L'introduction dans cette expression des distributions (65) impose l'adoption des moyennes paraboliques suivantes pour le déplacement transversal et pour les pentes  $\partial u / \partial z$  et  $\partial v / \partial z$

$$\begin{aligned} W &= \frac{3}{4h^3} \int_{-h}^h w(h^2 - z^2) dz \\ \alpha &= \frac{3}{4h^3} \int_{-h}^h \frac{\partial u}{\partial z} (h^2 - z^2) dz = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h uz dz \\ \beta &= \frac{3}{4h^3} \int_{-h}^h \frac{\partial v}{\partial z} (h^2 - z^2) dz = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h vz dz. \end{aligned} \quad (68)$$

Ce sont bien des moyennes pondérées, le facteur  $3/4h^3$  figurant devant l'intégrale étant l'inverse de la moyenne de la fonction poids  $(h^2 - z^2)$ . La deuxième expression de  $\alpha$  ou de  $\beta$  figurant en (68) est obtenue par une intégration par parties et c'est précisément le type de moyenne suggéré par l'introduction dans (67) des distributions (64).

L'expression (67) devient ainsi

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2} \left[ M_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + M_y \frac{\partial \beta}{\partial y} + H_{xy} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + V_x \left( \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + V_y \left( \beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Par comparaison avec (66) on reconnaît, en vertu du théorème

d'Euler sur les fonctions homogènes du second degré, que les variables énergétiquement conjuguées aux résultantes sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_1}{\partial M_x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial Z_1}{\partial M_y} &= \frac{\partial \beta}{\partial y} & \frac{\partial Z_1}{\partial H_{xy}} &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial Z_1}{\partial V_x} &= \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial Z_1}{\partial V_y} &= \beta + \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}$$

ce qui fournit les relations suivantes entre résultantes et déformations moyennes

$$\begin{aligned} D \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= M_x - \nu M_y & \frac{5}{3} Gh \left( \alpha + \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= V_x \\ D \frac{\partial \beta}{\partial y} &= M_y - \nu M_x & \frac{5}{3} Gh \left( \beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right) &= V_y \\ D \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) &= 2(1 + \nu) H_{xy} & \text{avec } D &= \frac{2}{3} E h^3. \end{aligned} \quad (70)$$

Ces relations s'obtiennent aussi comme moyennes pondérées des relations (4) à (9) entre tensions et déformations. La fonction poids est  $z$  pour (4), (5) et (7) et  $(h^2 - z^2)$  pour (8) et (9). La relation (6) est ignorée et effectivement l'hypothèse  $\sigma_z = 0$  revient à lui assigner un poids nul.

De même les équations d'équilibre satisfaites par les résultantes

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} = V_x \quad \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = V_y \quad (71)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (72)$$

sont des moyennes pondérées des équations (1) (12) et (3). Pour (1) et (2) la fonction poids est  $z$  et il faut utiliser une intégration par parties telle que

$$\int_{-h}^h z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = - \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = - V_x$$

le terme aux limites disparaissant du fait que  $\tau_{xz}$  s'annule pour  $z = \pm h$ . Pour (3) la fonction poids est l'unité.

Le système (70), (71) et (72) est équivalent à la formulation de E. Reissner pour la flexion des plaques. Elle est ici particularisée du fait qu'il n'y a pas de charge transversale à la plaque, restriction qui sera levée ultérieurement.

#### 9. SOLUTION DU CHAMP PRINCIPAL DÉRIVANT DE LA SOLUTION EXACTE. CHAMP SECONDAIRE.

Une solution immédiate des équations du champ principal s'obtient à partir de la solution exacte (60), (61) et (62) en calculant les résultantes et les déformations moyennes telles que définies par (63) et (68), il vient

$$\frac{V_x - iV_y}{G} = 16h^3R''$$

$$\frac{M_x + M_y}{E} = 8h^3\text{Re}(R')$$

$$\frac{M_x - M_y - 2iH_{xy}}{E} = 4\frac{1-\nu}{1+\nu}h^3\bar{\zeta}R'' - \frac{8}{5}\frac{2-\nu}{1+\nu}h^5R''' + \frac{4}{3}h^3S'' \quad (73)$$

$$\alpha - i\beta = 3(1-\nu)(\bar{R} + \bar{\zeta}R') + (1+\nu)S' - \frac{6h^2}{5}(2-\nu)R''$$

$$W = \text{Re} \left\{ -3(1-\nu)\bar{\zeta}R + \frac{6h^2}{5}(10-\nu)R' - (1+\nu)S \right\}.$$

Du champ principal ainsi défini par (64) et (65) nous pouvons par différence avec le champ exact trouver le champ secondaire qui dépend essentiellement de  $R''$ . Par un traitement, analogue à celui de l'extension, on peut mettre le champ complet sous la forme plus suggestive que voici

$$\sigma_x = \frac{3z}{2h^3} \left[ M_x + \frac{2-\nu}{30(1+\nu)} (3h^2 - 5z^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_x + M_y) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{3z}{2h^3} \left[ M_y + \frac{2-\nu}{30(1+\nu)} (3h^2 - 5z^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (M_x + M_y) \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{3z}{2h^3} \left[ H_{xy} + \frac{2-\nu}{30(1+\nu)} (3h^2 - 5z^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (M_x + M_y) \right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{3V_x}{4h^3} (h^2 - z^2)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3V_y}{4h^3} (h^2 - z^2) \quad (74)$$

$$u = z \left[ \alpha + \frac{2 - \nu}{20 E h^3} (3 h^2 - 5 z^2) \frac{\partial}{\partial x} (M_x + M_y) \right]$$

$$v = z \left[ \beta + \frac{2 - \nu}{20 E h^3} (3 h^2 - 5 z^2) \frac{\partial}{\partial y} (M_x + M_y) \right]$$

$$w = W + \frac{3\nu}{20 E h^3} (h^2 - 5 z^2) (M_x + M_y).$$

On voit que, contrairement au cas de l'extension, les termes du champ secondaire, liés aux variations de  $(M_x + M_y)$ , ne disparaissent pas avec le coefficient de Poisson. Leur équivalence statique à zéro, évidente par construction, est confirmée par la nature de la distribution

$$k(z) = z(3h^2 - 5z^2)$$

dont le moment

$$\int_{-h}^h k(z) z dz = 0.$$

#### 10. CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE CHAMP PRINCIPAL. CARACTÈRE INCOMPLÈTE DE LA SOLUTION PRÉCÉDENTE.

Nous avons le long d'un bord (fig. 2)

$$\begin{cases} V_n = lV_x + mV_y \\ V_s = lV_y - mV_x \end{cases} \quad \text{ou} \quad V_n - iV_s = e^{i\phi}(V_x - iV_y)$$

$$\begin{cases} a_n = l\alpha + m\beta \\ a_s = l\beta - m\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad a_n - ia_s = e^{i\phi}(\alpha - i\beta)$$

$$M_n = l^2M_x + m^2M_y + 2lmH_{xy} \quad (75)$$

$$M_s = l^2M_y + m^2M_x - 2lmH_{xy}$$

$$H_{sn} = H_{ns} = (l^2 - m^2)H_{xy} + lm(M_y - M_x)$$

ou

$$\begin{cases} M_n + M_s = M_x + M_y \\ M_n - M_s - 2iH_{sn} = e^{2i\phi}(M_x - M_y - 2iH_{xy}). \end{cases}$$

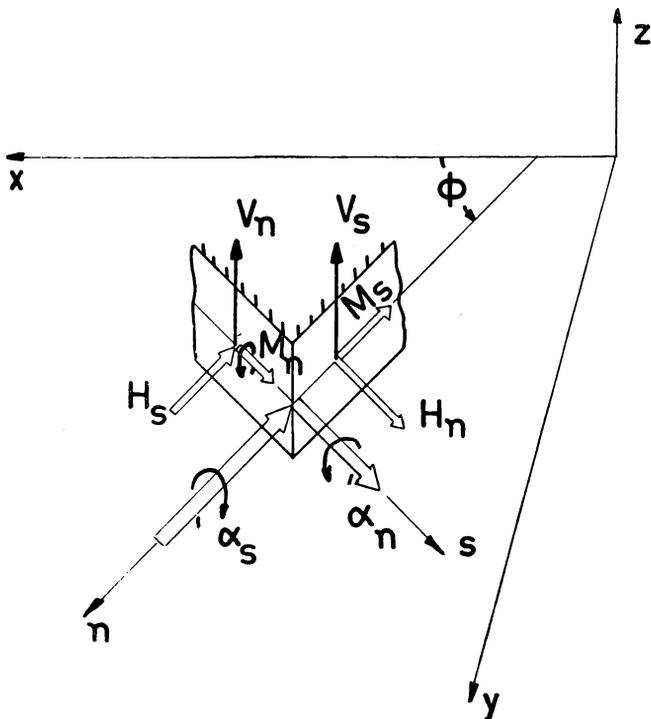


Fig. 2

Considérons le principe de variation des déplacements

$$\iint_S \delta Z_1 dx dy - \int_{S_H} \bar{H}_{sn} \delta \alpha_s ds - \int_{S_M} \bar{M}_n \delta \alpha_n ds - \int_{S_V} \bar{V}_n \delta W ds = 0 \quad (76)$$

où  $S_H$ ,  $S_M$  et  $S_V$  désignent respectivement les portions du bord le long desquelles les résultantes  $\bar{H}_{sn}$ ,  $\bar{M}_n$  ou  $\bar{V}_n$  sont spécifiées ; les valeurs  $\bar{\alpha}_s$ ,  $\bar{\alpha}_n$  et  $\bar{W}$  étant alors spécifiées sur les parties complémentaires. Comme

$$\delta Z_1 = M_x \delta \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) + M_y \delta \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + \dots + V_y \delta \left( \beta + \frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

on trouve après les intégrations par parties nécessaires que les coefficients de  $\delta \alpha$ ,  $\delta \beta$ ,  $\delta W$  figurant dans l'intégrale double s'annulent, comme il était certain a priori, en vertu des équations d'équilibre (71) et (72). Finalement, s'aidant des formules (75), le principe (76) se réduit à

$$\int_{S_H} (H_{sn} - \overline{H}_{sn}) \delta \alpha_s ds + \int_{S_M} (M_n - \overline{M}_n) \delta \alpha_n ds + \int_{S_V} (V_n - \overline{V}_n) \delta W ds = 0. \quad (77)$$

Cette analyse, basée uniquement sur les équations aux dérivées partielles du champ principal, indique la possibilité de satisfaire aux trois types complémentaires de conditions aux limites :

$$\begin{aligned} H_{sn} &= \overline{H}_{sn} & \text{ou} & & \alpha_s &= \overline{\alpha}_s \\ M_n &= \overline{M}_n & \text{ou} & & \alpha_n &= \overline{\alpha}_n \\ V_n &= \overline{V}_n & \text{ou} & & W &= \overline{W}. \end{aligned} \quad (78)$$

Cependant la solution du champ principal, exprimée par les équations (73) ne dépend que des deux fonctions analytiques R et S, ce qui est insuffisant pour assurer l'indépendance des variations sur  $\alpha$ ,  $\beta$  et W.

En négligeant la déformation due à l'effort tranchant  $V_s$  le long du bord on a

$$\alpha_s = - \frac{\partial W}{\partial s}$$

et là où W est spécifié,  $\alpha_s$  l'est aussi, de sorte que les portions  $S_H$  et  $S_V$  de contour doivent se correspondre. Le principe (77) devient alors

$$\int_{S_V} \left[ (V_n - \overline{V}_n) \delta W - (H_{sn} - \overline{H}_{sn}) \delta \frac{\partial W}{\partial s} \right] ds + \int_{S_M} (M_n - \overline{M}_n) \delta \alpha_n ds = 0$$

et, après une intégration par parties

$$\int_{S_V} \left( V_n + \frac{\partial H_{sn}}{\partial s} - \overline{V}_n \right) \delta W ds + \int_{S_M} (M_n - \overline{M}_n) \delta \alpha_n ds = 0 \quad (79)$$

et on est ramené aux conditions restreintes de Kirchoff

$$\begin{aligned} M_n &= \overline{M}_n & \text{ou} & & \alpha_n &= \overline{\alpha}_n \\ V_n + \frac{\partial H_{sn}}{\partial s} &= \overline{V}_n & \text{ou} & & W &= \overline{W} \end{aligned} \quad (80)$$

auxquelles les résultantes et déformations moyennes du champ complet précédemment trouvé peuvent satisfaire.

## 11. SOLUTION COMPLÈTE DES ÉQUATIONS DU CHAMP PRINCIPAL.

L'analyse précédente des conditions aux limites montre que la solution (73) des équations de champ principal est incomplète. Nous allons rechercher la partie manquante en appliquant aux équations (70), (71) et (72) la méthode de construction de la solution utilisée pour le champ exact.

Pour cela nous introduisons une fonction de tension  $\psi(x, y)$  telle que

$$\frac{1 - \nu^2}{D} V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{1 - \nu^2}{D} V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (81)$$

de façon à satisfaire automatiquement à (72).

Tirant  $M_x$ ,  $M_y$  et  $H_{xy}$  des équations (70) et substituant dans les équations d'équilibre (71), ces dernières prennent alors la forme d'équations de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \psi \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \psi \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Il existe donc une fonction analytique  $A(\zeta)$  telle que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 2(A' + \bar{A}') \quad (83)$$

$$\frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + \psi = \frac{2}{i} (A' - \bar{A}') \quad (84)$$

D'autre part, l'élimination de  $W$  entre les deux dernières des équations (70) donne

$$\frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) = -\frac{2h^2}{5} \Delta^2 \psi \quad (85)$$

et cette valeur, substituée dans (84), fournit pour le calcul de  $\psi$  l'équation suivante

$$\psi - \frac{2h^2}{5} \Delta^2 \psi = \frac{2}{i} (A' - \bar{A}'). \quad (86)$$

Le second membre étant une fonction harmonique, une solution particulière immédiate est

$$\psi_0 = \frac{2}{i} (A' - \bar{A}')$$

et si  $\Psi$  est une solution générale de l'équation homogène

$$\Delta^2 \Psi = \frac{5}{2h^2} \Psi \quad (87)$$

une solution générale de (86) est

$$\psi = \frac{2}{i} (A' - \bar{A}') + \Psi. \quad (88)$$

L'équation (84) devient alors

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{2}{1-\nu} \Psi \quad (89)$$

et se laisse combiner avec (83) sous la forme complexe

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (\alpha + i\beta) = 2(A' + \bar{A}') - \frac{2i}{1-\nu} \Psi. \quad (90)$$

Une solution générale de (90) est

$$\alpha + i\beta = A + \bar{\zeta}A' + \bar{B}' - \frac{4ih^2}{5(1-\nu)} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi. \quad (91)$$

La première partie, qui fait intervenir la nouvelle fonction analytique  $B(\zeta)$ , est construite par application de la proposition II, tandis que le dernier terme est une solution particulière, tenant compte du dernier terme de (90), comme on peut le vérifier en s'aidant de (87).

Enfin, les deux dernières équations (70) permettent d'intégrer  $W$  :

$$W = \operatorname{Re} \left\{ -\bar{\zeta}A + \frac{16h^2}{5(1-\nu)} A' - B \right\}$$

Les résultats (91), (92) expriment une solution complète des équations du champ principal, ou des équations de Reissner sans charge transversale à la plaque. Il n'y aurait aucune difficulté à en déduire le champ correspondant des résultantes.

La comparaison de ces résultats avec ceux (73) dérivés de la solution exacte, montre qu'en dehors d'un changement de notation pour les fonctions analytiques :

$$A = 3(1 - \nu)R \quad B = (1 + \nu)S - \frac{6h^2}{5}(2 - \nu)R'$$

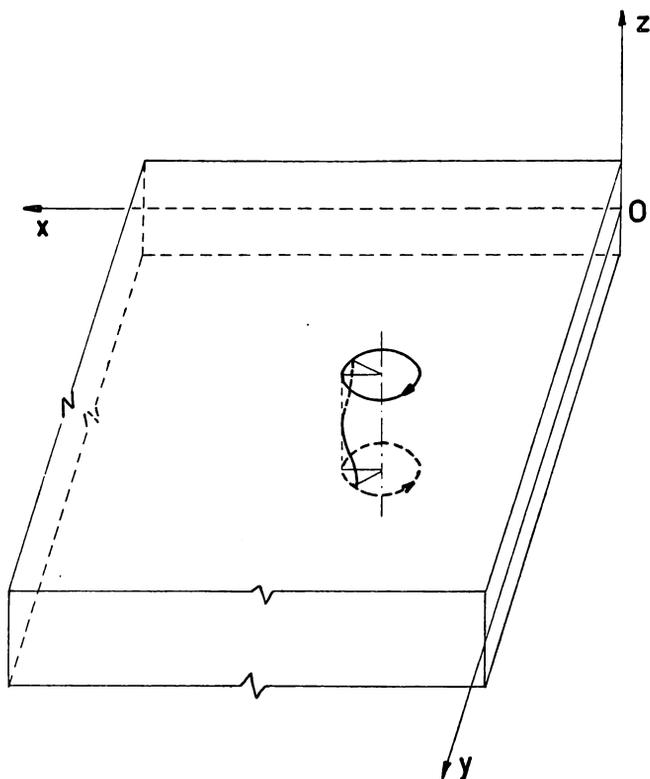
il y a dans (90) le terme nouveau dépendant de la fonction  $\Psi$ , solution de l'équation (87). Revenant aux fonctions  $R$  et  $S$ , la solution (73), complétée par les termes provenant de  $\Psi$  se présente finalement comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha - i\beta &= 3(1 - \nu)(\bar{R} + \bar{\zeta}R') + (1 + \nu)S' - \\ &\quad \frac{6h^2}{5}(2 - \nu)R'' + \frac{4ih^2}{5(1 - \nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi \\ W &= \operatorname{Re}\left\{-3(1 - \nu)\bar{\zeta}R + \frac{6h^2}{5}(10 - \nu)R' - (1 + \nu)S\right\} \\ \frac{V_x - iV_y}{G} &= 16h^3R'' + \frac{4}{3}\frac{ih^3}{1 - \nu}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi \\ \frac{M_x + M_y}{E} &= 8h^3\operatorname{Re}(R') \\ \frac{M_x - M_y - 2iH_{xy}}{E} &= 4\frac{1 - \nu}{1 + \nu}h^3\bar{\zeta}R'' - \frac{8}{5}\frac{2 - \nu}{1 + \nu}h^5R''' + \\ &\quad \frac{4}{3}h^3S'' + \frac{8ih^2}{15(1 - \nu^2)}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\Psi \end{aligned} \quad (93)$$

## 12. NATURE DE LA DÉFORMATION REPRÉSENTÉE PAR $\Psi$ .

On observe que  $\Psi$  ne donne aucune contribution à la flèche moyenne  $W$ . Elle n'en donne pas non plus à la somme  $M_x + M_y$  et par conséquent au champ secondaire qui prend naissance par suite des variations de cette quantité.

La nature de la déformation due à  $\Psi$  est mise en évidence par la considération de la rotation matérielle  $\omega$  définie par (15) (fig. 3).



**Fig.3 Torsion antisymétrique.**

Le moment de cette quantité, que nous pouvons appeler la « torsion antisymétrique » de la plaque par rapport au feuillet moyen, se laisse transformer successivement à l'aide des équations (68) et (89).

$$\int_{-h}^h \omega z \, dz = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) = -\frac{1}{1-\nu} \Psi$$

pour apparaître finalement comme directement proportionnelle à  $\Psi$ .

La théorie simplifiée de Reissner fait prévoir l'existence d'un tel champ de torsion, qui permet de satisfaire aux conditions aux limites complètes (78). D'un autre côté les hypothèses de Michell, qui sont à la base d'une solution exacte, impliquent nécessairement l'absence de toute torsion antisymétrique (équation (58)).

La nature de l'équation aux dérivées partielles (87) qui gouverne  $\Psi$  fait prévoir que la torsion antisymétrique disparaît en pratique à une distance du bord qui est de l'ordre de grandeur de la hauteur de la plaque. Pour cette raison, on peut parler d'un « effet de bord ». Il faut cependant remarquer qu'en l'absence des termes provenant de  $\Psi$ , la solution de Michell ne possède pas de conditions aux limites naturelles physiquement satisfaisantes. Les conditions (80) de Kirchhoff ne sont des conditions naturelles du problème variationnel que si de plus les déformations dues aux efforts tranchants sont négligées. Et l'inclusion des efforts tranchants ne résulte pas en un simple effet de bord.

Tout indique par conséquent qu'une théorie faisant intervenir les déformations dues aux efforts tranchants doit comporter le phénomène de torsion antisymétrique comme partie intégrante physiquement essentielle.

La solution exacte de Michell peut d'ailleurs être complétée par une autre solution exacte, qui rend compte du phénomène de torsion antisymétrique. Ceci achève la possibilité de comparer l'approximation du champ principal avec une solution exacte.

### 13. UNE SOLUTION EXACTE POUR LA TORSION ANTISYMMÉTRIQUE <sup>(1)</sup>.

Du champ de déplacement dépendant d'une fonction  $\psi(x, y)$

$$u = \sin \frac{\pi z}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \sin \frac{\pi z}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad w \equiv 0 \quad (94)$$

on déduit par les relations (4) à (9) entre tensions et déformations

---

(1) Comme il est mentionné dans l'introduction, cette solution a été donnée antérieurement par A. E. Green<sup>6</sup> et constitue le premier terme d'une famille de solutions propres permettant de reproduire le détail des tensions et déplacements imposés le long des bords d'une plaque épaisse.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -\sigma_y = 2G \sin \frac{\pi z}{2h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\
 \sigma_z &= 0 \\
 \tau_{xz} &= G \frac{\pi}{2h} \cos \frac{\pi z}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 \tau_{yz} &= -G \frac{\pi}{2h} \cos \frac{\pi z}{2h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 \tau_{xy} &= G \sin \frac{\pi z}{2h} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right).
 \end{aligned} \tag{95}$$

Les conditions  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  pour  $z = \pm h$  sont vérifiées ainsi que l'équation d'équilibre (3).

Les équations d'équilibre (1) et (2) qui restent à satisfaire se réduisent à

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \Delta^2 \psi - \frac{\pi^2}{4h^2} \psi \right] = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta^2 \psi - \frac{\pi^2}{4h^2} \psi \right] = 0.$$

La quantité entre parenthèses est donc une constante, dont la valeur n'affecte d'ailleurs pas le champ des tensions et déformations.

Nous prendrons donc en toute généralité

$$\Delta^2 \psi = \frac{\pi^2}{4h^2} \psi. \tag{96}$$

Comme la valeur de  $\pi^2$  est très voisine de 10, cette équation est quasi-identique à (87). On notera que

$$\omega = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi z}{2h} \Delta^2 \psi = -\frac{\pi^2}{8h^2} \sin \frac{\pi z}{2h} \psi$$

et que

$$\int_{-h}^h \omega z dz = -\psi$$

Les résultantes de cette solution ont pour valeur

$$\begin{aligned}
 M_x + M_y &= 0 \\
 M_x - M_y - 2i H_{xy} &= 16G \frac{h^2}{\pi^2} i \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \psi \\
 V_x - iV_y &= 2Gi \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi
 \end{aligned} \tag{97}$$

Les tensions se déduisent des résultantes par

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\pi^2}{8h^2} M_x \sin \frac{\pi z}{2h} & \sigma_z &= 0 \\
 \sigma_y &= \frac{\pi^2}{8h^2} M_y \sin \frac{\pi z}{2h} & \tau_{xz} &= \frac{\pi}{4h} V_x \cos \frac{\pi z}{2h} \\
 \tau_{xy} &= \frac{\pi^2}{8h^2} H_{xy} \sin \frac{\pi z}{2h} & \tau_{yz} &= \frac{\pi}{4h} V_y \cos \frac{\pi z}{2h}.
 \end{aligned} \tag{98}$$

Quant aux pentes moyennes, le théorème de Clapeyron et la distribution sinusoïdale des tensions incitent à les définir comme suit :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\pi}{4h} \int_{-h}^h \frac{\partial u}{\partial z} \cos \frac{\pi z}{2h} dz = \frac{\pi^2}{8h^2} \int_{-h}^h u \sin \frac{\pi z}{2h} dz \\
 \beta &= \frac{\pi}{4h} \int_{-h}^h \frac{\partial v}{\partial z} \cos \frac{\pi z}{2h} dz = \frac{\pi^2}{8h^2} \int_{-h}^h v \sin \frac{\pi z}{2h} dz
 \end{aligned}$$

moyennant quoi on trouve simplement

$$\alpha - i\beta = \left( \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \quad W \equiv 0 \tag{99}$$

$$u = \alpha \sin \frac{\pi z}{2h} \quad v = \beta \sin \frac{\pi z}{2h} \tag{100}$$

Une solution exacte s'obtient donc en déterminant les fonctions analytiques R et S et la fonction  $\psi$  solution de (96) donnant par superposition des formules (73), (97) et (99) les résultantes et les déplacements moyens spécifiés dans des conditions aux limites complètes.

Pour la partie due à R et S, le détail des tensions et des déplacements s'obtient alors par (74) ou par (60), (61) et (62) et pour la partie due à  $\psi$  par (98 et 100) ou par (94) et (95).

Le champ principal qui peut lui être comparé s'obtient en déterminant R, S et  $\Psi$  solution de (87) pour que (93) obéisse aux mêmes conditions aux limites et en supposant que les tensions et déplacements soient distribués comme indiqué en (64) et (65).

14. CONSTRUCTION D'UNE CHARGE TRANSVERSALE A LA PLAQUE  
PAR LA MÉTHODE DES SINGULARITÉS.

Il reste à lever la restriction introduite par l'absence de charges transversales.

Considérons à cet effet les fonctions analytiques

$$R = k\zeta \left( \log \frac{\zeta}{r_0} - 1 \right) \quad S = k \frac{6}{5} \frac{2 - \nu}{1 + \nu} h^2 \log \frac{\zeta}{r_0}$$

où  $r_0$  et  $k$  désignent des constantes arbitraires. La fonction  $S$  a été choisie en relation avec  $R$  de façon à éliminer dans les tensions des termes en  $1/r^2$ , dont la croissance trop rapide vers l'infini dans le voisinage de l'origine impliquerait la présence d'une dislocation [9]. Au contraire la nature de la singularité retenue est celle provenant d'une charge concentrée à l'origine. On notera que dans le cas des fonctions analytiques  $A$  et  $B$  de la section 11 le choix de la solution singulière correspond à  $B = 0$ .

On notera aussi que l'addition à  $R$  et à  $S$  de constantes complexes arbitraires ne fait qu'introduire un déplacement additionnel de la plaque comme un corps rigide.

A l'aide des formules (73) et (75) on trouve dans les coordonnées polaires  $r$  et  $\phi$  :

$$V_s = 0 \quad V_n = 16Gh^3 \frac{k}{r}$$

$$M_n + M_s = 8Eh^3 k \log \frac{r}{r_0}$$

$$M_n - M_s = 4Eh^3 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} k$$

$$H_{sn} = 0$$

$$a_n = (3 - \nu)kr \left( 2 \log \frac{r}{r_0} - 1 \right)$$

$$a_s = 0$$

$$W = k \left[ -3(1 - \nu)r^2 \left( \log \frac{r}{r_0} - 1 \right) + \frac{48}{5} h^2 \log \frac{r}{r_0} \right]$$

Cette solution est sans multiformité, elle est singulière à

l'origine et l'expression de  $V_n$  montre immédiatement qu'il s'agit du champ dû à une force verticale concentrée à l'origine sur une plaque indéfinie.

La force, considérée comme positive dans le sens  $oz$ , a pour valeur

$$P = -2\pi r V_n = -32\pi G h^3 k.$$

En donnant au facteur  $k$  la valeur

$$k = -\frac{P}{32\pi G h^3}$$

on obtient le champ dû à une force d'intensité  $P$ .

En remplaçant partout  $r$  par  $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ ,  $P$  par  $p(\xi, \eta)d\xi d\eta$  et intégrant sur l'aire chargée, on obtient une solution particulière de la flexion sous une charge répartie.

En général cette solution ne satisfera qu'accidentellement aux conditions aux limites ; mais elle permet de ramener le problème au cas où les charges transversales sont absentes. Il suffit en effet de lui superposer une flexion de la plaque non chargée, tenant compte de la différence entre les conditions aux limites spécifiées et les valeurs aux limites obtenues dans la construction précédente.

Il résulte de la construction de la solution que la charge n'est pas appliquée par l'action de pressions sur les faces  $z = \pm h$ , comme ce serait le cas en pratique, mais par des charges fictives, distribuées dans le volume. C'est au prix de cette approximation que l'on peut conserver l'hypothèse simple  $\sigma_z = 0$ .

Les différences provenant de la mise en charge réelle et de la mise en charge fictive sont faibles, sauf quand on se rapproche du cas limite de la charge concentrée.

Il faut noter comme significatif le fait que  $W$  devient infini au voisinage d'une charge concentrée par l'intervention d'un terme, dont l'importance devient au contraire négligeable à grande distance. Ce terme provient des déformations dues aux efforts tranchants et n'existe pas dans la théorie de Kirchhoff où il est possible de donner des valeurs finies de coefficients d'influence.

15. AUTRE MÉTHODE DE CONSTRUCTION D'UNE CHARGE TRANS-  
VERSALE.

Considérons le champ de déplacements suivant qui dépend de deux fonctions  $\mu(x, y)$  et  $\lambda(x, y)$

$$u = z \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad v = z \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$w = -\lambda + (h^2 - z^2)\mu$$

ces fonctions étant liées par une équation de Poisson

$$\Delta^2 \lambda = \frac{1}{1 - \nu} \mu \quad (101)$$

Des relations (4) à (9) entre tensions et déformations, on déduit un champ de tensions

$$\sigma_x = 2Gz \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1 - \nu} \mu \right)$$

$$\sigma_y = 2Gz \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1 - \nu} \mu \right)$$

$$\sigma_z = -2Gz \frac{2 - \nu}{1 - \nu} \mu$$

$$\tau_{xy} = 2Gz \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = G(h^2 - z^2) \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\tau_{yz} = G(h^2 - z^2) \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

et on vérifie que les équations d'équilibre (1) et (2) sont identiquement satisfaites.

La troisième équation d'équilibre est modifiée pour introduire une charge verticale  $Z$  par unité de volume et devient :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

La valeur de  $Z$  qui satisfait cette équation avec le champ précédent est

$$Z = 2G \frac{2-\nu}{1-\nu} \mu - G(h^2 - z^2) \Delta^2 \mu$$

On observera que la charge transversale à la plaque est constituée non seulement par les charges de volume  $Z$  mais aussi par l'action de tensions  $\sigma_z$  sur les faces  $z = \pm h$ . Par contre, ces faces restent libres de tensions tangentielles.

La charge transversale totale par unité de surface est

$$p(x, y) = \int_{-h}^h Z dz + 2[\sigma_z]_{z=h} = -\frac{4}{3} Gh^3 \Delta^2 \mu. \quad (102)$$

Par conséquent si  $p(x, y)$  est donnée on peut trouver un champ particulier de tensions et déplacements en équilibre avec cette charge moyennant la recherche d'une solution particulière de l'équation de Poisson (102) pour  $\mu$ , suivie de la recherche d'une solution particulière de l'autre équation de Poisson (101) pour  $\lambda$ .

Ces recherches sont de caractère élémentaire quand  $p(x, y)$  est un polynôme en  $x$  et en  $y$ .

Les résultantes et déplacements moyens tels que définis par (63) et (68) sont

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{4}{3} Gh^3 \frac{\partial \mu}{\partial x} & V_y &= \frac{4}{3} Gh^3 \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ H_{xy} &= \frac{4}{3} Gh^3 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} \\ M_x &= \frac{4}{3} Gh^3 \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \mu \right) \\ M_y &= \frac{4}{3} Gh^3 \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\nu}{1-\nu} \mu \right) \\ \alpha &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} & \beta &= \frac{\partial \lambda}{\partial y} & W &= -\lambda + \frac{4}{5} h^2 \mu. \end{aligned}$$

La détermination de cette solution particulière ramène encore une fois le problème à celui d'une plaque non chargée soumise à des conditions aux limites complémentaires.

---