

Académie royale de Belgique

CLASSE DES SCIENCES

MÉMOIRES

Collection in-8°. — Tome XXXII

Fascicule 8 et dernier

Koninklijke Academie van België

KLASSE DER WETENSCHAPPEN

VERHANDELINGEN

Verzameling in-8°. — Boek XXXII

Aflevering 8 en laatste



# Théorie des Coques prismatiques minces renforcées par Lisses et Diaphragmes

PAR

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

*Professeur aux Universités de Liège et de Louvain.*



BRUXELLES  
PALAIS DES ACADEMIES  
RUE DUCALE, I

BRUSSEL  
PALEIS DER ACADEMIËN  
HERTOGSSTRAAT, I

1961

N° 1729

CLASSE DES SCIENCES

Mémoires in-8° — 2<sup>e</sup> Série

TOME XX

1. 1548. **Brien, P.** Etudes sur deux Hydroïdes gymnoblastiques; 1942; 4 pl., 15 fig., 116 p. . . . . 80 »
2. 1555. **Prigogine, I.** Contribution à l'étude spectroscopique dans l'infra-rouge proche de la liaison d'hydrogène et la structure des solutions; 1943; 37 fig., 93 p. . . . . 70 »
3. 1556. **Gillis, P.** Sur les formes différentielles et la formule de Stokes; 1943; 95 p. . . . . 70 »
4. 1558. **Van Dormael, A.** Le nitrile  $\gamma$  hydroxy-crotonique; 1945; 34 p. . . . . 20 »
5. 1559. **Lahaye, Ed.** Les développements des intégrales des équations  $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  dans le domaine des valeurs qui annulent simultanément  $P$  et  $Q$ ; 1945; 123 p. . . . . 70 »
6. 1560. **Defay, R.** Des diverses manières de définir l'adsorption; 1946; 2 fig., 71 p. . . . . 50 »

TOME XXI

1. 1561. **Smets, G.** Contribution à l'étude de l'Isométrie géométrique. Les alcools a éthyléniques; 1947; 72 p. . . . . 40 »
2. 1562. **Conard, A.** Sur la division cellulaire chez oedogonium; 1947; 8 tabl., 4 pl., 88 p. . . . . 60 »
3. 1565. **Ansiaux, J. R.** Recherches sur une fonction écologique, la pression osmotique chez les végétaux; 1948; 20 tabl., 5 graph., 56 p. . . . . 40 »
4. 1567. **Bosquet, J.** Introduction à l'électrodynamique des conducteurs en mouvement, 1948; 86 p. . . . . 60 »
5. 1569. **Géhéniau, J.** Etude sur les champs spinoriels et leur quantification; 1948; 58 p. . . . . 50 »
6. 1570. **Bureau, Fl.** Sur l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperbolique d'ordre quatre et à trois variables indépendantes; 1948; 6 fig., 64 p. . . . . 50 »
7. 1574. **Capron, P. G.** L'isométrie nucléaire du Radio-Brome Br. 80/35 et ses niveaux de capture; 1948; 12 fig.; 36 p. . . . . 40 »
8. 1575. **Lahaye, E.** Le problème de Cauchy et la résolution de certaines catégories d'équations linéaires du second ordre et d'ordres supérieurs à multiplicités caractéristiques décomposables; 1949; 80 p. . . . . 80 »
9. 1576. **Mortier, P.** Bijzonder geval van wisselwerking tussen dipolen en ionen in een electrolytische oplossing, mede in verband met de dielectrische constante van het oplosmiddel; 1949; 9 fig., 32 p. . . . . 40 »

TOME XXII

**De Wildeman, É.** Stérilité ou vieillissement et disparition des espèces végétales

1564. 1<sup>er</sup> volume; 1948; 3 fig., 705 p. . . . . } 500 »  
 1564b<sup>is</sup> 2<sup>me</sup> volume; 1948; 5 fig., 29 pl.; 697 p. . . . . }

TOME XXIII

1. 1577. **Pissard, N.** Sur les surfaces à sections hyperplanes hyperelliptiques; 1949; 35 p. . . . . 40 »
2. 1578. **Jungers, J. C.** et **Verhulst, J.** Photosynthèse des bromures de deuteroéthylènes et des bromures de deutero-vinyles; 1949; 9 fig., 44 p. . . . . 45 »
3. 1579. **Lecat, M.**, Azéotropes de dérivés du glycol, de maléates et de fumarates; 1949; 1 fig., 34 p. . . . . 40 »
4. 1580. **Jongmans, Fr.** Mémoire sur les surfaces et les variétés algébriques à courbes-sections de genre quatre; 1949; 96 p. . . . . 100 »
5. 1582. **Teghem, J.** Sommes de Weyl. Sur la méthode de Vinogradowvan der Corput; 1949; 50 p. . . . . 50 »
6. 1583. **Nollet, L.** Sur la classification et la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches; 1949; 112 p. . . . . 100 »
7. 1585. **De Wildeman, É.** Les liquides laticiformes des guttiféracées (*supplément*); 1949; 80 p. . . . . 75 »
8. 1586. **Van Meel, L. I. J.** Aperçu sur la végétation algologique du district poldérien de la vallée du Bas-Escaut belge; 1949; 12 fig.; 157 p. . . . . 150 »
9. 1587. **Garnir, H.** Sur les systèmes de matrices hermitiennes  $A_i, \dots, A_n$  vérifiant les relations  $A_i A_j A_k + A_j A_i A_k = A_i \delta_{jk} + A_j \delta_{ji}$  ( $i, j, k = 1, \dots, n$ ); 1949; 28 p. . . . . 30 »

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

---

CLASSE DES SCIENCES

**MÉMOIRES**

Collection in-8°. Deuxième série.

---

TOME XXXII, fasc. 8 et dernier.



KONINKLIJKE ACADEMIE VAN BELGIË

---

KLASSE DER WETENSCHAPPEN

**VERHANDELINGEN**

Verzameling in-8°. Tweede reeks.

---

BOEK XXXII, afl. 8 en laatste.



BRUXELLES  
PALAIS DES ACADÉMIES  
RUE DUCALE, 1

BRUSSEL  
PALEIS DER ACADEMIËN  
HERTOGSSTRAAT, 1

1961

---

IMPRIMERIE J. DUCULOT

S. A.

GEMBLOUX.

# Théorie des Coques prismatiques minces renforcées par Lisses et Diaphragmes

PAR

**B. FRAEIJIS de VEUBEKE**

*Professeur aux Universités de Liège et de Louvain.*

---

Impression décidée le 4 mars 1961.

---

# SECTIONS

SECTIONS .....	
INTRODUCTION .....	
1. Géométrie de la coque .....	12
2. Les équations d'équilibre .....	13
3. L'opérateur nodal et les intégrations par parties .....	17
4. Les équations de déformation .....	18
5. Le centre de Bernoulli des efforts tranchants .....	19
6. Séparation des variables .....	22
7. Les gauchissements propres de première espèce .....	25
8. Solution générale du système fondamental .....	28
9. Développement en série de quelques fonctions particulières	31
10. Les gauchissements propres de seconde espèce .....	35
11. Orthogonalité des gauchissements de seconde espèce .....	40
12. Les gauchissements de seconde espèce et valeur propre nulle	41
13. Gauchissement et centre de torsion de de Saint Venant pour les sections fermées .....	44
14. Principes variationnels pour les gauchissements propres ..	44
15. Les gauchissements propres généralisés .....	45
16. La théorie algébrique des valeurs propres dans le cas $b = 0$	50
17. Formulation du problème non homogène par un principe variationnel .....	54
18. Les équations normales du type déplacement dans la base de première espèce .....	55
19. Les équations normales du type déplacement dans la base de seconde espèce .....	57
20. La solution de Bernoulli et son amélioration pour la torsion	60
21. Flexion et torsion généralisées de de Saint Venant déduites des équations normales du type déplacement dans la base de seconde espèce .....	64
22. Les flux de fermeture .....	67
23. La solution $\psi_\theta(s; 0)$ pour une section fermée .....	70

24. Intégration des flux de cisaillement et des déplacements axiaux .....	71
25. Quelques propriétés des moments statiques A et B .....	75
26. Développements en série de $W_A$ , $W_B$ et $W_{(e)}$ . Leur identification avec des gauchissements de de Saint Venant ....	77
27. Les équations normales du type tension dans la base de seconde espèce .....	81
28. Les lois de distribution assurant la nullité du gauchissement de torsion de de Saint Venant .....	86
29. Les lois de distribution assurant la nullité d'un gauchissement de flexion de de Saint Venant .....	88
30. Les lois de libération complète des $W_{(e)}$ .....	91
31. La construction pratique des sections qui ne gauchissent pas	95
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	98

---

# Théorie des Coques prismatiques minces renforcées par Lisses et Diaphragmes.

---

---

## INTRODUCTION.

Les coques prismatiques à parois minces sont des éléments constitutifs essentiels des structures aéronautiques et trouvent une utilisation fréquente dans d'autres applications techniques.

Partant d'une pièce prismatique massive à section multiplement connexe, GOODIER [20] a examiné la forme limite prise par la théorie de la torsion et de la flexion selon de Saint Venant quand les parois deviennent très minces. L'absence d'éléments raidisseurs transversaux y fait figurer les effets de la contraction due au coefficient de Poisson, tandis que les charges et les réactions ne peuvent être introduites que dans les sections terminales.

Quand elle est raidie transversalement par des diaphragmes infiniment rapprochés et rigides dans leur plan, la coque peut résister par des seules tensions de membrane à une distribution arbitraire de charges transversales. Une solution basée sur la répartition de tensions axiales de de Saint Venant (GOODEY [5], HATCHER [7], PFLUEGER [9], RADOMSKI [12]) est alors essentiellement incomplète. Elle ne correspond qu'à des cas particuliers de mise en charge et de conditions d'appui. Appliquée à titre d'approximation en dehors de son domaine de stricte validité, elle néglige les « tensions induites par les incompatibilités de gauchissement ». Celles-ci se manifestent, soit par suite des conditions réelles de mise en charge ou d'appui aux extrémités (root corrections), soit par suite des variations du glissement de la paroi le long des génératrices dans la torsion variable (bending-torsion stresses) ou dans la flexion (shear lag). Les tensions secondaires induites sont statiquement équivalentes à zéro dans une section. Conformément au principe énoncé par de Saint Venant elles tendent à disparaître avec la distance à la perturbation. Dans les pièces massives, où les distances de diffusion des tensions sont plus faibles, l'accumulation des tensions



secondaires n'a pas la même importance que dans les coques minces, pour lesquelles la nécessité de formuler des théories plus complètes a été rapidement reconnue.

Pour les caissons de section rectangulaire à deux plans de symétrie, différentes méthodes ont fourni des solutions exactes ou approchées aux problèmes de la torsion variable ou du shear lag. Sans qu'il soit possible de les recenser tous, mentionnons les travaux de H. REISSNER [1], EBNFR [3], GRZEDZIELSKI [4], KUHN [8], KHUN et CHIARITO [17], HEMP [18] et HILDEBRAND [19]. Deux articles élégants de E. REISSNER [16, 23] font usage des méthodes énergétiques pour établir une correction de première approximation au shear lag.

Les caissons d'aile non symétriques, obéissant aux exigences des formes aérodynamiques, introduisent les complications dues au couplage entre la torsion et la flexion. Une simplification courante du problème consiste à supposer que les parois ne transmettent qu'un flux de cisaillement, les efforts axiaux étant intégralement repris par des éléments concentrés ou « lisses ». Dans ce cas un caisson monocellulaire à quatre lisses de coin ne possède qu'un seul mode correcteur de gauchissement. KIRSTE [6] a formulé une solution exacte de la flexion-torsion d'un tel modèle. Il a introduit les notions d'aires réduites et de ce que nous appellerons le « centre de Bernoulli des efforts tranchants ». Ces notions ont été étendues par DRYMAEL [14] à un nombre quelconque de lisses et parois en même temps qu'il reconnaissait aux aires réduites un caractère tensoriel. Pour ces modèles plus généraux EBNFR et KÖLLER [10] ont proposé l'emploi d'états de tensions correcteurs, statiquement nuls, mais arbitrairement choisis et à déterminer par variation des tensions.

Le premier article où apparaît un système orthogonal d'états de tensions, obtenu par séparation des variables, est celui de VON KARMAN et CHIEN [22] sur la torsion variable d'une coque monocellulaire à deux plans de symétrie. Cette approche a été étendue par BENSCHOTER [25] à la flexion et torsion des coques à diaphragmes de section arbitraire. Entre-temps cependant H. ARGYRIS et DUNNE [24] publiaient une étude générale sur ce sujet, compliquée par l'addition de corrections de première approximation à la conicité.

S'il est difficile, parmi l'abondance des cas particuliers d'applications et des considérations de détail, de suivre et de filtrer

leurs idées essentielles, il faut leur reconnaître le mérite d'avoir été les premiers à reconnaître l'existence, dans des conditions très générales, d'états de tensions correcteurs orthogonaux. L'usage qu'ils en ont fait est également original et supérieur au point de vue adopté par VON KARMAN et prolongé par BENSCHOTER, qui consiste à développer le déplacement axial en série de gauchissements propres et fournit des séries faiblement convergentes. ARGYRIS et DUNNE satisfont a priori aux équations d'équilibre à l'aide d'une fonction de tensions, dont le développement en série de fonctions propres conduit à des séries fortement convergentes.

On peut naturellement rattacher ces deux points de vue à la dualité fondamentale entre tensions et déplacements en élasticité et c'est un des objectifs de ce mémoire. En fait il est apparu que cette dualité intervenait déjà bien avant la synthèse de la solution. Un examen de la nature du problème de la séparation des variables montre qu'un système de valeurs propres et une base orthogonale associée peuvent être définis d'au moins deux façons duales. L'une consiste à rendre le problème posé homogène par suppression des déplacements des diaphragmes ; elle fournit une base dite de première espèce. L'autre, qui semble avoir été la seule précédemment envisagée, consiste au contraire à annuler les réactions résultantes sur les diaphragmes ; elle fournit la base de seconde espèce. Si cette dernière est effectivement plus intéressante pour les applications techniques usuelles, l'autre semble mathématiquement plus fondamentale. En fait les développements en série dans la base de première espèce permettent une discussion satisfaisante des propriétés de la seconde et font apparaître la distinction essentielle à introduire entre « gauchissements libres » et « gauchissements liés ». Dans leur conception physique les gauchissements libres sont ceux qui peuvent être imposés avec les diaphragmes bloqués sans introduire de réactions résultantes.

Dans une définition plus générale qu'on peut donner du problème homogène à variables séparées, les valeurs propres et la base orthogonale dépendent de façon continue d'un paramètre qui représente en fait une liaison élastique variable des diaphragmes à une référence rigide. Dans la correspondance biunivoque qui en résulte par un passage continu de la base de première à celle de seconde espèce, les gauchissements libres et leurs valeurs

propres sont des invariants, tandis que la forme des gauchissements liés évolue et que leur valeur propre décroît de façon monotone.

Le développement du déplacement axial en série de gauchissements propres conduit aux « équations normales » du problème non-homogène par variation des coordonnées normales de déplacement. Comme l'intuition physique pouvait le faire deviner, la première base fournit des équations normales découplées pour des déplacements de diaphragmes imposés. Dans le problème usuel ce sont les charges qui sont données et ce sont alors les équations normales dans la seconde base qui sont découplées. Elles correspondent aux équations données par BENSCHOTER. Dans cette formulation de la solution, les termes d'ordre zéro (associés aux valeurs propres nulles) correspondent à ce que l'on obtiendrait en partant de l'hypothèse des sections planes de Bernoulli. Les solutions de de Saint Venant apparaissent sous forme de séries construites à partir de solutions particulières des équations normales pour des distributions particulières des charges.

Dans une synthèse duale ce sont les tensions axiales que l'on développe en série à l'aide de coordonnées normales. Les équations normales découlent alors du principe de variation des tensions. La différence essentielle est dans la détermination des flux de cisaillement ; au lieu d'être obtenus par dérivation des déplacements ils le sont ici par intégration des équations d'équilibre. Cette différence affecte en pratique les termes d'ordre zéro. En particulier les équations normales d'ordre zéro dans la seconde base contiennent à elles seules les solutions de de Saint-Venant. Les autres ne gouvernent plus que l'état de tension correcteur provenant des incompatibilités de gauchissement. Cette nouvelle synthèse, qui correspond en fait à celle de ARGYRIS et DUNNE, possède l'avantage d'une bonne convergence ; ses termes d'ordre zéro sont déjà des sommes partielles des séries fournies par la synthèse précédente.

Un dimensionnement particulier des parois et des lisses peut, moyennant quelques restrictions sur la généralité de la géométrie de la section de la coque, annuler certains des gauchissements prévus par la théorie de de Saint Venant, dont le champ de validité est alors singulièrement étendu. Ceci était connu pour la torsion (NEUBER [15]) et pour la flexion dans un plan de symétrie d'une coque monocellulaire doublement symétrique (WIL-

LIAMS et FINE [13]). Nous avons lié ces propriétés de nullité à une « libération » des gauchissements propres. Ceci fournit une méthode variationnelle directe pour la recherche des dimensionnements qui font disparaître un ou plusieurs des gauchissements de de Saint-Venant. En particulier nous avons pu dégager les lois nécessaires pour une flexion de coque non symétrique dans un plan quelconque. Quand on se propose d'annuler les gauchissements de torsion et de flexion simultanément, les lois prennent une forme intrinsèque remarquable. A ce moment tous les gauchissements propres sont libres à l'exception de deux modes de flexion. Quelques autres propriétés remarquables de ces lois sont dégagées et brièvement discutées.

---

### 1. Géométrie de la coque.

Les coques envisagées sont constituées d'une combinaison de parois minces reliées par des lisses ou semelles de longerons. Elles seront supposées être raidies transversalement par des diaphragmes infiniment rapprochés, rigides dans leur plan et flexibles perpendiculairement à celui-ci.

Dans une section droite, la trace de la surface moyenne d'une paroi est un « arc ». Ces arcs ont pour intersection des « nœuds » qui sont les centres des sections droites des lisses ou des semelles. Outre l'idéalisation implicite dans l'hypothèse des diaphragmes il y a donc celle de la coïncidence éventuelle de ces intersections. De plus les raideurs propres de torsion et de flexion des lisses et semelles seront négligées.

Une section droite sera dite « ouverte » s'il n'existe aucune suite d'arc formant un circuit fermé. Sinon, et même si certains arcs n'appartiennent pas à un circuit fermé, elle sera dite « fermée ».

L'axe  $oz$  sera pris parallèlement aux génératrices. Dans une coque cantilever,  $z = 0$  dénotera la section supportée,  $z = L$  la section terminale en porte à faux. Les axes  $ox$  et  $oy$ , formant avec  $oz$  un système droitier, seront choisis par toute considération de simplicité dans la description des propriétés géométriques de la section.

Quoique la coque soit prismatique les caractéristiques résistantes des sections ne doivent pas être constantes. En fait les épaisseurs de paroi, effectives pour la transmission des tensions tangentielles, pourront varier suivant la loi d'affinité

$$t_a = h(z)a(s) \quad (1.1)$$

où  $s$  est mesuré le long des arcs. Dans une coque cantilever on peut prendre  $h(0) = 1$  et  $a(s)$  est alors la répartition des épaisseurs de paroi dans la section supportée.

Les épaisseurs effectives pour la transmission des tensions normales suivant les génératrices pourront suivre une loi d'affinité différente

$$t_n = g(z)b(s). \quad (1.2)$$

La différence entre les deux épaisseurs peut provenir d'un renforcement des parois par un réseau dense de lisses que l'on redistribue de façon continue. Alors

$$t_n = t_a \frac{1}{1 - \nu^2} + \frac{A_s}{p_s}$$

où  $A_s$  est la section droite d'une lisse de renfort et  $p_s$  le pas du renforcement. Le facteur contenant le coefficient de Poisson tient compte de l'inextensibilité de la paroi dans la direction de l'arc due à l'hypothèse de rigidité des diaphragmes. Le module de traction associé à l'épaisseur effective  $t_n$  est alors le module de Young  $E$ , supposé commun aux matériaux dont sont faites les parois et les lisses. Les sections des lisses concentrées et des semelles retenues dans l'idéalisation de la section doivent varier suivant une loi d'affinité semblable à (1.2)

$$A_m = g(z)S_m \quad \text{au nœud } m. \quad (1.3)$$

Il ne semble pas possible d'élargir les hypothèses (1.1) à (1.3) dans le sens d'une plus grande souplesse dans les possibilités constructives sans perdre le bénéfice d'une solution par séparation des variables. Ces hypothèses permettent déjà de proportionner dans une large mesure les éléments résistants aux efforts qu'ils seront appelés à subir.

## 2. Les équations d'équilibre.

L'hypothèse des diaphragmes infiniment rapprochés entraîne des simplifications importantes. L'une d'elles est la possibilité offerte à la coque de résister à une distribution arbitraire de charges transversales en n'évoquant dans les parois que des tensions de membrane. Celles-ci sont représentées par un flux de cisaillement  $q$  et une résultante de tension axiale  $n$  par unité

d'arc (fig. 1). En l'absence de charges extérieures distribuées dans la direction des génératrices, l'équilibre d'un élément de paroi dans cette direction est exprimé par la relation

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

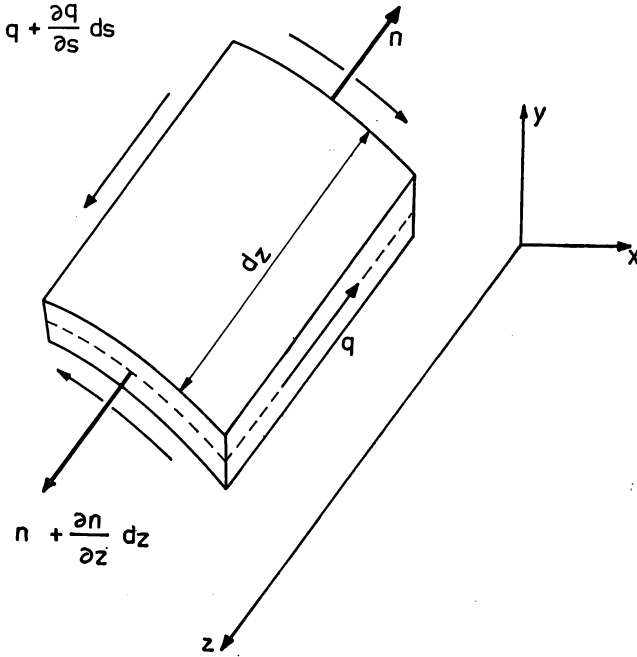


FIG. 1.

qui suppose également que les diaphragmes soient infiniment flexibles perpendiculairement à leur plan. L'équilibre d'un élément de lisse au nœud d'indice  $m$  (fig. 2) est exprimé par

$$\frac{dN_m}{dz} = T_m(q) \quad (2.2)$$

moyennant la définition suivante d'un « opérateur nodal »

$$T_m(q) = (\Sigma q)_{\text{convergenents}} - (\Sigma q)_{\text{divergents}}. \quad (2.3)$$

Le caractère convergent ou divergent d'un flux de cisaillement au nœud  $m$  résulte d'une convention préalable quant au sens de description sur chaque arc. Une convention qui présente certains avantages topologiques est présentée à la section 22. Une fois la convention de sens positif établie, chaque flux devient

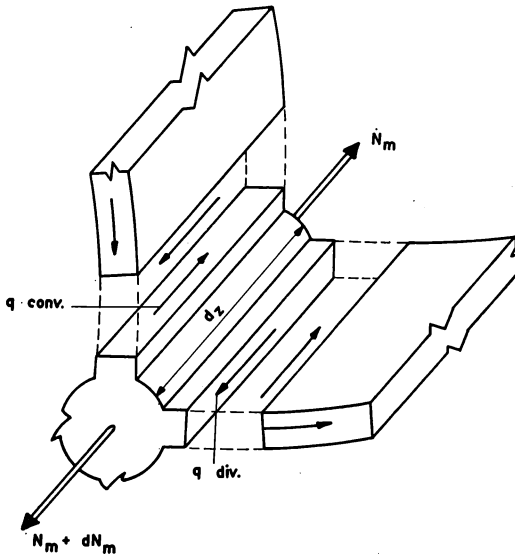


FIG. 2.

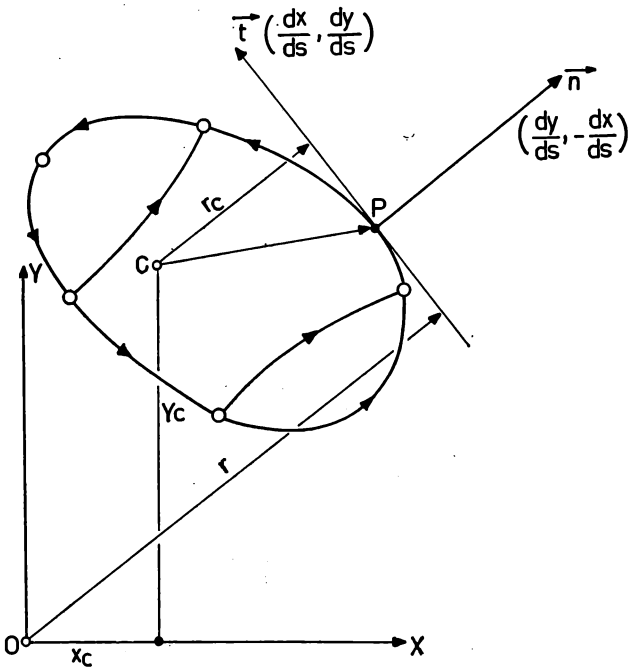


FIG. 3.



une grandeur algébrique dont le signe indique s'il est dirigé dans le sens positif ou dans le sens opposé.

L'hypothèse selon laquelle les diaphragmes sont infiniment rigides dans leur plan, entraîne comme nouvelle simplification une diffusion des charges transversales qui ne dépend plus du détail de leur distribution mais uniquement de leur résultante dans chaque section. Les équations de l'équilibre transversal ne concernent donc que les résultantes :

$$S_x = \oint q dx \quad (2.4)$$

$$S_y = \oint q dy \quad (2.5)$$

$$M_c = \oint q r_c ds \quad (2.6)$$

où  $S_x$  et  $S_y$  sont les efforts tranchants et  $M_c$  le moment de torsion dans une section donnée. Le bras de levier du flux de cisaillement est donné (fig. 3) par l'expression

$$r_c = (x - x_c) \frac{dy}{ds} - (y - y_c) \frac{dx}{ds}. \quad (2.7)$$

C'est la projection du vecteur  $\vec{CP}$  sur la normale  $\vec{n}$ . Quand le point P décrit l'arc dans le sens positif conventionnel indiqué par la tangente unitaire  $\vec{t}$ ,  $r_c$  est positif si le vecteur  $\vec{CP}$  tourne dans le sens mathématique (anti-horlogique). La raison pour laquelle le moment de torsion est pris par rapport à un certain centre C sera expliquée à la section 5.

L'équilibre entre les tensions axiales et les moments fléchissants ainsi que l'effort axial total est exprimé par

$$M_x = \oint n(x - x_g) ds + \sum_m N_m (x_m - x_g) \quad (2.8)$$

$$M_y = \oint n(y - y_g) ds + \sum_m N_m (y_m - y_g) \quad (2.9)$$

$$N = \oint n ds + \sum_m N_m. \quad (2.10)$$

Les moments fléchissants sont pris par rapport à des axes parallèles à  $ox$  et  $oy$  passant par un « centroïde » de coordonnées  $(x_g, y_g)$  qui sera défini plus tard. Comme les diaphragmes ne

réagissent qu'à des charges transversales et qu'aucune charge extérieure n'est appliquée dans une section intermédiaire aux parois ni aux lisses dans le sens des génératrices, l'effort axial total  $N$  ne peut provenir que des charges axiales appliquées aux sections terminales. Il est par conséquent constant. Dans le cas usuel il est nul et les équations (2.8) et (2.9) ne dépendent en fait ni de  $x_g$  ni de  $y_g$ .

### 3. L'opérateur nodal et les intégrations par parties.

La plupart des relations intéressantes à découvrir résulteront d'intégrations par parties. Il sera donc utile d'établir une formule générale applicable quelle que soit la complexité géométrique des relations entre les arcs et les nœuds. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux grandeurs définies le long des arcs d'une section. Au nœud  $m$  nous aurons par définition de l'opérateur nodal

$$T_m(\alpha\beta) = (\Sigma\alpha\beta)_{\text{conv.}} - (\Sigma\alpha\beta)_{\text{div.}} \quad (3.1)$$

Considérons maintenant la formule classique d'intégration par parties le long d'un des arcs joignant le nœud  $m_1$  au nœud  $m_2$

$$\int_{m_1}^{m_2} \alpha d\beta = [\alpha\beta]_{m_1}^{m_2} - \int_{m_1}^{m_2} \beta d\alpha.$$

Observons que, dans les termes intégrés, la limite supérieure, à prendre avec un signe positif, est une grandeur convergent vers  $m_2$ .

La limite inférieure, à prendre avec un signe négatif, est une grandeur qui diverge du nœud  $m_1$ . Par conséquent, quand on additionne les équations similaires pour tous les arcs de la section et que l'on groupe les termes intégrés, il vient

$$\oint \alpha d\beta = \sum_m T_m(\alpha\beta) - \oint \beta d\alpha. \quad (3.2)$$

C'est la formule générale cherchée. Dans la majorité des applications l'une au moins des grandeurs en jeu est continue en chaque nœud. Par exemple si c'est  $\beta$  qui ne prend qu'une valeur  $\beta_m$  en chaque nœud  $m$  on peut écrire

$$\oint \alpha d\beta = \sum_m \beta_m T_m(\alpha) - \oint \beta d\alpha. \quad (3.3)$$

Comme exemple d'application prenons la dérivée de l'équation (2.8) par rapport à  $z$  et utilisons (2.1) et (2.2)

$$\frac{dM_x}{dz} = - \oint (x - x_g) dq + \sum_m (x_m - x_g) T_m(q).$$

Au second membre nous appliquons au premier terme la formule d'intégration par parties en observant que  $(x - x_g)$  est une grandeur continue

$$\oint (x - x_g) dq = \sum_m (x_m - x_g) T_m(q) - \oint q dx.$$

Il en découle après substitution

$$\frac{dM_x}{dz} = \oint q dx = S_x. \quad (3.4)$$

On obtient d'une façon analogue les résultats

$$\frac{dM_y}{dz} = \oint q dy = S_y \quad (3.5)$$

$$\frac{dN}{dz} = 0. \quad (3.6)$$

Ils expriment pour une tranche  $dz$  de la coque l'équilibre de rotation autour de  $ox$  et  $oy$  et de translation selon  $oz$ .

#### 4. Les équations de déformation.

Le vecteur déplacement d'un point P sur une paroi peut être décomposé selon trois directions orthogonales locales

$u_n(s, z)$  selon la normale  $\vec{n}$

$u_t(s, z)$  selon la tangente  $\vec{t}$

$w(s, z)$  selon la génératrice.

Les deux premières composantes dépendent du déplacement cinématique dans son propre plan du diaphragme passant par P. Il sera déterminé par les deux translations définies par les

déplacements  $u_c(z)$  et  $v_c(z)$  du centre C et la rotation d'un angle  $\theta(z)$  autour de ce centre. Alors

$$u_t = u_c \frac{dx}{ds} + v_c \frac{dy}{ds} + \theta r_c \quad (4.1)$$

et le glissement dans la paroi aura pour valeur

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u_t}{\partial z}. \quad (4.2)$$

La tension tangentielle, le flux de cisaillement et le glissement sont liés par la relation

$$\tau = \frac{q}{ha} = G\gamma. \quad (4.3)$$

Des équations (4.1), (4.2) et (4.3) on déduit l'équation de déformation essentielle

$$\frac{q}{Gha} = \frac{\partial w}{\partial s} + u'_c \frac{dx}{ds} + v'_c \frac{dy}{ds} + \theta' r_c. \quad (4.4)$$

L'accent prime y indique la dérivation par rapport à  $z$  des fonctions de cette seule variable. Les autres équations de déformation

$$\frac{n}{gb} = E \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$\frac{N_m}{gS_m} = E \frac{dw_m}{dz} \quad (4.6)$$

relient l'allongement spécifique aux tensions dans la direction des génératrices.

##### 5. Le centre de Bernoulli des efforts tranchants.

L'équation

$$w = F_0(z) + X_0(z)(x - x_0) + Y_0(z)(y - y_0) \quad (5.1)$$

est une expression mathématique de l'hypothèse de Bernoulli, selon laquelle une section droite resterait plane. Le flux de cisail-

lement qui correspond à cette hypothèse peut être calculé par l'équation de déformation (4.4)

$$q_B = Gha \left[ (X_0 + u'_c) \frac{dx}{ds} + (Y_0 + v'_c) \frac{dy}{ds} + \theta' r_c \right]. \quad (5.2)$$

Il possède un centre de réduction défini comme étant le point d'application des efforts tranchants résultants quand la torsion est nulle ( $\theta' = 0$ ). Nous choisirons ce point comme notre centre C par rapport auquel sont en général calculés les moments de torsion. Il est donc défini par la condition

$$\oint q_B r_c ds = 0 \quad \text{pour} \quad \theta' = 0.$$

Suivant (5.2) ceci a lieu quels que soient  $(X_0 + u'_c)$  et  $(Y_0 + v'_c)$  si

$$\oint a r_c dx = 0 \quad \oint a r_c dy = 0. \quad (5.3)$$

Pour tirer de ces relations les coordonnées effectives de C nous pouvons substituer

$$r_c = r + y_c \frac{dx}{ds} - x_c \frac{dy}{ds} \quad (5.4)$$

où

$$r = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \quad (5.5)$$

est la projection de  $\vec{OP}$  sur  $\vec{n}$  (fig. 3). Ceci fournit la paire d'équations linéaires

$$\left. \begin{aligned} A_{xx} y_c - A_{xy} x_c &= - \oint a r dx \\ A_{xy} y_c - A_{yy} x_c &= - \oint a r dy \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

où apparaissent les « aires réduites »

$$\begin{aligned} A_{xx} &= \oint a \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 ds & A_{xy} &= \oint a \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} ds \\ A_{yy} &= \oint a \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ces dernières ont été introduites par KIRSTE [6] dans un cas particulier simple. Elles ont ensuite été généralisées par DRYMAEL [14] qui leur a reconnu le caractère de tenseur cartésien symétrique du second ordre. Ceci est évident du fait qu'elles sont les composantes d'une intégrale du produit tensoriel du vecteur polaire  $(dx/ds, dy/ds)$  par lui-même. Le tenseur contracté est l'invariant

$$A_{xx} + A_{yy} = \oint ads$$

représentant la surface totale résistant au cisaillement. Par orientation appropriée des axes  $A_{xy}$  peut être annulé. La plupart des auteurs ont utilisé cette simplification. Cependant, comme ces directions principales de cisaillement ne coïncident en général pas avec les axes principaux d'inertie de la section, la transformation offre plus d'inconvénients que d'avantages. Revenant à l'expression générale (4.4) et nous servant des propriétés (5.3) nous obtenons par intégration

$$\frac{S_x}{Gh} = \oint a \frac{\partial w}{\partial s} dx + A_{xx}u'_c + A_{xy}v'_c \quad (5.8)$$

$$\frac{S_y}{Gh} = \oint a \frac{\partial w}{\partial s} dy + A_{xy}u'_c + A_{yy}v'_c \quad (5.9)$$

$$\frac{M_c}{Gh} = \oint ar_c \frac{\partial w}{\partial s} ds + I_c \theta' \quad (5.10)$$

où

$$I_c = \oint ar_c^2 ds. \quad (5.11)$$

Cette dernière grandeur est directement liée à la raideur de torsion de la coque dans l'hypothèse de Bernoulli. En effet il résulte de (5.2) et (5.3) que

$$\oint q_B r_c ds = \theta' Gh \oint ar_c^2 ds = Gh I_c \theta' \quad (5.12)$$

et la rigidité de torsion de Bernoulli est  $GhI_c$ . Soit

$$I_{ic} = \oint ar_c^2 ds$$

une grandeur similaire définie par rapport à un centre  $K$  distinct de  $C$ . Comme

$$r_k = r_c - (x_k - x_c) \frac{dy}{ds} + (y_k - y_c) \frac{dx}{ds} \quad (5.13)$$

il résulte des équations (5.3) que

$$I_k = I_c + \oint a \left[ (y_k - y_c) \frac{dx}{ds} - (x_k - x_c) \frac{dy}{ds} \right]^2 ds.$$

Par conséquent  $I_c$  est la plus petite valeur prise par  $I_k$  quand on varie la position du centre. Le centre de Bernoulli a donc la propriété de fournir la plus petite rigidité de torsion sous l'hypothèse que les sections droites restent planes. Cette propriété a aussi été découverte originellement par DRYMAEL.

### 6. Séparation des variables.

Cherchons des solutions de la forme

$$w = W(s)F(z) \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_c &= U F(z) \\ v'_c &= V F(z) \\ \theta' &= \Theta F(z) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Les trois constantes ( $U$ ,  $V$ ,  $\Theta$ ) seront appelées les composantes du « vecteur déplacement ». Des équations de déformation (4.4), (4.5) et (4.6) nous obtenons

$$n = (EgF')b(s)W(s) \quad (6.3)$$

$$N_m = (EgF')S_m W_m \quad (6.4)$$

$$q = (GhF)Q(s) \quad (6.5)$$

où

$$Q(s) = a(s) \left[ \frac{dW}{ds} + U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + \Theta r_c \right]. \quad (6.6)$$

L'équation d'équilibre (2.1) demande pour être satisfaite

$$E(gF')'bW + GhF \frac{dQ}{ds} = 0.$$

Après division par  $(bW)(GhF)$  les variables  $s$  et  $z$  se séparent et, notant par  $\mu^2$  la constante de séparation, il vient

$$E(gF')' - \mu^2 GhF = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{dQ}{ds} + \mu^2 bW = 0. \quad (6.8)$$

La même séparation s'opère dans l'équation d'équilibre (2.2) qui fournit encore (6.7) avec

$$T_m(Q) = \mu^2 S_m W_m. \quad (6.9)$$

Enfin l'équilibre transversal des diaphragmes est satisfait par les équations (2.4), (2.5) et (2.6) qui deviennent

$$\frac{S_x}{GhF} = \oint Q dx = X \quad (6.10)$$

$$\frac{S_y}{GhF} = \oint Q dy = Y \quad (6.11)$$

$$\frac{M_c}{GhF} = \oint Q r_c ds = C. \quad (6.12)$$

Les trois nouvelles constantes (X, Y, C) joueront un rôle dual à celui du vecteur déplacement et seront appelées les composantes du « vecteur force ». On obtient des relations entre le vecteur force, le vecteur déplacement et la fonction de gauchissement  $W$  en substituant (6.6) dans (6.10), (6.11) et (6.12) :

$$X = \oint a \frac{dx}{ds} dW + UA_{xx} + VA_{xy} \quad (6.13)$$

$$Y = \oint a \frac{dy}{ds} dW + UA_{xy} + VA_{yy} \quad (6.14)$$

$$C = \oint ar_c dW + \Theta I_c. \quad (6.15)$$

Le « système fondamental » qui gouverne les fonctions  $W(s)$  et  $Q(s)$  est constitué de (6.6), (6.8) et (6.9). Nous le réécrivons ci-dessous sous une forme qui met en évidence au second membre les données non-homogènes



$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{ds} - \frac{Q}{a} &= U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + \Theta r_c \\ \frac{dQ}{ds} + \mu^2 b W &= 0 \\ T_m(Q) - \mu^2 S_m W_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Une notion qui nous sera fort utile pour simplifier les écritures est celle du produit scalaire de deux fonctions continues le long des arcs et continues aux nœuds de toute section droite. Ce produit scalaire est défini comme suit :

$$(\Phi, \Psi) = \oint b \Phi \Psi ds + \sum_m S_m \Phi_m \Psi_m = (\Psi, \Phi). \quad (6.17)$$

Il nous permet par exemple en calculant les moments fléchissants (2.8) et (2.9) à l'aide de (6.3) et (6.4) de mettre le résultat sous la forme condensée

$$\begin{aligned} M_x &= \text{EgF}'(W, x - x_g) \\ M_y &= \text{EgF}'(W, y - y_g). \end{aligned} \quad (6.18)$$

En différentiant ces relations par rapport à  $z$  et nous servant des relations (3.4), (3.5) et de (6.7) il vient aussi

$$\begin{aligned} S_x &= \mu^2 \text{GhF}(W, x - x_g) \\ S_y &= \mu^2 \text{GhF}(W, y - y_g) \end{aligned} \quad (6.19)$$

comme relations équivalentes à (6.10) et (6.11). Sous la forme

$$X = \mu^2(W, x - x_g) \quad Y = \mu^2(W, y - y_g) \quad (6.20)$$

elles s'obtiennent aussi en intégrant la relation (6.8) multipliée par  $(x - x_g)$  ou  $(y - y_g)$  et en évaluant le premier terme par parties avec utilisation de (6.9).

Sous la forme (6.16) le système fondamental fait jouer un rôle privilégié au vecteur déplacement. Il est aisé de construire un système dual où le rôle de données non homogènes est repris par les éléments du vecteur force. Il suffit à cet effet d'éliminer  $(U, V, \Theta)$  au profit de  $(X, Y, C)$  à l'aide des relations (6.13), (6.14) et (6.15). Cette élimination est évidemment simplifiée par l'adoption d'axes principaux de cisaillement pour lesquels  $A_{xy} = 0$ . Le nouveau système devient alors d'un type intégral-différentiel

de discussion plus difficile. Comme nous le verrons dans la suite cette dualité de forme correspond à deux manières différentes de formuler un problème aux valeurs propres et de définir une base orthonormée de fonctions propres pour les fonctions  $W$ . Le point de vue intégral-différentiel est celui que les auteurs précédents ont adopté. Nous ferons une discussion préalable de l'autre point de vue ce qui nous permettra d'enrichir notre compréhension du problème et de ne laisser échapper aucune solution du système intégral-différentiel.

### 7. Les gauchissements propres de première espèce.

Le système fondamental (6.16) est rendu homogène en posant

$$U = 0 \quad V = 0 \quad \Theta = 0. \quad (7.1)$$

En vertu des relations (6.2) ceci revient physiquement à prévenir tout déplacement relatif des diaphragmes. En effet les seules possibilités qui subsistent sont trois déplacements cinématiques d'ensemble de la coque : deux translations transversales et une rotation autour d'un axe parallèle aux génératrices. Pour montrer que nous obtenons un problème aux valeurs propres pour la constante de séparation, déconnectons par la pensée les arcs constitutifs d'une section droite. Nous donnant une valeur de  $\mu^2$  nous pouvons en choisissant une valeur de  $Q$  et une valeur de  $W$  à l'extrémité d'un arc intégrer la paire d'équations différentielles

$$\frac{dW}{ds} = \frac{Q}{a} \quad \frac{dQ}{ds} = -\mu^2 b W$$

pour obtenir les valeurs de  $Q$  et de  $W$  à l'autre extrémité. Donc pour un  $\mu^2$  donné, chaque arc introduit deux constantes indéterminées. Si la section se composait d'un seul arc, avec ou sans lisses à ses extrémités, nous aurions exactement deux conditions nodales du type (6.9) à satisfaire, une à chaque extrémité. Quand un second arc est connecté au premier par une de ses extrémités nous avons à modifier une des conditions nodales à l'endroit de la jonction mais aussi à remplir deux nouvelles conditions : la

continuité (univalence) de  $W$  à la jonction et une condition nodale à la nouvelle extrémité. Si le nouvel arc était joint au premier par ses deux extrémités, les deux nouvelles conditions seraient toutes deux du type de continuité ou d'univalence de  $W$ . Cette argumentation peut être répétée chaque fois qu'un nouvel arc est connecté. En définitive le nombre de conditions à remplir est exactement égal au nombre de constantes arbitraires introduites, c'est-à-dire deux fois le nombre d'arcs constituant la section. Toutes ces conditions sont linéaires et homogènes dans les constantes indéterminées. Elles ne sont donc compatibles que si la constante de séparation prend des valeurs appropriées : ce sont les valeurs propres de première espèce. Elles seront notées

$$\mu^2 = \lambda_r^2 \quad (r = 0, 1, 2\dots).$$

Les gauchissements et flux de cisaillement propres correspondants seront notés

$$W = \varphi_{(r)} \quad Q = \psi_{(r)}.$$

Ils ne sont évidemment définis qu'à un facteur d'amplitude arbitraire près et obéissent au système d'équations

$$\frac{d\varphi_{(r)}}{ds} = \frac{1}{a} \psi_{(r)} \quad (7.2)$$

$$\frac{d\psi_{(r)}}{ds} = -\lambda_r^2 b \varphi_{(r)} \quad (7.3)$$

$$T_m(\psi_{(r)}) = \lambda_r^2 S_m \varphi_{(r) m}. \quad (7.4)$$

De l'équation (7.2) pour  $r = \alpha$  nous déduisons

$$\oint \psi_{(\beta)} d\varphi_{(\alpha)} = \oint \psi_{(\beta)} \frac{\psi_{(\alpha)}}{a} ds.$$

Quand le membre de gauche est évalué par parties et que l'on se sert de (7.3) et (7.4) pour la valeur  $r = \beta$ , il vient

$$\lambda_\beta^2(\varphi_{(\alpha)}, \varphi_{(\beta)}) = \oint \frac{\psi_{(\alpha)} \psi_{(\beta)}}{a} ds. \quad (7.5)$$

Si les indices  $\alpha$  et  $\beta$  sont échangés dans ce calcul

$$\lambda_\alpha^2(\varphi_{(\alpha)}, \varphi_{(\beta)}) = \oint \frac{\psi_{(\alpha)} \psi_{(\beta)}}{a} ds.$$

On en déduit les relations d'orthogonalité pour  $\lambda_\alpha^2 \neq \lambda_\beta^2$

$$(\varphi_{(\alpha)}, \varphi_{(\beta)}) = 0 \quad (7.6)$$

$$\oint \psi_{(\beta)} d\varphi_{(\alpha)} = \oint \psi_{(\alpha)} d\varphi_{(\beta)} = \oint \frac{\psi_{(\alpha)}\psi_{(\beta)}}{a} ds = 0. \quad (7.7)$$

En cas de dégénérescence plusieurs gauchissements propres linéairement indépendants peuvent appartenir à la même valeur propre. Il est alors possible de les rendre également orthogonaux par combinaisons linéaires appropriées. Les relations (7.6) et (7.7) peuvent donc être considérées comme applicables à toutes les solutions propres indépendantes.

Pour  $r = \alpha = \beta$  l'équation (7.5) fournit deux expressions différentes du carré de la norme  $n_r$  d'un gauchissement propre :

$$\lambda_r^2 n_r^2 = \lambda_r^2 (\varphi_{(r)}, \varphi_{(r)}) = \oint \frac{\psi_{(r)}^2}{a} ds \quad (7.8)$$

et démontre que les valeurs propres sont essentiellement positives.

Il existe une et une seule solution propre correspondant à la valeur propre  $\mu^2 = 0$ . Comme c'est la valeur propre la plus basse nous lui attribuons l'indice zéro. En effet, si nous faisons  $\lambda_0^2 = 0$  dans (7.8) nous en déduisons successivement

$$\oint \frac{\psi_{(0)}^2}{a} ds = 0 \quad \psi_{(0)} \equiv 0 \quad \frac{d\varphi_{(0)}}{ds} = 0. \quad (7.9)$$

Par conséquent  $\varphi_{(0)}$  est une constante arbitraire. Nous conviendrons de la normer en lui attribuant la valeur unité et dès lors

$$\varphi_{(0)} = 1 \quad n_0^2 = (1, 1) = \oint b ds + \sum_m S_m = S \quad (7.10)$$

où S est la section totale résistant aux efforts axiaux. Au lieu d'appeler  $\varphi_{(0)}$  le gauchissement propre de première espèce et valeur propre nulle nous y ferons volontiers allusion sous le vocable de « mode de translation ». Les autres gauchissements propres lui sont orthogonaux

$$(\varphi_{(r)}, 1) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (7.11)$$

De par leur définition, basée sur les équations (7.1), les gauchissements de première espèce ont un vecteur déplacement nul.

Les composantes de leur vecteur force seront notées :

$$X_r = \oint \psi_{(r)} dx \quad Y_r = \oint \psi_{(r)} dy \quad C_r = \oint \psi_{(r)} \gamma_c ds. \quad (7.12)$$

Il peut arriver que ces trois composantes soient simultanément nulles. Le mode de translation en est un exemple trivial qui découle du résultat  $\psi_{(0)} \equiv 0$  précédemment obtenu. Nous verrons plus tard comment organiser les distributions d'épaisseur  $a(s)$  et  $b(s)$  pour en obtenir systématiquement d'autres, de valeur propre non nulle. Nous appellerons de tels gauchissements propres des « gauchissements libres ». Ils jouent un rôle particulier dans la théorie. Les autres seront des « gauchissements liés » et, dans un contexte plus général que celui des gauchissements de première espèce, nous appellerons « liés » les gauchissements pour lesquels une au moins des composantes du vecteur force ou du vecteur déplacement n'est pas nulle.

### 8. Solution générale du système fondamental.

Les coefficients de Fourier d'une fonction continue  $W$  dans la base orthogonale de première espèce

$$W = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \alpha_r \varphi_{(r)}(s) \quad (8.1)$$

s'obtiennent immédiatement à l'aide des relations (7.6)

$$\alpha_0 S = (W, 1) \quad (8.2)$$

$$\alpha_r n_r^2 = (W, \varphi_{(r)}). \quad (8.3)$$

Si  $W$  représente une solution générale du système fondamental (6.16) ces coefficients se laissent exprimer directement en terme des paramètres  $\mu^2$  et  $(U, V, \Theta)$  de la façon suivante : de

$$\oint Q d\varphi_{(r)} = \oint Q \frac{\psi_{(r)}}{a} ds$$

intégrant à gauche par parties et utilisant (6.8) et (6.9)

$$\mu^2 (W, \varphi_{(r)}) = \oint Q \frac{\psi_{(r)}}{a} ds. \quad (8.4)$$

D'autre part par (6.6)

$$\oint \psi_{(r)} dW = \oint Q \frac{\psi_{(r)}}{a} ds - U \oint \psi_{(r)} dx - V \oint \psi_{(r)} dy - \Theta \oint \psi_{(r)} r ds.$$

Au membre de gauche nous intégrons par parties avec transformation par (7.3) et (7.4), à droite nous substituons (7.12)

$$\lambda_r^2(W, \varphi_{(r)}) = \oint Q \frac{\psi_{(r)}}{a} ds - UX_r - VY_r - \Theta C_r. \quad (8.5)$$

Soustrayant (8.5) de (8.4) il vient

$$n_r^2 \alpha_r = (W, \varphi_{(r)}) = \frac{UX_r + VY_r + \Theta C_r}{\mu^2 - \lambda_r^2} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (8.6)$$

Le coefficient  $\alpha_0$  est obtenu directement par (8.4) avec l'aide de (7.9) et (7.10)

$$\mu^2 S \alpha_0 = \mu^2 (W, 1) = 0. \quad (8.7)$$

Par conséquent, pourvu que la constante de séparation ne coïncide avec aucune des valeurs propres de première espèce, le système fondamental possède l'unique solution continue

$$W(s; \mu^2, U, V, \Theta) = \sum_1^{\infty} \frac{UX_r + VY_r + \Theta C_r}{n_r^2 (\mu^2 - \lambda_r^2)} \varphi_{(r)}. \quad (8.8)$$

Cette solution est linéaire et homogène dans les composantes du vecteur déplacement. On remarquera que le développement ne contient aucune contribution en provenance des gauchissements libres, pour lesquels  $X_r = Y_r = C_r = 0$ .

En cas de confluence de la constante de séparation avec une valeur propre deux cas doivent être envisagés séparément :

1) La confluence se fait avec la valeur propre d'un gauchissement libre. Dans ce cas le coefficient de ce gauchissement dans la série (8.8) n'est plus nul mais simplement arbitraire. Ce terme représente la solution complémentaire (sans second membre) du système (6.16). Il apparaît d'ailleurs que l'équation (8.6) fournit maintenant pour ce coefficient une expression indéterminée.

Ce cas se présente notamment pour la valeur nulle de la constante de séparation et c'est le coefficient  $\alpha_0$  qui devient arbitraire.

2) La confluence se fait avec la valeur propre d'un gauchissement lié. Cette fois, comme une au moins des composantes du vecteur force de ce gauchissement est différente de zéro, le coefficient correspondant dans la série (8.8) deviendrait infini sans la restriction

$$UX_r + VY_r + \Theta C_r = 0. \quad (8.9)$$

Cette restriction porte sur les composantes possibles du vecteur déplacement du système fondamental. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que ce système ait une solution. Quand cette condition est vérifiée, le coefficient du gauchissement lié en confluence devient à nouveau arbitraire et le terme auquel il correspond dans la solution représente à nouveau la solution complémentaire (sans second membre) que possède alors le système fondamental.

Dans les deux cas de confluence la solution du système fondamental a perdu son caractère d'unicité ; dans le second cas seulement nous avons à appliquer une restriction sur les valeurs possibles des paramètres (U, V,  $\Theta$ ).

Jusqu'ici il était implicitement admis que la confluence se faisait avec une valeur propre simple. Dans le cas de confluence avec une valeur propre multiple soit

$p$  le nombre de gauchissements libres linéairement indépendants,

$m$  le nombre de gauchissements liés indépendants

appartenant à cette valeur propre, dont le degré de multiplicité est par conséquent  $p + m$ . Comme il y a au plus trois vecteurs force linéairement indépendants pour les gauchissements liés, il est évident que  $m \leq 3$ . Par conséquent le nombre de conditions indépendantes du type (8.9) qui assurent l'existence d'une solution du système fondamental est au plus égal à trois. Chaque fois qu'un degré de liberté dans le choix des paramètres (U, V,  $\Theta$ ) est perdu par suite d'une condition du type (8.9), il apparaît dans la solution (8.8) un coefficient arbitraire dans un gauchissement lié. Nous pouvons donc considérer que dans tous les cas la solution du système fondamental dépend, pour une valeur donnée de la constante de séparation, de trois paramètres arbitraires. Pour des raisons qui apparaîtront lors de la discussion de la base

orthogonale de seconde espèce, nous ne tenons pas compte des coefficients arbitraires qui apparaissent par suite d'une confluence avec un ou plusieurs gauchissements libres.

9. Développement en série de quelques fonctions particulières.

En l'absence de confluence, la solution générale de (6.16) se met sous la forme

$$W = U\varphi_u(s; \mu^2) + V\varphi_v(s; \mu^2) + \Theta\varphi_\theta(s; \mu^2) \quad (9.1)$$

avec le développement correspondant

$$Q = U\psi_u(s; \mu^2) + V\psi_v(s; \mu^2) + \Theta\psi_\theta(s; \mu^2). \quad (9.2)$$

Par identification avec (8.8) nous obtenons les séries

$$\varphi_u(s; \mu^2) = \sum_1^\infty \frac{X_r}{n_r^2(\mu^2 - \lambda_r^2)} \varphi_{(r)} \quad (9.3)$$

$$\varphi_v(s; \mu^2) = \sum_1^\infty \frac{Y_r}{n_r^2(\mu^2 - \lambda_r^2)} \varphi_{(r)} \quad (9.4)$$

$$\varphi_\theta(s; \mu^2) = \sum_1^\infty \frac{C_r}{n_r^2(\mu^2 - \lambda_r^2)} \varphi_{(r)}. \quad (9.5)$$

Les valeurs de ces fonctions pour  $\mu^2 = 0$  jouent un rôle particulièrement important. Faisant  $\mu^2 = 0$ ,  $U = 1$ ,  $V = 0$  et  $\Theta = 0$  dans le système (6.16) nous obtenons immédiatement la solution

$$-\varphi_u(s; 0) = x - x_g \quad \psi_u(s; 0) \equiv 0. \quad (9.6)$$

La constante arbitraire  $x_g$  apparaît, conformément à la discussion menée dans la section précédente, du fait de la confluence avec le gauchissement libre de valeur propre nulle ou mode de translation. De façon analogue nous obtenons pour  $\mu^2 = 0$ ,  $U = 0$ ,  $V = 1$  et  $\Theta = 0$  la solution

$$-\varphi_v(s; 0) = y - y_g \quad \psi_v(s; 0) \equiv 0. \quad (9.7)$$

Par conséquent en faisant simplement  $\mu^2 = 0$  dans (9.3) et (9.4) il vient



$$x - x_g = \sum_1^{\infty} \frac{X_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \varphi(r) \quad (9.8)$$

$$y - y_g = \sum_1^{\infty} \frac{Y_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \varphi(r). \quad (9.9)$$

Ces séries correspondent à un choix particulier des constantes  $(x_g, y_g)$  : celui qui rend nul le coefficient  $a_0$  du développement général (8.1). Par conséquent, par référence à (8.2), au choix tel que

$$(x - x_g, 1) = \oint b(x - x_g) ds + \sum_m S_m (x_m - x_g) = 0 \quad (9.10)$$

$$(y - y_g, 1) = \oint b(y - y_g) ds + \sum_m S_m (y_m - y_g) = 0. \quad (9.11)$$

Dans ces conditions  $(x_g, y_g)$  sont définis comme les coordonnées du centroïde ou centre de gravité des aires résistantes aux efforts axiaux. Pour un tel choix nous appellerons les solutions (9.6) et (9.7) les « modes de flexion » de la coque. Il apparaîtra plus tard que les modes de flexion sont des éléments de la base orthogonale de seconde espèce. Nous voyons directement sur les séries (9.8) et (9.9) qu'ils ne sont en général pas des gauchissements de première espèce. Pour que ceci soit vrai du premier, par exemple, il faudrait que toutes les composantes  $X_r$  soient nulles sauf une ; du second, que toutes les composantes  $Y_r$  soient nulles sauf une. Ces cas ne sont pas exclus mais ils demandent que les fonctions  $a(s)$  et  $b(s)$  satisfassent certaines relations dont l'étude sera faite plus tard.

Sous leur forme (8.3), les équations fournissant les coefficients de Fourier des séries (9.8) et (9.9) sont

$$X_r = \lambda_r^2 (x - x_g, \varphi(r)) \quad (9.12)$$

$$Y_r = \lambda_r^2 (y - y_g, \varphi(r)). \quad (9.13)$$

Par conséquent le calcul des éléments du tenseur des moments d'inertie de la section fournit les séries

$$I_{xx} = (x - x_g, x - x_g) = \sum_1^{\infty} \frac{X_r^2}{n_r^2 \lambda_r^4} \quad (9.14)$$

$$I_{xy} = (x - x_0, y - y_0) = \sum_1^{\infty} \frac{X_r Y_r}{n_r^2 \lambda_r^4} \quad (9.15)$$

$$I_{yy} = (y - y_0, y - y_0) = \sum_1^{\infty} \frac{Y_r^2}{n_r^2 \lambda_r^4}. \quad (9.16)$$

D'autre part les équations (9.8) et (9.9) deviennent après différentiation et utilisation de (7.2)

$$a \frac{dx}{ds} = \sum_1^{\infty} \frac{X_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \psi_{(r)} \quad a \frac{dy}{ds} = \sum_1^{\infty} \frac{Y_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \psi_{(r)}. \quad (9.17)$$

Si on les multiplie par  $dx$  ou  $dy$ , puis qu'on les intègre, elles fournissent un développement en série pour les éléments du tenseur des aires réduites

$$A_{xx} = \sum_1^{\infty} \frac{X_r^2}{n_r^2 \lambda_r^2} \quad (9.18)$$

$$A_{xy} = \sum_1^{\infty} \frac{X_r Y_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \quad (9.19)$$

$$A_{yy} = \sum_1^{\infty} \frac{Y_r^2}{n_r^2 \lambda_r^2}. \quad (9.20)$$

Si on les multiplie par  $r_c ds$  et qu'on intègre, il vient en vertu des relations (5.3)

$$\sum_1^{\infty} \frac{X_r C_r}{n_r^2 \lambda_r^2} = 0 \quad \sum_1^{\infty} \frac{Y_r C_r}{n_r^2 \lambda_r^2} = 0. \quad (9.21)$$

Il reste à examiner la nature de la fonction  $\varphi_{\theta}(s; 0)$ . En faisant  $\mu^2 = 0$ ,  $U = 0$ ,  $V = 0$  et  $\Theta = 1$  dans (6.16) on trouve

$$\frac{d\varphi_{\theta}(s; 0)}{ds} = \frac{1}{a} \psi_{\theta}(s; 0) - r_c \quad (9.22)$$

$$\frac{d\psi_{\theta}(s; 0)}{ds} = 0 \quad (9.23)$$

$$T_m(\psi_{\theta}(s; 0)) = 0. \quad (9.24)$$

La solution de ce système est moins immédiate et nous force d'ailleurs à introduire la distinction entre les sections ouvertes et les sections fermées.

Dans une section ouverte il n'y a qu'un seul cheminement possible entre un point de référence D arbitrairement choisi et tout autre point appartenant aux arcs de la section. L'ensemble de ces cheminements définit sur tous les arcs un sens positif conventionnel de description. Il est alors clair que la solution du système examiné est

$$\psi_{\theta}(s; 0) \equiv 0 \quad - \varphi_{\theta}(s; 0) = \int_D r_c ds - \alpha_{\theta} \quad (9.25)$$

où  $\alpha_{\theta}$  est de nouveau une constante arbitraire qui représente la valeur de  $\varphi_{\theta}(s; 0)$  au point D et où l'intégrale est à limite supérieure variable. Tout comme les modes de flexion, cette solution sera reconnue comme faisant partie de la base de seconde espèce pour la section ouverte.

Dans une section fermée on pourrait encore définir un sens positif basé sur les cheminements déterminés par des coupures introduites le long de chaque circuit fermé. Mais alors la continuité de  $\varphi_{\theta}(s; 0)$  aux deux lèvres de chaque coupure n'est pas garantie. Nous verrons à la section 23 que la solution assurant la continuité de  $\varphi_{\theta}(s; 0)$  fait appel à des flux de fermeture et que par conséquent  $\psi_{\theta}(s; 0)$  n'est pas identiquement nul pour les sections fermées.

Nous pouvons néanmoins déduire des équations (9.22), (9.23) et (9.24) des propriétés de la solution, valables aussi bien pour les sections fermées que les sections ouvertes. En intégrant par parties et utilisant (9.23) et (9.24) on justifie les propriétés

$$\oint \psi_{\theta}(s; 0) dx = 0 \quad \oint \psi_{\theta}(s; 0) dy = 0 \quad (9.26)$$

$$\oint \psi_{\theta}(s; 0) d\varphi_{\theta}(s; 0) = 0. \quad (9.27)$$

De cette dernière et de (9.22) on peut déduire

$$J = \oint \psi_{\theta}(s; 0) r_c ds = \oint \psi_{\theta}^2(s; 0) \frac{ds}{a} \geq 0. \quad (9.28)$$

En fait la grandeur J est nulle pour les sections ouvertes mais positive pour les sections fermées.

Si le mode de translation d'amplitude arbitraire contenu dans  $\varphi_\theta(s; 0)$  est rendu nul par la condition

$$(\varphi_\theta(s; 0), 1) = 0 \quad (9.29)$$

il vient par (9.5)

$$-\varphi_\theta(s; 0) = \sum_1^\infty \frac{C_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \varphi_{(r)}. \quad (9.30)$$

Après différentiation et substitution de (7.2) et (9.12)

$$ar_c - \psi_\theta(s; 0) = \sum_1^\infty \frac{C_r}{n_r^2 \lambda_r^2} \psi_{(r)}. \quad (9.31)$$

Quand on multiplie ce résultat par  $dx$  ou  $dy$  et que l'on intègre on obtient confirmation des résultats (9.24) en vertu de (5.3) et (9.26). La multiplication par  $r_c ds$  suivie d'intégration fournit, eu égard à (5.11) et (9.28), le nouveau résultat

$$I_c - J = \sum_1^\infty \frac{C_r^2}{n_r^2 \lambda_r^2} \geq 0. \quad (9.32)$$

On ne peut exclure l'égalité à zéro car on trouvera des lois de distribution  $a(s)$  telles que tous les coefficients  $C_r$  soient nuls (section 28). La grandeur  $J$  sera plus tard identifiée comme le facteur de rigidité de torsion de la coque dans la solution de de Saint Venant, où les sections sont libres de gauchir. Elle se présente aussi mathématiquement comme le minimum de l'intégrale

$$\oint a \left( r_c - \sum_1^\infty \gamma_r \frac{\psi_{(r)}}{a} \right)^2 ds \geq 0 \quad (9.33)$$

pour un choix arbitraire des coefficients  $\gamma_r$ .

#### 10. Les gauchissements propres de seconde espèce.

Remplaçons les conditions (7.1) par celles, duales

$$X = \oint Q dx = 0 \quad Y = \oint Q dy = 0 \quad C = \oint Q r_c ds = 0 \quad (10.1)$$

Elles définissent à nouveau un problème aux valeurs propres pour la constante de séparation. Elles reviennent physiquement à demander que les diaphragmes soient libres de réactions transversales.

Tous les gauchissements propres de seconde espèce ainsi définis entrent dans l'une ou l'autre des catégories suivantes :

1. Les gauchissements libres.

Comme ils satisfont simultanément aux conditions (7.1) et (10.1), les gauchissements libres sont aussi des solutions propres de seconde espèce. Par conséquent ils forment une partie commune aux bases orthogonales de première et de seconde espèce.

2. Les gauchissements dont la valeur propre ne coïncide avec aucune valeur propre de première espèce.

Dans ce cas (8.8) étant l'unique solution du système (6.16), les conditions (10.1) peuvent être mises sous la forme

$$\left. \begin{aligned} UX_u(\mu^2) + VX_v(\mu^2) + \Theta X_\theta(\mu^2) &= 0 \\ UY_u(\mu^2) + VY_v(\mu^2) + \Theta Y_\theta(\mu^2) &= 0 \\ UC_u(\mu^2) + VC_v(\mu^2) + \Theta C_\theta(\mu^2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

basée sur le développement (9.2) du flux de cisaillement. Les coefficients sont des fonctions de la constante de séparation. Nous en donnons ci-dessous des expressions, dont l'équivalence se démontre facilement à l'aide des équations gouvernant les fonctions  $\varphi_{u,v,\theta}$  et  $\psi_{u,v,\theta}$ , telles qu'on les obtient en faisant respectivement égal à (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1) le vecteur déplacement dans le système fondamental (6.16) : ce sont

$$\left. \begin{aligned} X_u &= \oint \psi_u dx = \oint \psi_u^2 \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_u, \varphi_u) \\ Y_v &= \oint \psi_v dy = \oint \psi_v^2 \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_v, \varphi_v) \\ C_\theta &= \oint \psi_\theta r_\theta ds = \oint \psi_\theta^2 \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_\theta, \varphi_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

pour les coefficients diagonaux et pour les autres

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \oint \psi_v dx = \oint \psi_u \psi_v \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_u, \varphi_v) = \oint \psi_v dy = Y_u \\ X_\theta &= \oint \psi_\theta dx = \oint \psi_u \psi_\theta \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_u, \varphi_\theta) = \oint \psi_u r_c ds = C_u \\ Y_\theta &= \oint \psi_\theta dy = \oint \psi_v \psi_\theta \frac{ds}{a} - \mu^2(\varphi_v, \varphi_\theta) = \oint \psi_v r_c ds = C_v \end{aligned} \right\} (10.4)$$

Les équations (10.2) sont une forme modifiée de celles discutées par BENSOTER [25]. La symétrie des coefficients en  $a$  a été dégagée. Les valeurs  $\mu_i^2$  de la constante de séparation qui annulent le déterminant de ces coefficients sont des valeurs propres de seconde espèce. Les équations ont alors au moins une et au plus trois solutions non triviales, linéairement indépendantes ( $U_i$ ,  $V_i$ ,  $\Theta_i$ ) et définies à un facteur d'amplitude près. Ils leur correspondent par (9.1) et (9.2) des gauchissements propres  $W_{(i)}$  et des flux propres  $Q_{(i)}$ . On observera que ces solutions propres sont du type lié.

3. Les gauchissements dont la valeur propre coïncide avec celle d'un ou plusieurs gauchissements propres de première espèce.

On ne peut affirmer que cette dernière catégorie, non envisagée par BENSOTER (pas plus d'ailleurs que celle des gauchissements libres), soit vide. Nous avons noté à la section 8 que, quels que soient les cas de confluence de  $\mu^2$  avec une valeur propre multiple de première espèce, la solution du système fondamental (6.16) dépendait toujours de trois paramètres arbitraires, sans compter les coefficients arbitraires des gauchissements libres qui pourraient appartenir à cette valeur de  $\mu^2$ . En fait nous pourrions toujours écrire pour la solution générale de  $Q$  dans le système fondamental

$$Q = \alpha Q_{(\alpha)} + \beta Q_{(\beta)} + \gamma Q_{(\gamma)} + \Sigma \lambda_{(x)} \psi_{(x)} \quad (10.6)$$

où les  $\psi_{(x)}$  désignent les flux des gauchissements libres appartenant à la valeur envisagée pour  $\mu^2$ , et jouissant par conséquent des propriétés

$$\oint \psi_{(x)} dx = 0 \quad \oint \psi_{(x)} dy = 0 \quad \oint \psi_{(x)} r_c ds = 0. \quad (10.7)$$

Distinguons alors les quatre cas suivants :

a) Les seuls gauchissements de première espèce existant pour la valeur de  $\mu^2$  envisagée sont des gauchissements libres.

Dans ce cas on peut prendre dans (10.6)

$$\alpha = U, \quad \beta = V, \quad \gamma = \Theta$$

et dès lors

$$Q_{(\alpha)} = \psi_u(s; \mu^2), \quad Q_{(\beta)} = \psi_v(s; \mu^2) \quad \text{et} \quad Q_{(\gamma)} = \psi_\theta(s; \mu^2).$$

Les conditions (10.1) pour une solution de seconde espèce se réduisent aux équations (10.2) en vertu des propriétés (10.7). Par conséquent la présence de gauchissements libres pour la valeur étudiée de la constante de séparation n'introduit aucune restriction aux conditions d'existence des gauchissements liés de seconde espèce pour la même valeur.

b) Il existe un seul gauchissement lié de première espèce pour la valeur de la constante de séparation envisagée. Soit  $\varphi_{(\gamma)}$  ce gauchissement,  $\psi_{(\gamma)}$  le flux correspondant et

$$X_\gamma = \oint \psi_{(\gamma)} dx \quad Y_\gamma = \oint \psi_{(\gamma)} dy \quad C_\gamma = \oint \psi_{(\gamma)} r_c ds$$

les composantes du vecteur force correspondant, dont une au moins est par hypothèse différente de zéro.

Les paramètres (U, V,  $\Theta$ ) sont soumis à la restriction du type (8.9)

$$UX_\gamma + VY_\gamma + \Theta C_\gamma = 0.$$

Il existe deux vecteurs déplacement ( $U_\alpha, V_\alpha, \Theta_\alpha$ ) et ( $U_\beta, V_\beta, \Theta_\beta$ ) définis à un facteur près et linéairement indépendants, satisfaisant à cette restriction, auxquels correspondent deux solutions particulières  $W_{(\alpha)}, Q_{(\alpha)}$  et  $W_{(\beta)}, Q_{(\beta)}$  du système (6.16). Dès lors avec  $Q_{(\gamma)} \equiv \psi_{(\gamma)}$ , (10.6) représente bien la solution générale de ce système. Les conditions (10.1) pour l'existence d'une solution de seconde espèce sont

$$\left. \begin{aligned} \alpha X_\alpha + \beta X_\beta + \gamma X_\gamma &= 0 \\ \alpha Y_\alpha + \beta Y_\beta + \gamma Y_\gamma &= 0 \\ \alpha C_\alpha + \beta C_\beta + \gamma C_\gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Comme l'une au moins des grandeurs  $(X_\gamma, Y_\gamma, C_\gamma)$  est différente de zéro ce système linéaire et homogène admet au plus deux solutions non triviales et linéairement indépendantes pour les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

c) Il existe deux gauchissements liés de première espèce, linéairement indépendants, pour la valeur envisagée de la constante de séparation. Soient  $\varphi_{(\beta)}$  et  $\varphi_{(\gamma)}$  ces gauchissements,  $\psi_{(\beta)}$  et  $\psi_{(\gamma)}$  les flux et  $(X_\beta, Y_\beta, C_\beta)$ ,  $(X_\gamma, Y_\gamma, C_\gamma)$  les vecteurs force correspondants. Par suite de l'indépendance linéaire de ces derniers le système de restrictions

$$UX_\beta + VY_\beta + \Theta C_\beta = 0$$

$$UX_\gamma + VY_\gamma + \Theta C_\gamma = 0$$

admet une seule solution  $(U_\alpha, V_\alpha, \Theta_\alpha)$ , définie à un facteur près. Il lui correspond une solution particulière  $W_{(\alpha)}, Q_{(\alpha)}$  du système (6.16) dont (10.6) représente de nouveau la solution générale si l'on pose  $Q_{(\beta)} \equiv \psi_{(\beta)}$  et  $Q_{(\gamma)} \equiv \psi_{(\gamma)}$ . Par suite de l'indépendance linéaire des vecteurs  $(X_\beta, Y_\beta, C_\beta)$  et  $(X_\gamma, Y_\gamma, C_\gamma)$  les conditions (10.8) pour l'existence d'une solution de seconde espèce admettent au plus une solution non triviale pour les paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

d) Il existe trois gauchissements liés de première espèce, linéairement indépendants, pour la valeur envisagée de la constante de séparation. Rappelons qu'il ne pourrait y en avoir plus.

L'indépendance linéaire de leurs vecteurs force entraîne pour les restrictions du type (8.9) l'unique solution  $U = 0, V = 0$  et  $\Theta = 0$ . La solution du système (6.16) se réduit donc à la solution générale sans second membre. Celle-ci est à nouveau donnée par (10.6) si  $Q_{(\alpha)}, Q_{(\beta)}$  et  $Q_{(\gamma)}$  sont les flux des gauchissements liés de première espèce en cause. Mais alors il résulte encore de l'indépendance linéaire de leurs vecteurs force que le système de conditions (10.8) n'admet que la solution triviale  $\alpha = 0, \beta = 0$  et  $\gamma = 0$ . En d'autres termes il n'existe pas dans ce cas de solution de seconde espèce.

Il ressort de cette discussion que, si à une même valeur propre peuvent correspondre en nombre illimité des gauchissements libres, le nombre maximum de gauchissements liés appartenant à l'une ou à l'autre espèce est limité à trois.



## 11. Orthogonalité des gauchissements de seconde espèce.

Partant de

$$\frac{dW_{(i)}}{ds} = \frac{1}{a} Q_{(i)} - U_i \frac{dx}{ds} - V_i \frac{dy}{ds} - \Theta_i r_e \quad (11.1)$$

multipliant par  $Q_{(j)} ds$  et intégrant

$$\oint Q_{(j)} dW_{(i)} = \oint Q_{(i)} Q_{(j)} \frac{ds}{a} \quad (11.2)$$

car, par définition de la seconde espèce,

$$\oint Q_{(j)} dx = 0 \quad \oint Q_{(j)} dy = 0 \quad \oint Q_{(j)} r_e ds = 0. \quad (11.3)$$

Dans (11.2) intégrons à gauche par parties et utilisons

$$\frac{dQ_{(j)}}{ds} + \mu_j^2 b W_{(j)} = 0 \quad (11.4)$$

$$T_m(Q_{(j)}) = \mu_j^2 S_m W_{(j)m} \quad (11.5)$$

il vient

$$\mu_j^2 (W_{(i)}, W_{(j)}) = \oint Q_{(i)} Q_{(j)} \frac{ds}{a}. \quad (11.6)$$

Un calcul similaire avec échange des indices  $i$  et  $j$  fournit

$$\mu_i^2 (W_{(i)}, W_{(j)}) = \oint Q_{(i)} Q_{(j)} \frac{ds}{a}. \quad (11.7)$$

D'où, si  $\mu_i^2 \neq \mu_j^2$ , les relations d'orthogonalité

$$(W_{(i)}, W_{(j)}) = 0 \quad (11.8)$$

$$\oint Q_{(j)} dW_{(i)} = \oint Q_{(i)} dW_{(j)} = \oint Q_{(i)} Q_{(j)} \frac{ds}{a} = 0 \quad (11.9)$$

dont on reconnaît qu'elles sont formellement identiques à celles

des solutions propres de première espèce. Pour  $i = j$  nous obtenons de (11.6) les deux expressions de la norme carrée  $N_i^2$  :

$$\mu_i^2 N_i^2 = \mu_i^2 (W_{(i)}, W_{(i)}) = \oint Q_{(i)}^2 \frac{ds}{a}. \quad (11.10)$$

Elles établissent le caractère essentiellement positif des valeurs propres de seconde espèce.

## 12. Les gauchissements de seconde espèce et valeur propre nulle.

En cas de dégénérescence les solutions propres de même valeur propre peuvent être rendues orthogonales par combinaisons linéaires appropriées. Les équations (11.8) et (11.9) restent donc valables entre toute paire de solutions distinctes.

Contrairement au cas de la base de première espèce, la valeur propre zéro est multiple dans la base de seconde espèce. En effet, faisant  $\mu^2 = 0$  dans (11.10) nous trouvons que les solutions propres correspondant à cette valeur doivent avoir la propriété

$$\oint Q^2 \frac{ds}{a} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad Q \equiv 0.$$

Substituant ce résultat dans la première des équations (6.16) (les deux autres et les conditions (10.4) sont évidemment vérifiées) on trouve que les gauchissements sont les solutions de l'équation

$$\frac{dW}{ds} = -U \frac{dx}{ds} - V \frac{dy}{ds} - \Theta r_c$$

où les paramètres  $(U, V, \Theta)$  sont *arbitraires*. Une première solution est évidemment le mode de translation, gauchissement libre commun à la base de première espèce

$$\varphi_{(0)} = 1. \quad (12.1)$$

Deux autres solutions fondamentales sont les modes de flexion

$$- \varphi_u(s; 0) = x - x_g \quad \text{vecteur déplacement } (1, 0, 0) \quad (12.2)$$

$$- \varphi_v(s; 0) = y - y_g \quad \text{vecteur déplacement } (0, 1, 0) \quad (12.3)$$

Le choix fait pour le centroïde  $(x_g, y_g)$  nous assure suivant les équations (9.10) et (9.11) que ces modes sont orthogonaux au mode de translation. Il nous est encore loisible de rendre les modes de flexion orthogonaux entre eux en tournant les axes de telle façon que le produit d'inertie  $I_{xy}$  soit nul. Comme ceci complique inutilement les calculs pratiques ; nous préférons conserver le choix initial des axes et établir les formules plus générales qui en découlent.

Une dernière solution indépendante serait celle associée à un vecteur déplacement  $(0, 0, 1)$ . Mais l'équation résultante

$$\frac{dW}{ds} = -r_c$$

ne possède une solution continue que pour les sections ouvertes. C'est la fonction définie par (9.25), que nous rendons déjà orthogonale au mode de translation en fixant la constante  $\alpha_\theta$  par la condition (9.29). Par combinaison linéaire avec les modes de flexion nous allons encore la rendre orthogonale à ces derniers. La combinaison linéaire

$$W_{(0)}(s) = (y_c - y_k)(x - x_g) - (x_c - x_k)(y - y_g) + \varphi_\theta(s; 0) \quad (12.4)$$

vérifie les relations d'orthogonalité

$$(W_{(0)}, x - x_g) = 0 \quad (W_{(0)}, y - y_g) = 0 \quad (12.5)$$

pourvu que (cfr. les définitions (9.14), (9.15) et (9.16))

$$\left. \begin{aligned} (y_c - y_k)I_{xx} - (x_c - x_k)I_{xy} &= -(\varphi_\theta(s; 0), x - x_g) \\ (y_c - y_k)I_{xy} - (x_c - x_k)I_{yy} &= -(\varphi_\theta(s; 0), y - y_g) \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Cette paire d'équations définit les coordonnées  $(x_k, y_k)$  d'un centre K pour les coques ouvertes. Il résulte de (9.22) et (5.13) que l'on peut écrire

$$\frac{dW_{(0)}}{ds} = -r_k + \frac{1}{a}\psi_\theta(s; 0). \quad (12.7)$$

Puisque pour les sections ouvertes  $\psi_\theta(s; 0) \equiv 0$ , une autre forme de la solution  $W_{(0)}$  est donc

$$W_{(0)} = \alpha_0 - \int_D r_k ds \quad (12.8)$$

où  $\alpha_0$  est à déterminer par la condition

$$(W_{(0)}, 1) = 0. \quad (12.9)$$

Au lieu de calculer les coordonnées du centre K suivant les équations (12.6) nous pouvons en substituant dans (12.8) l'expression

$$r_k = r - x_k \frac{dy}{ds} + y_k \frac{dx}{ds} \quad (12.10)$$

obtenir des conditions (12.5), (9.10) et (9.11) les équations

$$\left. \begin{aligned} -y_k I_{xx} + x_k I_{xy} &= \left( \int_D r ds, x - x_g \right) \\ -y_k I_{xy} + x_k I_{yy} &= \left( \int_D r ds, y - y_g \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

qui les déterminent directement sans passer par le centre de Bernoulli des efforts tranchants.

Pour nous résumer et rendre nos notations explicites nous distinguons entre les gauchissements propres de seconde espèce

$$1 \quad (x - x_g) \quad (y - y_g)$$

ou modes de translation et de flexion, qui appartiennent pour la valeur propre nulle à tous les types de section ; le gauchissement propre de seconde espèce

$$W_{(0)}$$

de valeur propre nulle mais qui n'existe que pour les sections ouvertes et enfin les gauchissements propres de seconde espèce

$$W_{(i)} \quad (i = 1, 2, 3 \dots)$$

de valeur propre non nulle. Ces derniers jouissent toujours des propriétés

$$(W_{(i)}, 1) = 0 \quad (W_{(i)}, x - x_g) = 0 \quad (W_{(i)}, y - y_g) = 0 \quad (12.12)$$

établissant que les distributions de tensions axiales qui leur correspondent par les équations (6.3) et (6.4) sont statiquement équivalentes à zéro.

13. *Gauchissement et centre de torsion de de Saint-Venant pour les sections fermées.*

La fonction définie par les équations (12.4) et (12.6) avec les propriétés (12.9), (12.5) et (12.7) existe également pour les sections fermées. La seule différence est que dans (12.7) la fonction  $\psi_\theta(s; 0)$  n'est plus identiquement nulle mais est constituée, comme nous l'avons déjà signalé, par des flux de fermeture. Si cette fonction n'est pas un gauchissement propre, elle est cependant orthogonale par construction aux modes de translation et de flexion. Nous serons amenés plus tard à construire son développement en série de gauchissements propres  $W_{(i)}$  (équation 21.10). Par sa définition on lui reconnaît le vecteur déplacement

$$(-y_c + y_k, x_c - x_k, 1)$$

et par les équations (9.26) et (9.28) le vecteur force

$$(0, 0, J).$$

Elle constitue avec les modes de translation et de flexion une quatrième solution fondamentale du système (6.16) pour la valeur nulle de la constante de séparation.

Il apparaîtra plus tard qu'elle représente le gauchissement de torsion de de Saint-Venant. Le centre  $K$ , qui peut encore être calculé pour les sections fermées à l'aide des équations (12.6), sera le centre de torsion pour les solutions selon de Saint-Venant.

Afin d'éviter toute confusion avec la solution  $W_{(0)}$  des sections ouvertes, cette fonction sera dorénavant notée  $W_{(c)}$ .

14. *Principes variationnels pour les gauchissements propres.*

Les gauchissements propres de seconde espèce sont gouvernés par le principe variationnel

$$\delta \left[ \mu^2(W, W) - \oint Q^2 \frac{ds}{a} \right] = 0 \quad (14.1)$$

où la fonction  $Q$  doit être définie comme en (6.6) c'est-à-dire

$$Q = a \left[ \frac{dW}{ds} + U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + \Theta r_c \right]. \quad (14.2)$$

La variation arbitraire  $\delta W$  le long d'un arc fournit (6.8) comme équation d'Euler ; la variation  $\delta W_m$  au droit d'un nœud donne (6.9) et les variations sur les composantes du vecteur déplacement les conditions de seconde espèce (10.1).

Ceci établit que les valeurs propres de seconde espèce sont les valeurs stationnaires du quotient de Rayleigh

$$\mu^2 = \frac{\oint a \left( \frac{dW}{ds} + U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + \Theta r_c \right)^2 ds}{(W, W)} \quad (14.3)$$

pour toutes les valeurs de  $(U, V, \Theta)$  et toutes les fonctions continues  $W$ .

Il est évident que lorsque les conditions de première espèce (7.1) sont introduites a priori, celles de seconde espèce disparaissent comme équations d'Euler du principe de variation. Par conséquent les valeurs propres de première espèce sont les valeurs stationnaires du quotient de Rayleigh

$$\lambda^2 = \frac{\oint a \left( \frac{dW}{ds} \right)^2 ds}{(W, W)} \quad (14.4)$$

pour toutes les fonctions continues  $W$ .

### 15. Les gauchissements propres généralisés.

Les conditions de première et seconde espèce (7.1) et (10.1) sont des cas particuliers pour  $\epsilon = 0$  et  $\epsilon = 1$  des conditions plus générales

$$\left. \begin{aligned} \epsilon X &= (\epsilon - 1)(U A_{xx} + V A_{xy}) \\ \epsilon Y &= (\epsilon - 1)(U A_{xy} + V A_{yy}) \\ \epsilon C &= (\epsilon - 1)\Theta I_c. \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Elles impliquent physiquement une liaison élastique entre les diaphragmes et une fondation rigide et peuvent avoir leur importance en génie civil pour l'étude des poutres caissons sur fondation élastique. Nous nous en servirons uniquement dans le but d'examiner la transition continue entre la base de première et celle de seconde espèce. Le signe a été choisi dans (15.1) de telle façon que l'énergie élastique de la liaison est positive dans l'intervalle  $0 < \epsilon < 1$ .

Considérons la forme quadratique définie positive dans les variables  $(U, V, \Theta)$

$$\begin{aligned} B(u, u) &= \oint a \left( U \frac{dx}{ds} + V \frac{dy}{ds} + \Theta r_c \right)^2 ds \\ &= U^2 A_{xx} + 2UV A_{xy} + V^2 A_{yy} + \Theta^2 I_c \end{aligned} \quad (15.2)$$

Multiplions la première des équations (15.1) par  $U$ , la seconde par  $V$ , la troisième par  $\Theta$  et additionnons

$$\epsilon(UX + VY + \Theta C) = (\epsilon - 1)B(u, u). \quad (15.3)$$

Les caractéristiques d'un gauchissement propre seront des fonctions continues du paramètre  $\epsilon$ . Nous noterons par  $(U', V', \Theta')$ ,  $(X', Y', C')$ ,  $W'$  et  $Q'$  les dérivées prises par rapport à  $\epsilon$ .

Alors, divisant (15.3) par  $\epsilon$ , dérivant par rapport à ce paramètre et remultipliant par  $\epsilon^2$ , il vient

$$\begin{aligned} \epsilon^2(U'X + V'Y + \Theta'C) + \epsilon^2(UX' + VY' + \Theta C') - B(u, u) \\ = \epsilon(\epsilon - 1)B'(u, u). \end{aligned} \quad (15.4)$$

Reprenant les équations (15.1), multipliées cette fois par  $U'$ ,  $V'$  et  $\Theta'$  avant d'être additionnées, il vient

$$\epsilon(U'X + V'Y + \Theta'C) = (\epsilon - 1) \frac{1}{2} B'(u, u)$$

ce qui permet d'éliminer  $B'(u, u)$  avec (15.4) et livre

$$\begin{aligned} \epsilon^2(UX' + VY' + \Theta C') \\ - \epsilon^2(U'X + V'Y + \Theta' C) = B(u, u). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Dérivons maintenant le système fondamental (6.16) par rapport au paramètre :

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q'}{a} &= \frac{dW'}{ds} + U' \frac{dx}{ds} + V' \frac{dy}{ds} + \Theta' r_c \\ \frac{dQ'}{ds} + \mu^2 b W' + \frac{d\mu^2}{d\epsilon} b W &= 0 \\ T_m(Q') &= \mu^2 S_m W'_m + \frac{d\mu^2}{d\epsilon} S_m W_m \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

De (6.16) et (15.6) nous obtenons soit par substitution des différentielles  $dW$  et  $dW'$  ou à l'aide d'intégrations par parties

$$\begin{aligned} \oint Q' dW &= \oint Q Q' \frac{ds}{a} - (UX' + VY' + \Theta C') \\ &= \mu^2(W, W') + \frac{d\mu^2}{d\epsilon}(W, W) \end{aligned}$$

$$\oint Q dW' = \oint Q Q' \frac{ds}{a} - (U'X + V'Y + \Theta' C) = \mu^2(W, W').$$

La différence entre les deux derniers résultats fournit une relation :

$$(UX' + VY' + \Theta C') - (U'X + V'Y + \Theta' C) = - \frac{d\mu^2}{d\epsilon}(W, W)$$

qui, substituée dans (15.5) nous donne finalement

$$\frac{d\epsilon}{d\mu^2} = - \frac{B(u, u)}{\epsilon^2(W, W)}. \quad (15.7)$$

Avant de passer à la discussion de ce résultat occupons nous de la forme limite qu'il prend quand le paramètre tend vers zéro. Considérons les limites

$$U'_r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U}{\epsilon} \quad V'_r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V}{\epsilon} \quad \Theta'_r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\epsilon}. \quad (15.8)$$

On les calcule directement en prenant la limite des équations (5.1) divisées au préalable par  $\epsilon$  :

$$\left. \begin{aligned} X_r &= - U'_r A_{xx} - V'_r A_{xy} \\ Y_r &= - U'_r A_{xy} - V'_r A_{yy} \\ C_r &= - \Theta'_r I_c. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

Ces limites correspondent à la forme limite  $\varphi_{(r)}$  que prend  $W$



et qui est un gauchissement propre de première espèce. Il résulte alors de (15.8) que la limite prise par (15.7) est

$$\lim_{\epsilon=0} \frac{d\mu^2}{d\epsilon} = -\frac{B(u'_r, u'_r)}{(\varphi_{(r)}, \varphi_{(r)})} = -\frac{B(u'_r, u'_r)}{n_r^2} \quad (15.10)$$

où  $B(u'_r, u'_r)$  est la forme quadratique (15.2) construite avec les valeurs  $(U'_r, V'_r, \Theta'_r)$  obtenues par les équations (15.9).

Les conclusions que l'on peut tirer de (15.1) (15.7) et (15.10) sont les suivantes.

1) Les gauchissements libres, pour lesquels on sait que le vecteur déplacement et le vecteur force sont nuls, vérifient les conditions généralisées (15.1) pour toute valeur du paramètre. Ce sont des invariants et comme pour eux  $B(u, u) = 0$  et  $B(u'_r, u'_r) = 0$ , le résultat  $d\mu^2/d\epsilon = 0$  confirme simplement que leur valeur propre est aussi invariante.

2) Pour un gauchissement propre du type lié, le résultat (15.7) et sa forme limite (15.10) établissent que la valeur propre, fonction continue du paramètre, décroît de façon monotone pour les  $\epsilon$  croissants.

3) En passant de façon continue de  $\epsilon = 0$  à  $\epsilon = 1$ , deux gauchissements propres de première espèce doivent évoluer vers les modes de flexion, leur valeur propre décroissant graduellement jusqu'à zéro.

4) Dans le cas des sections ouvertes, un troisième gauchissement propre de première espèce doit évoluer graduellement vers la solution  $W_{(0)}$ , sa valeur propre devenant aussi nulle à la limite  $\epsilon = 1$ .

Ces conclusions sont bien illustrées sur l'exemple du tube circulaire, d'épaisseurs  $a$  et  $b$  constantes, fendu le long de la génératrice  $\omega = \pm \pi$  pour former une section ouverte (fig. 4). Il existe ici une infinité de gauchissements libres  $W = R \cos n\omega$  de valeurs propres

$$\lambda^2 = \frac{bR^2}{a} \mu^2 = n^2$$

avec  $n = 0$  (mode de translation) et

$$n = 2, 3 \dots \infty.$$

Il existe un mode de flexion de forme invariante :

$$W = x = R \cos \omega$$

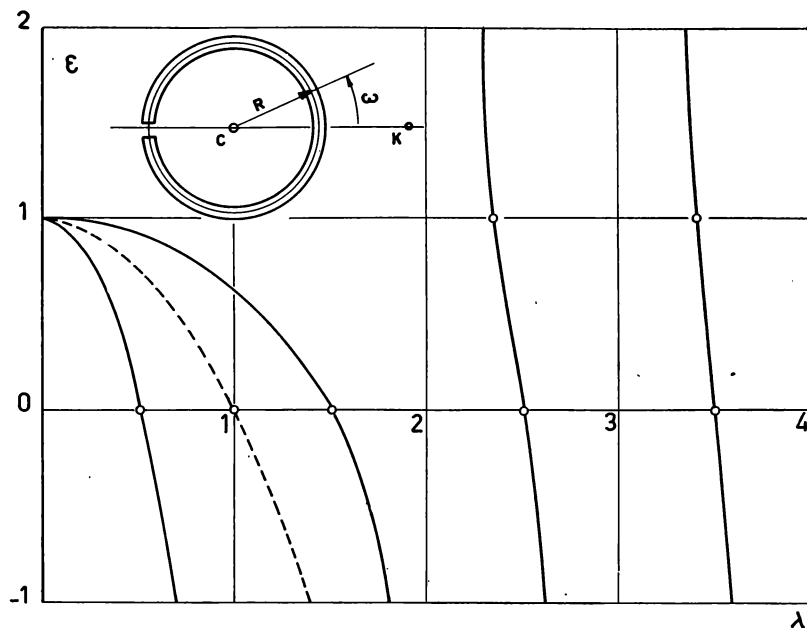


FIG. 4.

dont la valeur propre dépend du paramètre suivant la loi  $\lambda^2 = 1 - \epsilon$  et s'annule donc bien pour la seconde espèce. Enfin il existe une infinité de gauchissements liés, solutions du système homogène

$$U = 0$$

$$V \left( \frac{\pi \epsilon}{\lambda^2 - 1} + \pi - \frac{2\epsilon \lambda^3 \tan \pi \lambda}{(\lambda^2 - 1)^2} \right) + \Theta R \frac{2\epsilon \lambda \tan \pi \lambda}{\lambda^2 - 1} = 0$$

$$V \frac{2\epsilon \lambda \tan \pi \lambda}{\lambda^2 - 1} + \Theta R \left( 2\pi - \frac{2\epsilon \tan \pi \lambda}{\lambda} \right) = 0.$$

L'annulation du déterminant de ce système fournit une équation du second degré en  $\epsilon$  qui a permis de tracer les quelques branches de courbe de la fig. 4. La branche en traits interrompus appartient au mode de flexion  $W = x$ . Deux autres branches appartenant au système homogène précédent passent par zéro pour  $\epsilon = 1$ . L'une correspond à un gauchissement qui tend vers le mode  $W = y$ , l'autre à un gauchissement qui tend vers la valeur  $W = R (2 \sin \omega - \omega)$ . Les coordonnées du centre K sont ici  $(2R, 0)$ .

16. La théorie algébrique des valeurs propres dans le cas  $b \equiv 0$ .

Les équations transcendantales en  $\mu^2$  qu'il faut résoudre pour trouver les valeurs propres de première ou de seconde espèce deviennent extrêmement compliquées pour les coques qui n'ont pas une géométrie élémentaire. Une simplification classique du problème consiste alors à supposer que les parois ne transmettent que des flux de cisaillement. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par  $b \equiv 0$ . Elle constitue une approximation acceptable si la capacité des parois pour la transmission des efforts axiaux est reportée sur des lisses adjacentes ; soit en majorant la section des lisses réelles, soit en introduisant des lisses fictives ou « lisses de substitution ».

Le problème de la recherche des valeurs propres devient alors un problème algébrique de degré égal au nombre de lisses utilisées dans le modèle représentatif de la section.

Le long de chaque arc joignant un nœud  $i$  à un nœud  $j$ , il résulte de l'équation (6.8) avec  $b \equiv 0$ , que le flux de cisaillement est une constante  $Q_{ij}$ . Une intégration de l'équation (6.6) le long de cet arc fournit alors la relation

$$Q_{ij} \int_i^j \frac{ds}{a} = W_j - W_i + U(x_j - x_i) + V(y_j - y_i) + \Theta \int_i^j r_c ds. \quad (16.1)$$

Après avoir rangé les différents arcs dans un ordre de succession convenable, on construit des matrices colonnes des grandeurs  $Q_{ij}$ ,  $(W_j - W_i)$ ,  $(x_j - x_i)$ ,  $(y_j - y_i)$  et  $\int_i^j r_c ds$  que l'on dénote par les symboles respectifs  $(Q)$ ,  $(\Delta W)$ ,  $(\Delta x)$ ,  $(\Delta y)$  et  $(\Delta c)$ .

L'ensemble des équations (16.1) est alors représenté par l'unique relation matricielle

$$(Q) = \mathcal{D}[(\Delta W) + U(\Delta x) + V(\Delta y) + \Theta(\Delta c)] \quad (16.2)$$

où  $\mathcal{D}$  dénote la matrice diagonale des grandeurs  $\left(\int_i^j \frac{ds}{a}\right)^{-1}$ . Nous allons rechercher une forme matricielle correspondante pour

l'ensemble des équations (6.9). A cet effet nous introduisons la « matrice de connection »  $K$  définie par

$$(\Delta W) = K(W). \quad (16.3)$$

Dans cette équation les déplacements axiaux au droit des lisses ont été rangés suivant l'ordre choisi pour les nœuds dans la matrice colonne  $(W)$ . La matrice rectangulaire  $K$  apparaît ici comme un opérateur aux différences, dont le nombre de lignes correspond au nombre d'arcs, tandis que son nombre de colonnes est égal au nombre de nœuds. Chaque ligne possède un élément de valeur  $+1$  et un autre de valeur  $-1$ ; les autres étant constitués de zéros. La position des éléments  $+1$  et  $-1$  est immédiatement assignée d'après la différence  $(W_j - W_i)$  à reproduire. La forme matricielle de l'opérateur nodal  $T_m$  s'obtient en revenant à l'interprétation qu'il a dans les équations d'équilibre (2.2) des lisses. Considérons un déplacement virtuel  $w_m$  d'un élément de lisse de longueur  $dz$ . L'accroissement de charge axiale  $dN_m$  fournit un travail virtuel  $w_m dN_m$ . Additionnant les contributions de toutes les lisses, nous avons pour le travail virtuel de l'ensemble

$$\sum_m w_m dN_m = (w)'(dN)$$

où  $(w)'$  est la matrice ligne, transposée de la matrice colonne des  $w_m$ .

Sur chaque élément de lisse agissent aussi les flux de cisaillement transportés par les arcs. Chacun de ces flux agit sur deux lisses adjacentes et produit un travail virtuel

$$-(w_j - w_i)q_{ij}dz.$$

Additionnant les contributions de tous les arcs

$$-\sum (w_j - w_i)q_{ij}dz = -(\Delta w)'(q)dz.$$

Mais  $(\Delta w) = K(w)$  et, appliquant la règle de transposition d'un produit de matrices

$$(\Delta w)' = (w)'K'$$

si bien que le travail virtuel total résultant d'un déplacement de chaque élément de lisse se laisse mettre sous la forme

$$(w)'[(dN) - K'(q)dz].$$

Chaque élément de lisse étant en équilibre, ce travail virtuel total est nul, quelle que soit la matrice ( $w$ ) des déplacements virtuels. Il en découle la forme matricielle des équations d'équilibre (2.2)

$$\left(\frac{dN}{dz}\right) = K'(q). \quad (16.4)$$

Ceci permet immédiatement de déduire la forme équivalente pour l'ensemble des équations (6.9)

$$K'(Q) = \mu^2 \mathcal{S}(W). \quad (16.5)$$

où  $\mathcal{S}$  dénote la matrice diagonale des grandeurs  $S_m$ .

Les composantes du vecteur déplacement se laissent calculer comme suit

$$X = \oint Q dx = \Sigma Q_{i,j} (x_j - x_i) = (\Delta x)'(Q)$$

$$Y = \oint Q dy = \Sigma Q_{i,j} (y_j - y_i) = (\Delta y)'(Q)$$

$$C = \oint Q r_c ds = \Sigma Q_{i,j} \int_i^j r_c ds = (\Delta c)'(Q).$$

Ou encore, après substitution de (16.2) et (16.3)

$$\left. \begin{aligned} X &= (\xi)'(W) + UA_{xx} + VA_{xy} \\ Y &= (\eta)'(W) + UA_{xy} + VA_{yy} \\ C &= (\zeta)'(W) + \Theta I_c \end{aligned} \right\} \quad (16.6)$$

où nous avons introduit les nouvelles notations

$$(\xi) = K' \mathcal{D}(\Delta x) \quad (\eta) = K' \mathcal{D}(\Delta y) \quad (\zeta) = K' \mathcal{D}(\Delta c) \quad (16.7)$$

et les aires réduites sous la forme

$$\left. \begin{aligned} A_{xx} &= (\Delta x)' \mathcal{D}(\Delta x) = (x)'(\xi) \\ A_{xy} &= (\Delta x)' \mathcal{D}(\Delta y) = (x)'(\eta) = (y)'(\xi) \\ A_{yy} &= (\Delta y)' \mathcal{D}(\Delta y) = (y)'(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

et la raideur de torsion

$$I_c = (\Delta c)' \mathcal{D}(\Delta c). \quad (16.9)$$

Ces résultats font usage des conditions

$$(\Delta x)' \mathcal{D}(\Delta c) = 0 \quad (\Delta y)' \mathcal{D}(\Delta c) = 0 \quad (16.10)$$

qui définissent le centre de réduction de Bernoulli. Afin d'obtenir directement les coordonnées de ce centre, remplaçons  $r_c$  par son expression (5.4) et notons par  $(\Delta \omega)$  la matrice colonne des grandeurs  $\int_i^j ds$ . Alors à partir de

$$\int_i^j r_c ds = \int_i^j r ds - x_c(y_j - y_i) + y_c(x_j - x_i)$$

nous pouvons écrire

$$(\Delta c) = (\Delta \omega) - x_c(\Delta y) + y_c(\Delta x)$$

et ceci substitué dans (16.10) fournit

$$\begin{aligned} (\Delta x)' \mathcal{D}(\Delta \omega) &= x_c A_{xy} - y_c A_{xx} \\ (\Delta y)' \mathcal{D}(\Delta \omega) &= x_c A_{yy} - y_c A_{xy} \end{aligned} \quad (16.11)$$

Faisant  $U = 0$ ,  $V = 0$  et  $\Theta = 0$  et éliminant  $(Q)$  entre les relations (16.2) et (16.5) nous obtenons la formulation matricielle suivante du problème aux valeurs propres et gauchissements propres de première espèce :

$$[K' \mathcal{D}K - \mu^2 \mathcal{S}](W) = 0. \quad (16.12)$$

Faisant au contraire  $X = 0$ ,  $Y = 0$  et  $C = 0$  dans les équations (16.6), les résolvant par rapport à  $(U, V, \Theta)$  et substituant le résultat dans (16.2) nous obtenons la formulation matricielle du problème correspondant de seconde espèce :

$$[\mathcal{A} - \mu^2 \mathcal{S}](W) = 0 \quad (16.13)$$

avec la matrice

$$\mathcal{A} = K' \mathcal{D}K - \frac{(\xi)(\xi)'}{I_c} - \frac{A_{yy}(\xi)(\xi)' + A_{xx}(\eta)(\eta)' - A_{xy}(\xi)(\eta)' - A_{xy}(\eta)(\xi)'}{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}. \quad (16.14)$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique par rapport à une autre matrice symétrique, ici simplement diagonale, est un problème type bien étudié. Toutes les techniques de calcul numériques développées pour le résoudre sont donc applicables aux formulations (16.12) et (16.13).

17. *Formulation du problème non-homogène  
par un principe variationnel.*

Après séparation des variables le problème général posé par la solution des équations d'équilibre (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) et (2.6) et des équations de déformation (4.4), (4.5) et (4.6) a été rendu homogène par l'une ou l'autre des conditions (7.1) ou (10.1) ou encore plus généralement (15.1) dans le but d'obtenir un système de valeurs propres et une base orthogonale dans l'espace des fonctions continues W.

Il s'agit maintenant de mettre l'existence de ces bases orthogonales à profit dans la solution du problème général. Ceci peut être fait de plusieurs manières différentes, où intervient une nouvelle fois la dualité entre tensions et déplacements. Cette dernière est peut être mieux soulignée dans les applications quand on fait appel à un principe unique dont découlent toutes les équations du problème.

Ce principe est fort général dans ce sens qu'il contient à titre de cas particuliers les principes du minimum de l'énergie totale et du minimum de l'énergie complémentaire [26, 27]. Il prend ici la forme spécifique

$$\delta \int_0^L D dz - \delta \int_0^L S_x du_c + S_y dv_c + M_c d\theta - \delta \oint \bar{n} w(s, L) ds - \delta \sum_m \bar{N}_m w_m(L) = 0 \quad (17.1)$$

où

$$D = \oint \left[ n \frac{\partial w}{\partial z} + q \left( \frac{\partial w}{\partial s} + u'_c \frac{dx}{ds} + v'_c \frac{dy}{ds} + \theta' r_c \right) - \frac{n^2}{2Egb} - \frac{q^2}{2Gha} \right] ds + \sum_m \left( N_m \frac{dw_m}{dz} - \frac{N_m^2}{2EgS_m} \right). \quad (17.2)$$

Comme conditions aux limites représentatives du cas de la coque cantilever nous avons choisi d'imposer

$$w(s, 0) = \bar{w}(s) \quad \text{en} \quad z = 0 \quad (17.3)$$

$$n(s, L) = \bar{n}(s) \quad \text{et} \quad N_m(L) = \bar{N}_m \quad \text{en} \quad z = L. \quad (17.4)$$

Suivant les cas nous verrons qu'il sera plus intéressant de supposer que les efforts tranchants et le moment de torsion soient des grandeurs imposées le long de l'envergure ou les déformations  $u'_c(z)$ ,  $v'_c(z)$  et  $\theta'(z)$  qui leur sont associées. Au moyen de la formule d'intégration par parties

$$\oint q \delta \frac{\partial w}{\partial s} ds = \sum_m \delta w_m T_m(q) - \oint \frac{\partial q}{\partial s} \delta w ds$$

on vérifie directement la correspondance suivante entre les équations d'Euler du principe (17.1) et les variations indépendantes :

$$(2.1) \quad \text{par } \delta w(s, z) \quad \text{et} \quad (2.2) \quad \text{par } \delta w_m(z)$$

$$(2.4) \quad \text{par } \delta u'_c(z), \quad (2.5) \quad \text{par } \delta v'_c(z) \quad \text{et} \quad (2.6) \quad \text{par } \delta \theta'(z)$$

$$(4.4) \quad \text{par } \delta q(s, z), \quad (4.5) \quad \text{par } \delta n(s, z) \quad \text{et} \quad (4.6) \quad \text{par } \delta N_m(z).$$

Enfin, si les variations aux limites  $\delta w(s, 0)$  sont nulles a priori en vertu de (17.3), celles  $\delta w(s, L)$  fournissent les conditions naturelles (17.4).

### 18. Les équations normales du type déplacement dans la base de première espèce.

Nous développons le déplacement axial en série de gauchissements de première espèce

$$w = \sum_0^{\infty} F_r(z) \varphi_{(r)}(s). \quad (18.1)$$

Les fonctions inconnues  $F_r(z)$  peuvent être considérées comme des coordonnées généralisées à déterminer par le principe variationnel. A l'aide de toutes les équations d'Euler qui ne dépendent



pas des variations sur le déplacement axial nous obtenons, eu égard à (7.2) et (7.10)

$$n = Egb \sum_0^{\infty} \frac{dF_r}{dz} \varphi_{(r)}(s) \quad (18.2)$$

$$N_m = EgS_m \sum_0^{\infty} \frac{dF_r}{dz} \varphi_{(r)m} \quad (18.3)$$

$$\frac{q}{Gh} = \sum_1^{\infty} F_r \psi_{(r)} + u'_c \frac{dx}{ds} + v'_c \frac{dy}{ds} + \theta' r_c \quad (18.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_x}{Gh} &= \sum_1^{\infty} X_r F_r + A_{xx} u'_c + A_{xy} v'_c \\ \frac{S_y}{Gh} &= \sum_1^{\infty} Y_r F_r + A_{xy} u'_c + A_{yy} v'_c \end{aligned} \right\} \quad (18.5)$$

$$\frac{M_c}{Gh} = \sum_1^{\infty} C_r F_r + I_c \theta'. \quad (18.6)$$

Ces résultats sont alors substitués dans le principe et on peut y faire usage des relations d'orthogonalité (7.6) et (7.7) Les variations  $\delta F_r(z)$  fournissent alors comme « équations normales »

$$\frac{E}{Gh} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dF_r}{dz} \right) - \lambda_r^2 F_r = \frac{1}{n_r^2} (X_r u'_c + Y_r v'_c + C_r \theta'). \quad (18.7)$$

Ce sont des équations différentielles ordinaires du second ordre et du type de Sturm-Liouville. Elles ont pour conditions aux limites d'une part celles naturelles obtenues par la considération des variations aux limites  $\delta F_r(L)$  :

$$Egn_r^2 \frac{dF_r}{dz} = \oint \bar{n} \varphi_{(r)} ds + \sum_m \bar{N}_m \varphi_{(r)m} \quad \text{en } z = L \quad (18.8)$$

d'autre part les conditions a priori

$$F_r(0) = \frac{1}{n_r^2} (\bar{w}(s), \varphi_{(r)}). \quad (18.9)$$

En effet il découle de (17.3) et (18.1) qu'il faut

$$\sum_0^{\infty} F_r(0) \varphi_{(r)}(s) = \bar{w}(s)$$

et les conditions (18.9) s'en déduisent par les propriétés d'orthogonalité (7.6).

L'équation normale correspondant à  $r = 0$  peut être intégrée une fois du fait que pour le mode de translation  $\varphi_{(0)} = 1$  on a  $\lambda_0^2 = 0$ ,  $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$  et  $C_0 = 0$ . L'intégrale première est

$$\text{EgS } dF_0/dz = \text{constante} = N$$

en vertu de la condition aux limites (18.9) correspondante et de (2.10).

Comme l'utilisation de la base orthogonale de première espèce pouvait le laisser prévoir, les équations normales peuvent être intégrées indépendamment du moment que les déformations  $w'_\alpha(z)$ ,  $v'_\alpha(z)$  et  $\theta'(z)$ , qui figurent au second membre, sont connues a priori. Ce découplage du problème est la caractéristique intéressante de la solution par fonctions propres.

On observera que le couplage est réintroduit dans les seconds membres si l'on se proposait d'éliminer les déformations au profit des efforts tranchants et du moment de torsion à l'aide des équations (18.5) et (18.6). Dans le problème usuel où les efforts tranchants et le moment de torsion sont les grandeurs connues a priori, ce sont les équations normales construites à l'aide de la base de seconde espèce qui présentent le caractère découplé souhaitable.

### 19. Les équations normales

*du type déplacement dans la base de seconde espèce.*

Nous procédons exactement comme dans la section précédente en remplaçant le développement (18.1) par le suivant

$$w = Z_0(z) + X_0(z)(x - x_g) + Y_0(z)(y - y_g) + F_0(z)W_{(0)}(s) + \sum_1^{\infty} F_i(z)W_{(i)}(s). \quad (19.1)$$

Rappelons que le quatrième terme n'existe que dans le cas des sections ouvertes. Nous obtenons les résultats suivants

$$\frac{n}{\text{Eg}b} = \frac{dZ_0}{dz} + \frac{dX_0}{dz} (x - x_g) + \frac{dY_0}{dz} (y - y_g) + \frac{dF_0}{dz} W_{(0)} + \sum_1^{\infty} \frac{dF_i}{dz} W_{(i)} \quad (19.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_m}{EgS_m} &= \frac{dZ_0}{dz} + \frac{dX_0}{dz}(x_m - x_g) + \frac{dY_0}{dz}(y_m - y_g) \\ &+ \frac{dF_0}{dz} W_{(0)m} + \sum_1^{\infty} \frac{dF_i}{dz} W_{(i)m} \end{aligned} \quad (19.3)$$

et, eu égard à (11.1) et (12.7)

$$\frac{q}{Gh} = \bar{u}a \frac{dx}{ds} + \bar{v}a \frac{dy}{ds} + \bar{\theta}ar_c + F_0\psi_{\theta}(s; 0) + \Sigma F_i Q_{(i)} \quad (19.4)$$

où nous avons défini

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u'_c + X_0 - F_0(y_c - y_k) - \sum_1^{\infty} U_i F_i \\ \bar{v} &= v'_c + Y_0 + F_0(x_c - x_k) - \sum_1^{\infty} V_i F_i \end{aligned} \right\} \quad (19.5)$$

$$\bar{\theta} = \theta' - F_0 - \sum_1^{\infty} \Theta_i F_i. \quad (19.6)$$

Alors, des équations (11.3), (9.26) et (9.28)

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_x}{Gh} &= \bar{u}A_{xx} + \bar{v}A_{xy} \\ \frac{S_y}{Gh} &= \bar{u}A_{xy} + \bar{v}A_{yy} \end{aligned} \right\} \quad (19.7)$$

$$\frac{M_c}{Gh} = \bar{\theta}I_c + F_0J. \quad (19.8)$$

En fait nous pourrions écrire  $\psi_{\theta}(s; 0) \equiv 0$  dans (19.4) et  $J = 0$  dans (19.8) puisque nous avons vu que telle était la situation pour les coques ouvertes. La raison pour laquelle nous avons voulu garder à ces formules un caractère plus général est l'usage que nous en ferons à la section 20, où  $W_{(0)}$  sera remplacé par la fonction  $W_{(c)}$  définie à la section 13.

Après substitution de ces résultats dans le principe variationnel, utilisation des propriétés (11.8) et (11.9), les variations sur les coordonnées généralisées conduisent aux équations normales suivantes :

$$1) \quad \frac{d}{dz} \left( g \frac{dZ_0}{dz} \right) = 0$$

qui s'intègre pour donner

$$ESg \frac{dZ_0}{dz} = \oint \bar{n} ds + \sum_m \bar{N}_m = N \quad (19.9)$$

la constante du second membre résultant de nouveau de la condition aux limites naturelle provenant de  $\delta Z_0(L)$ . La condition aux limites a priori est

$$SZ_0(0) = (\bar{w}, 1) \quad (19.10)$$

2)

$$\begin{aligned} EI_{xx} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dX_0}{dz} \right) + EI_{xy} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dY_0}{dz} \right) &= S_x \\ EI_{xy} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dX_0}{dz} \right) + I_{yy} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dY_0}{dz} \right) &= S_y \end{aligned}$$

qui se laissent aussi intégrer pour donner

$$\left. \begin{aligned} EI_{xx}g \frac{dX_0}{dz} + EI_{xy}g \frac{dY_0}{dz} &= M_x \\ EI_{xy}g \frac{dX_0}{dz} + EI_{yy}g \frac{dY_0}{dz} &= M_y \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$

Pour  $z = L$  ces intégrales sont les conditions aux limites naturelles que l'on trouve par  $\delta X_0(L)$  et  $\delta Y_0(L)$  avec

$$\left. \begin{aligned} M_x(L) &= \oint \bar{n}(x - x_g) ds + \sum_m \bar{N}_m(x_m - x_g) \\ M_y(L) &= \oint \bar{n}(y - y_g) ds + \sum_m \bar{N}_m(y_m - y_g) \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

Leurs conditions aux limites a priori sont

$$\left. \begin{aligned} I_{xx}X_0(0) + I_{xy}Y_0(0) &= (\bar{w}, x - x_g) \\ I_{xy}X_0(0) + I_{yy}Y_0(0) &= (\bar{w}, y - y_g). \end{aligned} \right\} \quad (19.13)$$

3) L'équation spéciale qui gouverne l'amplitude du mode  $W_{(0)}$  des coques ouvertes (avec  $J = 0$ )

$$\begin{aligned} EN_0^2 \frac{d}{dz} \left( g \frac{dF_0}{dz} \right) &= \\ -M_c - (x_c - x_k)S_y + (y_c - y_x)S_x &= -M_k \end{aligned} \quad (19.14)$$

et ses conditions aux limites

$$EN_0^2 g \frac{dF_0}{dz} = \oint \bar{n} W_{(0)} ds + \sum_m \bar{N}_m W_{(0)m} \quad \text{pour } z = L \quad (19.15)$$

$$N_0^2 F_0(0) = (\bar{w}, W_{(0)}). \quad (19.16)$$

4) Les équations normales gouvernant les amplitudes des gauchissements propres de valeur propre non nulle

$$EN_i^2 \frac{d}{dz} \left( g \frac{dF_i}{dz} \right) - G\mu_i^2 N_i^2 h F_i = - (U_i S_x + V_i S_y + \Theta_i M_c) \quad (19.17)$$

avec leurs conditions aux limites

$$EN_i^2 g \frac{dF_i}{dz} = \oint \bar{n} W_{(i)} ds + \sum_m \bar{N}_m W_{(i)m} \quad z = L \quad (19.18)$$

$$N_i^2 F_i(0) = (\bar{w}, W_{(i)}). \quad (19.19)$$

Ces équations sont clairement découplées quand les efforts tranchants et le moment de torsion sont connus. Celles reprises sous 2) et 4) correspondent aux équations obtenues par BENS-COTER [25] comme généralisant le cas de torsion pure résolu d'une façon analogue par VON KARMAN et CHIEN [22]. Un de leurs désavantages est la convergence relativement faible des séries.

A cet égard les équations normales du type tension que nous développerons à la section 27 fourniront des séries à convergence nettement améliorée.

### *20. La solution de Bernoulli et son amélioration pour la torsion.*

Dans les sections fermées, les termes d'ordre zéro du développement (19.1), c'est-à-dire ceux rattachés aux gauchissements de valeur propre nulle, expriment analytiquement l'hypothèse de Bernoulli, selon laquelle les sections droites restent planes. Si l'on ne retient que ces termes on est fondé à se référer à la solution correspondante comme la « solution de Bernoulli ». Pour la facilité de l'écriture nous introduirons les notations

$$\frac{a_{xx}}{A_{yy}} = \frac{-a_{xy}}{A_{xy}} = \frac{a_{yy}}{A_{xx}} = \frac{1}{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2} \quad (20.1)$$

$$\frac{i_{xx}}{I_{yy}} = \frac{-i_{xy}}{I_{xy}} = \frac{i_{yy}}{I_{xx}} = \frac{1}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}. \quad (20.2)$$

Par (19.9) et (19.11) nous pouvons mettre les répartitions de tensions axiales de la solution de Bernoulli sous la forme

$$\left(\frac{n}{b}\right)_B = \frac{N}{S} + (i_{xx}M_x + i_{xy}M_y)(x - x_g) + (i_{yy}M_y + i_{xy}M_x)(y - y_g) \quad (20.3)$$

$$\left(\frac{N_m}{S_m}\right)_B = \frac{N}{S} + (i_{xx}M_x + i_{xy}M_y)(x_m - x_g) + (i_{yy}M_y + i_{xy}M_x)(y_m - y_g)$$

où l'on reconnaît la loi d'équarissage, qui constitue l'approximation usuelle des ingénieurs. Pour la répartition des flux de cisaillement, les équations (19.4) à (19.8) permettent d'écrire

$$(q)_B = (a_{xx}S_x + a_{xy}S_y)a \frac{dx}{ds} + (a_{yy}S_y + a_{xy}S_x)a \frac{dy}{ds} + \frac{M_c}{I_c} ar_c \quad (20.4)$$

Enfin par différentiation des équations (19.7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2u_c}{dz^2} &= -\frac{i_{xx}M_x + i_{xy}M_y}{Eg} + \frac{a_{xx}}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{h}\right) + \frac{a_{xy}}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{h}\right) \\ \frac{d^2v_c}{dz^2} &= -\frac{i_{xy}M_x + i_{yy}M_y}{Eg} + \frac{a_{xy}}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{h}\right) + \frac{a_{yy}}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

tandis que par (19.8)

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{GhI_c}{M_c}. \quad (20.6)$$

Les courbures de l'axe des centres C suivent des lois analogues à celles de la fibre neutre dans la théorie usuelle de la flexion des pièces massives. Comme on l'a déjà fait observer antérieurement, la rigidité de torsion prend la valeur  $GhI_c$ . En général la loi simple (20.6) n'est qu'une approximation grossière au comportement de la coque en torsion.

En vue d'obtenir une meilleure approximation nous ajoutons aux termes d'ordre zéro du développement (19.1) un terme  $F_0(z)W_{(c)}(s)$  qui remplace le terme correspondant pour les sections ouvertes. Le mode de gauchissement ainsi introduit n'est pas un gauchissement propre. Cependant, comme on l'a fait remarquer à la section 13, il forme avec les termes de transla-

tion et de flexion une solution complète du système fondamental pour la valeur nulle de la constante de séparation. Ceci ne fournit qu'un argument esthétique pour justifier la valeur de la nouvelle approximation. Une justification plus sérieuse résultera de la vérification a posteriori que la solution ainsi obtenue est *exacte* pour toute une famille de répartitions du moment de torsion. Les résultats de la section 19 peuvent être conservés, moyennant le remplacement de  $W_{(0)}$  par  $W_{(c)}$ . Dans (19.4) le terme en  $\psi_{\theta}(s; 0)$  n'est plus nul, ni le terme en  $J$  dans (19.8). Seules se modifient les équations du groupe 3° qui deviennent

$$EN_0^2 \frac{d}{dz} \left( g \frac{dF_0}{dz} \right) - GhJ \left( 1 - \frac{J}{I_c} \right) F_0 = -M_k + \frac{J}{I_c} M_c \quad (20.7)$$

$$EN_0^2 g \frac{dF_0}{dz} = \oint \bar{n} W_{(c)} ds + \sum_m \bar{N}_m W_{(c)m} \quad \text{pour } z = L \quad (20.8)$$

$$N_0^2 F_0(0) = (\bar{w}, W_{(c)}). \quad (20.9)$$

Des tensions axiales et des flux de cisaillement viennent s'ajouter aux termes de Bernoulli (20.3) et (20.4)

$$\frac{n}{b} = \left( \frac{n}{b} \right)_B + Eg \frac{dF_0}{dz} W_{(c)} \quad (20.10)$$

$$\frac{N_m}{S_m} = \left( \frac{N_m}{S_m} \right)_B + Eg \frac{dF_0}{dz} W_{(c)m} \quad (20.11)$$

$$q = (q)_B + GhF_0 \left( \psi_{\theta}(s; 0) - \frac{J}{I_c} ar_c \right). \quad (20.12)$$

Dans chaque section ces tensions additionnelles forment un système statiquement équivalent à zéro. Ceci résulte directement des propriétés d'orthogonalité par construction

$$(W_{(c)}, 1) = 0 \quad (W_{(c)}, x - x_a) = 0 \quad (W_{(c)}, y - y_a) = 0 \quad (20.13)$$

ainsi que des équations (5.3), (5.11), (9.26) et (9.28). Éliminant  $\bar{\theta}$  entre (19.6) et (19.8) on trouve

$$\frac{M_c}{Gh} = I_c(\theta' - F_0) + JF_0. \quad (20.14)$$

Résolvant cette relation pour  $F_0$  et substituant dans (20.7) il

vient la relation entre torsion et moments de torsion qui généralise l'équation (20.6)

$$\begin{aligned} EN_0^2 \frac{d}{dz} \left( g \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) - GJ \left( 1 - \frac{J}{I_c} \right) h \frac{d\theta}{dz} = \\ \frac{EN_0^2}{GI_c} \frac{d}{dz} \left( g \frac{dM_c}{dz} \right) - \left( 1 - \frac{I_c}{J} \right) M_k. \end{aligned} \quad (20.15)$$

Quand la coque n'est sollicitée que par des couples de torsion on peut écrire

$$M_c = M_k = T$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{b} &= Eg \frac{dF_0}{dz} W_{(c)} & \frac{N_m}{S_m} &= Eg \frac{dF_0}{dz} W_{(c)m} \\ q &= \frac{T}{I_c} ar_c + GhF_0 \left( \psi_{\theta}(s; 0) - \frac{J}{I_c} ar_c \right). \end{aligned}$$

Pour vérifier si ces résultats peuvent constituer une solution exacte il suffit de contrôler les équations d'équilibre (2.1) et (2.2). En effet les hypothèses restrictives n'ont porté que sur le déplacement axial et seules ces équations d'équilibre dans le sens des génératrices en ont été affectées par l'utilisation du principe de variation. Nous référant aux équations (9.23) et (9.24) nous trouvons que ces équations sont exactement vérifiées à condition que

$$\frac{d}{dz} \left( g \frac{dF_0}{dz} \right) = 0 \quad \text{et} \quad T = GhJF_0 \quad (20.16)$$

Il en résulte alors que l'équation (20.7) est également satisfaite. Finalement, si nous éliminons  $F_0$  entre ces deux conditions, il apparaît que la solution trouvée est exacte si la distribution des couples de torsion obéit à la loi

$$g \frac{d}{dz} \left( \frac{T}{h} \right) = \text{constante}. \quad (20.17)$$

Bien entendu il faut également que les conditions aux limites portant sur les charges axiales ou sur les déplacements axiaux soient compatibles avec cette solution.

La solution exacte trouvée est une généralisation de la solution de de Saint-Venant pour la torsion. On observera que la loi (20.17) rend les tensions axiales induites constantes le long des



génératrices. Elles disparaissent entièrement dans le cas plus particulier où

$$dF_0/dz = 0 \text{ c'est-à-dire } T/h = \text{constante.}$$

Cette propriété correspond à une des hypothèses de la méthode semi-inverse utilisée par de Saint Venant ( $\sigma_z = 0$ ). Pour obtenir le cas précis investigué par de Saint Venant il faudrait encore considérer une coque de caractéristiques uniformes, c'est-à-dire faire  $h = 1$ . On retrouve alors pour que la solution soit exacte la condition bien connue que le couple de torsion appliqué soit constant.

Ces considérations nous permettent de qualifier la fonction  $W_{(c)}$  comme le gauchissement de torsion de de Saint Venant. Elle ne contient plus aucun arbitraire si nous lui appliquons les conditions (20.13).

21. *Flexion et torsion généralisées de de Saint Venant, déduites des équations normales du type déplacement dans la base de seconde espèce.*

Le résultat (20.17) suggère une investigation de solutions exactes basées sur les hypothèses a priori

$$g \frac{d}{dz} \left( \frac{S_x}{h} \right) = \text{cte} \quad g \frac{d}{dz} \left( \frac{S_y}{h} \right) = \text{cte} \quad g \frac{d}{dz} \left( \frac{M_c}{h} \right) = \text{cte.} \quad (21.1)$$

Dans ces conditions les équations normales (19.17) possèdent les intégrales particulières

$$\mu_i^2 N_i^2 F_i(z) = U_i \frac{S_x}{Gh} + V_i \frac{S_y}{Gh} + \Theta_i \frac{M_c}{Gh} \quad (i = 1, 2 \dots \infty) \quad (21.2)$$

Et, nous limitant au cas des coques fermées, la solution particulière suivante existe

$$[w]_{sv} = Z_0 + X_0(x - x_0) + Y_0(y - y_0) + \sum_1^8 \frac{W_{(i)}}{G\mu_i^2 N_i^2} \left( U_i \frac{S_x}{h} + V_i \frac{S_y}{h} + \Theta_i \frac{M_c}{Gh} \right) \quad (21.3)$$

$$\left[ \frac{n}{\bar{b}} \right]_{SV} = \left[ \frac{n}{\bar{b}} \right]_B + \sum_1^{\infty} \frac{gW_{(i)} d}{\mu_i^2 N_i^2 dz} \left( \frac{U_i S_x + V_i S_y + \Theta_i M_c}{h} \right) \quad (21.4)$$

$$\left[ \frac{N_m}{S_m} \right]_{SV} = \left[ \frac{N_m}{S_m} \right]_B + \sum_1^{\infty} \frac{gW_{(i)m} d}{\mu_i^2 N_i^2 dz} \left( \frac{U_i S_x + V_i S_y + \Theta_i M_c}{h} \right) \quad (21.5)$$

$$[q]_{SV} = [q]_B + \sum_1^{\infty} \frac{Q_{(i)}}{\mu_i^2 N_i^2} (U_i S_x + V_i S_y + \Theta_i M_c). \quad (21.6)$$

Alors nous aidant des équations (19.5) à (19.8)

$$\left. \begin{aligned} [u'_c]_{SV} &= -X_0 + \frac{S_x}{Gh} \left( a_{xx} + \sum_1^{\infty} \frac{U_i^2}{\mu_i^2 N_i^2} \right) \\ &\quad + \frac{S_y}{Gh} \left( a_{xy} + \sum_1^{\infty} \frac{U_i V_i}{\mu_i^2 N_i^2} \right) + \frac{M_c}{Gh} \sum_1^{\infty} \frac{U_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} \\ [v'_c]_{SV} &= -Y_0 + \frac{S_x}{Gh} \left( a_{xy} + \sum_1^{\infty} \frac{U_i V_i}{\mu_i^2 N_i^2} \right) \\ &\quad + \frac{S_y}{Gh} \left( a_{yy} + \sum_1^{\infty} \frac{V_i^2}{\mu_i^2 N_i^2} \right) + \frac{M_c}{Gh} \sum_1^{\infty} \frac{V_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (21.7)$$

$$[\theta']_{SV} = \frac{S_x}{Gh} \sum_1^{\infty} \frac{U_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} + \frac{S_y}{Gh} \sum_1^{\infty} \frac{V_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} + \frac{M_c}{Gh} \left( \frac{1}{I_c} + \sum_1^{\infty} \frac{\Theta_i^2}{\mu_i^2 N_i^2} \right). \quad (21.8)$$

Les propriétés (11.3) et (12.12) assurent que les tensions développées en plus de celles de la théorie de Bernoulli sont statiquement équivalentes à zéro dans chaque section.

La solution particulière trouvée est exacte non seulement sous réserve que les conditions de répartition (21.1) soient vérifiées mais aussi sous réserve de sa compatibilité avec les conditions aux limites. On peut l'appeler une solution de de Saint Venant généralisée, où les tensions axiales qui viennent se superposer à celles données par la loi d'équarissage sont constantes le long des génératrices. Pour une coque à caractéristiques uniformes ( $g \equiv 1$  et  $h \equiv 1$ ) elle demande que les charges transversales soient réparties uniformément ; dans ce cas particulier elle offre une certaine analogie avec la théorie de MICHELL [28] pour les poutres uniformément chargées. L'hypothèse semi-inverse d'une nullité des tensions axiales additionnelles se vérifie dans le cas particulier

$$S_x/h = \text{cte} \quad S_y/h = \text{cte} \quad M_c/h = \text{cte} \quad (21.9)$$

Dans ce même cas le gauchissement véritable de la section, représenté par les termes de (21.3) sous le signe sommatoire, est lui aussi constant.

En cas de sollicitation par couples de torsion, la solution trouvée peut être identifiée avec celle de la section 20. En particulier l'identification des gauchissements fournit la relation

$$W_{(c)} = J \sum_1^{\infty} \frac{\Theta_i W_{(i)}}{\mu_i^2 N_i^2} \quad (21.10)$$

dont nous retrouverons une nouvelle preuve à la section 26. Quand cette relation est différentiée et qu'on y introduit les résultats (11.1) et (12.7) également vérifiées par  $W_{(c)}$ , il vient

$$\begin{aligned} -r_c + (x_k - x_c) \frac{dy}{ds} - (y_k - y_c) \frac{dx}{ds} + \frac{1}{a} \psi_{\theta}(s; 0) = \\ J \sum_1^{\infty} \frac{\Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} \left( \frac{Q_{(i)}}{a} - U_i \frac{dx}{ds} - V_i \frac{dy}{ds} - \Theta_i r_c \right). \end{aligned}$$

Cette relation, multipliée par  $adx$  ou par  $ady$  puis intégrée, livre par identification des coefficients des aires réduites les équations

$$x_k - x_c = -J \sum_1^{\infty} \frac{V_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} \quad y_k - y_c = J \sum_1^{\infty} \frac{U_i \Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2}. \quad (21.11)$$

Multipliée par  $ar_c ds$  et intégrée elle fournit

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{I_c} + \sum_1^{\infty} \frac{\Theta_i^2}{\mu_i^2 N_i^2}. \quad (21.12)$$

Notant que

$$u_k = u_c - \theta(y_k - y_c) \quad \text{et} \quad v_k = v_c + \theta(x_k - x_c) \quad (21.13)$$

on peut alors donner des équations (21.7) et (21.8) la nouvelle formulation

$$\left. \begin{aligned} (u'_k)_{sv} &= -X_0 + \frac{S_x}{Gh} U_x + \frac{S_y}{Gh} U_y \\ (v'_k)_{sv} &= -Y_0 + \frac{S_x}{Gh} V_x + \frac{S_y}{Gh} V_y \end{aligned} \right\} \quad (21.14)$$

$$(\theta')_{sv} = \frac{M_k}{GhJ} \quad (21.15)$$

moyennant les définitions

$$\left. \begin{aligned} U_x &= a_{xx} - \frac{(y_k - y_c)^2}{J} + \sum_1^{\infty} \frac{U_i^2}{\mu_i^2 N_i^2} \\ V_y &= a_{yy} - \frac{(x_k - x_c)^2}{J} + \sum_1^{\infty} \frac{V_i^2}{\mu_i^2 N_i^2} \\ U_y = V_x &= a_{xy} + \frac{(x_k - x_c)(y_k - y_c)}{J} + \sum_1^{\infty} \frac{U_i V_i}{\mu_i^2 N_i^2} \end{aligned} \right\} (21.16)$$

Des résultats (21.14) et (21.15) il ressort clairement que dans la solution de de Saint Venant généralisée le rôle de centre de flexion est joué par le centre K. D'autre part que la rigidité de torsion est  $GhJ$ .

Quant aux grandeurs  $U_x$ ,  $U_y = V_x$  et  $V_y$ , elles sont associées aux déformations dues aux efforts tranchants. Nous en obtenons des expressions qui ne nécessitent plus des sommations de séries à la section 26. Il en sera de même pour le calcul direct de  $J$  à la section 23.

## 22. Les flux de fermeture.

Une autre manière d'utiliser les bases orthogonales consistera à développer non plus le déplacement axial mais les tensions axiales en série de fonctions propres. Cette technique, combinée à l'utilisation du principe de variation (17.1) revient en fait à se servir du principe de variation des tensions.

Deux points la différencient ici de la technique de variation des déplacements. D'une part, au lieu d'être obtenus par différenciation des déplacements, les flux de cisaillement s'obtiendront par intégration des équations d'équilibre. D'autre part les déplacements axiaux seront obtenus par intégration des relations entre tensions et déformations. Cette double opération d'intégration représente, vis à vis de la méthode des déplacements, un travail préliminaire supplémentaire. L'avantage qu'on en retire est substantiel dans ce sens que les séries obtenues ont une convergence nettement améliorée.

Cette section et les deux suivantes sont consacrées aux problèmes d'intégration qui se posent pour l'application de la mé-

thode de variation des tensions. Seules les sections fermées seront prises en considération.

A toute section fermée nous associons une section ouverte obtenue en pratiquant une coupure en un endroit arbitraire le long de chaque circuit fermé (fig. 5). En parcourant un circuit fermé dans le sens positif mathématique on peut prendre comme point de départ la lèvre  $P_1$  de la coupure, le point d'arrivée étant alors la lèvre  $P_2$ . La section ainsi « ouverte » a ses parois minces bordées par un contour fermé simple. Quand, partant d'un point arbitraire  $D$ , ce contour est décrit dans l'un ou l'autre sens, chaque paroi est longée deux fois, une fois le long de chacun de

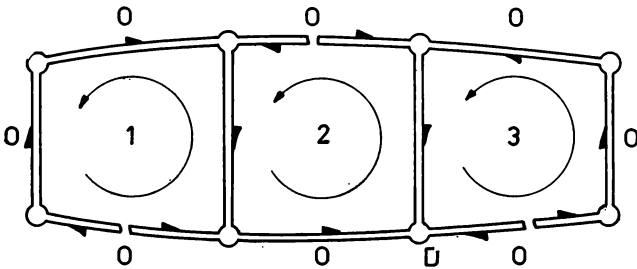


FIG. 5.

ses bords. Convenons de choisir comme sens positif de description de l'arc, ou trace du feuillet moyen de la paroi, celui correspondant à notre second passage le long d'un des bords de cette paroi. Il en résulte les avantages de nature topologique suivants <sup>(1)</sup> :

1) De chaque extrémité de la coque « ouverte » le sens positif est dirigé vers l'intérieur,

2) En chaque nœud il n'y a qu'un seul arc de sens positif divergent,

3) Exceptionnellement au point  $D$  que l'on a choisi tous les arcs sont de sens positif convergent ; nous dirons que  $D$  est le point (ou nœud) de contrôle,

<sup>(1)</sup> Les sens ainsi déterminés sont exactement opposés à ceux dont il est question pour les sections ouvertes à la section 9.

4) De chaque point (ou nœud) il n'y a qu'un seul cheminement respectant les sens positifs de description qui conduise au nœud de contrôle,

5) Une intégrale étendue au cheminement entre deux points quelconques  $P_1$  et  $P_2$  reçoit une signification précise par l'interprétation

$$\int_{P_1}^{P_2} = \int_{P_1}^D - \int_{P_2}^D.$$

En particulier, si  $P_1$  et  $P_2$  sont les lèvres d'une coupure pratiquée dans un circuit fermé, cette interprétation ramène la signification de l'intégrale étendue au sens de description mathématique du circuit à des intégrales équivalents dans le sens conventionnel de la coque « ouverte ».

Nous appellerons en général « flux de fermeture » les solutions du système homogène d'équations

$$dq/ds = 0 \quad T_m(q) = 0. \quad (22.1)$$

Un flux constant parcourant un circuit fermé est un flux de fermeture ; c'est l'analogie d'un courant de maille dans la théorie des réseaux électriques, tout comme les équations (22.1) sont analogues aux lois de Kirchhoff exprimant la conservation du courant. De fait, comme il reste constant le long d'un arc, il satisfait aux équations (22.1) du premier type et comme en un nœud il converge par une des branches pour en diverger par une autre il satisfait aussi à celles du second type.

Attribuons un indice  $p$ , variant de 1 à  $P$ , à chaque circuit fermé élémentaire, c'est-à-dire tel que le domaine qu'il circonscrit ne soit plus divisible par des arcs intérieurs. Attribuons le même indice  $p$  au domaine circonscrit et l'indice zéro au domaine extérieur à tous les domaines circonscrits. La solution générale des équations homogènes (22.1) est alors

$$q = \sum_1^P q_p. \quad (22.2)$$

Dans cette équation le sens positif conventionnel est celui du circuit « ouvert ». Par conséquent si  $q_p$  désigne le flux de fermeture du circuit  $p$  compté positivement dans le sens de description mathématique du circuit on aura

$$\overset{\circ}{q}_p = +q_p \quad \overset{\circ}{q}_p = -q_p \quad \overset{\circ}{q}_p = 0$$

suivant que le sens « ouvert » coïncide avec le sens mathématique, lui est opposé, ou que la branche considérée n'appartient pas au circuit.

23. *La solution  $\psi_\theta(s; 0)$  pour une section fermée.*

Suivant (9.23) et (9.24)  $\psi_\theta(s; 0)$  consiste en flux de fermeture qui seront notés

$$\psi_\theta(s; 0) = \sum_1^P \overset{\circ}{\gamma}_p. \quad (23.1)$$

Ils sont déterminés par les conditions de continuité de  $\varphi_\theta(s; 0)$

$$\oint_p d\varphi_\theta(s; 0) = 0 \quad (p = 1, 2 \dots P) \quad (23.2)$$

c'est-à-dire en vertu de (9.22) par les conditions

$$\oint_p \psi_\theta(s; 0) \frac{ds}{a} = \oint_p \sum_1^P \overset{\circ}{\gamma}_p \frac{ds}{a} = \int_p r_\theta ds = 2\Omega_p \quad (23.3)$$

où  $\Omega_p$  est l'aire du domaine circonscrit par le circuit  $p$ . Comme chaque arc du circuit est une frontière entre deux domaines, l'un d'indice  $p$ , l'autre d'un autre indice  $t$  qui est éventuellement celui zéro du domaine extérieur, il est parcouru dans le sens mathématique par un flux  $\gamma_p - \gamma_t$ . Pour  $t = 0$  ceci n'est bien entendu vrai que moyennant la convention  $\gamma_0 = 0$ . Les conditions (23.3) prennent alors la forme explicite

$$\sum_{t=0}^P \epsilon_{pt} (\gamma_p - \gamma_t) = 2\Omega_p \quad (p = 1, 2 \dots P) \quad (23.4)$$

où

$$\gamma_0 = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_{pt} = \int_{pt} \frac{ds}{a} \quad (23.5)$$

est une intégrale étendue à toutes les portions de frontière commune aux domaines  $p$  et  $t$ . Ayant résolu ce système de  $P$  équations

tions linéaires aux P inconnues  $\gamma_p$ , la raideur de torsion J peut être calculée à partir de (9.28) sous la forme

$$J = \sum_1^P \oint \gamma_p \circ r_c ds = \sum_1^P \gamma_p \oint_p r_c ds = 2 \sum_1^P \gamma_p \Omega_p. \quad (23.6)$$

24. *Intégration des flux de cisaillement et des déplacements axiaux.*

Les problèmes d'intégration présentés par l'application de la méthode de variation des tensions sont réductibles à la forme type suivante : une fonction  $\varphi$ , continue le long des arcs et au droit des nœuds, étant donnée, déterminer un flux Q et un déplacement continu W par le système d'équations

$$\frac{dQ}{ds} = - b\varphi \quad (24.1)$$

$$T_m(Q) = S_m \varphi_m \quad (24.2)$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{Q}{a} - U \frac{dx}{ds} - V \frac{dy}{ds} - \Theta r_c. \quad (24.3)$$

Le paramètre  $\Theta$  est imposé et, à moins qu'ils ne soient imposés, les paramètres U et V ainsi que la translation arbitraire, ou constante additive de W, sont à déterminer de telle façon que

$$(W, 1) = 0 \quad (W, x - x_a) = 0 \quad (W, y - y_a) = 0 \quad (24.4)$$

La solution au problème posé est alors unique. Pour qu'elle soit possible la fonction  $\varphi$  donnée doit satisfaire à une condition. En effet comme

$$\oint dQ = \sum_m T_m(Q)$$

on trouve en substituant (24.1) et (24.2) la condition

$$\oint b\varphi ds + \sum_m S_m \varphi_m = (\varphi, 1) = 0. \quad (24.5)$$



Cette condition sera vérifiée par toutes les fonctions qui se présenteront dans les applications.

1) Donnée  $\varphi = \varphi_{(r)}$  gauchissement propre de première espèce. Cette fonction satisfait à (24.5) en vertu de (7.11) du moment que  $\lambda_r^2 \neq 0$ . Si on impose également  $U = V = \Theta = 0$ , la solution immédiate est

$$Q = \frac{1}{\lambda_r^2} \psi_{(r)} \quad W = \frac{1}{\lambda_r^2} \varphi_{(r)} \quad (24.6)$$

qui ramène les équations du problème à (7.2), (7.3) et (7.4).

2) Données  $\varphi = W_{(i)}$  gauchissement propre de seconde espèce associé à une valeur non nulle, et  $\Theta = \frac{1}{\mu_i^2} \Theta_i$ . La solution est immédiate

$$Q = \frac{1}{\mu_i^2} Q_{(i)} \quad W = \frac{1}{\mu_i^2} W_{(i)} \quad U = \frac{1}{\mu_i^2} U_i \quad V = \frac{1}{\mu_i^2} V_i \quad (24.7)$$

Elle ramène les équations proposées à (11.1), (11.4) et (11.5) et les autres conditions sont satisfaites en vertu de (12.12).

3) Données  $\varphi = 0$  et  $\Theta = 1$ . La solution est ici

$$Q = \psi_{\theta}(s; 0) \quad W = W_{(c)} \quad U = y_k - y_c \quad V = -x_k + x_c \quad (24.8)$$

Elle ramène (24.1) et (24.2) à (9.23) et (9.24) et, à condition de substituer l'expression (12.4) qui est valable pour  $W_{(c)}$ , elle ramène aussi (24.3) à (9.22). Enfin les relations (12.5) et (12.9) sont valables pour  $W_{(c)}$ .

Ces trois premiers exemples sont de nature élémentaire et n'apportent aucun élément nouveau. Par contre les deux suivants introduisent d'importantes fonctions nouvelles.

4) Données  $\varphi = x - x_g$  et  $\Theta = 0$ . La solution sera désignée par

$$Q = A \quad W = W_A \quad U = U_A \quad V = V_A \quad (24.9)$$

Pour la construire considérons d'abord l'expression

$$A_0(s) = \int_+ b(x - x_g) ds + \sum_+ S_m(x_m - x_g). \quad (24.10)$$

Les symboles  $\int_+$  et  $\Sigma_+$  doivent être compris dans le sens suivant.

Dans la section « ouverte », toute nouvelle coupure sépare la coque en deux morceaux. Celui auquel est attribué le symbole  $+$  est celui sur lequel on s'engage en suivant, à partir de la coupure, le sens positif conventionnel de description de l'arc. C'est à cette partie de la section que sont étendues l'intégrale et la somme dans la définition (24.10). La grandeur ainsi définie est donc le moment statique de cette partie par rapport à un axe parallèle à  $oy$  et issu du centroïde.

En déplaçant la coupure d'une longueur  $ds$  ou en traversant un nœud on vérifie immédiatement que  $A_0(s)$  est une solution particulière des équations (24.1) et (24.2). La solution générale de ces équations sans seconds membres est un système de flux de fermeture. On écrira par conséquent

$$Q = A = A_0 + \sum_1^P \alpha_p. \quad (24.11)$$

Les flux de fermeture  $\alpha_p$  sont déterminés par la condition que  $W$  reste continue aux lèvres des coupures pratiquées dans les mailles de la section fermée :

$$\oint_p dW = 0 \quad (p = 1, 2 \dots P).$$

Comme il a été spécifié que  $\Theta = 0$  et que d'autre part il est évident que

$$\oint_p dx = 0 \quad \text{et} \quad \oint_p dy = 0 \quad (p = 1, 2 \dots P)$$

l'équation (24.3) ramène ces conditions de continuité à

$$\oint_p A \frac{ds}{a} = 0 \quad (p = 1, 2 \dots P) \quad (24.12)$$

En y substituant la solution (24.11) on trouve par des calculs semblables à ceux de la section 23, que les flux de fermeture sont déterminés par le système d'équations linéaires

$$\sum_{t=0}^P \epsilon_{pt} (\alpha_p - \alpha_t) = - \oint_p A_0 \frac{ds}{a} \quad \text{où} \quad \alpha_0 = 0 \quad \text{et} \quad (p = 1, 2 \dots P). \quad (24.13)$$

On construit alors une solution particulière de (24.3) en prenant  $U = V = 0$ ,  $W_D = 0$  et en intégrant à rebours au départ du nœud de contrôle D. La solution générale est alors

$$W_A = W_A^* - U_A(x - x_g) - V_A(y - y_g) + \alpha_A$$

où  $W_A^*$  dénote la solution particulière. Les trois conditions (24.4) déterminent enfin  $\alpha_A$ ,  $U_A$  et  $V_A$  par le système d'équations

$$S\alpha_A = (W_A^*, 1) \quad (24.14)$$

$$\left. \begin{aligned} U_A I_{xx} + V_A I_{xy} &= (W_A^*, x - x_g) \\ U_A I_{xy} + V_A I_{yy} &= (W_A^*, y - y_g) \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

et la solution est complètement déterminée.

5) Données  $\varphi = y - y_g$  et  $\Theta = 0$ . La solution est notée

$$Q = B \quad W = W_B \quad U = U_B \quad V = V_B. \quad (24.16)$$

Elle se détermine en suivant une voie analogue. On a successivement

$$B_0(s) = \oint_+ b(y - y_g) ds + \sum_+ S_m(y_m - y_g) \quad (24.17)$$

$$B = B_0 + \sum_1^P \beta_p \quad (24.18)$$

$$\oint_p B \frac{ds}{a} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, P) \quad (24.19)$$

$$\sum_{t=0}^P \epsilon_{pt} (\beta_p - \beta_t) = - \oint_p B_0 \frac{ds}{a} \quad \text{ou} \quad \beta_0 = 0 \quad \text{et} \quad (p = 1, 2, \dots, P) \quad (24.20)$$

$$W_B = W_B^* - U_B(x - x_g) - V_B(y - y_g) + \alpha_B$$

où

$$S\alpha_B = (W_B^*, 1) \quad (24.21)$$

$$\left. \begin{aligned} U_B I_{xx} + V_B I_{xy} &= (W_B^*, x - x_g) \\ U_B I_{xy} + V_B I_{yy} &= (W_B^*, y - y_g) \end{aligned} \right\} \quad (24.22)$$

25. *Quelques propriétés des moments statiques A et B.*

Le choix particulier fait pour les sens positifs de cheminement le long des arcs de la section « ouverte » offre pour le calcul des moments statiques « ouverts »  $A_0$  et  $B_0$  des avantages qu'il n'est peut être pas inutile de souligner. En effet on peut démarrer ce calcul en partant de façon indépendante de chaque extrémité d'arc en se dirigeant vers l'intérieur. En chaque nœud les arcs convergents apportent des contributions connues et, après avoir ajouté la contribution de la section de lisse  $S_m$  en ce nœud, on peut repartir le long de la seule branche divergente. L'opération se termine en D, où effectivement se produit un contrôle des calculs, puisque il n'existe en ce point que des arcs convergents. Ce contrôle constitue en fait une vérification des valeurs estimées pour les coordonnées du centroïde. Il nous assure que les conditions (9.10) et (9.11) nécessaires à l'existence de la solution des équations (24.1) à (24.3) sont bien remplies. Il est par ailleurs évident que ce calcul peut servir à déterminer les coordonnées du centroïde.

Les moments statiques, qu'il faut de toute façon calculer pour appliquer la méthode de variation des tensions, jouissent aussi de propriétés remarquables qui nous permettent de calculer par leur intermédiaire les moments d'inertie, les coordonnées du centre de flexion de de Saint Venant et les déformations dues aux efforts tranchants dans cette même solution.

1) A et  $A_0$  vérifient tous deux les équations

$$\frac{dA}{ds} = -b(x - x_g) \quad T_m(A) = S_m(x_m - x_g). \quad (25.1)$$

Par conséquent en intégrant par parties

$$\left. \begin{aligned} \oint A dx &= \oint A d(x - x_g) = (x - x_g, x - x_g) = I_{xx} \\ \oint A dy &= \oint A d(y - y_g) = (x - x_g, y - y_g) = I_{xy} \end{aligned} \right\} (25.2)$$

On démontre de la même façon les formules

$$\oint B dx = I_{xy} \quad \oint B dy = I_{yy}. \quad (25.3)$$

Ces relations restent vraies quand A est remplacé par  $A_0$  et B par  $B_0$ .

2) Le centre de flexion K peut être calculé par les formules

$$\oint A r_k ds = 0 \quad \oint B r_k ds = 0. \quad (25.4)$$

En effet, remplaçant  $r_k$  par son expression (12.7) telle que vérifiée par  $W_{(c)}$  il vient par exemple

$$\oint A r_k ds = \oint A \psi_{\theta}(s; 0) \frac{ds}{a} - \oint A dW_{(c)}.$$

Mais, de (23.1) et (24.12)

$$\oint A \psi_{\theta}(s; 0) \frac{ds}{a} = \Sigma \gamma_p \oint_p A \frac{ds}{a} = 0.$$

Enfin, à l'aide d'une intégration par parties et eu égard à (20.13) et (25.1)

$$\oint A r_k ds = - \oint A dW_{(c)} = - (W_{(c)}, x - x_g) = 0.$$

Une preuve similaire justifie la seconde des propriétés (25.4). En vue de nous en servir pour un calcul explicite des coordonnées de K, nous pouvons y remplacer  $r_k$  par (12.10) et obtenons

$$\left. \begin{aligned} x_k I_{xy} - y_k I_{xx} &= \oint A r ds \\ x_k I_{yy} - y_k I_{xy} &= \oint B r ds \end{aligned} \right\} \quad (25.5)$$

3) Les grandeurs  $(U_A, V_A)$  et  $(U_B, V_B)$  peuvent être calculées directement à l'aide des moments statiques sans qu'il soit nécessaire d'effectuer l'intégration de  $W_A$  ni  $W_B$ .

En effet, partant de l'équation

$$\frac{dW_A}{ds} = \frac{A}{a} - U_A \frac{dx}{ds} - V_A \frac{dy}{ds} \quad (25.6)$$

nous en déduisons par multiplication par A ou par B et intégration

$$\oint A^2 \frac{ds}{a} - U_A \oint A dx - V_A \oint A dy = \oint A dW_A$$

$$\oint AB \frac{ds}{a} - U_A \oint B dx - V_A \oint B dy = \oint B dW_A.$$

Les seconds membres de ces relations sont nuls car, si on les évalue par parties et que l'on tient compte de (25.1) et des équations similaires vérifiées par B

$$\oint A dW_A = (W_A, x - x_g) = 0 \quad \oint B dW_A = (W_A, y - y_g) = 0$$

en vertu des exigences (24.4). Nous servant alors des résultats (25.2) et (25.3) nous trouvons pour le calcul de  $U_A$  et  $V_A$  la paire d'équations linéaires

$$\left. \begin{aligned} I_{xx}U_A + I_{xy}V_A &= \oint A^2 \frac{ds}{a} \\ I_{xy}U_A + I_{yy}V_A &= \oint AB \frac{ds}{a} \end{aligned} \right\} \quad (25.7)$$

De façon analogue on établirait les formules

$$\left. \begin{aligned} I_{xx}U_B + I_{xy}V_B &= \oint AB \frac{ds}{a} \\ I_{xy}U_B + I_{yy}V_B &= \oint B^2 \frac{ds}{a} \end{aligned} \right\} \quad (25.8)$$

au départ de

$$\frac{dW_B}{ds} = \frac{B}{a} - U_B \frac{dx}{ds} - V_B \frac{dy}{ds}. \quad (25.9)$$

## 26. Développements en série de $W_A$ , $W_B$ et $W_{(o)}$ .

*Leur identification avec des gauchissements de de Saint Venant.*

Les solutions du système (24.1) à (24.3) qui satisfont aux conditions (24.4) ont un développement en série de gauchissements de seconde espèce du type

$$W = \sum_1^{\infty} \frac{(W, W_{(i)})}{N_i^2} W_{(i)}. \quad (26.1)$$

Nous désirons exprimer les coefficients de Fourier en fonction des données  $\varphi$  et  $\Theta$  du problème. A cet effet nous nous servons des équations du problème et des équations satisfaites par les gauchissements de seconde espèce et appliquons les techniques usuelles d'intégration par parties. D'une part

$$\oint Q_{(i)} dW = \mu_i^2 (W, W_{(i)}) = \oint Q Q_{(i)} \frac{ds}{a}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \oint Q dW_{(i)} = (\varphi, W_{(i)}) &= \oint Q Q_{(i)} \frac{ds}{a} \\ &\quad - U_i \oint Q dx - V_i \oint Q dy - \Theta_i \oint Q r_e ds. \end{aligned}$$

Pour évaluer les trois derniers termes nous avons

$$\oint Q dx = (\varphi, x - x_g) \quad \oint Q dy = (\varphi, y - y_g)$$

et, de (9.22), (23.1) et (24.3) ainsi que (23.6)

$$\begin{aligned} \oint Q r_e ds + (\varphi, \varphi_{\theta}(s; 0)) &= \oint Q \psi_{\theta}(s; 0) \frac{ds}{a} = \sum_1^P \gamma_p \oint_p Q \frac{ds}{a} \\ &= \sum_1^P \gamma_p \oint_p (dW + U dx + V dy + \Theta r_e ds) = \Theta_2 \Sigma \gamma_p \Omega_p = J \Theta. \end{aligned}$$

Éliminant alors  $\oint Q Q_{(i)} \frac{ds}{a}$  entre les deux premiers résultats nous trouvons l'estimation cherchée du produit scalaire entre  $W$  et les gauchissements propres. Finalement

$$\begin{aligned} W = \sum_1^{\infty} [J \Theta \Theta_i + (\varphi, W_{(i)} + U_i(x - x_g) + V_i(y - y_g) \\ - \Theta_i \varphi_{\theta}(s; 0))] \frac{W_{(i)}}{\mu_i^2 N_i^2}. \end{aligned} \quad (26.2)$$

Cette formule appliquée au cas 3<sup>o</sup> de la section 24 fournit une preuve de l'équation (21.10). Appliquée aux cas 4<sup>o</sup> et 5<sup>o</sup> elle fournit à l'aide des équations (12.6) les résultats

$$\left. \begin{aligned} W_A &= I_{xx}W_{(x)} + I_{xy}W_{(y)} \\ W_B &= I_{xy}W_{(x)} + I_{yy}W_{(y)} \end{aligned} \right\} \quad (26.3)$$

avec

$$W_{(x)} = \sum_1^{\infty} \frac{U_i + (y_c - y_k)\Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} W_{(i)} \quad (26.4)$$

$$W_{(y)} = \sum_1^{\infty} \frac{V_i - (x_c - x_k)\Theta_i}{\mu_i^2 N_i^2} W_{(i)}. \quad (26.5)$$

Revenant à l'expression générale du déplacement axial (21.3) de la solution de de Saint Venant, nous voyons qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} [w]_{sv} &= Z_0 + X_0(x - x_g) + Y_0(y - y_g) \\ &+ \frac{S_x}{G\bar{h}} W_{(x)} + \frac{S_y}{G\bar{h}} W_{(y)} + \frac{M_k}{G\bar{h}J} W_{(c)} \end{aligned} \quad (26.6)$$

et qu'il s'en suit que  $W_{(x)}$  et  $W_{(y)}$  sont les gauchissements de de Saint Venant associés à des efforts tranchants appliqués au centre de flexion K. De (26.3), (25.6) et (25.9) on déduit que ces gauchissements obéissent aux équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_{(x)}}{ds} &= \frac{1}{a} (i_{xx}A + i_{xy}B) - U_x \frac{dx}{ds} - V_x \frac{dy}{ds} \\ \frac{dW_{(y)}}{ds} &= \frac{1}{a} (i_{xy}A + i_{yy}B) - U_y \frac{dx}{ds} - V_y \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

et que les constantes  $U_x, U_y = V_x$  et  $V_y$ , qui sont celles-là mêmes qui interviennent dans les équations (21.14) et apparaissaient précédemment sous forme des séries (21.16), sont calculables par les formules déduites de (25.7) et (25.8)

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \oint (i_{xx}A + i_{xy}B)^2 \frac{ds}{a} \\ U_y = V_x &= \oint (i_{xx}A + i_{xy}B)(i_{xy}A + i_{yy}B) \frac{ds}{a} \\ V_y &= \oint (i_{xy}A + i_{yy}B)^2 \frac{ds}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (26.8)$$



Nous trouvons alors aussi que les tensions axiales et le flux de cisaillement dans la solution de de Saint Venant généralisée peuvent s'écrire

$$\left(\frac{n}{b}\right)_{SV} = \left(\frac{n}{b}\right)_B + \frac{E}{G} g \left[ W_{(x)} \frac{d S_x}{dz} \frac{1}{h} + W_{(y)} \frac{d S_y}{dz} \frac{1}{h} + W_{(c)} \frac{d M_k}{dz} \frac{1}{Jh} \right] \quad (26.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_m}{S_m}\right)_{SV} = \left(\frac{N_m}{S_m}\right)_B + \frac{E}{G} g \left[ W_{(x)m} \frac{d S_x}{dz} \frac{1}{h} \right. \\ \left. + W_{(y)m} \frac{d S_y}{dz} \frac{1}{h} + W_{(c)m} \frac{d M_k}{dz} \frac{1}{Jh} \right] \quad (26.10) \end{aligned}$$

$$(q)_{SV} = S_x(i_{xx}A + i_{xy}B) + S_y(i_{xy}A + i_{yy}B) + \frac{1}{J} M_k \psi_\theta(s; 0). \quad (26.11)$$

Nous sommes maintenant en mesure de résumer la situation quant à la construction directe de la solution de de Saint Venant généralisée sans passer par les séries. Les règles pour l'établissement des fonctions  $\psi_\theta(s; 0)$ ,  $A(s)$  et  $B(s)$  qui gouvernent selon (26.11) le flux de cisaillement ont été exposées aux sections 23 et 24. Le calcul des éléments  $J$ ,  $U_x$ ,  $U_y = V_x$  et  $V_x$  dont dépendent les relations de déformation (21.14) et (21.15) peut maintenant se faire à l'aide de (23.6) et (26.8). Les fonctions  $Z_0$ ,  $X_0$  et  $Y_0$  dont dépend la « partie de Bernoulli » du déplacement axial et des tensions axiales sont gouvernées par les équations (19.9) et (19.10) ainsi que (19.11), (19.12) et (19.13). On a vu à la section 24 comment calculer les gauchissements  $W_A$  et  $W_B$  et par conséquent ceux  $W_{(x)}$  et  $W_{(y)}$  qui leurs sont liés par (26.3).

Le seul point sur lequel il s'impose encore de faire quelques observations concerne le calcul du gauchissement de torsion  $W_{(c)}$ . Celui-ci peut se faire, connaissant  $\psi_\theta(s; 0)$ , en intégrant d'abord (9.22) pour trouver  $\varphi_\theta(s; 0)$  puis en appliquant la formule (12.4), ce qui suppose que nous calculions les différences de coordonnées entre le centre  $C$  et le centre  $K$  à l'aide des formules (12.6); enfin la constante additive de l'intégration serait à déterminer par la condition (12.9).

On observera cependant que dans la solution de de Saint Venant le centre de Bernoulli ne joue aucun rôle, l'accent étant reporté entièrement sur le centre  $K$ . Aussi peut-on se dispenser entièrement du calcul des coordonnées de  $C$ . Il suffit dans ce cas de calculer directement  $W_{(c)}$  par intégration de (12.7), suivie

de la détermination de la constante additive par (12.9). Les coordonnées du centre K se laissent déterminer directement par les formules (25.5).

Une autre voie que l'on peut suivre pour éviter le calcul du centre C consisterait à se servir de (12.10). On intégrerait alors la nouvelle fonction  $\chi_\theta$  définie par

$$\frac{d\chi_\theta}{ds} = \frac{1}{a} \psi_\theta(s; 0) - r \quad (26.12)$$

avec détermination de la constante additive par

$$(\chi_\theta, 1) = 0 \quad (26.13)$$

et le gauchissement de torsion serait donné par la combinaison linéaire

$$W_{(o)} = \chi_\theta + x_k(y - y_\theta) - y_k(x - x_\theta). \quad (26.14)$$

Les conditions d'orthogonalité (20.13) livrent d'ailleurs pour le calcul des coordonnées de K les nouvelles formules <sup>(1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} x_k I_{xy} - y_k I_{xx} &= -(\chi_\theta, x - x_\theta) \\ x_k I_{yy} - y_k I_{xy} &= -(\chi_\theta, y - y_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

L'importance de la solution de de Saint Venant ne tient pas tant à son caractère d'approximation de l'ingénieur, qu'au rôle de terme d'ordre zéro qu'elle joue dans l'expansion de la solution exacte dans la base de seconde espèce.

### 27. Les équations normales du type tension dans la base de seconde espèce.

En raison de leur intérêt limité nous omettons le développement d'équations normales obtenues par variation des tensions dans la base de première espèce.

---

<sup>(1)</sup> La dualité entre ces formules et celles (25.5) rappelle des résultats analogues pour les sections massives. Réf. 30.

Notre point de départ est le développement en série des tensions dans la base de seconde espèce

$$\frac{n}{b} = \left(\frac{n}{b}\right)_B + \sum_1^{\infty} K_i(z) W_{(i)}(s) \quad (27.1)$$

$$\frac{N_m}{S_m} = \left(\frac{N_m}{S_m}\right)_B + \sum_1^{\infty} K_i(z) W_{(i)m} \quad (27.2)$$

où la « partie de Bernoulli » est celle fournie par les équations (20.3). Ce développement est celui suggéré par le développement similaire (19.1) du déplacement axial et la considération des relations tension-déformation (4.5) et (4.6) ; c'est-à-dire par les développements (19.2) et (19.3). Dans les termes d'ordre zéro de ces développements celui en  $W_{(0)}$  a été omis, ce qui signifie que notre analyse se limite aux sections fermées ; les autres ont été transformés sous la forme (20.3). De cette façon les développements (27.1) et (27.2) satisfont a priori aux équations d'équilibre (2.8), (2.9) et (2.10). Rappelons à ce propos que en vertu des propriétés d'orthogonalité (12.12) les termes autres que ceux d'ordre zéro ne contribuent pas à l'effort axial total ni aux moments fléchissants.

La substitution de ces développements dans le principe de variation (17.1) ne modifie pas les équations d'Euler provenant des variations sur  $w(s, z)$ ,  $w_m(z)$  et  $q(s, z)$  et par conséquent les équations d'équilibre (2.1), (2.2) et l'équation de déformation (4.4) doivent être satisfaites telles quelles. Ces équations deviennent quand on y remplace les tensions normales par leur nouveau développement :

$$\frac{dQ}{ds} = -A_x b(x - x_g) - A_y b(y - y_g) - \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} b W_{(i)}$$

$$T_m(Q) = A_x S_m(x_m - x_g) + A_y S_m(y_m - y_g) + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} S_m W_{(i)m}$$

$$\frac{dW}{ds} = \frac{Q}{a} - U \frac{dx}{ds} - V \frac{dy}{ds} - \Theta r_c.$$

Pour leur donner une forme qui permette de les identifier plus facilement avec les équations du problème (24.1) à (24.3) nous avons été amenés à poser

$$\begin{aligned}
 w &= W & q &= GhQ \\
 u'_c &= u'_k + \theta'(y_k - y_c) = U & i_{xx}S_x + i_{xy}S_y &= GhA_x \\
 v'_c &= v'_k - \theta'(x_k - x_c) = V & i_{xy}S_x + i_{yy}S_y &= GhA_y \\
 \theta' &= \Theta.
 \end{aligned}$$

L'intégration de ce système d'équations est alors complètement résolue par les exemples 2° à 5° de la section 24. Par simple addition des contributions des différentes solutions de cette section il vient

$$\begin{aligned}
 Q &= A_x A + A_y B + \lambda \psi_\theta(s; 0) + \sum_1^\infty \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} Q_{(i)} \\
 W &= A_x W_A + A_y W_B + \lambda W_{(c)} + \sum_1^\infty \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} W_{(i)} \\
 &\quad + Z_0 + X_0(x - x_0) + Y_0(y - y_0) \\
 U &= A_x U_A + A_y U_B + \lambda(y_k - y_c) + \sum_1^\infty \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} U_i - X_0 \\
 V &= A_x V_A + A_y V_B - \lambda(x_k - x_c) + \sum_1^\infty \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} V_i - Y_0 \\
 \Theta &= \lambda + \sum_1^\infty \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} \Theta_i
 \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur encore indéterminé de la solution (24.8) qui, avec les termes en  $Z_0$ ,  $X_0$  et  $Y_0$ , exprime que les grandeurs  $U$ ,  $V$ ,  $\Theta$  ne sont pas encore déterminées.

Il se vérifie que les équations (2.4) et (2.5) requises par les variations sur  $u'_c$  et  $v'_c$  sont identiquement satisfaites, ce qui était à prévoir du fait que celles (2.8) et (2.9) l'étaient a priori. L'équation (2.6), requise par la variation de  $\theta'$ , est de préférence prise sous la forme équivalente

$$M_k = \oint q r_k ds = Gh \oint Q r_k ds \quad (27.3)$$

permettant de prendre avantage des propriétés (25.4). Comme d'autre part, en vertu des équations (11.3)

$$\oint Q_{(i)} r_k ds = 0$$

et, en vertu des équations (9.26) et (9.28),

$$\oint \psi_{\theta}(s; 0) r_k ds = \oint \psi_{\theta}(s; 0) r_s ds = J$$

l'équation (27.3) devient après substitution de la valeur trouvée pour  $Q$

$$M_k = GhJ\lambda. \quad (27.4)$$

Le multiplicateur se trouve donc déterminé. Substituant cette valeur du multiplicateur, nous rappelant les définitions (26.3) de  $W_{(x)}$  et  $W_{(y)}$  et celles correspondantes de  $U_x$ ,  $U_y = V_x$  et  $V_y$ , nous obtenons le résultat final pour le flux de cisaillement

$$q = [q]_{SV} + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} Q_{(i)}. \quad (27.5)$$

A ce stade des opérations les résultats obtenus pour  $n$ ,  $N_m$ ,  $q$ ,  $w$ ,  $u'_k$ ,  $v'_k$  et  $\theta'$  peuvent être substitués dans le principe (17.1) avec utilisation des relations d'orthogonalité. Il reste encore à prendre les variations sur  $N$ ,  $M_x(z)$ ,  $M_y(z)$  et les  $K_i(z)$ .

Les variations sur  $N$ ,  $M_x(z)$  et  $M_y(z)$  établissent que les fonctions  $Z_0(z)$ ,  $X_0(z)$  et  $Y_0(z)$  sont gouvernées par les équations précédentes (19.9 et 10) et (19.11-12 et 13). Ceci permet d'écrire les résultats définitifs

$$w = (w)_{SV} + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} W_{(i)} \quad (27.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_k &= (u'_k)_{SV} + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} U_i \\ v'_k &= (v'_k)_{SV} + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} V_i \end{aligned} \right\} \quad (27.7)$$

$$\theta' = (\theta')_{SV} + \sum_1^{\infty} \frac{dK_i}{dz} \frac{1}{\mu_i^2} \Theta_i. \quad (27.8)$$

Rappelons pour la commodité de la lecture que les résultats de de Saint Venant dont il est question sont ceux donnés par les équations (21.14 et 15), (26.6-9-10 et 11). Il apparaît maintenant clairement qu'ils jouent le rôle de termes d'ordre zéro dans le développement de la solution exacte. Il reste à trouver les équations

tions gouvernant les fonctions de correction  $K_i(z)$ . Celles-ci résultent des variations prises sur ces fonctions dans le principe. Il vient l'équation différentielle du type de Sturm-Liouville

$$g \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{h} \frac{dK_i}{dz} \right) - \frac{G}{E} \mu_i^2 K_i = - \frac{g}{N_i^2} \frac{d}{dz} \left( U_i \frac{S_x}{h} + V_i \frac{S_y}{h} + \Theta_i \frac{M_c}{h} \right) \quad (27.9)$$

avec la condition aux limites naturelle

$$\left( \frac{N_i^2}{G \mu_i^2} \frac{1}{h} \frac{dK_i}{dz} \right)_{z=0} = (\bar{w}, W_{(i)}) - \frac{U_i S_x(0) + V_i S_y(0) + \Theta_i M_c(0)}{\mu_i^2 G h(0)} \quad (27.10)$$

et la condition a priori

$$N_i^2 K_i(L) = \oint \bar{n} W_{(i)} ds + \sum_m \bar{N}_m W_{(i)m}. \quad (27.11)$$

Le problème des corrections à la solution de de Saint Venant est donc ramené à l'intégration de ces équations différentielles, analogues de celles obtenues par ARGYRIS et DUNNE [24] suivant une voie très différente. L'amélioration de la convergence des séries est due à la présence des facteurs  $1/\mu_i^2$ . Au cas strict (21.9) de de Saint Venant correspond la solution particulière  $K_i \equiv 0$  des équations (27.9), si les conditions aux limites sont compatibles avec cette solution. Au cas généralisé (21.1) correspondent de même des solutions particulières  $K_i = \text{cte}$ , qui ne modifient que les tensions axiales. Ceci confirme les résultats déjà discutés à propos des équations normales du type déplacement.

S'il était possible de trouver des distributions d'épaisseurs  $a(s)$  et  $b(s)$  et des sections  $S_m$  telles que tous les coefficients

$$U_i = 0, \quad V_i = 0, \quad \Theta_i = 0. \quad (27.12)$$

Les seconds membres de (27.9) seraient nuls et les corrections à la solution d'ordre zéro ne proviendraient plus que d'incompatibilités éventuelles aux extrémités. Dans les sections suivantes nous examinerons la possibilité de réaliser (27.12) intégralement ou en partie.

28. Les lois de distribution a(s) assurant la nullité du gauchissement de torsion de de Saint Venant.

On peut conclure de l'équation (6.15) appliquée aux solutions propres de seconde espèce que la propriété  $C_i = 0$  dont elles jouissent est équivalente à la propriété

$$\oint ar_c dW_{(i)} + \Theta_i I_c = 0. \quad (28.1)$$

Il s'en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que les gauchissements propres de seconde espèce soient « libres en torsion », c'est-à-dire possèdent la propriété

$$\Theta_i = 0 \quad (28.2)$$

est la suivante

$$\oint ar_c dW_{(i)} = 0 \quad \text{pour tous les } W_{(i)}. \quad (28.3)$$

Ceci sera alors vrai d'un gauchissement continu arbitraire  $W$  comme on peut s'en rendre compte en le développant en série de gauchissements propres (sections fermées)

$$W = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_g) + \alpha_2(y - y_g) + \sum_1^{\infty} \beta_i W_{(i)} \quad (28.4)$$

et en appliquant aussi bien les propriétés (5.3) que les conditions nécessaires et suffisantes (28.3)

$$\oint ar_c dW = \alpha_1 \oint ar_c dx + \alpha_2 \oint ar_c dy + \sum_1^{\infty} \beta_i \oint ar_c dW_{(i)} = 0.$$

En intégrant le premier membre de ce dernier résultat par parties

$$\sum_m W_m T_m(ar_c) - W d(ar_c) = 0$$

et, comme  $W$  est arbitraire, on en déduit de nouvelles conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de (28.2)

$$T_m(ar_c) = 0 \quad (28.5)$$

$$d(ar_c) = 0. \quad (28.6)$$

La première a été énoncée sous une forme équivalente par ARGYRIS qui attribue la découverte originale de la seconde, pour le cas particulier des caissons monocellulaires sans lisses, à NEUBER [15]. Ces lois qui gouvernent la distribution d'épaisseur  $a(s)$  n'ont cependant été établies qu'en relation avec leur propriété de rendre nul le gauchissement de torsion de de Saint Venant  $W_{(c)}$ . Suivant l'équation (21.10) ceci est effectivement une des conséquences des propriétés (28.2).

Quelques autres conséquences remarquables de ces lois sont démontrées ci-après.

$$1) \quad C_r = \oint \psi_{(r)} r_c ds = \oint \frac{\psi_{(r)}}{a} ar_c ds = \oint ar_c d\varphi_{(r)} = 0 \quad (28.7)$$

la dernière égalité étant une conséquence des lois (28.5 et 6) après une intégration par parties. Les gauchissements propres de première espèce sont donc aussi « libres en torsion » dans ce sens que la troisième composante de leur vecteur déplacement et de leur vecteur force est nulle.

2) Il découle de ces propriétés (28.7) et du développement en série (9.30) que

$$\psi_{\theta}(s; 0) \equiv 0. \quad (28.8)$$

Ensuite de (9.22) que

$$\psi_{\theta}(s; 0) = ar_c. \quad (28.9)$$

Une démonstration qui ne dépend pas du développement en série est la suivante

$$\oint (\psi_{\theta}(s; 0) - ar_c)^2 \frac{ds}{a} = \oint (\psi_{\theta}(s; 0) - ar_c) d\varphi_{\theta}(s; 0) = 0$$

en vertu de (9.23 et 24) et (28.5 et 6) après une intégration par parties. L'équation (28.9) en découle, puis (28.8).

3) Substituant le résultat (28.8) dans les équations (12.6)

$$x_k = x_c \quad y_k = y_c. \quad (28.10)$$

Les centres de Bernoulli et de de Saint Venant coïncident.



4) Les résultats précédents et la définition (12.4) de  $W_{(c)}$  fournissent une nouvelle preuve de ce que

$$W_{(c)} \equiv 0 \quad (28.11)$$

sans devoir passer par le développement en série.

5) Du résultat (28.9), de (9.28) et de (5.11)

$$J = \oint \psi_{\theta}(s; 0) r_c ds = \oint ar_c^2 ds = I_c. \quad (28.12)$$

Ceci est confirmé par le développement en série (9.32) et (28.7).

6) Comme on est maintenant en droit d'écrire  $M_c = M_k$  par suite de (28.10), il apparaît que les flux de cisaillement de Bernoulli (20.4) et de Saint Venant (26.11) sont identiques pour la partie due à la torsion.

### 29. Les lois de distribution $b(s)$ assurant

la nullité d'un gauchissement de flexion de de Saint Venant.

On simplifiera l'écriture sans nuire à la généralité en supposant les axes orientés de façon telle que

$$A_{xy} = 0. \quad (29.1)$$

Appliquant (6.14) à un gauchissement de seconde espèce, une condition nécessaire et suffisante pour avoir la propriété

$$V_i = 0 \quad (29.2)$$

est

$$\oint a \frac{dy}{ds} dW_{(i)} = 0. \quad (29.3)$$

Supposant que la propriété (29.2) soit requise de tous les gauchissements  $W_{(i)}$ , le gauchissement arbitraire (28.4) aura la propriété

$$\oint a \frac{dy}{ds} dW = \alpha_1 A_{xy} + \alpha_2 A_{yy} + \sum_1^{\infty} \beta_i \oint a \frac{dy}{ds} dW_{(i)} = \alpha_2 A_{yy}.$$

De plus, comme

$$(W, x - x_g) = \alpha_1 I_{xx} + \alpha_2 I_{xy}$$

$$(W, y - y_g) = \alpha_1 I_{xy} + \alpha_2 I_{yy}$$

nous obtenons en résolvant pour  $\alpha_2$  et substituant

$$\oint a \frac{dy}{ds} dW = A_{yy}(W, i_{xy}(x - x_g) + i_{yy}(y - y_g)). \quad (29.4)$$

Après avoir intégré le membre de gauche par parties et explicité le produit scalaire du membre de droite, on déduit du caractère arbitraire de  $W$  les nouvelles conditions

$$T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right) = A_{yy} S_m [i_{xy}(x_m - x_g) + i_{yy}(y_m - y_g)] \quad (29.5)$$

$$\frac{d}{ds} \left( a \frac{dy}{ds} \right) = -A_{yy} b [i_{xy}(x - x_g) + i_{yy}(y - y_g)]. \quad (29.6)$$

La distribution  $a(s)$  et par conséquent  $A_{yy}$  étant données, les lois (29.5 et 6), conditions nécessaires et suffisantes pour la validité de (29.2), gouvernent respectivement l'échantillonnage des sections de lisse et la répartition des épaisseurs  $b(s)$ . La position du centroïde et les paramètres d'inertie  $i_{xy}$  et  $i_{yy}$  sont encore d'un choix arbitraire. En général certaines restrictions doivent être imposées à la distribution donnée  $a(s)$  pour éviter localement des valeurs infinies de  $b(s)$  ou d'un  $S_m$ . Il vaut mieux les examiner de plus près dans chaque cas d'application. Une loi semblable à (29.6) a été donnée par WILLIAMS et FINE [13] lors de l'examen des caissons monocellulaires sans lisses concentrées et à deux plans de symétrie orthogonaux. Encore une fois la voie suivie était très différente, son point de départ consistant à annuler le gauchissement de flexion de de Saint-Venant.

Cette propriété des lois (29.5 et 6) vaut pour la situation générale envisagée ici. En effet, des équations (12.6) nous tirons

$$x_c - x_k = (\varphi_\theta(s; 0), i_{xy}(x - x_g) + i_{yy}(y - y_g))$$

puis, explicitant le produit scalaire et introduisant les lois (29.5 et 6)

$$\begin{aligned} A_{yy}(x_c - x_k) &= - \oint \varphi_\theta(s; 0) d \left( a \frac{dy}{ds} \right) + \sum_m \varphi_{\theta,m}(s; 0) T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right) \\ &= \oint a \frac{dy}{ds} d\varphi_\theta(s; 0) = \oint a \frac{dy}{ds} \left( \frac{\psi_\theta(s; 0)}{a} - r_c \right) ds = 0 \end{aligned}$$

en vertu de (9.26) et (5.3). Nous obtenons donc déjà le résultat

$$x_c = x_k. \quad (29.7)$$

De celui-ci et de (29.2) découle par la série (26.5)

$$W_{(y)} \equiv 0. \quad (29.8)$$

A côté d'autres, le même résultat sera retrouvé, sans faire appel au développement en série, par l'étude de la nature du flux de cisaillement dû à  $S_y$  en présence des lois (29.5 et 6).

Partons des équations du type (25.1) qui gouvernent les moments statiques A et B et transformons leurs seconds membres à l'aide des lois en question :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (i_{xy}A + i_{yy}B) &= \frac{1}{A_{yy}} \frac{d}{ds} \left( a \frac{dy}{ds} \right). \\ T_m(i_{xy}A + i_{yy}B) &= \frac{1}{A_{yy}} T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned}$$

Une solution particulière immédiate de ces équations est

$$i_{xy}A + i_{yy}B = \frac{1}{A_{yy}} a \frac{dy}{ds}. \quad (29.9)$$

Il n'y a pas lieu d'ajouter de solution des équations sans seconds membres, c'est-à-dire de flux de fermeture, car la solution particulière vérifie déjà les conditions du type (24.12) assurant la continuité du gauchissement correspondant :

$$\oint_p (i_{xy}A + i_{yy}B) \frac{ds}{a} = \frac{1}{A_{yy}} \oint_p dy = 0 \quad (p = 1, 2 \dots P).$$

Si maintenant dans (20.4) nous faisons  $a_{xy} = 0$  et  $a_{yy} = (A_{yy})^{-1}$  conformément à l'hypothèse (29.1), on reconnaît l'identité des flux de cisaillement dus à  $S_y$  dans la solution de Bernoulli (20.4) et celle de de Saint Venant (26.11).

Une autre conséquence de (29.9) est de transformer la seconde des équations (26.7) en

$$\frac{dW_{(y)}}{ds} = -U_y \frac{dx}{ds} + \left( \frac{1}{A_{yy}} - V_y \right) \frac{dy}{ds}.$$

Multiplions ceci soit par B, soit par A et intégrons. Il vient, eu égard aux propriétés (25.2 et 3)

$$\left. \begin{aligned} \oint B dW_{(y)} &= -U_y I_{xy} + \left( \frac{1}{A_{yy}} - V_y \right) I_{yy} \\ \oint A dW_{(y)} &= -U_y I_{xx} + \left( \frac{1}{A_{yy}} - V_y \right) I_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (29.10)$$

Cependant l'intégration par parties des premiers membres et l'utilisation des équations du type (25.1) fournissent encore

$$\oint B dW_{(y)} = (W_{(y)}, y - y_g) = 0$$

$$\oint A dW_{(y)} = (W_{(y)}, x - x_g) = 0.$$

Les conclusions à tirer des équations (29.10) sont alors

$$U_y = 0 \quad \text{et} \quad V_y = (A_{yy})^{-1}. \quad (29.11)$$

Il en résulte que  $W_{(y)}$  se réduit à une constante et celle-ci doit être nulle pour que  $W_{(y)}$  soit orthogonal au mode de translation. Ceci confirme bien le résultat (29.8).

On ne peut conclure, par analogie avec le cas de la section précédente, que la nullité de tous les  $V_i$  implique celle de tous les  $Y_r$ . Le calcul de la seconde des expressions (7.12) à l'aide de (7.2) puis d'une intégration par parties avec utilisation des lois (29.5 et 6) fournit seulement

$$Y_r = A_{yy}(\varphi_{(r)}, i_{xy}(x - x_g) + i_{yy}(y - y_g)). \quad (29.12)$$

### 30. Les lois de libération complète des gauchissements $W_{(i)}$ .

Dans l'hypothèse où la répartition  $a(s)$  est conforme aux lois (28.5 et 6) assurant la libération des gauchissements propres en torsion, examinons la possibilité d'obtenir simultanément que

tous les  $U_i$  et tous les  $V_i$  soient nuls. Dans ce cas tous les gauchissements  $W_{(i)}$  deviennent des gauchissements libres. Ceci demande que l'on aie la possibilité de satisfaire pour de telles distributions de  $a(s)$  aux conditions

$$\oint a \frac{dx}{ds} dW_{(i)} = 0 \quad \text{et} \quad \oint a \frac{dy}{ds} dW_{(i)} = 0 \quad \text{tous } W_{(i)}. \quad (30.1)$$

Nous verrons qu'il suffira d'assurer les premières pour remplir automatiquement les secondes. Les premières conditions (30.1) reviennent à demander que pour tout gauchissement  $W$  orthogonal à  $(x - x_g)$  et  $(y - y_g)$

$$\oint a \frac{dx}{ds} dW = 0.$$

En effet les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  de son développement en série (29.4) sont alors nuls. A l'aide de deux multiplicateurs de Lagrange nous rétablissons le caractère complètement arbitraire de  $W$  en écrivant la condition sous la forme

$$\oint a \frac{dx}{ds} dW - \xi(W, x - x_g) - \eta(W, y - y_g) = 0. \quad (30.2)$$

Le premier terme sera de nouveau intégré par parties et les produits scalaires développés, ce qui permettra de conclure à partir du caractère arbitraire de  $W$  que

$$\frac{d}{ds} \left( a \frac{dx}{ds} \right) + \xi b(x - x_g) + \eta b(y - y_g) = 0 \quad (30.3)$$

$$- T_m \left( a \frac{dx}{ds} \right) + \xi S_m(x_m - x_g) + \eta S_m(y_m - y_g) = 0. \quad (30.4)$$

La distribution de  $a(s)$  obéissant à (28.6),  $ar_c$  est une constante le long d'un arc et par conséquent

$$\frac{d}{ds} \left( a \frac{dx}{ds} \right) = ar_c \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{r_c} \frac{dx}{ds} \right) = - \frac{a(x - x_c)}{\rho r_c} \quad (30.5)$$

où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \quad (30.6)$$

désigne la courbure de l'arc, positive quand la convexité est du côté de la normale  $\vec{n}$ . L'expression (2.7) de  $r_c$  a été utilisée pour trouver le résultat (30.5). Quand celui-ci est substitué dans (30.3) on est conduit à prendre

$$\eta = 0 \quad \text{et} \quad x_g = x_c \quad (30.7)$$

pour éviter que  $b(s)$  ne devienne infini en certains points. On trouve finalement que  $b(s)$  est exprimé par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$\begin{aligned} b &= -\frac{1}{\xi(x-x_c)} \frac{d}{ds} \left( a \frac{dx}{ds} \right) \\ &= -\frac{1}{\xi(y-y_c)} \frac{d}{ds} \left( a \frac{dy}{ds} \right) = \frac{1}{\xi} \frac{a}{\rho r_c}. \end{aligned} \quad (30.8)$$

Appliquons maintenant l'opérateur  $T_m$  à l'identité

$$\frac{a}{y-y_c} \frac{dy}{ds} = \frac{a}{x-x_c} \frac{dx}{ds} + \frac{ar_c}{(x-x_c)(y-y_c)}.$$

Comme la relation (28.5) est supposée satisfaite, il vient

$$\frac{1}{y_m-y_c} T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right) = \frac{1}{x_m-x_c} T_m \left( a \frac{dx}{ds} \right).$$

Il en résulte en substituant (30.7) dans (30.4) que la section d'une lisse est aussi fournie par l'une ou l'autre des expressions

$$S_m = \frac{1}{\xi(x_m-x_c)} T_m \left( a \frac{dx}{ds} \right) = \frac{1}{\xi(y_m-y_c)} T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right). \quad (30.9)$$

Une conséquence des lois (30.8 et 9) est que

$$\xi(y-y_c, 1) = -\oint d \left( a \frac{dy}{ds} \right) + \sum_m T_m \left( a \frac{dy}{ds} \right) = \oint a \frac{dy}{ds} d(1) = 0$$

et par conséquent

$$y_g = y_c. \quad (30.10)$$

Enfin, et la symétrie des lois le laissait déjà prévoir, les secondes des conditions (30.1) sont vérifiées. Il suffit à cet effet de se servir

d'une intégration par parties et de la seconde des égalités dans (30.8) et (30.9)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \oint a \frac{dy}{ds} dW_{(i)} &= \sum_m W_{(i)m} S_m (y_m - y_g) + \oint W_{(i)} b (y - y_g) ds \\ &= (W_{(i)}, y - y_g) = 0. \end{aligned}$$

Le paramètre  $\xi$ , auquel les valeurs de  $b$  et de  $S_m$  sont inversement proportionnelles, est lié aux aires réduites et aux moments d'inertie de la section. En effet nous avons par exemple en nous servant de (30.7 et 10) et des lois trouvées

$$\begin{aligned} \xi I_{xx} = \xi (x - x_c, x - x_c) &= - \oint (x - x_c) d \left( a \frac{dx}{ds} \right) \\ &+ \sum_m (x_m - x_c) T_m \left( a \frac{dx}{ds} \right) = \oint a \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 ds = A_{xx}. \end{aligned}$$

Ce résultat et les autres établis de façon similaire peuvent être condensés dans les relations de proportionnalité

$$\xi = \frac{A_{xx}}{I_{xx}} = \frac{A_{xy}}{I_{xy}} = \frac{A_{yy}}{I_{yy}}. \quad (30.11)$$

Il est aussi clair, suivant les résultats des sections précédentes, que

$$W_{(x)} \equiv 0 \quad W_{(y)} \equiv 0 \quad W_{(c)} \equiv 0 \quad (30.12)$$

$$U_x = \frac{1}{A_{xx}} \quad U_y = V_x = \frac{1}{A_{xy}} \quad V_y = \frac{1}{A_{yy}}. \quad (30.13)$$

En résumé : Quand les distributions d'épaisseur et les sections des lisses sont choisies de façon à satisfaire aux lois (28.5 et 6) et (30.8 et 9), le centroïde, le centre de Bernoulli et le centre de flexion de de Saint Venant sont confondus. Les trois gauchissements de de Saint Venant sont nuls et les flux de cisaillement de Bernoulli et de Saint Venant sont identiques. Les déformations dues aux efforts tranchants deviennent inversement proportionnelles aux aires réduites. L'approximation de Bernoulli-de Saint Venant devient correcte sous des répartitions arbitraires de charges transversales, sous la seule condition qu'elle soit compatible avec les données aux extrémités. De toute façon les équations normales (27.9) qui gouvernent les corrections à cette

approximation peuvent être intégrées sans seconds membres. On observera qu'il n'y aura pas de corrections dues aux effets d'extrémité si une section terminale n'est pas chargée axialement ou est parfaitement encastrée.

Tous les gauchissements propres sont libres à l'exception des deux modes de flexion. La forme de ces derniers est encore invariante mais on établit facilement que leur valeur propre généralisée est donnée par la loi

$$\mu^2 = (1 - \epsilon)\xi. \quad (30.14)$$

### 31. La construction pratique de sections qui ne gauchissent pas.

Il s'impose de discuter la réalisation pratique des lois de libération complète trouvée pour les gauchissements  $W_{(\xi)}$ .

Prenons d'abord le cas d'un caisson monocellulaire. Pour celui-ci

$$a = k/r_c \quad (31.1)$$

où  $k$  est une constante liée à la rigidité de torsion

$$J = I_c = \oint ar_c^2 ds = k \oint r_c ds = 2\Omega k. \quad (31.2)$$

Cette constante doit donc être positive ainsi que  $r_c$  et ceci limite le choix de  $C$  aux points intérieurs du caisson s'il est convexe et à un domaine encore plus restreint s'il n'est pas convexe partout. L'épaisseur équivalente résistant aux tensions axiales doit obéir à la loi

$$b = \frac{1}{\xi} \frac{a}{\rho r_c} = \frac{k}{\xi} \frac{1}{\rho r_c^2} \quad (31.3)$$

où, selon (30.11)  $\xi$  est une grandeur positive fixée par un moment d'inertie désiré. Il s'en suit que la courbure doit être partout positive et le caisson convexe.

En un point anguleux une section concentrée de lisse est requise. Elle peut être calculée par l'équation (30.9) mais aussi,



d'une façon plus instructive, comme cas limite de (31.3). Soit (fig. 6)  $\phi$  l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{CM}$ , où M est le point anguleux, et considérons le contour anguleux comme la limite d'un contour avec tangente à rotation continue, lorsque la courbure devient infinie en M. On peut écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{ds} \quad \text{et} \quad \int_{M_1}^{M_2} b ds = \frac{k}{\xi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{r_c^2}.$$

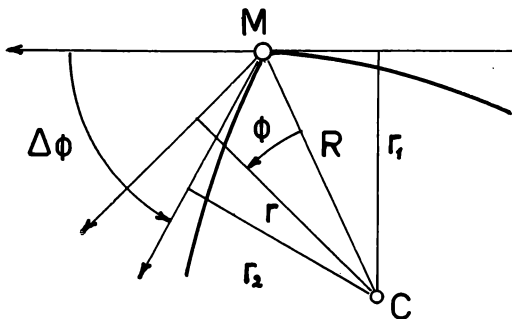


FIG. 6.

A la limite on fait tendre les points  $M_1$  et  $M_2$ , qui encadrent M, vers ce dernier. Le membre de gauche tend alors vers la section de lisse concentrée ; le membre de droite peut être évalué à l'aide de la relation

$$r_c = R \cos \phi$$

d'où

$$S_m = \frac{k}{R^2 \xi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\cos^2 \phi} = \frac{k}{R^2 \xi} (\tan \phi_2 - \tan \phi_1). \quad (31.4)$$

Ce résultat est le même que celui fourni par (30.9) ; il est aisé de s'en convaincre à l'aide des relations

$$x_m - x_c = R \cos \omega \quad \frac{dx}{ds} = -\sin(\omega + \phi)$$

où  $\omega$  est l'angle que fait  $\vec{CM}$  avec l'axe  $ox$ . Une formulation encore plus claire, parce que intrinsèque, de (31.4) s'obtient par la transformation

$$\tan \phi_2 - \tan \phi_1 = \frac{\sin (\phi_2 - \phi_1)}{\cos \phi_1 \cos \phi_2}$$

d'où

$$S_m = \frac{k}{\xi} \frac{\sin (\phi_2 - \phi_1)}{r_1 r_2}. \quad (31.5)$$

Pour les sections multicellulaires une méthode simple consiste à superposer les sections calculées pour des éléments monocellulaires « partiels ». Le centre C (qui est également centroïde et centre K) étant choisi, on fait choix de P mailles indépendantes de la section, qui ne sont pas nécessairement les circuits élémentaires de la section 22. Chaque maille constitue un caisson monocellulaire partiel pour lequel on prend les lois

$$a_t(s) = \frac{k_t}{r_c} \quad b_t(s) = \frac{k_t}{\xi} \frac{1}{\rho r_c^2} \quad S_{m,t} = \frac{k_t}{\xi} \frac{\sin (\phi_2 - \phi_1)}{r_1 r_2}.$$

Là où les caissons partiels ont des arcs et des nœuds communs, on superpose les sections ainsi calculées. Pour que la superposition satisfasse aux lois générales le paramètre  $\xi$  doit être le même pour tous les caissons partiels.

Outre le choix de C et de  $\xi$ , on dispose des P paramètres  $k_t$  pour modifier à volonté et dans certaines limites la répartition des éléments résistants.

En général la rigidité globale de torsion est une considération importante qui fixera le second membre d'une relation linéaire entre ces paramètres. En effet on voit facilement que la rigidité globale de torsion est

$$2 \sum_{t=1}^P k_t \Omega_t = J.$$

D'autre part le choix sera limité à ces combinaisons qui donnent partout, après superposition, des épaisseurs et des sections positives. Autrement dit les paramètres seront encore reliés par un système d'inégalités à vérifier. La situation la plus simple (schématisée à la figure 7) est celle où toutes les mailles peuvent être choisies convexes et contenant le centre C choisi dans leur domaine intérieur. Il est alors nécessaire et suffisant que tous les paramètres  $k_t$  soient positifs.

Le dessin d'un caisson, dont la section ne gauchit pas, n'est

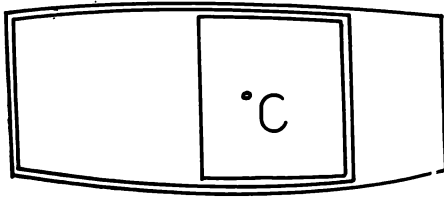


FIG. 7.

probablement pas un idéal absolu de conception. Car il n'épuise pas nécessairement les limites de résistance de ses éléments constitutifs. Il se peut même qu'il s'écarte sensiblement d'une conception tendant à réaliser partout ces limites.

Cependant le fait qu'il résiste sans les surtensions, dues au phénomènes d'incompatibilité de gauchissement, à l'application de charges arbitrairement distribuées et, en particulier, de charges concentrées n'est pas à sous-estimer. Savoir dans quelle mesure cette propriété est susceptible d'influencer la conception et le dessin est une question à examiner dans chaque cas particulier d'application.

---

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] H. REISSNER, Neuere probleme aus der Flugzeugstatik. *Z. F. F.* 17, N° 18, spt. 1926.
- [2] H. WAGNER, Festschrift Fünfundzwanzig jahre Technische Hochschule Danzig, 1929.
- [3] H. EBNER, Die beanspruchung duennwandiger kastentraeger auf Drillung bei behinderter querschnittswolbung. *Z. F. M.* 24, N° 23, 24, dec. 1933 aussi *N. A. C. A.* TM 744, 1934.
- [4] A. GRZEDZIELSKI, Sur un cas particulier de coopération des longérons d'aile. *Sprawozdania*, Inst. Rech. de l'Aér. Warsaw, 13, N° 1, 1934.

- [5] W. J. GOODEY, Shear stresses in hollow sections. *Aircraft Engineering*, N° 86, april 1936.
- [6] L. KIRSTE, Sur le calcul des poutres en caisson. *L'Aéronautique, (L'Aérotechnique)*, 19, N° 212, janvier 1937.
- [7] R. S. HATCHER, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 4, 1937.
- [8] P. KUHN, Stress analysis of beams with shear deformations of the flanges. *N. A. C. A.*, Report 608, 1937.
- [9] A. PFLUEGER, Beitrag zur ermittlung der schubspannungen in mehrzelligen hohlquerschnitten. *Ing. Arch.* 8, 1937.
- [10] H. EBNER und H. KOELLER, Zur berechnung des kraftverlaufes in versteiften zylinderschalen. *Luftfahrtforschung*, 14, N° 12, dec. 1937.
- [11] H. EBNER, Zur festigkeit von schalen- und rohrholzfügeln. *Luftfahrtforschung*, 14, 1937.
- [12] B. RADOMSKI, Bemerkungen zur ermittlung der schubflussverteilung in hohlquerschnitten. *Luftfahrtforschung*, 17, 1940.
- [13] D. WILLIAMS and M. FINE, Stress distribution in reinforced flat sheet, cylindrical shells and cambered box beams under bending. *A. R. C. Techn. Rep. R et M* 2099, 1940.
- [14] J. DRYMAEL, Some theoretical considerations on box beams. *Journ. R. Aeron. Soc.* XLV, N° 361, 1941.
- [15] H. NEUBER, *Z. A. M. M.*, avril 1941.
- [16] E. REISSNER, Least work solutions of shear lag problems. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8, N° 7, may 1941.
- [17] P. KUHN and P. T. CHIARITO, Shear lag in box beams. Methods of analysis and experimental investigations. *N. A. C. A. Report* 739, 1942.
- [18] W. S. HEMP, The monocoque wing I. Exact theory for a uniform symmetrical wing with an infinite number of rigid ribs. *A. R. C. Report* 6995, 1943.
- [19] F. B. HIDEBRAND, The exact solution of shear lag problems in flat panels and box beams assumed rigid in the transverse direction. *N. A. C. A. TN* 894, 1943.
- [20] J. N. GOODIER, *Journal of the Aeronautical Sciences*, Nov. 1944.
- [21] S. TIMOSHENKO, Theory of bending, torsion and buckling of thin-walled members of open cross section. *Journal of the Franklin Institute*, March-April-May 1945.
- [22] Th. VON KARMAN and W. Z. CHIEN, Torsion with variable twist. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 13, N° 10, Oct. 1946.
- [23] E. REISSNER, Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, IV, N° 3, Oct. 1946.
- [24] J. H. ARGYRIS and P. C. DUNNE, The general theory of cylindrical and conical tubes under torsion and bending loads. *Journ. R.*

*Aeron. Soc.* 51 (1947) pp. 199-269, 757-784, 844-930 ; 53 (1949) pp. 461-483, 558-620.

- [25] S. U. BENSOTER, Secondary stresses in thin walled beams with closed cross sections. *N. A. C. A.*, TN 2529, oct. 1951.
- [26] E. REISSNER, On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, XXIX, N° 2, July 1950.
- [27] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longerons couplés. *Bulletin N° 24 du Service Technique de l'Aéronautique*, Bruxelles 1951.
- [28] J. H. MICHELL, *Quart. J. of Math.*, 32, 1901. Voir aussi la référence suivante.
- [29] A. E. H. LOVE, *Mathematical theory of elasticity*, Dover, New-York, 1944, section 239.
- [30] B. FRAEIJIS DE VEUBEKE, Aspects cinématique et énergétique de la flexion sans torsion. Académie Royale de Belgique, Mémoires in 8°, XXIX-2, N° 1657, 1955.
-