

Rapport OF-3

Mai 1964.

Université de Liège  
Sciences Appliquées et Mathématiques  
Chemin des Chevreuils, Bat 852/4  
S-4000 LIÈGE

Régularisation des réticences et  
réduction du principe du maximum  
de Pontrjagin au calcul des variations.

• • • • •

B.M.Fraeijs de Veubeke  
Professeur aux Universités de Liège  
et de Louvain

### Sommaire

Le domaine de manoeuvrabilité d'un système dépendant de variables de contrôle discrètes ou limitées par des contraintes est représenté paramétriquement à l'aide de variables de contrôle libres. Cette opération régularise les réticences possibles et permet de décrire des trajectoires optimales, autrement inaccessibles, par des fonctions de contrôle continues par intervalle.

Le principe du maximum peut alors être démontré par la méthode des variations fortes de Weierstrass.

Un exemple simple montre la nécessité de la régularisation pour la validité du principe.

1. Un exemple simple d'évolution optimale dans un système contrôlé par tout ou rien.

Soit un système dont l'état est caractérisé par une seule coordonnée  $q(t)$  et gouvernée par l'équation différentielle

$$\frac{dq}{dt} = u \quad \text{avec} \quad u = \pm 1 \quad (1.1)$$

La variable indépendante est supposée étendue à l'intervalle fixe

$$t \in [0, T] \quad (1.2)$$

Nous supposons les conditions terminales du système spécifiées par

$$q(0) = A > 0 \quad q(T) = B > 0 \quad (1.3)$$

Le cas le plus intéressant étant celui où

$$T > A + B. \quad (1.4)$$

Alors l'époque  $t=A$  à laquelle le système peut atteindre  $q=0$  avec une valeur  $u=-1$  de la variable de contrôle est antérieure à l'époque  $t=T-B$  à partir de laquelle le système peut remonter de  $q=0$  à la valeur terminale  $q=B$  sous l'effet d'un contrôle  $u=+1$ .

On se propose de déterminer le programme des commutations de la variable de contrôle qui fasse évoluer le système avec

$$I = \int_0^T q^2 dt \quad \text{minimum} \quad (1.5)$$

en respectant les conditions terminales.

Si  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$  dénotent les époques successives des commutations et supposant qu'au départ  $u = -1$ , un calcul élémentaire donne :

$$T = A + (-1)^{N-1} B - 2 \left[ q(t_1) - q(t_2) \dots + (-1)^{N-1} q(t_N) \right] \quad (1.6)$$

$$3I = A^3 + (-1)^{N-1} B^3 - 2 \left[ q^3(t_1) - q^3(t_2) \dots + (-1)^{N-1} q^3(t_N) \right] \quad (1.7)$$

Un extrémum relatif de  $I$  considéré comme une fonction des variables  $q(t_i)$  liées par la relation (1.6) s'obtient à l'aide des relations

$$\frac{\partial}{\partial q(t_i)} (I - \lambda T) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.8)$$

où  $\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange. On trouve

$$q^2(t_i) = \lambda \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ou, puisqu'il faut avoir  $q(t_2) > q(t_1)$ ,  $q(t_3) < q(t_2) \dots$

$$q(t_i) = (-1)^i \sqrt{\lambda} \quad (1.9)$$

Il faut encore examiner si une telle solution vérifie la liaison (1.6) qui devient  $T = A + (-1)^{N-1} B + 2N\sqrt{\lambda}$  (1.10)

Pour un nombre pair de commutations il faut donc

$$T = A - B + 2N\sqrt{\lambda}$$

et, simultanément, puisque la dernière valeur de  $u$  est  $-1$

$$q(t_N) = \sqrt{\lambda} > B$$

ou encore, après élimination du multiplicateur

$$\frac{T - A + B}{2N} > B$$

Le numérateur étant positif par hypothèse cette inégalité peut éventuellement être satisfaite par  $N = 2, 4, \dots$  mais cesse certainement de l'être à partir d'une valeur suffisamment grande de  $N$ . Le nombre de solutions à commutations en nombre pair est donc limité.

Pour un nombre impair de commutations il faut simultanément

$$T = A + B + 2N\sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad q(t_N) = -\sqrt{\lambda} < B \quad (1.11)$$

Cette dernière inégalité est toujours satisfaite et, quel que soit  $N$  entier impair, on a  $\sqrt{\lambda} = (T - A - B) / 2N > 0$ . Il existe donc une solution pour tout nombre impair de commutations.

Toutes les solutions constituent des minima relatifs de  $I$ .  
En effet pour une solution voisine

$$q(t_i) = (-1)^i (\sqrt{\lambda} + \varepsilon_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

la condition (1.6) spécifiant, la durée, impose, eu égard à (1.10)  
la restriction

$$\sum_1^N \varepsilon_i = 0 \quad (1.11)$$

tenant compte de celle-ci, on trouve

$$3I = 3I_m + 6\sqrt{\lambda} \left( \sum_1^N \varepsilon_i^2 \right) + 2 \sum_1^N \varepsilon_i^3$$

avec

$$I_m = \frac{1}{3} \left[ A^3 + (-1)^{N-1} B^3 + 2N(\sqrt{\lambda})^3 \right] \quad (1.12)$$

la valeur de  $I$  donnée par la solution (1.9). Par conséquent,  
pour autant que les  $\varepsilon_i$  soient pris suffisamment petits :

$$I > I_m$$

Dans le cas du nombre impair de commutations, tirons la  
valeur du multiplicateur de (1.11) pour le substituer dans (1.12)

$$I_m = \frac{1}{3} \left[ A^3 + B^3 + \frac{(T-A-B)^3}{4N^2} \right]$$

Cette équation montre que le minimum relatif est lui-même  
une fonction décroissante du nombre de commutations.

L'optimum absolu

$$I_m = \frac{1}{3} (A^3 + B^3)$$

constitue pour le système une limite inaccessible.

C'est un cas simple d'évolution optimale "réticente". Plus  
généralement la "réticence" (chattering) peut être définie comme  
une évolution optimale limite inaccessible parce que possédant  
au moins un point d'accumulation de discontinuités dans une au  
moins des variables de contrôle.

Il est évident que la réticence du système envisagé  
dans l'exemple précédent peut être levée en permettant à la  
variable de contrôle d'assumer également la valeur zéro. L'évolu-  
tion optimale consiste alors à contrôler le système par  $u = -1$

jusqu'à l'époque  $t = A$  où  $q = 0$ , puis par  $u = 0$  en vue de maintenir  $q = 0$  jusqu'en  $t = T-B$ , enfin par  $u = +1$  pour rejoindre la valeur terminale spécifiée.

La trajectoire optimale est alors "régularisée" dans le sens que la fonction de contrôle  $u(t)$  réintègre la classe des fonctions continues par intervalles.

Plus généralement on pourrait espérer régulariser l'évolution optimale d'un système réticent en permettant aux variables de contrôle à valeurs discrètes d'assumer toutes les valeurs comprises entre leurs bornes supérieure et inférieure. Mais cette méthode n'est applicable qu'aux systèmes dont les équations d'évolution dépendent linéairement des variables de contrôle. Une méthode générale, applicable aux cas non-linéaires, est proposée au paragraphe 3.

La régularisation est intéressante à plusieurs titres. Elle s'avèrera nécessaire pour déterminer l'évolution optimale par le principe du maximum de Pontrjagin qui sinon, peut conduire à des conclusions erronées. D'autre part, elle rendra la démonstration même du principe de Pontrjagin accessible aux méthodes classiques du calcul des variations.

Une analyse de l'évolution optimale du système régularisé permettra toujours de déterminer a posteriori s'il y a réticence par rapport à la formulation primitive. Autrement dit l'opération de régularisation ne comportera pas de perte d'information.

## 2. Formulation Canonique d'un problème d'évolution optimale.

Soient  $q_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, n$

les variables d'état du système. La variable indépendante  $t$  est habituellement le temps mais pourrait aussi bien dénoter toute variable dont la croissance est monotone entre l'état initial et l'état final.

Un ensemble de valeurs  $(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = (q, t)$  qui se correspondent sera appelé une "phase" du système. L'évolution sera régie par des équations différentielles simultanées

$$\frac{dq_i}{dt} = f_{i,k}(q, t; v) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ k = A, B, C, \dots \\ v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \end{array} \quad (2.1)$$

Dans cette formulation il est supposé que l'évolution peut dépendre de contrôles digitaux, c'est-à-dire de variables susceptibles seulement de valeurs discrètes.

Le nombre de combinaisons admises pour ces contrôles digitaux est supposé fini; les combinaisons rangées dans un certain ordre et indexées alphabétiquement (A, B, C, ...).

Les autres variables de contrôle ( $v_1, v_2, \dots, v_m$ ) dont dépend l'évolution sont du type à "course continue".

Nous entendons par là que les valeurs admissibles d'une variable  $v_r$  occupent un intervalle  $[a_r, b_r]$  de l'axe réel.

S'il s'agit de l'intervalle entier  $[-\infty, +\infty]$  nous dirons que le contrôle est "libre"; ce cas se présente fréquemment quand le contrôle a la nature d'un angle par rapport auquel les fonctions  $f_{i,K}$  sont périodiques.

Tant que les "butées"  $a_r$  et  $b_r$  sont constantes ou fixées par la seule combinaison digitale K utilisée, des transformations analytiques élémentaires du genre

$$v_r = \frac{1}{2}(b_r + a_r) + \frac{1}{2}(b_r - a_r) \cos \alpha_r \quad (2.2)$$

ramènent la formulation de l'évolution au type

$$\frac{dq_i}{dt} = g_{i,K}(q, t; \alpha) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ K = A, B, C, \dots \\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \end{array} \quad (2.3)$$

qui ne dépend plus <sup>que</sup> de contrôles digitaux et libres.

Le cas où il y a interdépendance des contrôles  $v_r$  est plus délicat. Moyennant une redéfinition éventuelle on s'arrangera pour obtenir une chaîne dans laquelle les butées  $a_r$  et  $b_r$  ne dépendent que des contrôles  $v_s$  pour  $s < r$ .

L'application successive des transformations (2.2) conduit alors de nouveau à une formulation de type (2.3).

Donnons en deux exemples.

a. Orientation de la poussée d'une fusée dans l'espace.

Considérée comme une variable de contrôle et repérée dans un référentiel trirectangle, cette orientation s'exprime à l'aide de cosinus directeurs  $(l, m, n)$  liés par la relation  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . On la mettra sous la forme prévue en consi-

dérant que

$$l \in [-1, +1] \quad \text{et donc par (2.2)}$$

$$l = \cos \alpha_1$$

Ensuite,  $l$  étant choisi,

$$m \in [-\sin \alpha_1, +\sin \alpha_1] \quad \text{d'où}$$

$$m = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2$$

et par conséquent

$$m = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$$

b. Contrôle d'une propulsion électrique.

La figure montre le domaine auquel les paramètres :  
 c vitesse effective d'éjection  
 m débit massique du fluide éjecté  
 sont normalement restreints; en particulier l'existence d'une  
 borne supérieure  $\bar{p}$  à la puissance  $\frac{1}{2} m c^2$  du système propulsif.

Il s'agit d'obtenir une représentation de ce domaine à l'aide de variables de contrôle digitales ou libres afin d'étudier les performances optimales d'un véhicule. Autrement dit ces contrôles sont purement analytiques et ne préjugent en rien de la réalisation technique réelle du contrôle propulsif.

On divisera par exemple le domaine en deux parties A et B distinguées par une variable digitale pour tenir compte du changement de dépendance analytique des butées sur le débit massique.

Dans le domaine A, où les butées sont fixes

$$c = \sqrt{2\bar{p}/m} \frac{1 - \cos \alpha_1}{2} \quad m = \bar{m} \frac{1 - \cos \alpha_2}{2}$$

Dans le domaine B la butée supérieure de  $m$  dépend de  $c$ ; on écrira

$$c = \sqrt{2\bar{p}/m} \frac{1 - \cos \alpha_3}{2} + \bar{c} \frac{1 + \cos \alpha_3}{2}$$

$$m = \frac{2\bar{p}}{c^2} \frac{1 - \cos \alpha_4}{2}$$

avec la valeur de  $c$  précédente.

L'évolution dépendra des contrôles propulsifs à travers les variables  $m$  et  $c$ . Pour le domaine  $A$  on aura des fonctions d'évolution  $f_{1,A}$  qui dépendront des contrôles libres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , pour le domaine  $B$  des  $f_{1,B}$  qui dépendront de  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$ .

Soient

$$t = t(x) \quad q_i = q_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

les équations paramétriques d'une trajectoire possible du système.

Le "paramètre descriptif"  $x$  est de croissance monotone stricte et, sans restrictions, on peut lui assigner un intervalle de variation fixe  $[a, b]$ . Les phases initiale et finale du système seront en conséquence notées :

$$\begin{aligned} t(a) \quad q_i(a) \\ t(b) \quad q_i(b) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La fonction  $t(x)$  sera supposée analytique et, puisque monotone croissante :

$$t' = \frac{dt}{dx} \geq 0 \quad x \in [a, b] \quad (2.5)$$

(L'égalité à zéro sur un intervalle fini de variation de  $x$  permet de traiter comme extrémals régulières des évolutions comportant des discontinuités temporelles comme les impulsions ou le fonctionnement des fusées en étages).

En dehors de ces restrictions et l'imposition éventuelle des valeurs terminales  $t(a)$  et  $t(b)$  le choix de  $t(x)$  est arbitraire. Son caractère analytique permet d'attribuer aux fonctions  $q_i(x)$  les mêmes caractères de continuité et de dérivabilité qui seraient reconnus aux fonctions  $q_i(t)$ .

Les conditions aux limites sont mises sous la forme

$$U_y(q(a), t(a), q(b), t(b)) = 0 \quad y = 1, 2, \dots, p \leq 2n+1 \quad (2.6)$$

et la grandeur à rendre minimum est également envisagée comme une fonction

$$I(q(a), t(a), q(b), t(b)) = 0 \quad (2.7)$$



des phases terminales du système.

Cette formulation a un caractère très général. En effet si les conditions (2.6) ou la fonction  $I$  à rendre minimum dépendaient d'une ou de plusieurs fonctionnelles du type général

$$J_z = \int_{t(a)}^{t(b)} F_{z,k}(q, \dot{q}, t; \alpha) dt = \int_a^b F_{z,k}(q, g_k(q, t; \alpha), t; \alpha) t' dx$$

on introduirait des coordonnées  $q_z$  additionnelles, gouvernées par les équations

$$\frac{dq_z}{dt} = F_{z,k}(q, g_k(q, t; \alpha), t; \alpha) = g_{z,k}(q, t; \alpha) \\ z = n+1, \dots, n^*$$

et ramènerait ainsi les fonctionnelles

$$J_z = q_z(b) - q_z(a)$$

à de simples différences de valeurs terminales. En ajoutant aux conditions (2.6)

$$q_z(a) = 0 \quad z = n+1, \dots, n^*$$

ces fonctionnelles se réduisent encore à  $J_z = q_z(b)$ .

Ainsi, par une simple extension de l'ordre du système, les problèmes de minimum comportant des fonctionnelles et des conditions isopérimétriques peuvent être ramenés à la formulation envisagée.

### 3. Régularisation.

Pour une phase déterminée, un choix  $K$  des combinaisons digitales et un ensemble de valeurs des contrôles libres déterminent les coordonnées  $g_{i,k}(q, t; \alpha)$  d'un point  $\underline{P}$  dans l'espace des vitesses de phase -  $\dot{q}_i = dq_i/dt$ .

Appelons, dans la terminologie de CONTENSOU,<sup>3</sup> "domaine de manoeuvrabilité du système" dans la phase considérée, l'ensemble des points  $\underline{P}$  associés aux contrôles possibles. Nous supposerons ce domaine borné.

Examinons d'abord l'effet d'un changement dans le choix de la combinaison digitale, les contrôles libres étant considérés comme des paramètres.

Soient A et B les points du domaine de manoeuvrabilité associés aux combinaisons digitales de même nom.

Utilisons la combinaison A durant un intervalle  $\Delta t_A > 0$ , ensuite la combinaison B durant un intervalle  $\Delta t_B > 0$  et passons à la limite  $\Delta t_A \rightarrow 0$  et  $\Delta t_B \rightarrow 0$  avec

$$\lim \frac{\Delta t_A}{\Delta t_A + \Delta t_B} = \xi_{AB} \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Si les fonctions  $g_{i,A}$  et  $g_{i,B}$  sont continues ainsi que leurs dérivées partielles premières par rapport aux  $q_i$  et à  $t$ , un calcul élémentaire montre que la vitesse d'évolution du système correspond aux valeurs

$$\frac{dq_i}{dt} = \xi_{AB} g_{i,A} + (1 - \xi_{AB}) g_{i,B}$$

Considérant  $\xi_{AB}$  comme un nouveau contrôle à course continue et le transformant en contrôle libre  $\alpha_{AB}$ :

$$\xi_{AB} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha_{AB}) \quad (3.2)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{dq_i}{dt} = g_{i,AB} \quad \text{où}$$

$$g_{i,AB} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha_{AB}) g_{i,A} + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_{AB}) g_{i,B} \quad (3.3)$$

Ce procédé revient à prévenir une réticence du système devant le choix entre l'utilisation des combinaisons digitales A et B et étend sa manoeuvrabilité à tout le segment de droite joignant les points A et B.

De même en construisant les fonctions

$$g_{i,ABC} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha_{ABC}) g_{i,AB} + \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha_{ABC}) g_{i,C}$$

qui dépendent du nouveau contrôle libre  $\alpha_{ABC}$ , la manoeuvrabilité est étendue à tout point de l'aire du triangle ABC.

Après épuisement des combinaisons digitales on obtient

ainsi des fonctions d'évolution notées

$$g_i^*(q, t; \alpha^*) \quad \alpha^* = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \alpha_{AB}, \alpha_{ABC}, \dots) \quad (3.4)$$

qui ne dépendent plus que de contrôles libres.

Pour des valeurs toujours paramétriques des  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  le domaine de manoeuvrabilité est par construction un polyèdre convexe. (Si certains des points de la suite A, B, C... étaient reconnus se trouver toujours à l'intérieur du polyèdre, les combinaisons digitales correspondantes pourraient être supprimées sans restreindre la manoeuvrabilité. Cette situation pourrait indiquer une conception technique défectueuse des contrôles utilisés).

Faisons maintenant varier les paramètres  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  et supposons que les  $g_{i,k}(q, t; \alpha)$  et donc aussi les  $g_i^*(q, t; \alpha^*)$

en soient des fonctions continues. Les sommets (A, B, C...) du polyèdre occupent des positions variables, généralement liées entre-elles. Le domaine de manoeuvrabilité complet reste à connexion simple mais peut avoir perdu sa propriété de convexité. Ceci introduit de nouvelles possibilités de réticence. Elles sont automatiquement éliminées par la construction des fonctions d'évolution finales

$$\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)g_i^*(q, t; \alpha^*) + \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)g_i^*(q, t; \bar{\alpha}^*) = g_i(q, t; \beta) \quad (3.5)$$

étendant la manoeuvrabilité à tout point du segment PQ, où P est un point arbitraire associé à un ensemble  $\alpha^*$  de valeurs des contrôles (3.4) et Q un autre point arbitraire, associé à l'ensemble indépendant de valeurs  $\bar{\alpha}^*$  des mêmes contrôles.

Les fonctions d'évolution finales ne dépendent plus que d'un ensemble

$$\beta = (\varphi, \alpha^*, \bar{\alpha}^*) \quad (3.6)$$

de contrôle, libres.

D'un point de vue géométrique la régularisation des réticences apparaît comme une paramétrisation du plus petit domaine convexe contenant le domaine de manoeuvrabilité

primitif; une opération dont la nécessité a été reconnue par  
CONTENSOU.<sup>3</sup>

La paramétrisation ici proposée a l'avantage de permettre l'application des méthodes classiques du calcul des variations, les variables de contrôle n'étant soumises à aucune contrainte.

La redondance de la représentation n'est pas un inconvénient. Les règles générales obtenues pour le choix des contrôles optimaux permettent d'éviter la régularisation complète préalable dans les applications.

#### 4. Hamiltonien de PONTRJAGIN et système adjoint.

Les équations d'évolution régularisées s'écrivent

$$\frac{dq_i}{dt} = g_i(q, t; \beta) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

Pour une représentation paramétrique (2.4) des trajectoires il est préférable de les mettre sous la forme

$$[G]_i = q_i' - t' g_i(q, t; \beta) = 0 \quad (4.2)$$

où l'accent dénote la dérivation par rapport au paramètre descriptif  $x$ .

Formons à l'aide de multiplicateurs variables  $\lambda_i(x)$  la grandeur

$$G = \sum_1^n \lambda_i [G]_i = \sum_1^n \lambda_i q_i' - t' H \quad (4.3)$$

$$\text{où} \quad H(q, t; \beta; \lambda) = \sum_1^n \lambda_i g_i(q, t; \beta) \quad (4.4)$$

est le hamiltonien de PONTRJAGIN.<sup>1</sup>

Le long de toute trajectoire réelle, c'est-à-dire gouvernée par les équations d'évolution, la grandeur  $G$  est nulle quels que soient les  $\lambda_i(x)$ . Considérons alors un segment de trajectoire  $x \in [u, v]$  décrit avec des contrôles  $\beta_r(x)$ , fonctions continues, et une trajectoire faiblement variée correspondant aux fonctions continues:  $\beta_r(x) + \delta\beta_r(x)$ .

Pour chaque trajectoire la fonction  $G$  est nulle et donc

$$\delta \int_u^v G dx = 0 \quad (4.5)$$

Le développement de cette variation fournit

$$\int_u^v \left[ \sum_i^n \lambda_i \delta q_i' - H \delta t' - t' \delta H \right] dx = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{où } \delta H = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t + \sum_z \frac{\partial H}{\partial \beta_z} \delta \beta_z \quad (4.7)$$

Par une intégration par parties sur (4.6)

$$\left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_u^v - \sum_i \int_u^v \left( \lambda_i' + t' \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i dx - \int_u^v \delta \varphi dx = 0 \quad (4.8)$$

$$\text{où } \delta \varphi = \left( t' \frac{\partial H}{\partial t} - H' \right) \delta t + t' \sum_z \frac{\partial H}{\partial \beta_z} \delta \beta_z \quad (4.9)$$

Tandis que les variations  $\delta t(x)$  et  $\delta \beta_z(x)$  sont indépendantes et arbitraires, les variations  $\delta q_i(x)$  sont restreintes par les équations d'évolution. L'effet de ces variations dépendantes est éliminé en imposant aux multiplicateurs, jusqu'ici arbitraires, de vérifier les équations d'évolution

$$\lambda_i' = -t' \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.10)$$

Ce sont les équations du "système adjoint". Elles sont conjuguées au sens de Hamilton des équations d'évolution qui, en vertu de la définition (4.4), s'écrivent aussi

$$q_i' = t' \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.11)$$

De (4.8) et (4.10) découle la propriété

$$\sum_i \lambda_i(v) \delta q_i(v) - H(v) \delta t(v) - \sum_i \lambda_i(u) \delta q_i(u) + H(u) \delta t(u) = \int_u^v \delta \varphi dx \quad (4.12)$$

Ce sont les relations terminales de variations faible d'un segment régulier.

### 5. Relations terminales de variation faible.

Généralisons la relation (4.12) pour tenir compte de discontinuités simples dans les fonctions de contrôle  $\beta_r(x)$ .

An cas où de telles discontinuités ne se produisent qu'en un seul point  $x = c$  de l'intervalle  $[a, b]$ , la trajectoire de référence est constituée de deux arcs réguliers de  $x = a$  à  $x = c - 0$  et de  $x = c + 0$  à  $x = b$ .

Une relation du type (4.12) peut être écrite pour chaque arc

$$\left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_a^{c-0} = \int_a^{c-0} \delta \varphi dx \quad (5.1)$$

$$\left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_{c+0}^b = \int_{c+0}^b \delta \varphi dx \quad (5.2)$$

En  $x = c$ , la continuité de la phase du système le long de la trajectoire de référence et de la trajectoire variée requiert

$$t(c-0) = t(c+0) = t(c) \quad q_i(c-0) = q_i(c+0) = q_i(c) \quad (5.3)$$

$$\delta t(c-0) = \delta t(c+0) = \delta t(c) \quad \delta q_i(c-0) = \delta q_i(c+0) = \delta q_i(c) \quad (5.4)$$

Il en résulte par addition de (5.1) et (5.2) l'apparition de termes

$$\sum_i \left[ \lambda_i(c-0) - \lambda_i(c+0) \right] \delta q_i(c)$$

contenant les variations dépendantes des coordonnées en  $x = c$ .

Pour les éliminer on exigera la continuité des multiplicateurs pour toute intégrale du système différentiel adjoint :

$$\lambda_i(c-0) = \lambda_i(c+0) \quad (5.5)$$

Notons que, par suite des discontinuités dans les contrôles, ceci n'entraîne pas nécessairement la continuité du hamiltonien.

L'addition des formules (5.1) et (5.2) se réduit alors à

$$\left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_a^b = \int_a^b \delta \varphi dx + [H(c-0) - H(c+0)] \delta t(c) \quad (5.6)$$

Dans le cas général d'une trajectoire de référence présentant un nombre fini de points  $x = c_m$ , où certains contrôles

sont discontinus, les relations terminales de variation faible se présentent sous la forme

$$\left[ \sum \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_a^b = \delta \psi \quad (5.7)$$

$$\delta \psi = \int_a^b \left\{ (t' \frac{\partial H}{\partial t} - H') \delta t + t' \sum_i \frac{\partial H}{\partial \beta_i} \delta \beta_i \right\} dx + \sum_m \left[ H(c_m - 0) - H(c_m + 0) \right] \delta t(c_m) \quad (5.8)$$

Le nombre de relations linéairement indépendantes est égal à l'ordre  $n$  du système. En effet, pour une trajectoire de référence  $(q(x), t(x))$  déterminée, les dérivées partielles  $\partial q_i / \partial q_j$  peuvent être considérées comme des fonctions connues de  $t$  :

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = a_{ij}(t) \quad (5.9)$$

et le système adjoint se présente sous la forme

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \sum_j a_{ji}(t) \lambda_j \quad (5.10)$$

d'un système différentiel linéaire et homogène d'ordre  $n$ , à coefficients continus par intervalles.

Il possède un système fondamental de  $n$  solutions continues (vérifiant donc les conditions (5.5)) linéairement indépendantes :

$$\lambda_{i(k)}(t) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (5.11)$$

auxquelles sont associées les hamiltoniens correspondants

$$H_{(k)} = \sum_i \lambda_{i(k)} q_i \quad (5.12)$$

Avec la notation

$$\lambda(t) = \det \left( \lambda_{i(k)} \right) \quad (5.13)$$

la formule de Jacobi-Liouville

$$\lambda(t) = \lambda(t(a)) \exp \left\{ - \int_{t(a)}^{t(x)} \left( \sum_i a_{ii}(t) \right) dt \right\} \quad (5.14)$$

qui découle de (5.10), montre que

$$\lambda(t(a)) \neq 0 \quad \text{entraîne} \quad \lambda(t(b)) \neq 0$$

Un système de  $n$  relations terminales de variation faible du type (5.7), construites à partir d'un système fondamental (5.11) de multiplicateurs, est alors complètement équivalent à un système fondamental d'intégrales des équations de perturbation dérivées de (4.2) :

$$\delta q_i' = \delta t' g_i(q(x), t(x); \beta_r(x)) + t' \left( \sum_j a_{ij} \delta q_j + a_i \delta t + \sum_r b_{ir} \delta \beta_r \right) \quad (5.15)$$

$$\text{où} \quad a_i = \frac{\partial g_i}{\partial t} \quad \text{et} \quad b_{ir} = \frac{\partial g_i}{\partial \beta_r} \quad (5.16)$$

sont également des dérivées partielles évaluées le long de la trajectoire de référence.

En particulier si l'on intègre les équations (5.10) à rebours, en prenant pour matrice  $\{\lambda_{i(r)}(t(b))\}$  la matrice identité, les relations terminales de variation faible (5.7) déterminent directement chaque perturbation  $\delta q_i(b)$  en fonction des perturbations initiales  $(\delta q(a), \delta t(a))$ , de la valeur de  $\delta t(b)$  et des petites perturbations de pilotage  $\delta \beta_r(x)$  et  $\delta t(x)$ .

## 6. Existence d'une contrainte terminale de variation faible pour une trajectoire optimale.

Pour une trajectoire de référence quelconque il est en général possible, par une perturbation de pilotage appropriée, de joindre deux points arbitraires des voisinages de  $(q(a), t(a))$  et  $(q(b), t(b))$ . En d'autres termes les relations (5.7) ne constituent pas des contraintes. Nous allons voir qu'une combinaison linéaire au moins de ces relations devient une contrainte si la trajectoire de référence est optimale.



Soit une trajectoire de référence optimale  $t=t^*(x)$ ,  $\beta_x = \beta_x^*(z)$  telle que les phases terminales  $(q^*(a), t^*(a))$  et  $(q^*(b), t^*(b))$  vérifient les conditions (2.6) et donnent à la fonction (2.7) une certaine valeur  $I^*$ . Les formes linéaires dans les variations terminales :

$$\sum_i \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(b)} \right)^* \delta q_i(b) + \left( \frac{\partial I}{\partial t(b)} \right)^* \delta t(b) + \sum_i \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(a)} \right)^* \delta q_i(a) + \left( \frac{\partial I}{\partial t(a)} \right)^* \delta t(a) = \delta I \quad (6.1)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial U_y}{\partial q_i(b)} \right)^* \delta q_i(b) + \left( \frac{\partial U_y}{\partial t(b)} \right)^* \delta t(b) + \sum_i \left( \frac{\partial U_y}{\partial q_i(a)} \right)^* \delta q_i(a) + \left( \frac{\partial U_y}{\partial t(a)} \right)^* \delta t(a) = \delta U_y \quad (6.2)$$

$$y = 1, 2, \dots, p$$

ont alors des coefficients bien déterminés par l'existence supposée des dérivées partielles des fonctions  $I$  et  $U_y$  pour les phases terminales considérées.

Nous dirons qu'une trajectoire faiblement variée de la trajectoire de référence est admissible, si elle vérifie aussi les conditions terminales (2.6); dans ce cas les formes (6.2) sont homogènes :

$$\delta U_y = 0 \quad y = 1, 2, \dots, p \quad (6.3)$$

Elles deviennent des contraintes terminales sur les variations que nous pouvons supposer linéairement indépendantes, sinon on n'en garderait qu'un ensemble linéairement indépendant.

De plus, la forme (6.1) sera considérée comme linéairement indépendante des formes (6.2), l'ensemble ayant alors le rang  $p + 1$ .

Il existera par conséquent un système de variations terminales satisfaisant à (6.3) et donnant à  $\delta I$  une valeur arbitrairement préassignée.

Si la forme (6.1) n'était qu'une combinaison linéaire des formes (6.2) les conditions (6.3) entraîneraient  $\delta I = 0$  et, indépendamment de toute considération de trajectoires admissibles, la grandeur  $I$  serait déjà rendue stationnaire par les conditions terminales imposées (problème dégénéré).

Aux contraintes (6.3) il faut maintenant ajouter les relations du type (5.7), exprimant les possibilités de réaliser un système de variations terminales par une trajectoire faiblement variée :

$$\left[ \sum_i \lambda_{i(k)} \delta q_i - H_{(k)} \delta t \right]_a^b = \delta \psi_{(k)} \quad (6.4)$$

$k = 1, 2, \dots, n$

Les premiers membres de ces relations sont des formes linéaires qui ne peuvent être toutes indépendantes des formes (6.1) et (6.2). En effet si le rang des formes (6.1), (6.2) et (6.4) était  $p+1+n$ , on pourrait toujours trouver un système de variations terminales satisfaisant à (6.3) et donnant à  $\delta I$  et aux  $\delta \psi_{(k)}$  des valeurs arbitraires.

Il existerait donc une trajectoire faiblement variée et admissible donnant à  $I$  une valeur à volonté inférieure ou supérieure à sa valeur de référence; la trajectoire de référence ne serait pas optimale.

Le rang des formes (6.1) et (6.3) étant  $p+1$ , il existe donc au moins une combinaison linéaire des relations (6.4) qui ne soit qu'une combinaison linéaire des formes (6.1) et (6.3). Une telle combinaison est une solution du système adjoint que nous indiquons par  $\lambda_i^{\circ}(x), H^{\circ}(x)$

$$\left[ \sum_i \lambda_i^{\circ} \delta q_i - H^{\circ} \delta t \right]_a^b = \delta \psi^{\circ} \quad (6.5)$$

$$\delta \psi^{\circ} = \int_a^b \left\{ (t' \frac{\partial H^{\circ}}{\partial t} - H^{\circ'}) \delta t + t' \sum_k \frac{\partial H^{\circ}}{\partial \beta_k} \delta \beta_k \right\} dx \quad (6.6)$$

$$+ \sum_m [H^{\circ}(c_m - 0) - H^{\circ}(c_m + 0)] \delta t(c_m)$$

Il existe donc des constantes  $\mu_0$  et  $\mu_y^{\circ}$  ( $y=1, 2, \dots, p$ ) non toutes nulles telles que :

$$\begin{aligned} \lambda_i^{\circ}(b) + \mu_0 \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(b)} \right)^* + \sum_1^p \mu_y^{\circ} \left( \frac{\partial U_y}{\partial q_i(b)} \right)^* &= 0 \\ - H^{\circ}(b) + \mu_0 \left( \frac{\partial I}{\partial t(b)} \right)^* + \sum_1^p \mu_y^{\circ} \left( \frac{\partial U_y}{\partial t(b)} \right)^* &= 0 \\ - \lambda_i^{\circ}(a) + \mu_0 \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(a)} \right)^* + \sum_1^p \mu_y^{\circ} \left( \frac{\partial U_y}{\partial q_i(a)} \right)^* &= 0 \\ H^{\circ}(a) + \mu_0 \left( \frac{\partial I}{\partial t(a)} \right)^* + \sum_1^p \mu_y^{\circ} \left( \frac{\partial U_y}{\partial t(a)} \right)^* &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

et par conséquent :

$$\delta\psi^0 + \mu_0 \delta I + \sum_i \mu_i^0 \delta u_i = \delta\psi^0 + \mu_0 \delta I = 0 \quad (6.8)$$

De cette dernière relation il résulte que si la constante  $\mu_0$  était nulle on aurait  $\delta\psi^0 = 0$ .

Alors (6.5) devient une relation homogène, c'est-à-dire une contrainte sur les variations terminales. Elle serait toutefois inopérante car en faisant  $\mu_0 = 0$  dans les équations (6.7) on voit que cette contrainte ne serait qu'une combinaison linéaire des contraintes (6.3); elle n'empêcherait pas l'existence d'une trajectoire faiblement variée admissible donnant à  $\delta I$  une valeur arbitraire. On en déduit que si la trajectoire de référence est optimale, il existe une solution  $\lambda_i^0$  du système adjoint vérifiant (6.7) avec une constante  $\mu_0$  non nulle.

Enfin, à toute trajectoire faiblement variée admissible doit correspondre  $\delta I = 0$ . Car si on avait  $\delta I > 0$  il suffirait de renverser le signe de toutes les variations, ce qui changerait aussi le signe de  $\delta\psi^0$ , pour obtenir une autre trajectoire faiblement variée admissible correspondant à  $\delta I < 0$ ;  $I^*$  ne serait pas un minimum relatif.

De (6.8) découle alors la condition

$$\delta\psi^0 = 0 \quad (6.9)$$

et (6.5) devient une contrainte de trajectoire

$$\left[ \lambda_i^0 \delta q_i - H^0 \delta t \right]_a^b = 0 \quad (6.10)$$

qui, eu égard à la valeur non-nulle de  $\mu_0$ , est linéairement indépendante des contraintes a priori (6.3).

Réciproquement, les conditions (6.7) et (6.9), impliquant (6.10), entraînent  $\delta I = 0$  si  $\mu_0$  n'est pas nul.

## 7. Contrôles optimaux. Continuité du Hamiltonien.

La condition (6.9) donne lieu à une application du lemme fondamental du calcul des variations.

Se rapportant à l'expression (6.6) de  $\delta\psi^\circ$  et notant que les variations  $\delta t(x)$  et  $\delta\beta_x(x)$  sont arbitraires et indépendantes, il vient pour une trajectoire optimale les conditions :

$$(H^\circ)' = t' \frac{\partial H^\circ}{\partial t} \quad (7.1)$$

$$H^\circ(c_m - 0) = H^\circ(c_m + 0) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial \beta_x} = 0 \quad (7.3)$$

Ces dernières demandent qu'en tout point de la trajectoire les contrôles soient choisis de façon à rendre le hamiltonien  $H^\circ$  stationnaire. Les conditions (7.2) limitent les possibilités de discontinuités dans les fonctions de contrôle en exigeant qu'elles respectent la continuité du hamiltonien. Enfin l'équation (7.1) ou son équivalent

$$\frac{dH^\circ}{dt} = \frac{\partial H^\circ}{\partial t} \quad (7.4)$$

est, comme on peut facilement s'en rendre compte en développant le premier membre, une conséquence des équations d'évolution

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H^\circ}{\partial \lambda_i^\circ} \quad (7.5)$$

des équations adjointes

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial H^\circ}{\partial q_i} \quad (7.6)$$

et des équations d'optimisation (7.3).

### 8. Conditions de transversalité.

Les équations différentielles du système adjoint étant homogènes dans les multiplicateurs, toute solution peut être multipliée par une constante arbitraire non-nulle. Le hamiltonien correspondant est alors multiplié par la même constante. Dans le cas du système  $(\lambda_i^\circ(x), H^\circ(x))$  cette opération conserve la validité des conditions (6.7) en

modifiant de la même façon l'échelle des multiplicateurs

$\mu_0$  et  $\mu_j^0$ .

On conviendra de normer une solution  $(\lambda_i^0(x), H^0(x))$  en donnant à la constante  $\mu_0$  la valeur unité.

Sous cette forme, nous appellerons les équations

$$\begin{aligned} -\lambda_i^0(b) &= \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(b)} \right)^* + \sum_1^p \left( \frac{\partial U_j}{\partial q_i(b)} \right)^* \mu_j^0 \\ H^0(b) &= \left( \frac{\partial I}{\partial t(b)} \right)^* + \sum_1^p \mu_j^0 \left( \frac{\partial U_j}{\partial t(b)} \right)^* \\ \lambda_i^0(a) &= \left( \frac{\partial I}{\partial q_i(a)} \right)^* + \sum_1^p \mu_j^0 \left( \frac{\partial U_j}{\partial q_i(a)} \right)^* \\ -H^0(a) &= \left( \frac{\partial I}{\partial t(a)} \right)^* + \sum_1^p \mu_j^0 \left( \frac{\partial U_j}{\partial t(a)} \right)^* \end{aligned} \quad (8.1)$$

les conditions de transversalité du problème.

Les conditions de transversalité et les conditions a priori (2.6) forment un système de  $2(n+1) + p$  équations pour la détermination des  $2n$  constantes d'intégration du système différentiel (7.5) et (7.6), des limites  $t(a)$  et  $t(b)$  de l'intégration et des  $p$  constantes inconnues  $\mu_j$ .

Une autre forme pratique des conditions de transversalité se présente lorsque les phases terminales sont données comme des fonctions de  $2(n+1) - p = s$  paramètres inconnus

$\omega_j$ .

La fonction  $I$  devient alors aussi une fonction de ces paramètres.

Ces conditions sont au nombre de  $s$

$$\frac{\partial}{\partial \omega_j} \left\{ \sum_i \lambda_i^0(b) q_i(b) - H^0(b) t(b) - \sum_i \lambda_i^0(a) q_i(a) + H^0(a) t(a) + I \right\} = 0 \quad (8.2)$$

et servent à déterminer les  $s$  paramètres.

### 9. Système de contraintes terminales de variation faible.

Dans les cas normaux une seule combinaison des relations terminales de variation faible (5.7) se transforme en contrainte terminale si la trajectoire est optimale. Cependant, comme le montrent des exemples, il peut arriver que pour d'autres combinaisons  $(\lambda_i^w, H^w)$  on ait aussi

$$\left[ \sum_i \lambda_i^w \delta q_i - H^w \delta t \right]_a^b = \delta \psi^w = 0 \quad w = 1, 2, \dots, k \leq n-1$$

Ce qui implique que les conditions (7.1), (7.2) et (7.3) soient aussi vérifiées le long de la trajectoire optimale par les hamiltoniens  $H^W$ .

Dans ce cas nous pouvons, par des combinaisons appropriées, séparer les contraintes en deux groupes. Un groupe

$$\left[ \sum_i \lambda_i^\gamma \delta q_i - H^\gamma \delta t \right]_a^b = 0 \quad \gamma = 1, 2, \dots, \rho \quad (9.1)$$

lié aux formes linéaires  $\delta U_\gamma$ , c'est-à-dire ne comportant que des combinaisons linéaires des conditions (6.3) et un groupe libre

$$\left[ \sum_i \lambda_i^\varepsilon \delta q_i - H^\varepsilon \delta t \right]_a^b = 0 \quad \varepsilon = 0, 1, 2, \dots, \sigma \quad (9.2)$$

constitué de formes linéairement indépendantes des conditions (6.3). Ce dernier groupe comporte (pour  $\varepsilon = 0$ ) la contrainte (6.10).

On notera que, par suite de la définition du groupe des  $(\lambda_i^\gamma, H^\gamma)$ , la solution

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \sum_{\gamma} \eta_\gamma \lambda_i^\gamma \quad (9.3)$$

du système adjoint, où  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\rho)$  désignant des constantes arbitraires, vérifie les conditions de transversalité (8.1) pour des valeurs appropriées des constantes  $\mu_\gamma^0$ . L'existence d'un groupe de contraintes  $(\lambda_i^\gamma)$  signifie donc que la solution  $(\lambda_i^0)$  vérifiant les conditions de transversalité, n'est pas unique mais de multiplicité  $\rho+1$ .

#### 10. Variations fortes et principe du maximum.

En un point  $x$ , ne coïncidant pas avec un point de discontinuité  $x = c_m$  des fonctions  $\beta_x = \beta_x^*(x)$ , considérons un segment infinitésimal de trajectoire

$$\delta q_i(x) = g_i(q^*(x), t^*(x); \beta(x)) \delta t(x) \quad (10.1)$$

décrit avec des contrôles  $\beta(x)$  quelconques et complétons la trajectoire par des variations faibles des segments

$[a, x-0]$  et  $[x+0, b]$  de l'optimale. Le long de ceux-ci, et pourvu que,  $\delta \beta_x(x-0) = \delta \beta_x(x+0)$ , on aura :

$$\left[ \sum_i \lambda_i^{(k)} \delta q_i - H^{(k)} \delta t \right]_a^{x-0} + \left[ \sum_i \lambda_i^{(k)} \delta q_i - H^{(k)} \delta t \right]_{x+0}^b = \delta \psi^{(k)} \quad (10.2)$$

Notons que les différences

$$\delta q_i(x+0) - \delta q_i(x-0) = \delta q_i(x)$$

$$\delta t(x+0) - \delta t(x-0) = \delta t(x)$$

représentent le segment infinitésimal de raccord, et que, par suite de la continuité des multiplicateurs le long de l'optimale:

$$\lambda_i^{(k)}(x-0) = \lambda_i^{(k)}(x+0) = \lambda_i^{(k)}(x)$$

$$H^{(k)}(x-0) = H^{(k)}(x+0) = H^{(k)}(x)$$

les relations (10.2) s'écrivent

$$\left[ \sum_i \lambda_i^{(k)} \delta q_i - H^{(k)} \delta t \right]_a^b = \delta \psi^{(k)} + [h^{(k)}(x) - H^{(k)}(x)] \delta t(x) \quad (10.3)$$

$$\text{où } h^{(k)}(x) = \sum_i \lambda_i^{(k)} q_i(q^*(x), t^*(x); \beta(x)) \quad (10.4)$$

dénotent les hamiltoniens correspondant aux contrôles  $\beta(x)$  arbitrairement distincts des contrôles de référence  $\beta^*(x)$ .

La trajectoire comporte maintenant une variation forte; en un point la vitesse d'évolution s'écarte dans une mesure finie de la vitesse d'évolution de référence.

Nous allons maintenant examiner le caractère admissible d'une telle trajectoire. Il suffit pour cela d'examiner la comptabilité entre les conditions (6.3) et les contraintes dérivées de (10.3). Les relations (10.3) qui ne se réduisent pas à des contraintes, c'est-à-dire pour lesquelles le terme  $\delta \psi$  n'est pas nul quelles que soient les perturbations de pilotage  $\delta t(x)$  et  $\delta \beta(x)$ , peuvent toujours être satisfaites a posteriori par de telles perturbations.

Les contraintes déduites de (10.3) se rangent dans les mêmes catégories que les contraintes de variation faible et ne s'en distinguent que par le second membre :

$$\left[ \sum_i \lambda_i^\gamma \delta q_i - H^\gamma \delta t \right]_a^b = [h^\gamma(x) - H^\gamma(x)] \delta t(x) \quad (10.5)$$

$$\gamma = 1, 2, \dots, p$$

$$\left[ \sum_i \lambda_i^\varepsilon \delta q_i - H^\varepsilon \delta t \right]_a^b = \left[ h^\varepsilon(x) - H^\varepsilon(x) \right] \delta t(x) \quad (10.6)$$

$$\varepsilon = 0, 1, 2, \dots, \sigma$$

Deux cas sont à distinguer.

Dans le cas normal où la solution des conditions de transversalité est unique; la catégorie (10.5) est vide.

La trajectoire à variation forte est toujours admissible car les formes (10.6) étant linéairement indépendantes des formes  $\delta U_y$ , (10.3) et (10.6) forment un système de rang  $p + \sigma$  qui admet toujours une solution.

Mais alors il résulte des conditions de transversalité (8.1), de (6.3) et de (10.6) pour  $\varepsilon = 0$ , que :

$$\delta I + \sum_i \mu_i \delta U_y + \left[ \sum_i \lambda_i^\circ \delta q_i - H^\circ \delta t \right]_a^b$$

$$= \delta I + \left[ h^\circ(x) - H^\circ(x) \right] \delta t(x) = 0$$

La condition nécessaire  $\delta I \geq 0$  pour que la trajectoire de référence soit optimale, se traduit par

$$\left[ H^\circ(x) - h^\circ(x) \right] \delta t(x) \geq 0$$

ou, puisque  $\delta t(x) > 0$ , par

$$H^\circ(x) \geq h^\circ(x) \quad (10.7)$$

C'est le principe du maximum de Pontrjagin<sup>1</sup> : les contrôles optimaux sont en tout point de la trajectoire ceux qui donnent au hamiltonien  $h^\circ(x)$  sa valeur maximum.

Dans le cas où la catégorie (10.5) n'est pas vide, il n'existe pas de trajectoire de comparaison à variation forte du type simple étudié qui permette de remplir toutes les conditions  $\delta U_y = 0$ .

L'exemple du paragraphe 1, qui sera repris du point de vue de l'application du principe du maximum au paragraphe 11, montre d'ailleurs que ce principe n'est généralement pas vérifié sauf pour un choix judicieux de la solution  $\lambda_i^\circ$  qui n'est maintenant plus unique. En d'autres termes il apparaît possible de conserver la validité du principe du maximum pour engendrer les contrôles optimaux à condition de jouer sur la multiplicité dans le choix des  $\lambda_i^\circ$ . Ce choix



est gouverné par les considérations suivantes.

Notons que, par suite de la définition même de la catégorie (10.5) existent des constantes  $\mu_y^\gamma$  telles que

$$\left[ \sum_i \lambda_i^\gamma \delta q_i - H^\gamma \delta t \right]_a^b = [h^\gamma(x) - H^\gamma(x)] \delta t(x) = - \sum_1^p \mu_y^\gamma \delta U_y \tag{10.8}$$

Par conséquent on aura pour la solution générale (9.3) des conditions de transversalité et d'optimisation

$$\begin{aligned} \left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_a^b &= [h(x) - H(x)] \delta t(x) \\ &= - \delta I - \sum_1^p (\mu_y^\circ + \sum_\gamma \eta_\gamma \mu_y^\gamma) \delta U_y \end{aligned} \tag{10.9}$$

Pour un choix convenable de  $\rho$  indices parmi les  $y$ , notés  $(y_1, y_2, \dots, y_\rho)$

$$\det \{ \mu_y^\gamma \} \neq 0 \quad \begin{matrix} \gamma = 1, 2, \dots, \rho \\ y = y_1, y_2, \dots, y_\rho \end{matrix} \tag{10.10}$$

et le système linéaire dans les  $\eta_\gamma$

$$\sum_\gamma \mu_y^\gamma \eta_\gamma = J_y - \mu_y^\circ \quad y = y_1, y_2, \dots, y_\rho \tag{10.11}$$

possède une solution unique, quelles que soient les constantes  $(J_{y_1}, J_{y_2}, \dots, J_{y_\rho})$ .

Elargissons maintenant les conditions du problème en supprimant l'obligation pour les trajectoires de comparaison de vérifier les conditions  $\delta U_y = 0$  pour les indices  $(y_1, y_2, \dots, y_\rho)$ . De ce fait les conditions (10.8) n'appartiennent plus à la première catégorie; celle-ci devient vide et des trajectoires de comparaison à variation forte existent qui vérifient les conditions  $\delta U_y = 0$  pour les indices restants. Mais alors (10.9) se réduit à

$$\begin{aligned} \left[ \sum_i \lambda_i \delta q_i - H \delta t \right]_a^b &= [h(x) - H(x)] \delta t(x) \\ &= - \delta I - \sum_{y_1, y_2, \dots, y_\rho} J_y \delta U_y \end{aligned} \tag{10.12}$$

et les multiplicateurs  $\lambda_i$  sont définis de façon unique par le choix des constantes  $J_y$ . Si ce choix est tel que la trajectoire de référence soit un minimum relatif de la fonction

$$J = I + \sum_{y_1, \dots, y_\rho} J_y U_y \tag{10.13}$$

dans les conditions élargies, on peut conclure comme précédemment à

$$H(x) \geq h(x) \quad (10.14)$$

Le principe du maximum précise le choix des contrôles optimaux basé sur les conditions (7.3). Il est à noter que les conditions (7.3) entraînent déjà comme seuls choix possibles ceux qui donnent au hamiltonien soit sa valeur maximum soit sa valeur minimum; en effet il n'existe pas de choix donnant au hamiltonien un caractère stationnaire intermédiaire à cause de la convexité du domaine de manoeuvrabilité.

### 11. Traitement de l'exemple par le principe du maximum.

Reprenons l'exemple du premier paragraphe sous la forme canonique *régularisée*

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= u = \cos \beta \\ \frac{dq_2}{dt} &= q_1^2 \end{aligned} \quad (11.1)$$

où on recherche la trajectoire donnant un minimum de  $I = q_2(b)$  avec les conditions aux limites du type  $U_y = 0$ :

$$\begin{aligned} q_1(a) - A &= 0 & q_2(a) &= 0 & t(a) &= 0 \\ q_1(b) - B &= 0 & t(b) - T &= 0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

Le hamiltonien et le système adjoint sont

$$H = \lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 q_1^2 \quad (11.3)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -2\lambda_2 q_1$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (11.4)$$

Il y a une équation du type (7.3)

$$\lambda_1^0 \sin \beta = 0$$

qui présente les possibilités suivantes

- 1)  $u = \cos \beta = 1$  pour  $\beta = 0$
- 2)  $u = \cos \beta = -1$  pour  $\beta = \pi$
- 3)  $\lambda_1^{\circ} = 0$   $\beta$  indéterminé

Le principe du maximum précise que

- 1)  $u = 1$  si  $\lambda_1^{\circ} > 0$
  - 2)  $u = -1$  si  $\lambda_1^{\circ} < 0$
  - 3) si  $\lambda_1^{\circ} = 0$   $\beta$  est encore indéterminé.
- (11.6)

Les équations (7.4) et (7.2) montrent que

$$\frac{dH^{\circ}}{dt} = 0 \quad H^{\circ} = \text{constante de trajectoire.} \quad (11.7)$$

Enfin les conditions de transversalité sont

$$\begin{aligned} \lambda_1^{\circ}(a) &= \mu_1^{\circ} & \lambda_2^{\circ}(a) &= \mu_2^{\circ} & H^{\circ}(a) &= -\mu_3^{\circ} \\ \lambda_1^{\circ}(b) &= -\mu_4^{\circ} & \lambda_2^{\circ}(b) &= -1 & H^{\circ}(b) &= \mu_5^{\circ} \end{aligned} \quad (11.8)$$

Elles ne font que définir les constantes  $\mu_j^{\circ}$  sauf la cinquième qui, associée à la seconde des équations adjointes, établit que

$$\lambda_2^{\circ} = -1 \quad \text{pour toute la trajectoire} \quad (11.9)$$

Nous étudierons le cas où  $T > A$  et, partant des données exigées en  $x = a$  et terminant en  $t(b) = T$ , examinerons les trajectoires optimales correspondant à toutes les valeurs  $B$  accessibles. Ceci se fera en donnant à  $\lambda_1^{\circ}(a)$  toutes les valeurs réelles.

Cas I  $\lambda_1^{\circ}(a) = \alpha^2 > 0$

La trajectoire débute avec la contrôle  $u = 1$ . L'intégration de (11.1) et (11.4) compte tenu de (11.9) et (11.2) fournit

$$q_1 = A + t \quad \lambda_1^{\circ} = \alpha^2 + 2At + t^2$$

On voit que  $\lambda_1^0$  restera positif et que le contrôle  $u = 1$  devra être conservé jusqu'en  $t = T$  où

$$q_1(t) = A + T = B_1$$

Cas II

$$\lambda_1^0(a) < -A^2 \quad \text{soit} \quad \lambda_1^0(a) = -A^2 - \alpha^2$$

La trajectoire débute avec le contrôle  $u = -1$  et

$$q_1 = A - t \quad \lambda_1^0 = -\alpha^2 - (A - t)^2$$

On voit que  $\lambda_1^0$  restera négatif et que le contrôle  $u = -1$  devra être conservé jusqu'en  $t = T$  où

$$q_1(t) = A - T = B_4$$

Ces deux premiers cas conduisent aux valeurs limites accessibles à B. Ce sont des cas où les solutions  $\lambda_i^0$  ne sont pas uniques. Prenons par exemple le premier cas. Du fait que  $\cos\beta = 1$  et  $\sin\beta = 0$  tout le long de la trajectoire  $q_1 = A + t$  on vérifie facilement que  $\delta\psi = 0$  pour les deux solutions fondamentales du système adjoint :

$$(a) \quad \lambda_1^{(1)}(a) = 1 \quad \lambda_2^{(1)}(a) = 0$$

conduisant par intégration à

$$\lambda_1^{(1)} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2^{(1)} \equiv 0 \quad \text{et} \quad H^{(1)} \equiv 1$$

et à la contrainte de variation faible

$$\delta q_1(t) - \delta t(t) - \delta q_1(a) + \delta t(a) = 0$$

C'est une contrainte appartenant au groupe (9.1);

elle n'est qu'une combinaison linéaire des contraintes a priori  $\delta U_y = 0$ .

$$(b) \quad \lambda_1^{(2)}(a) = 0 \quad \lambda_2^{(2)}(a) = 1$$

conduisant par intégration à

$$\lambda_1^{(2)} = -2At - t^2 \quad \lambda_2^{(2)} = 1 \quad H^{(2)} = A^2$$

et à la contrainte de variation faible

$$-(2AT + T^2)\delta q_1(t) + \delta q_2(t) - A^2\delta t(t) - \delta q_2(a) + A^2\delta t(a) = 0$$

qui cette fois appartient au groupe (9.2).

Il y a donc une solution générale aux conditions de transversalité obtenue en prenant la solution (b) changée de signe (pour satisfaire à  $\lambda_2(t) = -1$ ) et lui ajoutant la solution (a).

multipliée par une constante  $\eta$  arbitraire :

$$\lambda_1 = 2At + t^2 + \eta \quad \lambda_2 = -1 \quad H = -A^2 + \eta$$

Le principe du maximum ne sera donc vérifié que si  $\lambda_1$  reste positif dans l'intervalle  $t \in [0, T]$  ce qui demande  $\eta > 0$  et est équivalent à  $\lambda_1(a) > 0$ .

Il n'existe pas de trajectoire de comparaison, mais en prenant par exemple  $\eta = A^2$ , ce qui donne la contrainte de variation forte

$$(A+T)^2 \delta q_1(t) - \delta q_2(t) - A^2 \delta q_1(a) + \delta q_2(a) = [h(x) - H(x)] \delta t(x)$$

et en libérant la condition  $\delta t(t) = 0$  on peut construire des trajectoires de comparaison à variation forte, vérifiant encore les conditions  $\delta q_1(a) = 0$ ,  $\delta q_2(a) = 0$  et  $\delta q_1(t) = 0$ .

On voit que dans ces conditions élargies la trajectoire de référence donne encore à  $q_2(t)$  sa valeur minimum car

$$\delta q_2(t) = [H(x) - h(x)] \delta t(x) > 0$$

Cas III

$$0 > \lambda_1^0(a) > -A^2 \quad \text{soit} \quad \lambda_1^0(a) = -A^2 + \alpha^2 \\ \text{avec} \quad \alpha^2 < A^2$$

Le premier segment de trajectoire est décrit comme dans le cas II, mais  $\lambda_1^0 = \alpha^2 - (A-t)^2$  s'annule pour  $t = A - \alpha = t'$  ( $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$ ) où  $q_1 = \alpha > 0$

A cet endroit on passe à un second segment de trajectoire décrit avec le contrôle  $u = +1$ . Respectant la continuité de la phase et du multiplicateur  $\lambda_1^0$  on trouve pour ce second segment

$$q_1 = \alpha + t - t' = 2\alpha - A + t \quad t \geq t' \\ \lambda_1^0 = (t - t')(2\alpha + t - t')$$

Ceci montre que la valeur de  $\lambda_1^0$  restera positive jusqu'à la fin et entrainera le choix  $u = +1$  jusqu'à la fin où

$$q_1(t) = 2\alpha - A + T$$

Ces valeurs terminales de B sont comprises entre la limite  $B_1$  atteinte pour  $\alpha = A$  et la valeur  $B_2 = T - A$  atteinte pour  $\alpha = 0$ .

## Cas IV

C'est la cas limite  $\psi = 0$  du précédent.

A la fin du premier segment  $\lambda_1^0$  et  $q_1$  s'annulent simultanément et on peut prolonger la trajectoire par un segment le long duquel  $\lambda_1^0$  et  $q_1$  restent nuls. Cette solution satisfait en effet le système différentiel et le principe du maximum (cas 3). Comme le contrôle requis  $u = 0$  ( ou  $\beta = \pi/2$  ) ne fait pas partie des possibilités prévues avant la régularisation, il s'agit d'un segment de réticence. Prolongé jusqu'en  $t = T$  il donne la valeur terminale  $q_1(t) = B_3 = 0$ .

Cependant en n'importe quel point  $t''$  de l'intervalle  $[A, T]$  la réticence peut être arrêtée et prolongée par un nouveau segment décrit soit avec le contrôle  $u = +1$  soit avec le contrôle  $u = -1$ . En effet le long d'un segment  $u = +1$ , respectant la continuité de la phase et des multiplicateurs, on trouve

$$q_1 = t - t'' \quad \lambda_1^0 = (t - t'')^2 > 0 \quad t > t''$$

Et le long d'un segment  $u = -1$

$$q_1 = t'' - t \quad \lambda_1^0 = -(t - t'')^2 < 0 \quad t > t''$$

et dans les deux cas le principe du maximum est respecté.

Il n'y a plus de changement de signe possible de  $\lambda_1^0$ .

La figure 1 montre que l'on peut ainsi couvrir la plage restante des valeurs accessibles de  $B$  entre  $B_2$  et  $B_4$ .

Dans le cas III il y a correspondance biunivoque entre la valeur initiale  $\lambda_1^0(a)$  et la valeur finale  $q_1(t)$ .

Dans le cas IV à une seule valeur initiale  $\lambda_1^0(a)$  correspond toute une plage de valeurs terminales  $q_1(t)$ .

Notons pour terminer que l'application du principe du maximum au problème non régularisé ne permet pas de trouver des solutions correspondant aux valeurs terminales  $q_1(t)$  situées entre  $B_2$  et  $B_4$ . Ceci est évidemment à lier au caractère de limite inaccessible de ces solutions avant régularisation.

\*\*\*\*

## 12. Commutation des contrôles et réticence.

Comme l'exemple précédent l'a illustré, la construction d'une trajectoire optimale à l'aide du principe du maximum procède par essais et corrections. Les conditions initiales du système différentiel (4.10) et (4.11) ne sont jamais complètement connues a priori. Il faut donc faire certaines hypothèses sur des valeurs initiales, intégrer pas à pas en déterminant les contrôles optimaux par le principe du maximum et vérifier si les valeurs terminales de la phase et des multiplicateurs satisfont à toutes les conditions (2.6) et (8.1). Dans cette recherche on peut donc supposer les multiplicateurs connus à chaque pas et déterminer les contrôles optimaux par la condition

$$H = \sum_i \lambda_i g_i(q, t; \beta) \quad \text{maximum}$$

Ceci revient aussi à déterminer les points de manoeuvrabilité (extrémités du vecteur des vitesses de phase) tels que

$$\sum_i \lambda_i \frac{dq_i}{dt} \quad \text{maximum}$$

Dans la représentation cartésienne du domaine de manoeuvrabilité, cette proposition revient à choisir dans le domaine de manoeuvrabilité instantané les points dont la projection algébrique sur le vecteur instantané  $(\lambda_i)$  soit maximum.

Corrolaire évident : "A chaque phase de l'évolution les points de manoeuvrabilité optimale sont situés sur la frontière du domaine régularisé".

De plus, le domaine régularisé étant le plus petit domaine convexe contenant les points de manoeuvrabilité du système non-régularisé, les propositions suivantes sont aussi évidentes :

Si la projection maximum est atteinte par un seul point de manoeuvrabilité du système non-régularisé, c'est aussi l'unique point de projection maximum du domaine régularisé.

Si la projection maximum est atteinte simultanément par plusieurs points  $P_j$  de manoeuvrabilité du système non-régularisé, la même projection maximum est atteinte par tous les points de la facette hyperplane du domaine régularisé construite sur les points  $P_j$ . Cette facette est perpendiculaire au vecteur  $(\lambda_i)$ .

Ces propositions permettent de travailler directement avec le hamiltonien du système non-régularisé.

Tant que le principe du maximum appliqué à ce hamiltonien définit les contrôles sans ambiguïté, il n'y a pas nécessité de régularisation. S'il y a ambiguïté on peut se borner à régulariser sur l'ensemble des contrôles en concurrence. Quand ce cas se présente la prolongation de la trajectoire optimale présente en général des embranchements.

Dans un premier type d'embranchement, le principe du maximum assure l'unicité des contrôles aussi bien après qu'avant. La perpendicularité de la facette du domaine régularisé au vecteur  $(\lambda_i)$  n'est qu'instantanée. Il y a commutation c'est-à-dire apparition de discontinuités simples parmi les contrôles, le point de manoeuvrabilité sautant d'un bord de la facette à un autre. La continuité du hamiltonien maximum est donc la condition (7.2) est bien respectée.

Dans le second type d'embranchement la facette, ou un de ses hyperplans de degré inférieur, reste perpendiculaire au vecteur  $(\lambda_i)$  sur un intervalle fini de croissance de la variable indépendante  $t$ . L'ambiguïté dans les contrôles est levée précisément en exprimant les conditions de maintien de la perpendicularité. C'est un cas de réticence si l'hyperplan dont la perpendicularité a été maintenue a été engendré en tout ou en partie par l'opération de régularisation. Ultérieurement la perpendicularité peut être rompue à un stade arbitraire de l'évolution par débranchement sur une trajectoire où l'unicité du choix est rétablie par une commutation adéquate.

Le cas de l'ambiguïté a été illustré dans l'exemple précédent. Il est peut-être intéressant de le traiter suivant une technique qui peut être facilement généralisée.

Le hamiltonien non-régularisé de l'exemple est

$$\mathcal{H} = \lambda_1 u + \lambda_2 q_1^2 \quad u = \pm 1 \quad (12.1)$$

et l'ambiguïté dans le choix du contrôle basé sur le principe du maximum se présente quand  $\lambda_1 = 0$ . Alors (figure 2) la droite PQ du domaine régularisé est perpendiculaire au vecteur  $(0, \lambda_2)$ . Le maintien de la perpendicularité durant un intervalle fini de  $t$  peut s'exprimer par différentiation de la



condition  $\lambda_1 = 0$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_2, q_1 = 0 \quad (12.2)$$

On ne peut en déduire directement la valeur du contrôle mais la condition

$$q_1 = 0 \quad (12.3)$$

En effet  $\lambda_2$  ne peut s'annuler en même temps que  $\lambda_1$ , sans que les multiplicateurs et le hamiltonien ne s'annulent tout le long de la trajectoire ce qui ne permettrait jamais de satisfaire à toutes les conditions de transversalité, dont une au moins est non-homogène.

Comme (12.3) doit aussi rester vrai durant un intervalle fini de  $t$  on peut différentier à nouveau

$$\frac{dq_1}{dt} = u = 0 \quad (12.4)$$

et cette fois le contrôle requis est déterminé.

Cette technique peut être généralisée comme suit.

Prenons le cas où, dans la formulation non-régularisée

$$\frac{dq_i}{dt} = g_{i,\kappa}(q, t; \alpha) \quad (12.5)$$

et supposons que, dans une phase déterminée, le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_i \lambda_i g_{i,\kappa}(q, t; \alpha) \quad (12.6)$$

soit rendu simultanément maximum par le choix

$$\kappa = \kappa_1 \quad \alpha_\kappa = \alpha_{\kappa(1)} \quad (12.7)$$

et par le choix

$$\kappa = \kappa_2 \quad \alpha_\kappa = \alpha_{\kappa(2)} \quad (12.8)$$

de sorte que

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 \quad (12.9)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad \mathcal{H}_1 &= \sum_i \lambda_i g_{i, \kappa_1} (q, t; \alpha_{(1)}) \\ \mathcal{H}_2 &= \sum_i \lambda_i g_{i, \kappa_2} (q, t; \alpha_{(2)}) \end{aligned} \quad (12.10)$$

Ces choix satisfont certainement aux conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha_{\kappa_2}} &= 0 \quad \text{pour} \quad \alpha_{\kappa_2} = \alpha_{\kappa_2(1)} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial \alpha_{\kappa_1}} &= 0 \quad \text{pour} \quad \alpha_{\kappa_1} = \alpha_{\kappa_1(2)} \end{aligned} \quad (12.11)$$

Régularisons localement le hamiltonien en permettant une réticence entre ces choix

$$\mathcal{H}_{12} = \frac{1 + \cos \varphi}{2} \mathcal{H}_1 + \frac{1 - \cos \varphi}{2} \mathcal{H}_2 \quad (12.12)$$

De sorte que la vitesse d'évolution du système soit gouvernée par

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_{12}}{\partial \lambda_i} \quad (12.13)$$

et l'évolution des multiplicateurs par

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}_{12}}{\partial q_i} \quad (12.14)$$

On exprimera le maintien de l'ambiguïté par différentiation de (12.9)

$$\frac{d\mathcal{H}_1}{dt} = \frac{d\mathcal{H}_2}{dt} \quad (12.15)$$

Le calcul du premier membre donne

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}_1}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}_{12}}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \mathcal{H}_{12}}{\partial q_i} \right) \\ &\quad + \sum_{\kappa} \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha_{\kappa}} \frac{d\alpha_{\kappa(1)}}{dt} \end{aligned}$$

ou, eu égard à (12.11) et utilisant la notation des parenthèses de Poisson,

$$\frac{d\mathcal{H}_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial t} + [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_{12}] \quad (12.16)$$

Par un calcul similaire

$$\frac{d\mathcal{H}_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} + [\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_{12}] \quad (12.17)$$

Remplaçons dans ces formules  $\mathcal{H}_{12}$  par sa valeur (12.12) et notant les identités

$$[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1] \equiv 0 \quad [\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2] \equiv 0$$

$$[\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1] \equiv -[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$$

il vient

$$\frac{d\mathcal{H}_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial t} + \frac{1 - \cos \varphi}{2} [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] \quad (12.18)$$

$$\frac{d\mathcal{H}_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} - \frac{1 + \cos \varphi}{2} [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] \quad (12.19)$$

Si bien que  $\cos \varphi$  disparaît explicitement de la "condition de réticence" (12.15) qui se réduit à

$$\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} + [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2] = 0 \quad (12.20)$$

Ce type de formule de réticence binaire se généralise facilement pour une réticence multiple. On remarquera que, tout comme dans l'exemple précédent, les contrôles ne s'en trouvent pas directement déterminés. Il faut pour cela poursuivre la différentiation. Les exemples montrent d'ailleurs l'existence des trois cas : contrôles bien déterminés, impossibilité, indifférence. Le dernier est tout à fait exceptionnel.

### 13. Relation du principe du maximum avec le critère de Weierstrass.

Comme Pontrjagin l'a fait observer, le principe du maximum et le critère de variation forte de Weierstrass s'identifient dans le cadre du calcul classique des variations. Ils représentent une condition nécessaire mais nullement suffisante pour le minimum de I. Une condition suffisante peut être

obtenue en ajoutant le critère de Jacobi.  
Considérons la fonction

$$L = I(q(a), t(a), q(x), t(x)) \quad (13.1)$$

qui se ramène pour  $x = b$  à la fonction dont on cherche le minimum, et introduisons la nouvelle coordonnée  $q_0$  dont l'évolution est gouvernée par

$$q_0' = t' \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i(x)} q_i(q, t; \beta) + \frac{\partial L}{\partial t(x)} \right] = t' g_0(q, t; \beta) \quad (13.2)$$

et soumise à la condition d'extrémité

$$q_0(a) = I(q(a), t(a), q(a), t(a)) \quad (13.3)$$

de sorte que le problème primitif se ramène à

$$q_0(b) \text{ minimum} \quad (13.4)$$

Le hamiltonien du système complété sera noté

$$K = \lambda_0 g_0 + H \quad (13.5)$$

et comme  $H$  ni  $g_0$  ne dépendent de  $q_0$

$$\frac{d\lambda_0}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial q_0} = 0$$

De plus la principale des conditions de transversalité est

$$\lambda_0(t) = -1$$

de sorte que tout le long de la trajectoire

$$\lambda_0 = -1 \quad (13.6)$$

Supposant connues les valeurs initiales  $t(a)$  et  $q_i(a)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) et donc aussi  $q_0(a)$  considérons les trajectoires à contrôles optimaux issues de ces conditions initiales.

Nous supposerons la condition de Jacobi remplie, c'est-à-dire l'existence d'un voisinage de la trajectoire de référence par chaque point duquel ne passe qu'une autre trajectoire à con-

trôles optimaux . L'ensemble de ces trajectoires formera donc un champ sur lequel  $q_0(x)$  est une fonction univalente de la phase  $(q(x), t(x))$  . La différentielle totale de cette fonction est donnée par la contrainte de variation faible

$$\left[ \lambda_0 dq_0 + \sum_1^n \lambda_i^{\circ} dq_i - \kappa^{\circ} dt \right]_a^x = 0 \quad (13.7)$$

ou, eu égard à (13.6) et puisque  $dq_0(a)=0$   $dq_i(a)=0$   $dt(a)=0$

$$dq_0(x) = \sum_1^n \lambda_i^{\circ}(x) dq_i(x) - \kappa^{\circ}(x) dt(x)$$

Intégrons cette relation depuis la phase initiale donnée jusqu'à la phase terminale de la trajectoire de référence mais en suivant une trajectoire décrite avec des contrôles  $\beta_x(x)$  qui peuvent différer arbitrairement des contrôles optimaux  $\beta_x^*(x)$  . Dénotant par  $\Delta q(x)$  les écarts de phase avec la référence pour un même  $t(x)$ , il vient puisque alors

$$dq_i(x) = g_i(q + \Delta q, t; \beta) dt(x) \quad (13.8)$$

$$q_0(b) - q_0(a) = \int_{t(a)}^{t(b)} \left[ \sum_1^n \lambda_i^{\circ} g_i(q + \Delta q, t; \beta) - \kappa^{\circ} \right] dt \quad (13.9)$$

L'intégrale de la différentielle totale étant indépendante du chemin parcouru, la valeur  $q_0(b)$  au premier membre est celle présumée minimum de la trajectoire de référence.

D'autre part

$$q_0(b) + \Delta q_0(b) - q_0(a) = \int_{t(a)}^{t(b)} g_0(q + \Delta q, t; \beta) dt \quad (13.10)$$

Soustrayant (13,9) de cette relation et, par analogie avec

$$\kappa^{\circ} = -g_0(q, t; \beta^*) + \sum_1^n \lambda_i^{\circ} g_i(q, t; \beta^*) \quad (13.11)$$

introduisant la notation

$$k^{\circ} = -g_0(q + \Delta q, t; \beta) + \sum_i^n \lambda_i^{\circ} g_i(q + \Delta q, t; \beta) \quad (13.12)$$

on trouve la formule

$$\Delta q_0(t) = \int_{t(a)}^{t(b)} (k^{\circ} - k^{\circ}) dt$$

La fonction  $(k^{\circ} - k^{\circ})$  est celle qui joue ici le rôle de la fonction excès de Weierstrass.

S'il existe un voisinage de la trajectoire de référence pour lequel on ait partout  $k^{\circ} - k^{\circ} > 0$

$$\Delta q_0(t) > 0$$

et le minimum est assuré.

#### REFERENCES.

1. V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze and L.S. Pontrjagin, The theory of optimal processes. I. Maximum principle, Izvest. Akad. Nauk S.S. S.R. Ser. Mat. 24, 3-43 (1960). Translated by L.W. Neustadt, Trans. Am. Math. Soc. 17, 341-382 (1961).
2. J.V. Breakwell, The optimisation of trajectories, J. Soc. Ind. Appl. Math. 7, 215-247 (1959).
3. P. Contensou, Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. Astronautica Acta, VIII-2-3, 134-150 (1962).

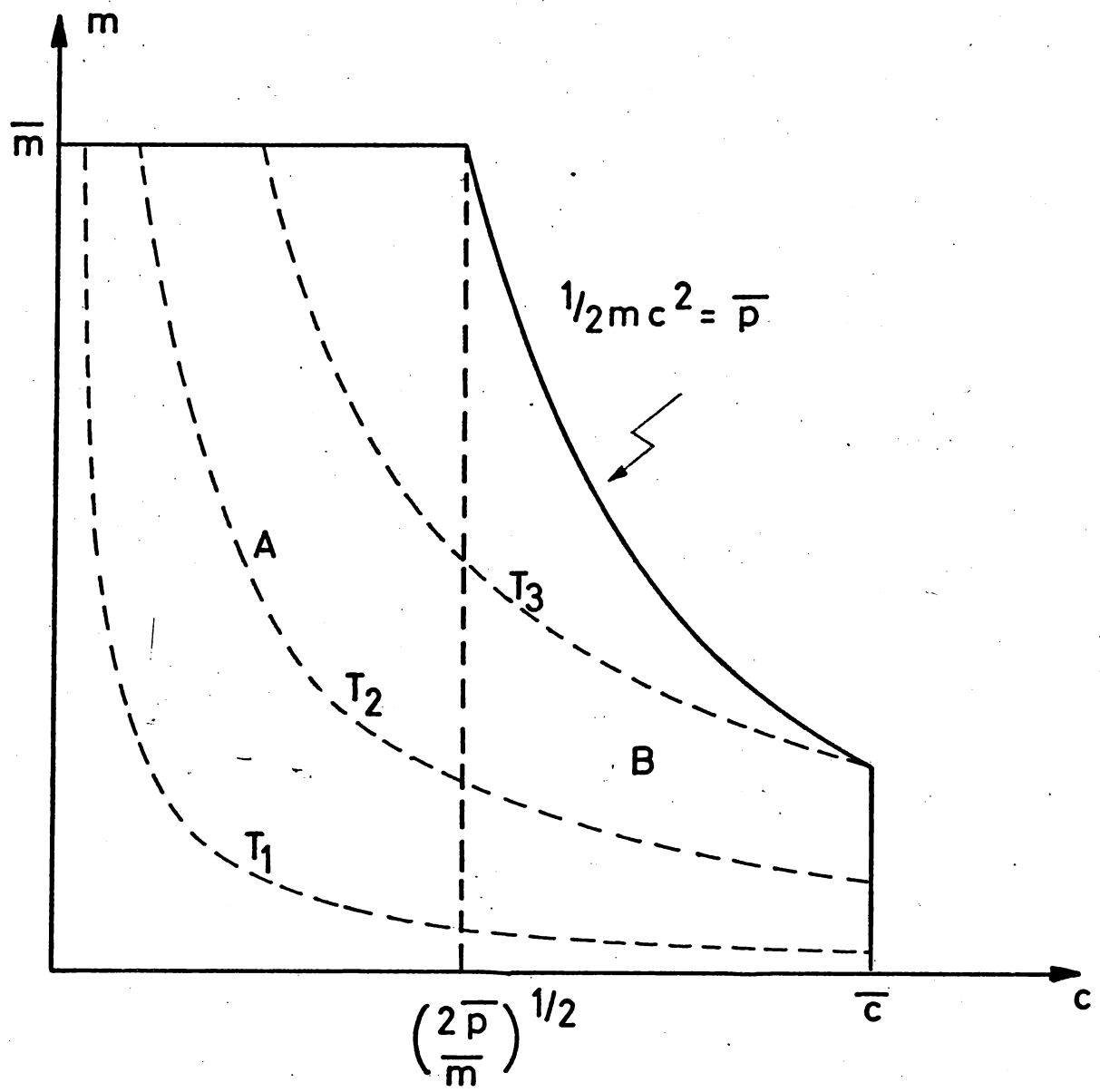


FIG. I

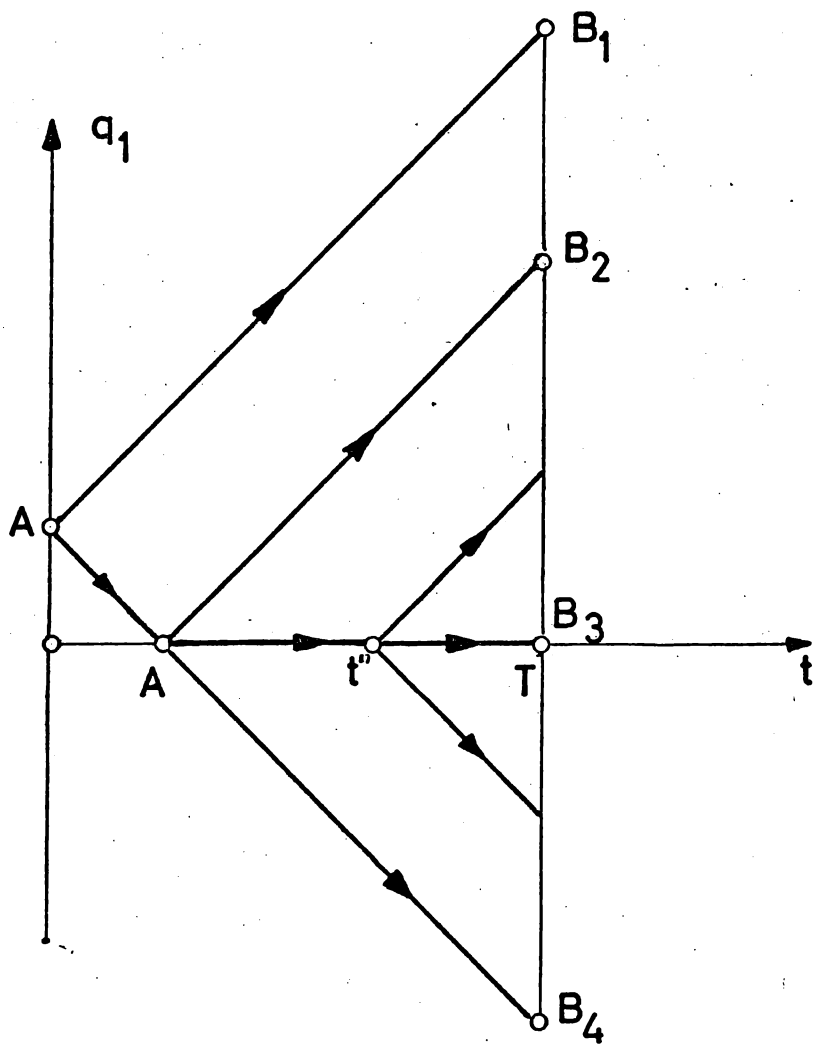


FIG. 2

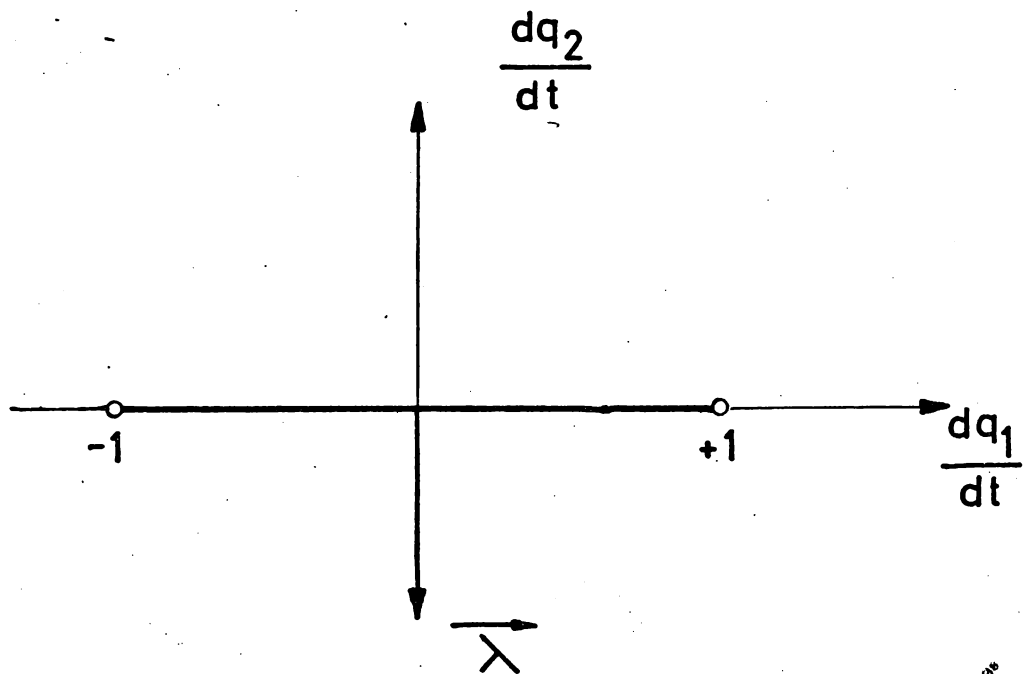


FIG. 3

AS.  
 971  
 Cours de Mathématiques  
 3885.06473