Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du samedi 8 mai 1965

Les déphasages caractéristiques en présence de modes rigides et de modes non amortis

par B. FRAEIJS DE VEUBEKE,
Membre Correspondant.

Résumé. — La notion de déphasage caractéristique a été introduite dans une communication antérieure [1]. Elle permet un développement spectral de la réponse forcée d'un système oscillant linéaire amorti. Dans un tel système la matrice M des coefficients d'inertie possède nécessairement le caractère défini positif. Le même caractère a été postulé antérieurement pour les matrices des coefficients d'élasticité et d'amortissement.

La présente communication a pour objet les extensions requises par :

1) Une matrice de coefficients d'élasticité seulement non négative. Ce cas représente les petites oscillations autour d'une position d'équilibre indifférent et non plus stable.

2) Une matrice d'amortissement seulement non négative. On démontre dans le cas l'existence de fréquences d'excitation singulières au niveau desquelles il y a dégénérescence du problème aux déphasages caractéristiques et perte d'un mode de réponse équiphase. La solution forcée complémentaire qui devient alors nécessaire présente certaines analogies avec une résonance de phase.

La variation d'un déphasage caractéristique avec la fréquence d'excitation conserve son analogie qualitative avec le retard de phase d'un oscillateur à un seul degré de liberté.

Il devient toutefois nécessaire de procéder à un échange apparent de modes au niveau des fréquences singulières. Ceci est d'ailleurs suggéré par le passage à la limite de l'amortissement complet vers l'amortissement partiel.

I. Les modes naturels du système conservatif associé.

L'excitation harmonique d'un oscillateur amorti à n degrés de liberté répond à l'équation matricielle

$$M\ddot{q} + R\dot{q} + Cq = pe^{i\omega t}. \tag{1}$$

Les matrices réelles des coefficients d'inertie, d'amortissement et d'élasticité sont hermitiques :

$$M = M' \qquad R = R' \qquad C = C'. \tag{2}$$

Soit
$$q = ze^{i\omega t} \tag{3}$$

la réponse forcée de l'oscillateur ; la matrice unicolonne z des amplitudes complexes satisfait l'équation algébrique

$$(-\omega^2 M + i\omega R + C)z = p. \tag{4}$$

La méthode des déphasages caractéristiques, qui fournit notamment la solution z de cette équation, a été exposée antérieurement [1] dans le cas où non seulement M est définie positive mais également R et C. Nous considérons ici que R et C peuvent être simplement non négatives.

Les vibrations libres du système conservatif associé sont régies par l'équation matricielle

$$Mq + Cq = 0. \tag{5}$$

Un mode naturel de vibration de ce système est

$$q = x_m \cos(\omega_m t - \psi_m). \tag{6}$$

Sa matrice d'amplitudes réelles x_m et sa pulsation naturelle ω_m vérifient l'équation matricielle

$$Cx_m = \omega_m^2 M x_m \qquad (m = 1, 2 \dots n). \tag{7}$$

Si la matrice C n'est pas définie positive mais seulement non négative, il existe un ou plusieurs modes de déplacement x donnant à l'énergie potentielle une valeur nulle :

$$x'Cx = 0. \tag{8}$$

C'est un *mode rigide* du système. Cette appellation est rattachée aux systèmes dont l'énergie potentielle provient uniquement d'une déformation élastique. Un mode rigide signifie dès lors que le système peut être déplacé sans déformations élastiques de ses parties constitutives. Posons

$$\mathrm{C}x = a \tag{9}$$

et montrons que a est nécessairement nul. En effet, par suite du caractère non négatif de C, il faut que

$$(a + \alpha x)'\mathrm{C}(a + \alpha x) \geqslant 0$$

quel que soit le scalaire réel α. Cette condition se ramène en vertu de (8) et de (9) à

$$a'\mathrm{C}a + 2\alpha a'a \geqslant 0$$

et ne peut visiblement être satisfaite que si $a'a = 0$, c'est-à-dire en définitive $a = 0$.

Par conséquent les modes rigides forment un ensemble de solutions linéairement indépendantes de $\mathrm{C}x = 0$.

Ils forment partie des modes naturels (6) pour une valeur nulle de la pulsation naturelle. Comme ces modes seront rangés par ordre de pulsations naturelles croissantes, les modes rigides, supposés au nombre de s, recevront les s premiers indices :

$$\mathrm{C}x_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots s). \tag{10}$$

Les *modes élastiques* recevront les indices suivants

$$\mathrm{C}x_m = \omega_m^2 \mathrm{M}x_m \quad (m = s+1, s+2, \dots n) \tag{11}$$

$$\omega_{s+1} \leqslant \omega_{s+2} \dots \leqslant \omega_n.$$

Rappelons les relations d'orthogonalité

$$x_r'\mathrm{M}x_m = 0 \qquad r \neq m \tag{12}$$

$$x_r'\mathrm{C}x_m = 0 \qquad r \neq m. \tag{13}$$

Elles sont une conséquence directe du caractère hermitique de M et de C pour des pulsations naturelles distinctes. Si une pulsation naturelle est une valeur propre multiple, le problème (11) admet automatiquement la même multiplicité de solutions linéairement indépendantes ; elles peuvent être orthogonalisées par combinaisons linéaires appropriées de sorte que (12) et (13) restent valables que les pulsations naturelles soient distinctes ou non. Une relation (13) n'offre évidemment d'intérêt qu'entre modes élastiques ; si l'un des deux modes en présence est rigide cette relation n'est qu'une conséquence faible de (10).

2. *Les modes de réponse équiphase.*

Il suffit dans le problème (4) de la réponse forcée de considérer une sollicitation équiphase, c'est-à-dire une matrice unicolonne p réelle.

La méthode des déphasages caractéristiques consiste à rechercher les sollicitations équiphases particulières qui fournissent une *réponse équiphase*

$$z = ye^{-i\phi}. \tag{14}$$

La matrice unicolonne y sera donc réelle et ϕ représente l'angle commun de retard de phase entre la réponse et l'excitation. La solution particulière (14) conduit au problème

$$(-\omega^2\mathrm{M} + i\omega\mathrm{R} + \mathrm{C})\, y = pe^{i\phi} \tag{15}$$

soit, après séparation des parties réelles et imaginaires, à

$$(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})y = p \cos \phi \tag{16}$$

$$\omega\mathrm{R}y = p \sin \phi \tag{17}$$

Ce sont les équations (24) et (25) de la référence [1]. Par élimination de p on trouve le problème homogène aux valeurs propres en μ

$$\mu(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})y - \mathrm{R}y = 0 \tag{18}$$

$$\mu = \frac{1}{\omega} \tan \phi \tag{19}$$

Dans la suite nous serons aussi amenés à considérer les inverses de ces valeurs propres

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \omega \cot \phi \tag{20}$$

Les matrices $(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})$ et R étant hermitiques, ces valeurs propres sont réelles. Elles sont racines de l'équation algébrique de degré n

$$|\mu(C - \omega^2 M) - R| = 0 \tag{21}$$

3. *Les modes non-amortis.*

Par un raisonnement analogue à celui fait à propos des modes rigides, tout mode de déplacement qui ne donnerait lieu à aucune dissipation d'énergie

$$x' R x = 0$$

doit être la solution du problème

$$R x = 0 \tag{22}$$

Si R était définie positive ce problème n'admettrait que la solution triviale $x = 0$. Nous allons supposer au contraire que R est une matrice non négative admettant pour le problème (22) un ensemble de p solutions linéairement indépendantes

$$R a_i = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots p) \tag{23}$$

Ces solutions sont aussi des modes de réponse équiphase du problème (18) associés à la valeur propre $\mu = 0$.

En recherchant tous les modes de réponse équiphase associés à $\mu = 0$ nous allons voir qu'il y a lieu de faire un choix particulier d'une base des a_i.

Construisons la matrice à n lignes et p colonnes

$$U = (a_1 a_2 \ldots a_p)$$

correspondant à une base quelconque des a_i et la matrice complémentaire à n lignes et n-p colonnes

$$V = (a_{p+1} a_{p+2} \ldots a_n)$$

dont les colonnes forment avec celles de U une base de l'espace des déplacements. Changeons de coordonnées dans le problème (18) par

$$y = U u + V v. \tag{24}$$

Les nouvelles coordonnées sont les éléments des matrices unicolonnes u (p éléments) et v ($n - p$ éléments).

Notant que par (23) nous avons la propriété

$$RU = 0 \qquad U'R = 0. \tag{25}$$

Le problème (18) devient

$$\mu U'(C - \omega^2 M)Uu + \mu U'(C - \omega^2 M)Vv = 0 \tag{26}$$

$$\mu V'(C - \omega^2 M)Uu + \mu V'(C - \omega^2 M)Vv - V'RVv = 0. \tag{27}$$

La matrice $V'RV$ est définie positive car sinon il existerait une matrice v telle que $(Vv)'R(Vv) = 0$ et Vv serait un mode de déplacement non amorti ce qui est contraire à l'hypothèse que les colonnes de V sont linéairement indépendantes de celles de U.

La solution $\mu = 0$, $v = 0$ et u arbitraire reproduit évidemment les p solutions $\mu = 0$, $y = a_i$ du problème primitif.

Les autres modes de réponse équiphase sont obtenus en supprimant le facteur μ dans l'équation (26) ce qui diminue automatiquement de p unités le degré de multiplicité de la valeur propre $\mu = 0$. Le problème aux valeurs propres restantes est

$$U'(C - \omega^2 M)Uu + U'(C - \omega^2 M)Vv = 0 \tag{28}$$

$$\mu V'(C - \omega^2 M)Uu + \mu V'(C - \omega^2 M)Vv - V'RVv = 0. \tag{29}$$

Examinons s'il admet encore la valeur propre $\mu = 0$.

Dans cette hypothèse l'équation (29) exige $v = 0$, puisque $V'RV$ est définie positive. L'équation (28) exigera dès lors l'existence d'une solution non triviale au problème

$$U'(C - \omega^2 M)Uu = 0. \tag{30}$$

Par conséquent le problème (18) admet en général $\mu = 0$ comme valeur propre de multiplicité p à toutes les fréquences d'excitation, excepté pour des fréquences dites « singulières » $\omega = \gamma_i$.

Les valeurs γ_i^2 sont les p racines de l'équation algébrique de degré p

$$|\, U'(C - \omega^2 M)U \,| = 0 \tag{31}$$

En général les racines sont simples et à toute fréquence singulière $\omega = \gamma_i$ correspond une solution $u = u_i$ de (30)

$$(U'CU)u_i = \gamma_i^2(U'MU)u_i \tag{32}$$

Le mode de réponse correspondant est selon (24)

$$y = Uu_i = b_i \tag{33}$$

c'est une combinaison linéaire des vecteurs de la base a_i ce qui montre que, quoique la valeur propre $\mu = 0$ soit devenue de multiplicité $p + 1$, le nombre de solutions linéairement indépendantes de (18) reste égal à p. Au niveau d'une fréquence singulière le nombre des réponses équiphases indépendantes est déficient ; nous rechercherons plus tard la nature de la réponse complémentaire requise. Les matrices U'CU et U'MU étant hermitiques, il résulte immédiatement de (32) que

$$(\mathrm{U}u_j)'\mathrm{M}(\mathrm{U}u_i) = 0 \qquad i \neq j \qquad (35)$$

$$(\mathrm{U}u_j)'\mathrm{C}(\mathrm{U}u_j) = 0 \qquad i \neq j \qquad (35)$$

soit, plus simplement,

$$b_j'\mathrm{M}b_i = 0 \qquad i \neq j \qquad (36)$$

$$b_j'\mathrm{C}b_i = 0 \qquad i \neq j \qquad (37)$$

On voit que les p modes b_i sont orthogonaux vis-à-vis de la matrice définie positive M. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base naturelle des solutions du problème (22). Nous les appellerons les *modes non-amortis* du système. Ces modes ainsi que leur valeur propre sont stationnaires, c'est-à-dire indépendants de la fréquence d'excitation.

Nous aboutissons aux conclusions suivantes : le système possède p modes de réponse équiphase stationnaires associés à $\mu = 0$; si on leur choisit pour base les modes non amortis b_i il y a au niveau de chaque fréquence singulière confluence d'un de ces modes avec un mode de réponse équiphase non stationnaire.

Le cas de racines multiples de (31) ne présente d'ailleurs pas de difficultés. Le problème (32) des modes non-amortis est formellement identique au problème (7) des modes naturels du conservatif associé. En cas de dégénérescence il correspond à toute pulsation singulière γ_i multiple le nombre correspondant de solutions linéairement indépendantes u_i et donc b_i. Les relations (36) et (37) peuvent être maintenues pour toute paire d'indices distincts. Au niveau d'une fréquence singulière de multiplicité k il y a simplement confluence deux à deux entre k modes non amortis stationnaires et k modes de réponse équiphase non-stationnaires. Au total le nombre de confluences possibles deux à deux reste égal à p.

4. *Étude de la confluence au voisinage d'une fréquence singulière.*

Reprenons le problème de la réponse équiphase sous la forme

$$(C - \omega^2 M)y = \lambda R y \tag{38}$$

pour examiner d'abord de façon générale la variation avec la fréquence du mode y et de sa valeur propre λ.

Notons par λ^0 la dérivée de λ et par y^0 la matrice des dérivées des éléments de y. Cette dernière n'est évidemment bien définie que si une norme de y est fixée comme fonction différentiable de ω^2. Il suffit par exemple de conserver constante la masse généralisée du mode :

$$y'My = \text{constante}$$

Il en découle par différentiation que

$$y'My^0 = 0 \tag{39}$$

Il vient en différentiant (38) par rapport à ω^2

$$(C - \omega^2 M - \lambda R)y^0 = My + \lambda^0 R y \tag{40}$$

Ce système linéaire pour le calcul des éléments de y^0 ne possède de solution que si le second membre est orthogonal à la solution y du système homogène adjoint :

$$y'My + \lambda^0 y'Ry = 0 \tag{41}$$

et cette condition donne à λ^0 une valeur négative finie pour autant que le mode y soit effectivement amorti, c'est-à-dire $y'Ry > 0$. On en déduit que $\lambda = \omega \cot \phi$ est une fonction décroissante de ω^2, son inverse $\mu = \frac{1}{\omega} \tan \phi$ une fonction croissante de ω^2 et finalement $\tan \phi$ et ϕ des fonctions croissantes de ω. Ce résultat avait été démontré auparavant [1] d'une façon moins directe. La solution générale de (40)

$$y^0 = \omega^0 + \eta y$$

où ω^0 est une solution particulière quelconque, contient le scalaire arbitraire η qui permet en définitive de satisfaire à (39)

$$\eta = -\frac{y'M\omega^0}{y'My}$$

On peut procéder de façon similaire pour le calcul des dérivées secondes λ^{00} et y^{00}. Par différentiation de (40)

$$(C - \omega^2 M - \lambda R) y^{00} = 2(M + \lambda^0 R) y^0 + \lambda^{00} R y$$

Compte tenu de (39), la condition d'existence de y^{00}

$$2\lambda^0 y' R y^0 + \lambda^{00} y' R y = 0$$

fournit la valeur

$$\lambda^{00} = 2 \, \frac{(y' R y^0)(y' M y)}{(y' R y)^2} \tag{42}$$

et la solution générale

$$y^{00} = w^{00} + \eta y$$

est complètement déterminée par la condition

$$(y^0)' M y^0 + y' M y^{00} = 0$$

provenant de la différentiation de (39). Il vient ici

$$\eta = - \frac{y' M w^{00} + (y^0)' M y^0}{y' M y} .$$

Au voisinage d'une fréquence singulière ces formules ne sont plus applicables à l'étude de la confluence du fait que λ tend vers l'infini en même temps que y tend vers un mode non amorti et donc $y' R y$ vers zéro.

Nous reprendrons plutôt le calcul avec la formulation primitive (18) et ferons tendre μ vers zéro et y vers b_i en même temps que ω tend vers γ_i. Une première différentiation de (18) donne

$$\mu^0 (C - \omega^2 M) y - \mu M y + \mu (C - \omega^2 M) y^0 - R y^0 = 0. \tag{43}$$

Au droit de la fréquence singulière il reste

$$R y^0 = \mu^0 (C - \gamma_i^2 M) b_i . \tag{44}$$

Cette équation possède deux solutions.

L'une, $\mu^0 = 0$ et $y^0 = 0$, correspond au mode stationnaire non-amorti. L'autre possède une dérivée μ^0 non nulle ; celle du mode non stationnaire qui vient en confluence avec le précédent.

Le système homogène adjoint de (44), $R x = 0$, admet les solutions $x = b_j$.

Par conséquent y^0 n'existe avec un μ^0 non nul que si

$$b'_j(C - \gamma_i^2 M) b_i = 0 \qquad j = 1, 2 \dots p. \tag{45}$$

Ce sont précisément des conséquences directes de (32) car ce système d'équations s'écrit

$$U'(C - \gamma_i^2 M) b_i = 0$$

et une condition (45) en découle quand on prémultiplie par u'_j. Comme, contrairement aux calculs précédents, la valeur de μ^0 n'est pas fixée par la première différentiation, il faut écrire la solution générale de (44) sous la forme

$$y^0 = \mu^0 b^0 + \sum_k a_i^k b_k \tag{46}$$

où b^0 est une solution particulière de (44) pour $\mu^0 = 1$:

$$R b^0 = (C - \gamma_i^2 M) b_i \tag{47}$$

Une nouvelle différentiation de (43) suivie du passage à la limite $\omega = \gamma_i$ fournit

$$R y^{00} = \mu^{00}(C - \gamma_i^2 M) b_i - 2\mu^0 M b_i + 2\mu^0 (C - \gamma_i^2 M) y^0$$

Pour le mode non stationnaire, les conditions d'existence de y^{00} se réduisent, compte tenu de (45), à

$$- b'_j M b_i + b'_j (C - \gamma_i^2 M) y^0 = 0 \qquad j = 1, 2 \dots p$$

Après substitution de la solution (46) elles deviennent un système de p équations aux inconnues a_k^i qui peut s'écrire, grâce à (36) et (37) et (45)

$$b'_j(C - \gamma_i^2 M) b_j a_i^j = - \mu^0 b'_j (C - \gamma_i^2 M) b^0$$

$$\text{pour } j \neq i \tag{48}$$

et

$$0 = b'_i M b_i - \mu^0 b'_i (C - \gamma_i^2 M) b^0$$

Par conséquent la dernière équation fixe la valeur de μ^0 ; usage peut être fait de (47) pour mettre cette valeur sous forme clairement positive

$$\mu^0 = \frac{b'_i M b_i}{b^{0\prime} R b^0} > 0 \tag{49}$$

Une fois cette dérivée première établie, et elle est clairement indépendante de la solution particulière utilisée pour b^0, les coefficients a_i^k sont tous déterminés par (48) à l'exception de a_i^i.

Ceci permet d'ailleurs de choisir ce coefficient de façon à satisfaire la condition (39) qui s'écrit ici

$$b_i' \mathrm{M} y^0 = \mu^0 b_i' \mathrm{M} b^0 + a_i^i b_i' \mathrm{M} b_i = 0 \tag{50}$$

On a ainsi un moyen de calculer les dérivées premières μ^0 et y^0 du mode non stationnaire en confluence au niveau d'une fréquence singulière. Il suffit pour cela de trouver une solution particulière de (47) et d'appliquer les formules (48), (49) et (50).

5. *Échange apparent de modes au droit d'une fréquence singulière.*

Une des propriétés fondamentales d'un déphasage caractéristique dans un système complètement amorti [1] est d'augmenter graduellement de 0 à π avec la fréquence d'excitation, comme celui d'un oscillateur à un seul degré de liberté.

Lors du passage par $\pi/2$ le mode équiphase correspondant s'identifie à un mode naturel du conservatif associé et la fréquence d'excitation doit correspondre à la fréquence naturelle de ce mode. Ceci résulte directement du fait que pour $\lambda = \omega \cot \pi/2 = 0$, le problème (38) de la réponse équiphase s'identifie au problème des modes naturels du conservatif associé et reste évidemment vrai pour les systèmes partiellement amortis.

Dans ce dernier cas, il semblerait à première vue que certains déphasages caractéristiques devraient croître depuis zéro jusqu'à un multiple de π et passer par plusieurs résonances de phase avec identification successsive à plusieurs modes naturels, par compensation vis-à-vis du caractère stationnaire des modes non amortis et plus particulièrement de leur valeur propre stationnaire $\mu = 0$.

La logique commande cependant d'envisager un système partiellement amorti comme la limite d'un système amorti. Il est alors facile de se rendre compte sur un exemple de la nature de la situation limite. Pour un mode stationnaire, la valeur propre $\mu = 0$ laisse encore le choix $\phi = 0$ ou $\phi = \pi$. Ce mode est alors divisé en deux branches séparées par la fréquence singulière de confluence. La valeur $\phi = 0$ est prise pour la branche basse fréquence qui est raccordée au niveau de la fréquence singulière à la branche haute fréquence du mode non stationnaire venant en confluence. Le long de cette dernière ϕ croit régulièrement de 0 à π. La branche basse fréquence du mode non stationnaire, le long de laquelle ϕ a graduellement augmenté de 0 à π est raccordée à la branche haute fréquence du mode stationnaire le long de laquelle ϕ est maintenu égal à π.

Cette disposition conserve la continuité de chaque déphasage caractéristique et son intervalle normal de variation. La discontinuité dans la dérivée au droit d'une fréquence singulière est en accord avec l'augmentation graduelle de la courbure de $\phi(\omega)$ quand on fait tendre l'amortissement complet du système vers un amortissement incomplet.

6. *Branches débutant par un mode rigide.*

Les modes rigides étant des modes naturels de pulsation naturelle nulle, certaines branches de réponse équiphase débutent pour $\omega = 0$ avec $\phi = \pi/2$ et une configuration de mode rigide.

Encore faut-il déterminer au sein d'une base de modes rigides quelles sont les combinaisons linéaires appropriées.

Soit X la matrice $(n \times s)$ d'une base quelconque de modes rigides

$$X = (x_1 x_2 \dots x_s)$$

de sorte que Xu, où u est une matrice unicolonne arbitraire à s éléments, est un mode rigide quelconque du système.

En vertu de (10) on a

$$CX = 0 \qquad X'C = 0. \tag{51}$$

Dans l'équation (40) faisons tendre ω vers zéro, λ vers zéro et y vers un mode rigide inconnu Xu. Il vient pour le calcul de la valeur limite de y^0

$$Cy^0 = MXu + \lambda^0 RXu. \tag{52}$$

Les solutions du système homogène adjoint sont exprimées par l'équation (51) et le second membre de (52) doit donc satisfaire à l'équation matricielle

$$X'MXu + \lambda^0 X'RXu = 0. \tag{53}$$

Ceci est un problème aux valeurs propres λ^0, dont les modes propres $u_m (m = 1, 2 \ldots s)$ fournissent les combinaisons de modes rigides cherchées. Si nous supposons que les modes rigides sont amortis, la matrice X'RX est définie positive au même titre que X'MX et les valeurs propres λ^0 sont négatives. Si un mode rigide n'est pas amorti, il devient simplement un cas particulier de mode non amorti et se comporte comme tel ; il ressort de (32) qu'il lui correspond une fréquence singulière nulle.

7. *Développement spectral de la réponse forcée pour une fréquence singulière.*

De façon générale la réponse forcée à une sollicitation équipnase p arbitraire peut être envisagée comme une superposition de réponses équiphases

$$z = \sum_1^n a_m y_m e^{-i\phi_m} \tag{54}$$

dont les coefficients a_m sont à déterminer de telle façon que la superposition des modes de sollicitation p_m correspondants reconstitue la sollicitation p donnée :

$$p = \sum_1^n a_m p_m. \tag{55}$$

Des formules (16) et (17) on peut donner aux modes de sollicitation p_m une expression valable quel que soit le déphasage caractéristique ϕ_m

$$p_m = \cos \phi_m (\mathrm{C} - \omega^2 \mathrm{M}) y_m + \omega \sin \phi_m \mathrm{R} y_m. \tag{56}$$

Pour les modes non amortis $y_m = b_m$ par exemple on doit prendre $\sin \phi_m = 0$ et, sans nuire à la généralité, $\cos \phi_m = 1$.

Le choix $\phi_m = \pi$ au lieu de 0. ne ferait que changer le signe du coefficient a_m correspondant. La nullité du travail virtuel d'un mode de sollicitation sur un mode de réponse distinct

$$y'_j p_m = 0 \qquad j \neq m \tag{57}$$

peut être établie dans tous les cas.

En effet, écrivant que l'équation (18) est satisfaite par les modes d'indice j et m, il vient en prémultipliant respectivement par y'_m et y'_j

$$\mu_j y'_m(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})y_j = y'_m\mathrm{R}y_j \tag{58}$$

$$\mu_m y'_j(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})y_m = y'_j\mathrm{R}y_m \tag{59}$$

et par conséquent, puisque les matrices R et $(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})$ sont hermitiques

$$y'_m\mathrm{R}y_j = 0 \quad \text{pour} \quad \mu_j \neq \mu_m \tag{60}$$

$$y'_m(\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M})y_j = 0 \quad \mu_j \neq \mu_m \tag{61}$$

En égard à l'expression (56) de p_m ceci justifie la propriété (57) du moment que les valeurs propres μ_j et μ_m sont distinctes. Les cas exceptionnels sont ceux des modes linéairement indépendantes mais de même valeur propre.

Entre modes non amortis

$$y_m = b_m \text{ et } y_j = b_j$$

(57) reste vrai en vertu de $\sin \phi_m = 0$ et de (36) et (37). Il reste à prouver que si μ_m est une valeur propre multiple non nulle, il existe le même nombre de modes de réponse équiphase linéairement indépendants, de sorte que (57), (60) et (61) puissent être vérifiés par combinaisons linéaires appropriées. Or dans la formulation (28) et (29) ceci est manifestement vrai de la la partie v des coordonnées de y, car, en dehors d'une fréquence singulière, elle est gouvernée par le problème classique

$$(\mu\mathrm{H} - \mathrm{V'RV})v = 0$$

dépendant de deux matrices hermitiques H et V'RV, dont la dernière est définie positive. La matrice H est obtenue en tirant u de (28) pour le substituer dans (29).

Il résulte alors de (57) que, en dehors d'une fréquence singulière, les coefficients a_m des développements (54) et (55) sont obtenus individuellement par les formules

$$y'_j p = a_j y'_j p_j \qquad j = 1, 2, \dots n \tag{62}$$

où p_j peut être remplacé par une de ses expressions tirées de (16), (17) ou (56).

Au niveau d'une fréquence singulière, il y a comme on l'a vu déficience dans le nombre de modes de réponse équiphase par suite d'une confluence. Il faut adjoindre une solution complémentaire que nous allons brièvement construire. Soit, en séparant la partie réelle de l'imaginaire,

$$z_c = r_i - is_i \tag{63}$$

la réponse complémentaire quand $\omega = \gamma_i$ et b_i est le mode en confluence.

La sollicitation correspondante est

$$p_c = (-\gamma_i^2\mathrm{M} + i\gamma_i\mathrm{R} + \mathrm{C})(r_i - is_i) \tag{64}$$

Pour qu'elle soit réelle il faut d'abord que

$$(\mathrm{C} - \gamma_i^2\mathrm{M})s_i = \gamma_i\mathrm{R}r_i \tag{65}$$

Ceci n'est possible, compte tenu des propriétés

$$b_j'\mathrm{R} = 0 \qquad j = 1, 2, \dots p$$

des modes non amortis, que si

$$b_j'(\mathrm{C} - \gamma_i^2\mathrm{M})s_i = 0 \qquad j = 1, 2 \dots p$$

Ceci justifie (voir l'équation (45)) que l'on prenne

$$s_i = b_i$$

Il vient alors pour construire la partie réelle de la réponse complémentaire, le système compatible

$$\gamma_i\mathrm{R}r_i = (\mathrm{C} - \gamma_i^2\mathrm{M})b_i \tag{66}$$

tandis que la sollicitation correspondante se réduit à

$$p_c = (\mathrm{C} - \gamma_i^2\mathrm{M})r_i \tag{67}$$

Il est maintenant possible de déterminer les coefficients β_i et α_m des développements parallèles

$$z = \beta_i(r_i - ib_i) + \Sigma'\alpha_m y_m e^{-i\phi_m} \tag{68}$$

$$p = \beta_i(\mathrm{C} - \gamma_i^2\mathrm{M})r_i + \Sigma'\alpha_m p_m \tag{69}$$

L'accent sur le signe sommatoire indique la disparition par confluence d'un des modes de réponse équiphase ; il n'y a donc que $n - 1$ termes dans les sommes, les p premiers indices étant ceux des modes non amortis.

La multiplication de (69) à gauche par b'_i suffit à déterminer l'amplitude du mode complémentaire. En effet, au niveau de la fréquence singulière γ_i, même pour $m = i$

$$b'_i p_i = b'_i(\mathrm{C} - \gamma_i^2 \mathrm{M}) b_i = 0$$

en vertu de (45). Il vient donc

$$b'_i p = \beta_i b'_i(\mathrm{C} - \gamma_i^2 \mathrm{M}) r_i = \beta_i \gamma_i r'_i \mathrm{R} r_i \tag{70}$$

Une fois cette amplitude déterminée, la multiplication à gauche par les autres y'_m fait connaître, comme auparavant, les autres coefficients α_m

$$y'_m p = \beta_i y'_m(\mathrm{C} - \gamma_i^2 \mathrm{M}) r_i + \alpha_m y'_m p_m \qquad m \neq i \tag{71}$$

Il n'y a plus que le coefficient α_i correspondant au mode $y_i = b_i$ en confluence qui soit indéterminé.

Il peut se calculer comme le résidu du développement de p. Il y a lieu d'observer que (66) ne détermine r_i qu'à une combinaison linéaire additionnelle de modes non amortis près. Ceci n'affecte pas la valeur du coefficient β_i comme on peut facilement le vérifier par (70).

Le mode complémentaire ressemble à une résonance de phase car le mode $y = b_i$ en confluence y apparaît en quadrature.

RÉFÉRENCES

[1] B. M. FRAEIJS DE VEUBEKE, Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti. *Acad. R. de Belgique, Bull. de la Classe des Sc.* 5-*XXXIV*, 1948, pp. 626-641.

[2] B. M. FRAEIJS DE VEUBEKE, A variational approach to pure mode excitation based on characteristic phase lag theory, *AGARD Report N°* **39**, April 1956.

[3] G. M. L. GLADWELL and R. E. D. BISHOP, An investigation into the theory of resonance testing. *Aeronautical Research Council*, A-I. Report ARC 22, 381, 0.1596, September 1960.

[4] Y. PIRONNEAU et S. DUBIGEON, Détermination des matrices des systèmes quasi linéaires par excitation harmonique équiphase : méthode de la réponse équiphase, *Annales de l'École Nationale Supérieure de Mécanique*, Nantes, 1964, pp. 1-36.