Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Procès-verbal de la Séance du 8 janvier 1966

Le problème de Newton du solide de révolution présentant une traînée minimum

par B. FRAEIJS de VEUBEKE,
Correspondant de l'Académie.

INTRODUCTION.

Dans ses « Principes Mathématiques de Philosophie Naturelle », Sir Isaac Newton [1] pose le problème de déterminer la forme optimale d'un solide de révolution de longueur et maître couple donnés du point de vue de sa résistance à l'avancement.

La réaction aérodynamique est calculée dans l'hypothèse où les particules du milieu traversé subissent une réflexion spéculaire sur la paroi. Ce point de vue, qui néglige les interactions entre particules se rapproche de la réalité quand le milieu est raréfié au point que le libre parcours moyen des particules devient très grand, comparé aux dimensions du solide. Il connaît ainsi avec le vol en atmosphère raréfiée un regain d'intérêt. La solution donnée par Newton est correcte mais il n'est pas possible d'établir avec certitude comment il y est parvenu.

C'est en analysant ce problème que Weierstrass a élaboré son critère de variation forte. Il en ressort que, dans la forme où il est généralement posé [2], le problème n'admet, du point de vue des critères actuels du calcul des variations, aucun minimum relatif, qu'il soit fort ou même faible.

Ce paradoxe peut être levé en précisant les exigences physiques de la représentation mathématique du problème. Il en résulte une nouvelle formulation, dans le cadre de laquelle la solution de Newton apparaît comme un minimum relatif fort. D'autre part l'application du principe du maximum de Pontrjagin [3] conduit aux mêmes conclusions.

1. Ancienne formulation.

L'axe des y est pris comme axe de révolution (fig. 1). Une masse m, animée de la vitesse V suivant oy et subissant un choc élastique avec un élément de paroi orienté suivant l'angle θ, communique à cet élément une impulsion dont la composante selon oy a pour valeur $2m\mathrm{V}\cos^2\theta$.

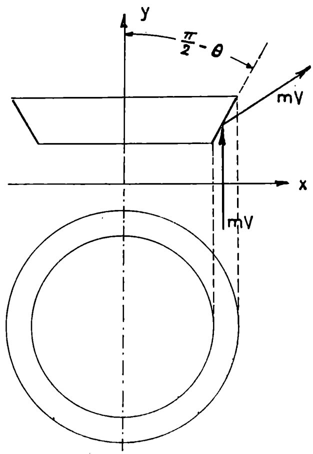

Fig. 1.

La section frontale $2\pi x dx$ du cône élémentaire dont les génératrices font le même angle avec l'écoulement incident reçoit par unité de temps une masse $\rho\mathrm{V}2\pi x dx$ où ρ est la masse volumique du milieu traversé. L'impulsion reçue par unité de temps, ou traînée, vaut donc $4\pi\rho\mathrm{V}^2 x\cos^2\theta dx$.

Si
$$y = y(x) \qquad y(o) = o \qquad y(a) = b \tag{1}$$
est l'équation de la courbe méridienne de la surface, le problème se pose de rendre minimum la traînée totale D, c'est-à-dire la fonctionnelle

$$\frac{\mathrm{D}}{4\pi\rho\mathrm{V}^2} = \int_0^a \frac{x dx}{1 + y'^2}\,. \tag{2}$$

En représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= x(t) \qquad & x(t_1) &= o \qquad & y(t_1) &= o \\ y &= y(t) \qquad & x(t_2) &= a \qquad & y(t_2) &= b \end{aligned} \tag{3}$$

le problème prend la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \quad \text{minimum} \tag{4}$$

$$\mathrm{F} = \frac{x\dot{x}^3}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \tag{5}$$

Comme F est explicitement indépendant de y, une intégrale première immédiate de l'équation d'Euler est

$$\mathrm{F}_{\dot{y}} = \text{constante, soit}$$

$$\frac{x\,\dot{x}^3\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} = c \tag{6}$$

et cette constante ne peut changer de valeur, même au droit d'une brisure de l'extrémale.

C'est une des conditions de jonction de Weierstrass-Erdmann entre segments d'extrémales. La seconde condition est que l'expression

$$\mathrm{F}_{\dot{x}} = \frac{x\dot{x}^2(\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2)}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} \tag{7}$$

soit également continue au droit des brisures.

Dénotant par (u, v) les valeurs prises par $(\dot{x}, \dot{y})$ le long d'une extrémale, la fonction excès de Weierstrass peut s'écrire de façon générale

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(x, y, u, v, \dot{x}, \dot{y}) \\ &= \mathrm{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) - \dot{x}\mathrm{F}_{\dot{x}}(x, y, u, v) - \dot{y}\mathrm{F}_{\dot{y}}(x, y, u, v). \end{aligned} \tag{8}$$

Une forme de discussion parfois plus commode s'obtient en posant

$$\dot{x} = r\cos\theta \qquad \dot{y} = r\sin\theta \qquad u = r\cos\alpha \qquad v = r\sin\alpha.$$

L'angle α est celui que fait un segment orienté d'extrémale avec l'axe ox, l'angle θ est celui d'une orientation de comparaison.

Comme $\mathrm{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ est toujours homogène du premier degré dans les arguments $\dot{x}$ et $\dot{y}$, on peut écrire

$$\mathrm{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = r\phi(x, y, \theta).$$

Résolvant les formules évidentes

$$F_r = F_{\dot x} \cos\theta + F_{\dot y} \sin\theta = \phi(x, y, \theta)$$

$$F_\theta = r(- F_{\dot x} \sin\theta + F_{\dot y} \cos\theta) = r\phi_\theta(x, y, \theta)$$

pour $F_{\dot x}$ et $F_{\dot y}$ et substituant dans (8), il vient

$$E(x, y, a, \theta) = r[\phi(x, y, \theta) - \cos(a - \theta)\, \phi(x, y, a) + \sin(a - \theta)\, \phi_\theta(x, y, a)].$$

Dans le cas présent l'application de cette transformation donne

$$\phi(x, y, \theta) = x \cos^3 \theta$$

et

$$E(x, y, a, \theta) = - rx \sin^2(a - \theta) \cos(2a + \theta). \tag{9}$$

Cette dernière formule a d'ailleurs été découverte par Weierstrass. La condition nécessaire de Weierstrass pour un minimum relatif fort est que

$$E(x, y, a, \theta) \geqslant o \qquad o \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{10}$$

Il est visible que, dans le cas présent, elle ne sera jamais satisfaite par toutes les orientations de comparaison mais seulement par celles telles que $\cos(2a + \theta) \leqslant o$.

S'il faut donc déjà renoncer à découvrir un minimum relatif fort, il faut même renoncer à un minimum faible.

Ceci va résulter de la discussion sur la possibilité de satisfaire aux conditions aux limites et d'un examen de la condition nécessaire de Legendre :

$$E_{\theta\theta}(x, y, a, a) \geqslant o \tag{11}$$

qui s'écrit ici

$$- 2rx \cos 3a \geqslant o,$$

soit

$$30^\circ \leqslant a \leqslant 90^\circ \text{ si } x > o. \tag{12}$$

1° Considérons d'abord le cas où, dans l'intégrale première (6) de l'équation différentielle des extrémales, la constante c est nulle.

L'équation (6), les conditions aux limites (3) et les conditions de jonction de Weierstrass-Erdmann sont satisfaites par l'extrémale brisée (fig. 2)

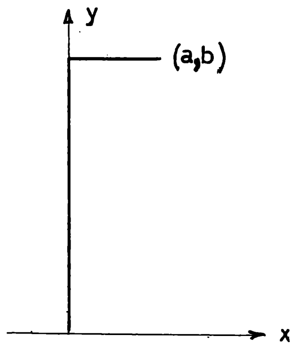

FIG. 2.

$$x = o \qquad y \in [o, b]$$

$$y = b \qquad x \in [o, a].$$

Le corps de révolution est constitué d'un disque perpendiculaire au courant. L'intuition suggère qu'il s'agit éventuellement là d'un *maximum* relatif faible et le critère de Legendre vient à l'appui de cette hypothèse car le long des segments successifs

$$\begin{aligned} E_{\theta\theta}(x, y, \alpha, \alpha) &= o && \text{pour } x = o \\ &= -2rx < o && \text{pour } y = b \text{ et } x > o \end{aligned}$$

2° Si la constante c n'est pas nulle, l'équation différentielle (6) possède la solution paramétrique

$$x = \frac{c}{p}[1 + p^2]^2 \tag{13}$$

$$y = m + c\left[-\ln p + p^2 + \frac{3}{4}p^4\right] \tag{14}$$

où

$$p = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \tan \alpha \tag{15}$$

et m est la deuxième constante d'intégration.

L'extrémale décrite en faisant varier p depuis zéro jusqu'à l'infini (fig. 3) possède un point de rebroussement, où $dx/dp = o$ et $dy/dp = o$, pour

$$p = 1/\sqrt{3} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = 30^\circ.$$

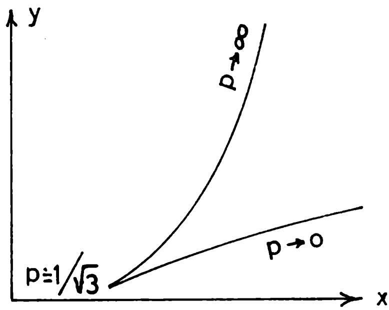

FIG. 3.

La branche le long de laquelle α augmente de 30° à 90° satisfait seule au critère de Legendre.

Il est impossible de briser l'extrémale car une discontinuité de p entraîne une discontinuité de x et de y. D'autre part la plus petite abscisse atteinte par l'extrémale au point de rebroussement

$$x_{\min} = c\,\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

ne peut être nulle ; il est impossible de satisfaire une des conditions aux limites.

L'absence de solutions au problème ne peut provenir que d'une formulation défectueuse de son contenu physique. Une remarque de Legendre nous permet d'apercevoir une des absurdités de la formulation.

Pour illustrer le résultat négatif du critère de Weierstrass il observe que si l'on remplace un segment AB de l'extrémale (13-14) par le contour brisé ACB (fig. 4), où AC est parallèle au courant, la valeur de la fonctionnelle est certainement diminuée quand la pente de CB est supérieure à la pente locale p de l'extrémale en B. La contribution à la fonctionnelle peut même être annulée en éloignant C à l'infini.

Si l'on répète cette opération pour une suite de segments, la méridienne prend la forme d'une scie dont les pointes font face au courant. Mais alors une particule venant frapper la surface ne subit plus un choc unique mais une succession de chocs et la fonctionnelle ne représente plus la réalité physique.

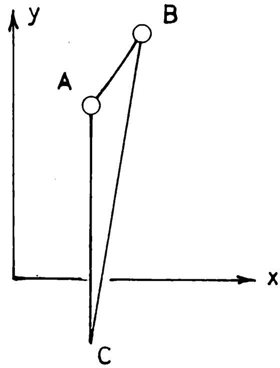

FIG. 4.

2. NOUVELLE FORMULATION.

Les remarques précédentes suggèrent que le problème avec choc unique peut avoir une solution à condition de pouvoir limiter $\dot{x}$ et $\dot{y}$ à des valeurs positives.

Comme on le montrera dans la section 3, il est facile d'introduire de pareilles limitations dans une formulation du type étudié par Pontrjagin [3]. Si l'on veut maintenir le problème sous la forme classique du minimum d'une fonctionnelle on se heurte à la difficulté suivante : la droite $y = o$ devient une frontière de l'espace de phase et si l'extrémale du problème possède un segment situé sur cette frontière, les variations δy n'y sont plus libres.

Pour tourner la difficulté (fig. 5) nous modifions le problème en recherchant le minimum de

$$\frac{1}{2} x_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{F} dt \quad \min$$

sous les conditions aux limites élargies

$$y(t_1) = o$$

$$x(t_2) = a \qquad y(t_2) = b.$$

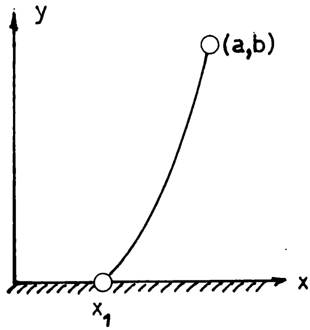

Fig. 5.

Ainsi la valeur $x(t_1) = x_1$ est laissée libre et la recherche du point optimal sur la frontière fait partie du problème. Le premier terme de la fonctionnelle modifiée est évidemment la contribution du disque de rayon x_1 à la traînée.

L'annulation du coefficient de la variation libre δx_1 fournit

$$x_1 - [\mathrm{F}_{\dot{x}}]_{t=t_1} = o.$$

Soit, après usage de (7)

$$\left[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right]_{t=t_1} = p_1 = 1.$$

Elle ne fixe pas la valeur de x_1 mais la pente avec laquelle l'extrémale (13-14) doit quitter la frontière. Comme $\alpha_1 = 45^o$, le critère de Legendre sera satisfait pour la branche d'extrémale dont la pente p est croissante. En limitant les orientations de comparaison θ aux valeurs comprises entre o^o et 90^o, le critère de variation forte

$$\cos(2\alpha + \theta) \leqslant o \quad \text{est satisfait par} \quad 45^o \leqslant \alpha \leqslant 90^o.$$

Les constantes d'intégration sont liées à x_1 et aux valeurs terminales $p_1 = 1$ et p_2 par les conditions aux limites

$$x_1 = 4c \tag{13'}$$

$$o = m + \frac{7}{4}c \tag{14'}$$

$$a = \frac{c}{p_2}[1 + p_2^2] \tag{13''}$$

$$b = c\left[p_2^2 + \frac{3}{4}p_2^4 - ln\, p_2 - \frac{7}{4}\right]. \tag{14''}$$

En particulier p_2 se déduit du quotient des deux dernières, ensuite c découle de (13″) et x_1 de (13′).

Pour le coefficient de traînée optimal, rapporté au maître-couple, on trouve l'expression

$$C_D = \frac{2D}{\rho V^2 \pi a^2} = 2\,\frac{2 + 17p_2^2 + 10p_2^4 + 3p_2^6 + 4p_2^2\, ln\, p_2}{[1 + p_2^2]^4}.$$

Il est illustré à la figure 6 comme fonction décroissante (et d'ailleurs asymptotiquement nulle) de la « finesse » $f = b/a$. On y a comparé le coefficient de traînée

$$c_D = \frac{4}{1 + f^2}$$

du simple cône de même finesse.

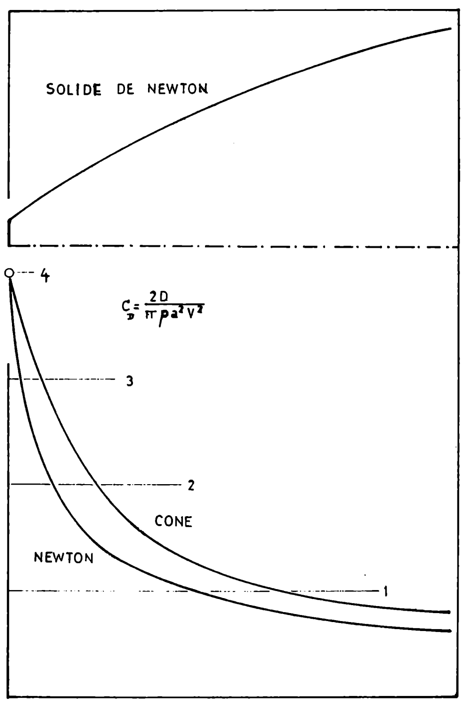

Fig. 6.

En considérant c comme un paramètre, m ayant la valeur prévue par (14′), les extrémales forment un champ couvrant l'entièreté du quart de plan $x \geqslant o$, $y \geqslant o$.

Ce résultat est immédiat si l'on observe que c est un facteur d'homothétie. En tout point intérieur de ce domaine le critère de Weierstrass, limité aux directions de comparaison $o < \theta < 90°$, est vérifié de façon forte.

On sait alors par application de l'intégrale de Hilbert que ceci constitue une condition suffisante pour que la solution trouvée soit un minimum relatif fort.

3. Solution du problème par le principe du maximum de Pontrjagin.

Pour garantir la condition $\dot{x} > o$, nous conservons x comme variable indépendante. Pour garantir $\dot{y} \geqslant o$ nous posons

$$y' = u^2. \tag{16}$$

Avec

$$z' = \frac{x}{1 + u^4} \tag{17}$$

la fonctionnelle dont on recherche le minimum prend la forme

$$z(a) - z(o) \text{ minimum.} \tag{18}$$

Les conditions aux limites sont

$$y(o) = o \qquad y(a) = b. \tag{19}$$

Du hamiltonien de Pontrjagin

$$\mathrm{H} = \lambda_y u^2 + \lambda_z \frac{x}{1 + u^4}$$

on tire les équations différentielles adjointes

$$\lambda'_y = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = o$$

$$\lambda'_z = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = o$$

qui montrent que λ_y et λ_z sont des constantes. Les conditions de transversalité précisent que λ_z doit être négatif et les multiplicateurs seront normés en posant en conséquence $\lambda_z = -1$.

La variable de contrôle u doit alors être choisie de façon à rendre le hamiltonien maximum

$$u = \arg\sup \left[\lambda_y u^2 - \frac{x}{1 + u^4}\cdot\right] \tag{20}$$

Le cas $\lambda_y > o$ est à rejeter car il exige toujours que u soit aussi grand que possible. Posons donc

$$\lambda_y = - a^2. \tag{21}$$

La condition nécessaire $\partial H / \partial u = o$ est satisfaite

1° pour $$u = o$$

2° pour $$x = \frac{a^2}{2} \frac{(1 + u^4)^2}{u^2}. \tag{22}$$

Le premier cas est toujours un maximum relatif de H

$$(H_{max})_1 = - x. \tag{23}$$

Le second cas n'existe qu'à partir d'une valeur minimum de x (atteinte pour $u^4 = 1/3$). Dès que $u^4 > 1/3$ il fournit aussi un maximum relatif de H

$$(H_{max})_2 = - x \frac{1 + 3u^4}{(1 + u^4)^2}. \tag{24}$$

Ce maximum est d'abord inférieur au précédent, il lui devient égal puis le dépasse à partir de

$$u^4 = 1.$$

En conséquence la meilleure programmation de la variable de contrôle consiste à suivre le premier cas

$$u = o \quad \text{tant que} \quad o \leqslant x < 2a^2.$$

Puis à commuter vers le second cas au point $x = 2a^2$ où u sautera de 0 à 1. Ceci respecte d'ailleurs comme il se doit la continuité du hamiltonien.

Ensuite on suivra la loi (22) en faisant croître progressivement u. On observera qu'avec les correspondances

$$p = u^2 \qquad c = \frac{1}{2} a^2$$

cette solution est en tous points identique à celle de la section 2.

RÉFÉRENCES

[1] Newton, I., Mathematical Principles of Natural Philosophy, University of California Press, Berkeley, 1934.

[2] Forsyth, A.R., Calculus of Variations, Cambridge University Press, London, 1927.

[3] Pontrjagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., et Mishenko, E. F., The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley and Sons (Interscience Publishers), New-York, 1962.