Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 avril 1966

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

ANALYSE INFINITÉSIMALE

Une condition nécessaire et suffisante de minimum relatif dans le problème des extrémés liés

par B. FRAEIJS de VEUBEKE
Correspondant de l'Académie.

Résumé. — On sait que la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet une formulation élégante des conditions nécessaires de stationnarité dans le problème des extrêmes liés. Une analyse de la variation seconde, inspirée des idées de Jacobi, permet d'établir une condition nécessaire et suffisante pour que l'extremum relatif soit un minimum. Elle se présente sous la forme d'un problème accessoire aux valeurs propres, la condition étant que celles-ci, certainement réelles, soient toutes positives.

Soit à trouver un minimum de la fonction $f(q_i)$ de n variables q_i, liées par $m < n$ relations

$$g_j(q_i) = 0 \qquad j = 1, 2 \dots m \tag{1}$$

Les fonctions f et g_j sont supposées deux fois continûment différentiables dans un voisinage de l'extrémum analysé. Les conditions (1) peuvent y être remplacées au premier ordre par

$$\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \qquad j = 1, 2 \dots m \tag{2}$$

les dérivées partielles étant évaluées au point extrémal. La variation première de f dans ce voisinage est

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i = \delta f. \tag{3}$$

Dans un problème régulier, les formes linéaires premiers membres de (2) sont linéairement indépendantes ; la matrice de leurs coefficients est de rang m au point extrémal. La forme linéaire (3) ne peut être qu'une combinaison linéaire des formes précédentes car, sinon, (2) et (3) formeraient un système de $m + 1$ équations à $n \geqslant m + 1$ inconnues de rang $m + 1$; il existerait un système de valeurs (δq_i) vérifiant (2) et (3) pour une valeur arbitraire de δf et le point considéré ne serait pas extrémal. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = - \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \qquad i = 1,\ 2\ \ldots\ n$$

et ces relations de dépendance linéaire entrainent $\delta f = 0$. Posant

$$h = f + \sum_j \lambda_j g_j \tag{4}$$

ces conditions s'écrivent

$$\frac{\partial h}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\ 2\ \ldots\ n \tag{5}$$

Associées à (1) elles déterminent les n coordonnées q_i du point extrémal et les m valeurs des multiplicateurs de Lagrange λ_j.

Pour analyser la variation seconde, nous remarquons avec de la Vallée Poussin [1] que l'égalité de f et de h étant toujours assurée en vertu des conditions (1), les variations secondes de f et de h sont aussi égales

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_k} \delta q_i \delta q_k \tag{6}$$

Les coefficients

$$h_{ik} = \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_k}$$

forment une matrice symétrique, notée H, et sont calculables à partir de la connaissance des coordonnées du point extrémal et des multiplicateurs. En notation matricielle

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \delta q' \mathrm{H} \delta q \tag{7}$$

où δq est la matrice unicolonne des variations δq_i.

Nous cherchons les conditions sous lesquelles la forme quadratique (7) soit définie positive avec les restrictions (2) ; dans ce cas l'extrémum relatif est un minimum. Les restrictions (2) sont mises sous la forme matricielle

$$G'\delta q = 0 \tag{8}$$

La matrice transposée G étant définie par ses lignes

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial q_i}\ \frac{\partial g_2}{\partial q_i} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial q_i}\right) \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

Dans le problème dit « accessoire » de Jacobi [2] on recherche les variations des fonctions donnant à la variation seconde d'une fonctionnelle sa valeur minimum. Ici nous recherchons, de façon plus générale, les directions de l'espace des δq_i pour lesquelles la variation seconde (7) est stationnaire sous, d'une part les restrictions (2) ou (8) et d'autre part la restriction à une distance (euclidienne) unitaire $d = 1$, avec

$$d^2 = \sum_i (\delta q_i)^2 \tag{9}$$

Ceci est équivalent à la recherche des directions de stationnarité du quotient des formes quadratiques (7) et (9) sous les restrictions (8).

La métrique euclidienne n'est d'ailleurs choisie qu'en raison de sa simplicité ; elle peut être remplacée par n'importe quelle métrique positive.

Les conditions de stationnarité du problème accessoire sont obtenues, comme celles du problème de la variation première δf, en formant à l'aide de nouveaux multiplicateurs β_j et μ la forme

$$\phi = \delta^2 f + \sum_j \beta_j \left(\sum_i \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \delta q_i\right) - \frac{1}{2}\mu \sum_i (\delta q_i)^2$$

et annulant les n dérivées partielles par rapport aux δq_i.

Sous forme matricielle, dénotant par b la matrice unicolonne des β_j,

$$\phi = \frac{1}{2}\,\delta q' H \delta q + \delta q' G b - \frac{1}{2}\,\mu \delta q' \delta q$$

Annuler les dérivées partielles revient à exiger

$$\mathrm{H}\delta q + \mathrm{G}b - \mu\delta q = 0 \tag{10}$$

et, avec (8), on obtient un problème aux valeurs propres

$$\begin{pmatrix} \mathrm{H} - \mu\mathrm{E} & \mathrm{G} \\ \mathrm{G}' & \mathrm{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation algébrique de degré $(n - m)$ en μ

$$\begin{vmatrix} \mathrm{H} - \mu\mathrm{E} & \mathrm{G} \\ \mathrm{G}' & \mathrm{O} \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

La matrice G étant réelle, la relation transposée-conjuguée de (8) est

$$\delta q^*\mathrm{G} = 0$$

Par conséquent, multipliant (10) à gauche par δq^*

$$\delta q^*\mathrm{H}\delta q = \mu\delta q^*\delta q$$

et, H étant réelle et symétrique, les valeurs propres sont réelles.

A toute valeur propre μ_r on peut associer un vecteur propre réel

$$\delta q = e_r \qquad b = b_r$$

tel que

$$\mathrm{H}e_r + \mathrm{G}b_r = \mu_r e_r \tag{13}$$

$$\mathrm{G}'e_r = 0 \tag{14}$$

Considérons les relations similaires mais transposées pour une autre valeur propre μ_s

$$e'_s\mathrm{H} + b'_s\mathrm{G}' = \mu_s e'_s \tag{15}$$

$$e'_s\mathrm{G} = 0 \tag{16}$$

En vertu de (16) il vient en multipliant (13) à gauche par e'_s

$$e'_s\mathrm{H}e_r = \mu_r e'_s e_r$$

Et en vertu de (14) en multipliant (15) à droite par e_r

$$e'_s\mathrm{H}e_r = \mu_s e'_s e_r$$

Ces deux relations ne sont compatibles avec des valeurs propres distinctes que si

$$e'_s \mathrm{H} e_r = 0 \qquad e'_s e_r = 0 \qquad \mu_r \neq \mu_s \tag{17}$$

A une valeur propre de multiplicité p correspondent exactement p vecteurs propres linéairement indépendants ; ceci découle immédiatement du caractère auto-adjoint du problème (11). Les propriétés d'orthogonalité (17) peuvent alors être étendues par construction de sorte que, les valeurs propres étant distinctes ou non

$$e'_s \mathrm{H} e_r = 0 \qquad e'_s e_r = 0 \qquad r \neq s \tag{18}$$

Les $(n - m)$ vecteurs propres e_r forment une base orthogonale du sous-espace des (δq_i) défini par (8).

Il en résulte que, décomposant un vecteur quelconque de ce sous-espace dans cette base :

$$\delta q = \sum_{1}^{n-m} a_r e_r$$

la variation seconde (7) peut prendre les valeurs

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-m} a_r^2 e'_r \mathrm{H} e_r = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-m} \mu_r a_r^2 e'_r e_r \tag{19}$$

D'ailleurs, si les vecteurs propres ont été normés par la condition (9), on a plus simplement encore

$$\delta^2 f = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-m} \mu_r a_r^2 \tag{20}$$

Il est alors clair que la condition nécessaire et suffisante pour que la variation seconde soit définie positive est que les racines de l'équation (12) aux valeurs propres soient toutes positives. Cette propriété permet en particulier de vérifier le caractère de minimum relatif d'une solution de problème aux extrémés liés par une application des critères de Routh ou de Hurwitz [3] aux coefficients de l'équation (12).

RÉFÉRENCES

[1] Ch. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale.* Gauthier-Villars, 1922. Tome I.

[2] G. BLISS, Lectures on the Calculus of Variations. The University of Chicago Press, 1947, p. 27.

[3] E. J. ROUTH, Dynamics of a system of rigid bodies, II, Dover, N. Y., 1955, Chap. VI.