

Cours de Théorie des Structures

par le

Professeur François de Veubeke.

Première partie : Théorie variationnelle

I Aspect variationnels de la théorie de l'élasticité

- 1. Généralités
- 2. Principe de conservation de l'énergie
- 3. Conséquences et informations tirés du principe
- 4. Autres rappels d'élasticité déduits indirectement du principe

II Energie complémentaire

III Principes variationnels

- 1. Filiation des principes variationnels
- 2. Principe de variation des déplacements
- 3. Principe général
- 4. Principe de Rissner
- 5. Principe de variation de tensions

IV Traitement de l'hyperélasticité

- 1. Généralités
- 2. Cas spécial de domaines multiplément connexes
- 3. Compléments sur les principes en hyperélasticité

Deuxième partie : Poutres en caisson

I Application de la théorie variationnelle aux poutres en caisson

- 1. Caisson rectangulaire soumis à torsion par le principe de var. déplacements
- 2. Caisson rectangulaire soumis à torsion par le principe de Rissner

II Problème général des poutres en caisson

- 1. Introduction
- 2. Equilibres

3. Transformation des intégrales	62
4. Déformations	64
5. Tensions	65
6. Axes de cisaillement de Despreaer	66

III Solution de St Venant pour les poutres en caisson

1. Hypothèse fondamentale de la solution : loi d'équarrissage	68
2. Calcul du flux de cisaillement	71
3. Calcul du gauchissement de la section	78
4. Corrections à la théorie de St Venant	81

Troisième partie : Méthode des éléments finis

I Introduction

II Théorie des bornes supérieures et inférieures

1. Hypothèses et définitions	86
2. Application des principes variationnels	90
3. Bornes supérieure et inférieure	95

III Théorie des modèles déplacements

1. Introduction	98
2. Théorie des modèles déplacement à 2 dimensions	99
3. Premier modèle : triangle de Turner	102
4. Second modèle : ligne	104
5. Troisième modèle : longeron	108

IV Théorie des modèles équilibre

1. Théorie des modèles à 2 dimensions	115
2. Premier modèle : triangle à tensions constantes	120
3. Second modèle : triangle à tensions linéairement variables	123
4. Troisième modèle : élément d'anneau	132
5. Quatrième modèle : élément de ligne	137

I Propriétés des matrices raideurs	137
1. Nature des matrices raideurs	139
2. Assemblage des éléments par matrices raideurs	145

Exercices

I Poutre fléchie par le principe de variation des déplacements	2
II Application du problème précédent	7
III Plaque fléchie par le principe de variation des déplacements	12
IV Poutre fléchie par le principe de Reissner	18
V Poutre non rectangulaire par le principe de Reissner	25
VI Poutre fléchie par le principe de variation des tensions	29
VII Calcul d'un caisson rectangulaire	33
VIII Recherche du centre de flexion-torsion (Weinstein)	38
IX Exercice proposé	44

Cours de Théorie des Structures

Première partie : Théorie Variationalle.

par

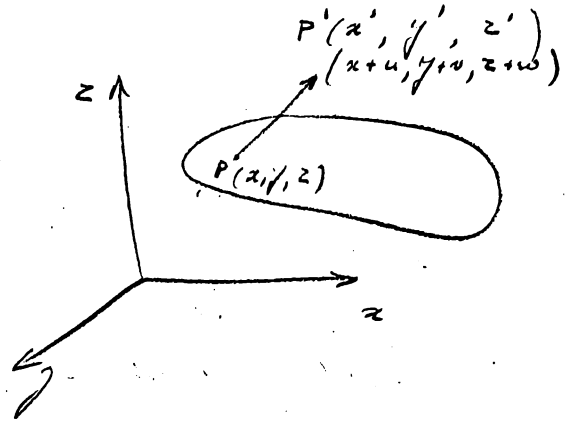
le Professeur Fraeyss de Veubeke.

I Aspects variationnels de la théorie de l'élasticité.

1. Généralités.

L'état de référence est

un état de corps sans tensions internes
(à peu près impossible à obtenir en
pratique)



on y définit un point P par ses coordonnées x, y, z .

Après déformation le point P s'est déplacé et est venu en

$$x + u = x'$$

$$y + v = y'$$

$$z + w = z'$$

Dans le point de vue Lagrangien (adopté dans le cours) le vecteur déplacement est une fonction de l'état de référence

$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

$$w = w(x, y, z)$$

Dans le point de vue Eulerien (nécessaire pour étudier les déplacements finis), le vecteur déplacement est une fonction de l'état final

$$u = u(x', y', z')$$

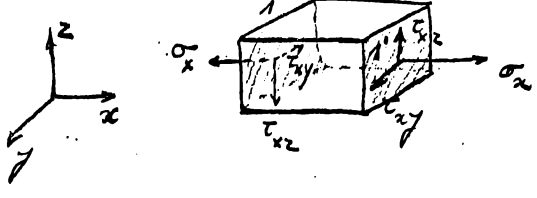
$$v = v(x', y', z')$$

$$w = w(x', y', z')$$

Parmi les différents possibilités, on choisit pour les tenseurs la définition et les notations de Timoshenko. Les tenseurs sont définies

par unité de surface dans l'état de référence et décomposés dans les directions de référence du système de référence.

Soit un petit élément parallélépipédique découpé dans la structure de référence; sur une face dont la normale extérieure a la direction opposée à



l'axe des x ; les trois tensions ont la direction opposée des axes; sur une face à normale extérieure dans la direction des axes, les tensions ont aussi la direction des axes.

Comme l'élément est isolé, on peut parler de forces extérieures de surface au sens de la Mécanique des Solides, le système de forces appliqués sur la surface est équivalent à l'ensemble des petits forces qui agissent de point en point sur la surface sur des points de la surface.

On définit également des forces de volume (champ de gravitation f_x, f_y, f_z), par unité de volume initial de référence.

2. Principe de conservation de l'énergie

4.

Le principe fondamental est le principe de conservation de l'énergie : le travail fourni par les forces extérieures dans une déformation du corps se retrouve intégralement dans l'énergie de déformation du corps.

L'énergie par unité de volume de référence est w (on ne connaît pas les arguments ; on sait seulement que la température n'en fait pas partie). Dans ce cours, on se borne aux corps élastiques : énergie récupérable

on définit la variation des déplacements comme la différence entre deux déplacements très rapprochés.

$$\begin{aligned} u^*(x, y, z) - u(x, y, z) &= \delta u(x, y, z) \\ \dots & \end{aligned} \quad \left\{ (x, y, z) \right.$$

Le travail des forces extérieures au cours de la variation de déplacements vaut

- sur la face s (négatif vu la convention de signe adoptée)

$$- \left[\sigma_x (dy dz) \delta u + \tau_{xy} (dy dz) \delta v + \tau_{xz} (dy dz) \delta w \right]$$

- sur la face s'

$$\begin{aligned} + \left[\sigma_x (dy dz) \delta u + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) dx dy dz + \tau_{xy} (dy dz) \delta v + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} \delta u) dx dy dz \right. \\ \left. + \tau_{xz} (dy dz) \delta w + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz} \delta w) dx dy dz \right] \end{aligned}$$

- sur la paire de faces s et s'

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx dy dz$$

en posant

$$\alpha = \sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w$$

- en procédant de même sur les deux autres paires de faces, on a finalement

pour le travail des forces de surface

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ou on a fait de la même façon

$$\beta = \tau_{yx} du + \sigma_y dv + \tau_{yz} dw$$

$$\gamma = \tau_{zx} du + \tau_{zy} dv + \sigma_z dw$$

- enfin les forces de volume, s'il y en a, produisent le travail

$$(x du + y dv + z dw) dx dy dz.$$

Le travail extérieur total doit être égal au travail des forces intérieures

$$\delta W dx dy dz$$

On obtient ainsi la relation fondamentale.

$$\delta W = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} + x du + y dv + z dw$$

on va montrer comment, à partir de cette relation fondamentale, on peut trouver la plupart des relations de l'élasticité.

3. Consequences et informations tirées du principe

A. Introduction d'une translation

Au parallélépipède déformé, on applique un champ de déplacements δu , δv , δw correspondant à un corps rigide (petite rotation, translation, etc.)

Alors $\delta W = 0$

Si, par exemple, on prend une translation selon x

$$\delta v = \delta w = 0$$

$$\delta u = \delta u_0 = c \underline{x}$$

La relation fondamentale donne

$$\alpha = \sigma_x \delta u_0$$

$$\beta = \tau_{yx} \delta u_0$$

$$\gamma = \tau_{zx} \delta u_0$$

$$0 = \delta u_0 \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right]$$

Pour que cette égalité soit vraie qq soit δu_0 le crochet doit être nul.

En appliquant ensuite des translations selon y et z on trouve finalement les trois équations d'équilibre en volume.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right.$$

Ces relations étant supposées vérifiées, on peut transformer la relation fondamentale

$$\delta W = \delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) + \delta v (\dots) + \delta w (\dots) \\ + \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta v + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \delta w + \dots + \dots$$

On arrive ainsi à une forme simplifiée de la relation fondamentale

$$\delta W = \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta v + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \delta w + \dots + \dots$$

B. Introduction d'une rotation

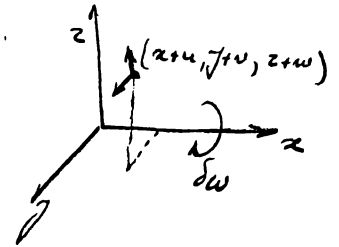
Le champ de rotation est additionnel : il peut s'appliquer à un corps déformé.

Soit une petite rotation autour de l'axe z .

- il n'y a pas de déplacement additionnel en x

- le déplacement additionnel selon y est dû à la hauteur du point : $\delta w (z+w)$

- " " " " " z " " à la coordonnée y : $-\delta w (y+v)$



On a donc un champ

$$\delta u = 0$$

$$\delta v = (z+w) \delta w$$

$$\delta w = -(y+v) \delta w$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression fondamentale simplifiée et en exprimant que $\delta W = 0$ dans une rotation d'ensemble, on a

$$0 = \delta w \left[\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{xz} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} - \tau_{yz} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \tau_{zy} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \sigma_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

C'est la relation d'équilibre en rotation dans la théorie des déplacements finis ; elle n'est pas linéaire.

Pour passer à l'élasticité linéaire on montre que l'hypothèse néo-classique est suffisante et que les 9 gradients

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

sont négligeables devant l'unité.

Dans cette hypothèse, la relation d'équilibre en rotation donne la loi de réciprocité des tensions tangentielles

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

et de même \rightarrow

En regroupant les termes, la relation fondamentale peut s'écrire

$$\delta W = \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}$$

Mais il faut justifier l'introduction des notations ϵ et γ .

c. Introduction des ϵ .

La notation précédente n'est justifiée que si on a

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta u) = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$$

or on a bien

$$\frac{\partial}{\partial x} [u^*(x, y, z) - u(x, y, z)] = \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

on pose les notations habituelles

$$\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \end{array}$$

d. Introduction des γ

La nouvelle forme du principe n'est justifiée que si on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u) = \delta \gamma_{xy} \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

c. Interprétation géométrique de ϵ_x et γ .

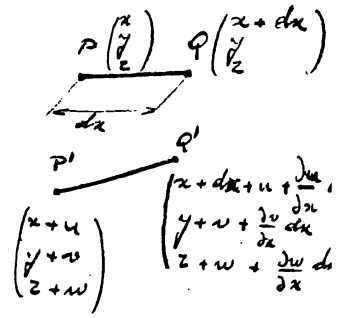
Avec ces notations, le tenseur déformations s'écrit

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} = H$$

Avec la matrice jacobienne de la f , on peut aussi écrire

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dv &= \dots \\ dw &= \dots \end{aligned}$$

Soit deux points P et Q voisins l'un de l'autre et alignés sur une parallèle à ox dans l'état de référence



on a :

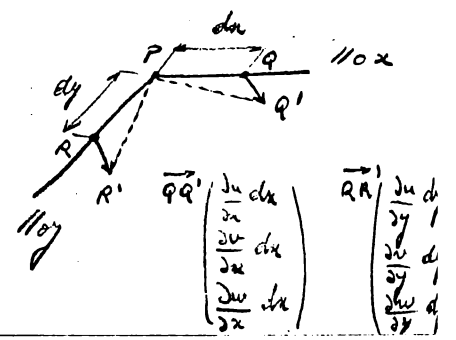
$$\begin{aligned} \overline{P'Q'}^2 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx^2 \\ &= dx^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \text{termes négligeables}\right) \end{aligned}$$

$$\overline{P'Q'} = dx \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}} = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \text{dilatation spécifique dans le sens des } x.$$

Soit trois points P, Q, R situés à indiquer circulairement dans l'état de référence.

Pour simplifier la figure, on supprime la translation de P et on n'indique que les déplacements relatifs



on a de plus,

$$\vec{PQ}' = \begin{pmatrix} dx \left(1 + \frac{du}{dx}\right) \\ dx \frac{dv}{dx} \\ dx \frac{dw}{dx} \end{pmatrix} \quad \vec{R}' = \begin{pmatrix} dy \left(\frac{du}{dy}\right) \\ dy \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) \\ dy \left(\frac{dw}{dy}\right) \end{pmatrix}$$

et l'angle relatif entre ces deux directions vaut

$$\begin{aligned} \vec{PQ}' \times \vec{PR}' &= dx dy \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} + \text{termes négligeables} \right) \\ &= PQ' \cdot PR' \cos \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{PQ}' \times \vec{PR}' &= (dx + \dots) (dy + \dots) \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ &= (dx + \dots) (dy + \dots) \sin \epsilon \end{aligned}$$

$$\sin \epsilon = \frac{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}{(1 + \dots)(1 + \dots)}$$

$$\epsilon \approx \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} + \dots$$

$$\epsilon = \gamma_{xy} = \text{réduction de l'angle droit}$$

F. Relations tensions déformations

Si W est une fonction de différentielles totales, on peut conclure de la relation p. 6

$$W = \text{fonction de } (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \dots$$

d'où la forme énergétique des relations tensions déformations

$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x}$	$\sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y}$	$\sigma_z = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_z}$
$\tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}$	$\tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}$	$\tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}$

1. Interprétation de rotations l'ensemble

La matrice J comporte 9 composants. Et jusqu'à présent, on a interprété six quantités : trois dilatations proportionnelles
trois glissements.

Il reste trois quantités à interpréter : ce sont les rotations d'un corps rigide

En effet, on peut écrire

$$H = \frac{1}{2} (J + J^T)$$

$$J = H + K$$

où $K =$ partie antisymétrique de J

$$= \frac{1}{2} (J - J^T)$$

= matrice symétrique gauche

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice représente aussi un tenseur (grandeur physique indépendante de l'observateur)

A l'aide de ses trois composants non nuls on peut former le pseudo vecteur

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{pmatrix}$$

c'est le vecteur axial de la matrice ; il jouit de propriétés particulières.

Soit un petit élément PQ . Pour autant qu'on soit dans une zone normalement différentiable, on a :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \dots$$

$$dw = \dots$$

$$dq = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = J dr$$

$$dq = \underbrace{H dr}_① + \underbrace{K dr}_②$$

① = déformation pure

② = rotation infinitésimale car $K dr = \begin{pmatrix} \omega_y dz - \omega_z dy \\ \omega_z dx - \omega_x dz \\ \omega_x dy - \omega_y dx \end{pmatrix} = \vec{\omega} \wedge dr$

B. L'ordre d'application de la déformation et de la rotation est indifférent.

On suppose qu'on applique la rotation puis la déformation.

1. Rotation (si on veut)

Si on applique la matrice rotation R à dr , on doit obtenir un vecteur tourné dont le module dr doit être inchangé par rapport au module initial dr .

$$R dr = \bar{dr} \quad (a)$$

Pour que le module soit resté inchangé, il faut que, avant et après rotation,

$$dr^T dr = \bar{dr}^T \bar{dr} \quad (b)$$

$$(a) \text{ et } (b) \rightarrow dr^T R^T R dr = dr^T dr$$

Ceci exige que

$$R^T R = E$$

Donc R est une matrice orthogonale de déterminant 1.

2. Déformation (si on veut)

On applique - la matrice E pour avoir les coordonnées initiales

- la matrice symétrique H pour introduire la déformation pure.

$$\bar{dr} = (E + H) dr$$

3. Succession de deux opérations.

Après rotation finie + déformation finie, on a

$$\bar{dr} = (E+H)R dr$$

D'autre part on a la loi générale

$$\bar{dr} = (E+J) dr$$

Si on veut dans un déplacement fini séparer la rotation et la déformation, on doit au

$$E+J = (E+H)R$$

\downarrow \downarrow
 symétri orthog.

En profitant de la symétrie de H, de E et de l'orthogonalité de R, on a

$$E+J^T = R^T(E+H)$$

$$(E+J)(E+J^T) = (E+H)^2$$

$$J+J^T+JJ^T = 2H+H^2$$

D'où la valeur de H dans une théorie de déplacements finis.

Dans une théorie de déplacements infinitésimaux,

- tous les gradients sont petits

- $JJ^T \ll J$ et J^T

- $H^2 \ll 2H$

$$\left. \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right\} \rightarrow H = \frac{1}{2}(J+J^T)$$

On retrouve bien la valeur de la p. 11.

On a aussi

$$R = E+K$$

$$RR^T = E$$

$$(E+K)(E+K^T) = E$$

$$K+K^T+KK^T = 0$$

- tous les éléments de K sont petits devant 1

- $KK^T \ll K$ et K^T

$$\left. \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right\} \rightarrow K^T = -K$$

On retrouve bien que K doit être une matrice symétrique gauche (voir p 11)

On a enfin

$$\begin{aligned}
dg &= \overline{dr} - dr \\
&= (E+J) dr - dr \\
&= (E+H) R dr - dr \\
&= (E+H)(E+K) dr - dr \\
&= (E+H+K+HK)E
\end{aligned}$$

$$dg = H dr + K dr \quad \text{second ordre}$$

On retrouve bien la relation de la p12 et on voit que les opérations peuvent être considérées comme simultanées: l'ordre d'application n'a pas d'importance pour les déplacements infinitésimaux.

c. Invariants de la déformation.

On cherche les directions principales de la déformation c.a.d. les directions telles que dr reste parallèle à lui-même en devenant \overline{dr} ; les déplacements se réduisent donc à une déformation pure

$$\begin{aligned}
\overline{dr} &= (E+H) dr \\
dg &= \overline{dr} - dr = H dr = \epsilon dr
\end{aligned}$$

En effet dg doit avoir la même direction que dr c.a.d. lui être égal à un scalaire près; ce scalaire est le coefficient spécifique de dilatation principal on se ramène au problème classique des valeurs propres d'une matrice symétrique

$$(H - \epsilon E) dr = 0$$

Pour qu'il existe une solution autre que la solution triviale $dr=0$, il faut que le déterminant de la matrice soit nul

$$\begin{aligned}
|H - \epsilon E| = 0 &\rightarrow -\epsilon^3 + \theta_1 \epsilon^2 - \theta_2 \epsilon + \theta_3 = 0 \\
&\text{ou} \\
&(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)(\epsilon - \epsilon_3) = 0
\end{aligned}$$

- les trois racines $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ sont réelles (à cause de la symétrie de H)
- à chacune correspond une direction principale $(H - \epsilon_i E) dr_i = 0$

- les directions principales sont orthogonales (cf. Géom. Analytique)

$$\begin{cases} \theta_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \theta_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 \\ \theta_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{cases}$$

} sont les invariants fondamentaux

- si on explicit le déterminant

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x - \epsilon & 1/2 \gamma_{xy} & 1/2 \gamma_{xz} \\ \dots & \epsilon_y - \epsilon & 1/2 \gamma_{yz} \\ \dots & \dots & \epsilon_z - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

on voit que

- le premier invariant est la trace du déterminant

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{u} \end{aligned}$$

c'est l'invariant fondamental ; ordre de grandeur 10^{-3} .

- le second invariant (ordre de grandeur 10^{-6}) joue un rôle important dans l'énergie

$$\theta_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)$$

- le troisième invariant (ordre de grandeur 10^{-9}) est souvent de faible importance dans les milieux isotropes

3. Décomposition de la déformation en deux mécanismes fondamentaux

1. Changement de volume avec préservation de la similitude géométrique

on a même dilatation linéaire dans 3 directions orthogonales; un cube, par ex, reste un cube. on doit avoir pour ces trois dilatations

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z &= \theta_1 \\ \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z &= \frac{1}{3} \theta_1 \end{aligned}$$

on définit

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \theta_1 E$$

2. Déviation.

Il ne se produit plus aucun changement de volume ; on introduit le déviateur

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \frac{1}{3}\theta_1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \frac{1}{3}\theta_1 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \frac{1}{3}\theta_1 \end{pmatrix}$$

3. Invariants du déviateur

Le premier invariant Θ_1^* est nul par construction : le déviateur n'introduit aucun changement de volume mais une déformation.

Le second invariant Θ_2^* joue un rôle plus important que Θ_1

$$\begin{aligned} \Theta_2^* &= \Theta_2 - \frac{1}{3}\Theta_1^2 \\ &= -\frac{1}{6}[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2] \pm \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \end{aligned}$$

4. Interprétation géométrique des invariants

On peut dire que tout le mécanisme de changement de volume est gouverné par Θ_1 et toute la déformation est gouvernée par Θ_2^*

- Si $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, on n'a que de la déformation

- Si $\Theta_2^* = 0$, chacun des termes de Θ_2^* doit disparaître

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_y = \epsilon_z \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned}$$

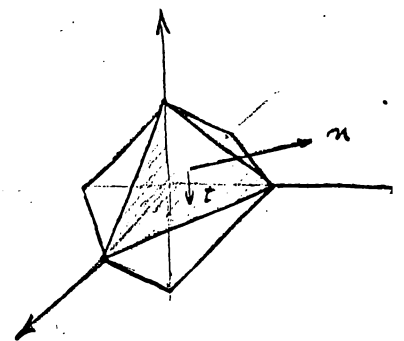
$\Theta_2 = 0$
Changement de volume sans déformation

Pour représenter géométriquement les invariants, on utilise un octaèdre (comme dans le critère de Tresca) la face la cachée de l'octaèdre a pour cos. directeurs

$$\vec{n} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

- La dilatation dans la direction de la normale $\epsilon_n = \frac{1}{3}\Theta_1$

- Le glissement total dans la face $\gamma_{nt} = \sqrt{\frac{2}{3}\Theta_2^*}$



Le critère de Huber. Von Mises limite le glissement dans peut s'écrire
- $\sigma_2^* \ll$ limite

F. Relations tensions-déformations pour un milieu isotrope.

Les relations de la p10 nécessitent quelques commentaires supplémentaires.
Quelle est la fonction

$$W = W(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

On commence par supposer que W est différentiable et développable en série de Taylor

$$W = W_0 + (\sigma_x)_0 \epsilon_x + (\sigma_y)_0 \epsilon_y + (\sigma_z)_0 \epsilon_z + (\tau_{xy})_0 \gamma_{xy} + (\tau_{yz})_0 \gamma_{yz} + (\tau_{zx})_0 \gamma_{zx} + \text{ordres supérieurs}$$

où W_0 est l'énergie par unité de volume dans l'état de référence où tout est nul

$$W_0 = W(0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

Comme on ne sait jamais mesurer que des différences de niveau, on fixe conventionnellement à zéro ce niveau de référence.

- $(\sigma_x)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x}\right)_0$ = dérivée partielle évaluée dans l'état de référence

Ce sont les tensions initiales, surtout importantes et difficiles à connaître.

Même on suppose - qu'elles n'existent pas

- ou, ce qui revient au même, qu'on s'intéresse seulement aux tensions additionnelles de l'état de référence à l'état déformé

- les termes du second degré sont pris en compte; il y en a 21 au total

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{xy}}\right)_0 \epsilon_x \gamma_{xy} + \dots$$

- les termes du troisième degré et des degrés supérieurs sont supposés négligeables

Les coefficients des termes du second degré sont appelés les modules et l'élasticité. On se réfère immédiatement au cas des matériaux isotropes qui n'ont que deux modules.

Deux observations, placés dans des systèmes de référence différents doivent trouver la même valeur pour l'énergie. Donc W doit être fonction des invariants

$$W = W(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$$

Compte tenu de la définition de ceux-ci, il n'existe qu'une fonction homogène et entière du second degré (capable de satisfaire aux exigences sur le développement en série

$$W = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \theta_1^2 - 2\mu \theta_2$$

où λ et μ sont les modules ou constantes de Lamé

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial W}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\partial W}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \varepsilon_x} \\ &= (\lambda + 2\mu) \theta_1 \cdot 1 - 2\mu (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \end{aligned}$$

$$\sigma_x = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu \varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{\partial W}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \gamma_{xy}} = -2\mu \left(-\frac{1}{2} \gamma_{xy}\right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}$$

$$\longrightarrow \underline{\mu \text{ Lamé} = G \text{ mod. glint.}}$$

a. Invariants de l'état de tension

Si on forme l'invariant J_1 de l'état de tension, on a

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = (3\lambda + 2\mu) \theta_1$$

Dans un état de tension hydrostatique

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \frac{1}{3} J_1$$

$$\boxed{\frac{1}{3} J_1 = K \theta_1}$$

où $K = \lambda + \frac{2\mu}{3}$ = module de compressibilité

Si on forme l'invariant J_2^* , on a

$$J_2^* = -\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$$

$$\boxed{J_2^* = 4\mu^2 \theta_2^2}$$

Donc, quand on décompose la déformation en un changement de volume et une déviation, le premier mécanisme est associé au module de compressibilité'.
le second " " " " " " glissement.

Ce n'est que pour des raisons d'expérimentation pratique qu'on a introduit :

un module uniaxial $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$

le coefficient de Poisson ν tel que $\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

II Energie complémentaire.

cette notion introduite par Friedrichs est une notion générale en Physique. Elle est essentielle seulement pour les problèmes non linéaires, mais doit quand même être vue ici étant donné son importance de point de vue des principes.

elle fait apparaître la dualité entre les tensions et déformations, dualité que se retrouve dans les notions de borne supérieure et inférieure.

A. Présentation formelle.

Par unité de volume de référence, on introduit une fonction ϕ des tensions

$$\phi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} = W$$

si on suppose que les tensions jouent le rôle que jouaient auparavant les déformations, les ϵ et les γ deviennent des fonctions des tensions; la considération de l'énergie complémentaire permet de renverser les rôles des tensions et des déformations

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \dots$$

et, d'après la formule de définition, on a aussi

$$d\phi = \underbrace{d\epsilon_x \left(\sigma_x - \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \right)}_{=0} + \dots + \underbrace{d\gamma_{xy} \left(\tau_{xy} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \right)}_{=0} + \epsilon_x d\sigma_x + \dots + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \dots$$

par définition des tensions

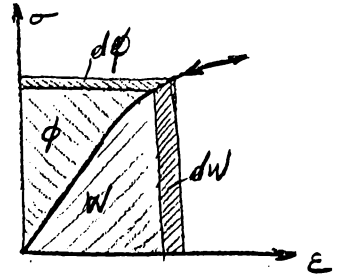
En identifiant les deux dérivés totaux, on peut obtenir pour les déformations les formules duales des tensions

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x}, \dots, \dots \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{xy}}, \dots, \dots \end{aligned}$$

B Interpretation

Si, dans un essai de traction uniaxial, on trace la courbe σ, ϵ et si cette courbe, tout en restant élastique, n'est pas linéaire :

- l'énergie se mesure par $dW = \sigma d\epsilon$
- la coénergie se mesure par $d\phi = \epsilon d\sigma$: on remarque que c'est l'aire complémen-

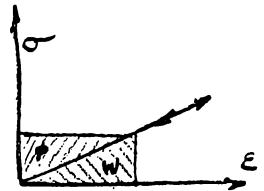


Si les relations tensions-déformations sont linéaires, on a égalité : $\phi = W$.

C'est le cas lorsque les σ sont des fonctions linéaires et homogènes des ϵ (loi de Hooke généralisée).

Par définition de ϕ et W , on a alors,

$$\phi = W = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \dots + \tau_{zx} / \epsilon_x)$$



C'est le théorème de Betti réciproque

C Application aux milieux isotropes.

On a dans ce cas

$$W = \frac{1}{2} (1 + 2\mu) \theta_1^2 - 2\mu \theta_2$$

$$\phi = \frac{1}{2E} J_1^2 - \frac{1}{2G} J_2$$

On peut en déduire

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \dots \end{array} \right.$$

on peut, dès à présent, prévoir qu'on partira avec l'énergie ϕ si on a une idée des tensions et avec W si on a une idée de déformations.

III Principes variationnels.

1. Filiation des principes variationnels.

- On part avec le principe de variation des déplacements (identique au principe du minimum de l'énergie totale quand le problème est linéaire)

Il engendre par généralisation :

- Le principe général contenant les déplacements
des nœuds (indépendants)
des déformations (indépendantes)

Ce principe est trop général, on le simplifie pour obtenir :

- Le principe canonique ou de Ritz contenant les déplacements
des nœuds, indépendants.

- Le principe de variation des nœuds correspond au princ. de var. des déplacements (identique au principe du minimum de l'énergie complémentaire quand le problème est linéaire)

1. Principe de variation des déplacements.

29

A. Etablissement direct

On part du principe de conservation de l'énergie ou p.s.

$$\delta W = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} + x \delta u + y \delta v + z \delta w$$

$$\text{avec } \alpha = \sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{xz} \delta w$$

$$\beta = \dots$$

$$\gamma = \dots$$

Il représente l'accroissement d'énergie par unité de volume de référence au cours d'une variation de déplacements $\delta u, \delta v, \delta w$.

Le principe de variation des déplacements consiste à intégrer sur le volume du corps le volume étant supposé simplement connexe.

$$\int_V \delta W \, dv = \int_V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dv + \int_V (x \delta u + y \delta v + z \delta w) dv$$

On applique le théorème de Gauss - Ostrogradski ; partant sur la surface, on a une normale de cos. directeurs, l, m, n ; alors,

$$\int_V \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) dv = \int_S (l\alpha + m\beta + n\gamma) \, dS = \text{flux du vecteur } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ sortant de}$$

Si x, y, z sont donnés et spécifiés (points mort / ex), on a

$$\delta \left[\int_V W \, dv - \int_V (xu + yv + zw) \, dv \right] = \int_S (l\alpha + m\beta + n\gamma) \, dS$$

En remplaçant α, β, γ par leur valeur, on obtient

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w$$

à condition de poser

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

$$p_y = \dots$$

$$p_z = \dots$$

On appelle ces quantités tractions de surface parce que, à l'examen, on trouve que ce sont les trois composants de la tension sur un élément de surface.

On exprime alors les conditions aux limites

- sur une partie S_o de la surface, p_x, p_y et p_z sont spécifiés.
- sur la partie complémentaire S_u de la surface, u, v et w sont spécifiés. Ils sont souvent spécifiés nuls mais, en tous cas, sur cette partie, S_u, S_v, S_w sont nuls.

Donc

$$\delta \left[\int_V W dV - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV \right] = \delta \int_{S_o} (p_x u + p_y v + p_z w) dS$$

$$\delta \left[\int_V W dV - \int_V (Xu + Yv + Zw) dV - \int_{S_o} (p_x u + p_y v + p_z w) dS \right] = 0.$$

Le premier terme représente l'énergie de déformation du corps solide; on l'appelle soude

$$U = \int_V W dV$$

Le reste, c'est l'énergie potentielle des charges mortes: P

- s'il n'y a pas de déplacement $P=0$
- on a le signe - parce que, si les charges effectuent un travail positif, l'énergie diminue

$U + P =$ énergie totale.

Le principe de variation des déplacements s'écrit donc:

$$\delta(U + P) = 0$$

"Pour la solution exacte du problème, l'énergie totale jouit de la propriété suivante: si on donne une petite variation au champ des déplacements, compatible avec les spécifications sur S_u , la valeur de l'énergie totale $U + P$ reste la même au premier ordre: l'énergie est stationnaire." On ne peut dire qu'il s'agit d'un minimum que si les relations tension-déformation sont linéaires.

B. Raisonnement inverse.

On peut repartir à l'envers:

On suppose que $\delta(U + P) = 0$ et on cherche à en tirer les conséquences.

Pour δU , on a d'abord, en remplaçant $\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x}$ par σ_x , etc...

$$\delta U = \int_V \delta W dV = \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \dots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} \right) dV = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \dots + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV$$

On suppose ensuite que $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc..., c.à.d. on suppose qu'il existe toujours un champ différentiable de déplacements, alors

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \text{ etc...}$$

$$\delta U = \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) + \dots + \tau_{zx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right) \right] dV$$

on intègre par parties, et on transforme une partie en intégrale de surface; par exemple pour le premier terme

$$\int_V \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u) dV - \int_V \delta u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dV = \int_S (\sigma_x \delta u) dS - \int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u \right) dV$$

on supprime ainsi la dérivée de δu . En procédant de même pour tous les termes, et en effectuant des regroupements, on a :

$$\delta U = \int_S \left[\frac{(\sigma_x + m \tau_{yx} + n \tau_{zx})}{p_x} \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w \right] dS - \int_V \left[\delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \delta v (\dots) + \delta w (\dots) \right] dV$$

Pour δP , comme les charges massiques $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ sont spécifiées (indiquées par une barre), on peut de suite appliquer $\delta u, \delta v, \delta w$

$$\delta P = - \int_V (\bar{x} \delta u + \bar{y} \delta v + \bar{z} \delta w) dV - \int_S (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS$$

Pour la somme $\delta U + \delta P$, on doit trouver zéro en vertu de l'hypothèse de la statinarité. on va en tirer des conditions d'équilibre

- on pose d'abord

$$\begin{cases} A = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{x} \\ B = \dots \\ C = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = p_x - \bar{p}_x \\ b = p_y - \bar{p}_y \\ c = p_z - \bar{p}_z \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta(U+P) = - \int_V (A \delta u + B \delta v + C \delta w) dV + \int_{S_u} (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dS + \int_{S_\sigma} (a \delta u + b \delta v + c \delta w) dS =$$

- Sur S_u on a nécessairement $\delta u = \delta v = \delta w = 0$, donc le second terme ci-dessus est nul

- On peut supposer un champ qui sur S_σ a ses variations nulles. On peut aussi supposer qu'à l'intérieur du corps on a le champ exact sauf dans une petite région autour d'un point P où on se permet un petit déplacement $\delta u \neq 0$ s'écartant de la solution exacte. Il reste



$$\delta(U+P) = - \int_{\text{Volume } V(P) \text{ autour de } P} A \delta u dV$$

et, en vertu de la stationnarité superficielle, ceci doit valoir 0. Pour que

$$\int_{V(P)} A \delta u dV = 0$$

quel que soit le choix qu'on fasse de δu , il faut que

$$A = 0$$

De même on pourrait trouver

$$B = C = 0$$

Ce sont les conditions d'équilibre en volume.

- Dans $\delta(U+P)$, il ne reste que le troisième terme.

on peut aussi prouver que

$$a = b = c = 0$$

en prenant le champ de déplacements réels partant sur S_σ sauf autour d'un point P où on s'écarterait de δu de la solution réelle et en exprimant la stationnarité.

Ce sont les conditions d'équilibre en surface.

Le même raisonnement reste valable si les relations tensions-déformations ne sont pas linéaires. Mais dans ce cas, on ne sait pas prouver l'unicité de la solution.

c. Applications

ce principe est très puissant. Au moyen d'hypothèses restrictives, simplifications on arrive assez aisément à se donner des champs de déplacements u, v, w ; on les optimise en exprimant la stationnarité.

- dans l'exercice de poutre (cf. exercice) on suppose $u = y a(x)$: Navier
 $v = v(x)$: fibres transvers. inextensibles

on arrive à trouver les meilleures fonctions en prenant $\delta a(x), \delta v(x)$ et en exprimant la stationnarité.

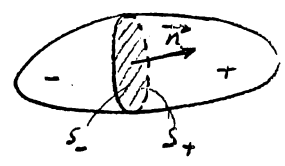
- dans le cas d'éléments finis on suppose $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x, y, z)$
 $v = \dots$
 $w = \dots$

et on cherche la meilleure combinaison linéaire.

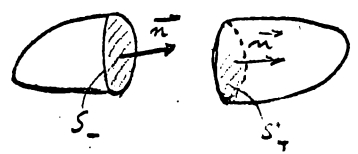
Avec ce principe, ce sont les équations d'équilibre qui sont sacrifiées. En effet, on ne sait pas annuler δ autour de tous les points, on le fait seulement en quelques uns et on obtient une moyenne pondérée des équations d'équilibre.

d. Problème de la poutre.

Soit un volume coupé en deux. On suppose que des forces extérieures agissent sur la surface de coupe.



On sépare les deux volumes et on extérieorise ainsi deux surfaces S_+ et S_- . Si on suppose que les forces extérieures sur la surface de coupe sont appliquées à S_+ ,



on a

$$P = - \int_V (\bar{x}u + \bar{y}v + \bar{z}w) dV - \int_{S_0} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS - \int_{S_+} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS$$

et, d'après la formule p 26,

$$\delta(U+P) = - \int_V (A \delta u + B \delta v + C \delta w) dV + \int_{S_0} (a \delta u + b \delta v + c \delta w) dS + \int_{S_-} [(-l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}) \delta u + \dots] dS + \int_{S_+} [(-l\sigma_x - m\tau_{yx} - n\tau_{zx} - \bar{p}_x) \delta u + \dots] dS$$

Comme on l'a fait à la p. 26, il suffit finalement d'annuler les deux derniers termes et, comme on doit avoir continuité des déplacements à travers la surface de coupe ($u_- = u_+ = u$), on a finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{z-} - p_{z+} = \bar{p}_z \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Conditions de transition.

3. Principe Général

1. Etablissement du principe.

On part, comme à la p 25 pour le principe de variation des déplacements.

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots) dV$$

on impose ensuite une restriction au champ en le supposant continu et différentiable

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

On va se libérer de cette restriction sur le champ de déplacements en considérant

$$\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

comme une contrainte.

on introduit alors des multiplicateurs de Lagrange et on forme le potentiel de dislocation D

$$D = \int_V \left[T_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x \right) + \dots + T_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) + \dots \right] dV \\ + \int_{S_u} \left[\alpha_x (u - \bar{u}) + \alpha_y (v - \bar{v}) + \alpha_z (w - \bar{w}) \right] dS$$

Le premier terme exprime mathématiquement qu'il y a des dislocations, des trous dans la surface lorsqu'on la réassemble puisque les (...) peuvent être \neq
On ajoute aussi des dislocations sur la surface, tel qu'on avait imposé $u = \bar{u}$
(discontinuité à la fondation)

Le principe général s'écrit alors

$$\delta(U + P + D) = 0$$

c. a. d. "La somme de l'énergie de déformation, de l'énergie potentielle des charges mortes et de l'énergie potentielle de dislocation est stationnaire lorsqu'on fait varier

- 1) les déplacements (u, v, w) (princ. var. disp.)
- 2) les $(\epsilon_x, \epsilon_y, \dots, \gamma_{xy})$ (6 variations indépendantes)
- 3) les multiplicateurs (T_{xx}, \dots, T_{xy})
- 4) les multiplicateurs $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ sur la surface.

En effet, si on fait varier les multiplicateurs, on trouve

$$\delta D = \int_V \delta T_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x \right) dV = 0$$

ou

$$\delta D = \int_{S_u} \delta \alpha_x (u - \bar{u}) dS = 0$$

Comme les variations sont arbitraires, on trouve de façon évidente qu'on doit avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x = 0, \quad u - \bar{u} = 0$$

On retrouve donc les contraintes en faisant varier les multiplicateurs; ceci justifie a posteriori le principe général.

0. Interprétation des multiplicateurs.

Si on fait varier les ϵ , ϵ_x par exemple, on obtient

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \int_V \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x dV \\ \delta P &= 0 \\ \delta D &= - \int_V T_{xx} \delta \epsilon_x dV \end{aligned} \right\} \text{le principe} \rightarrow \int_V \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} - T_{xx} \right) \delta \epsilon_x dV = 0$$

Comme $\delta \epsilon_x$ est arbitraire, on doit partout avoir

$$T_{xx} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x$$

T_{xx} est donc la tension associée au déplacement ϵ_x ; on la désigne par σ_x .

Si on fait varier les déplacements, u par exemple, on obtient

$$\begin{aligned} \delta U &= 0 \\ \delta P &= - \int_V \bar{u} \delta u dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_n \delta u dS \\ \delta D &= \int_V \left(T_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \delta u + T_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u + T_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \delta u \right) dV + \int_{S_u} L_x \delta u dS \\ &= \int_{S_u + S_\sigma} \left(l T_{xx} + m T_{xy} + n T_{xz} \right) \delta u dS + \int_{S_u} \alpha_x \delta u dS - \int_{Vol} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \delta u dV \end{aligned}$$

Le principe $\delta(U+P+D) = 0$, donne

- en n'importe quel point du volume

$$\bar{x} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0$$

Habituelle équation d'équilibre après interprétation de multiplicateurs.

- sur la surface S_0

$$l T_{xx} + m T_{xy} + n T_{xz} - \bar{p}_x = 0$$

équation d'équilibre à la surface

- sur la surface S_u

$$d_x = - (l T_{xx} + m T_{xy} + n T_{xz})$$

$$d_x = - \text{traction de surface} = - p_x$$

Ce n'est pas une force p_x imposée ; c'est une réaction de surface contre un déplacement imposé.

A. Etablissement du principe.

On part du principe général dans lequel on introduit a priori que

$$\tau_{xz} = \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\alpha_x = -p_x = -(\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})$$

on a alors

$$\delta \left\{ \int_V \left[\underline{W(\epsilon_x \dots)} + \underline{\sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x \right)} + \dots + \underline{\tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xz} \right)} \right] dV + \int_{S_u} \left[\bar{p}_x (\bar{u} - u) + \bar{p}_y (\bar{v} - v) + \bar{p}_z (\bar{w} - w) \right] dS - \int_V (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) dS \right\} = 0$$

Dans les termes soulignés, on voit apparaître l'énergie complémentaire

$$\phi(\sigma_x \dots) = \sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{xz} \gamma_{xz} - W$$

D'où la forme générale du principe de Reissner - Friedrichs

$$\delta \left\{ \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \phi(\sigma_x \dots) \right] dV + \int_{S_u} \left[\bar{p}_x (\bar{u} - u) + \bar{p}_y (\bar{v} - v) + \bar{p}_z (\bar{w} - w) \right] dS + \dots \right\}$$

" L'énergie est stationnaire lorsque l'on fait varier 1) les déplacements u, v, w
 2) les tensions (indépendamment) $\sigma_x \dots$

B. Variations

Soit une variation sur σ_x seulement. On a

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} \right) \delta \sigma_x dV + \int_{S_u} p(\bar{u} - u) \delta \sigma_x dS = 0$$

En faisant varier σ_x au voisinage d'un point quelconque du volume, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x}$$

Or on a vu que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} = \epsilon_x$$

On retrouve donc une condition de compatibilité en volume $\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$

En faisant varier σ_x au voisinage d'un point quelconque de la surface, on retrouve une condition de compatibilité en surface $l(\bar{u} - u) = 0$.

Soit une variation sur u . On a

$$\int_V \left(\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta u + \tau_{xz} \frac{\partial}{\partial z} \delta u - \bar{x} \delta u \right) dV - \int_{S_u} p_x \delta u \, dS - \int_{S_\sigma} \bar{p}_x \delta u \, dS = 0$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} \right) \delta u \, dV + \int_{S_u + S_\sigma} (\sigma_x + m \tau_{xy} + n \tau_{xz}) \delta u \, dS - \int_{S_u} p_x \delta u \, dS - \int_{S_\sigma} \bar{p}_x \delta u \, dS = 0$$

Les second et troisième terme se déduisent sur S_u .

En faisant varier u au voisinage d'un point quelconque du volume, on retrouve une condition d'équilibre en volume $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dots + \bar{x} = 0$.

En faisant varier u au voisinage d'un point quelconque de la surface, on retrouve une condition d'équilibre en surface $p_x = \bar{p}_x$.

Joue avec le principe de Reissner, la stationnarité implique des conditions de déplacement et d'équilibre.

5. Principe de variation des tensions (ou de l'énergie complémentaire, ou de Westergaard) 34

A. Etablissement du principe.

Si, dans le principe de Reissner, on introduit a priori les conditions de compatibilité

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u = \bar{u} \text{ sur } S_u$$

on retrouve le principe de variation des déplacements

Si, dans le principe de Reissner, on introduit a priori les conditions d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dots + \bar{x} = 0$$

$$p_x = \bar{p}_x \text{ sur } S_\sigma$$

on trouve le principe de variation des tensions

on commence par transformer

$$\int_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dV = \int_{S_\sigma + S_u} (p_x u + p_y v + p_z w) dS - \int_V \left[u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + v(\dots) + w(\dots) \right] dV$$

Le principe de Reissner donne alors

$$\delta \left\{ \int_V \left[u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{x} \right) + v(\dots) + w(\dots) - \phi \right] dV + \int_{S_\sigma} [u(p_x - \bar{p}_x) + v(p_y - \bar{p}_y) + w(p_z - \bar{p}_z)] dS + \int_{S_u} [p_x(u + \bar{u} - u) + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}] dS \right\} = 0$$

Si les conditions d'équilibre sont satisfaites, les termes soulignés s'annulent et il reste le principe de variation des tensions

$$\delta \left\{ \int_V \phi(\sigma_x, \dots) dV - \int_{S_u} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS \right\} = 0$$

"La somme de l'énergie complémentaire et de l'énergie potentielle complémentaire est stationnaire lorsqu'on varie les tensions"

Ce principe permet de trouver les tensions mais ne fournit aucune renseignement sur les déplacements.

B. Difficultés d'application

1. Il faut avoir résolu les équations d'équilibre (avec les tensions introduites soient en équilibre). Or en général il y a une infinité de solutions.
Une façon de résoudre ce problème consiste à utiliser les fonctions de tension (Airy en bidimensionnel, Maxwell en tridimensionnel).

Par exemple, dans un problème plan de tension, si on choisit une fonction de tension d'Airy $\phi(x, y)$ telle que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

on satisfait automatiquement aux conditions d'équilibre

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

on fait alors varier les paramètres de la fonction de tension.

2. On n'a aucun renseignement sur les déplacements

lorsqu'on fait des hypothèses simplificatrices, on a des équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x}$$

qui ne sont généralement pas intégrables parce que les conditions de compatibilité ne sont pas satisfaites.

Par contre quand on utilise le principe de Ritz, sans aucune hypothèse restrictive sur les déplacements, on trouve des déplacements moyens (moyenne pondérée du champ des déplacements réels)

IV Traitement de l'hyperstatisme

1. Généralités

la matrice des gradients a été décomposée en une partie symétrique
 } une partie antisymétrique.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

la compatibilité locale peut s'établir en se posant la question suivante :
 étant donné une tenue de déformation, peut-on reconstruire les déplacements ?

il est avantageux pour ce faire de procéder en deux étapes :

1. reconstruire les rotations
2. reconstruire les déplacements.

A. Conditions de compatibilité

On connaît les trois dérivées de u

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \epsilon_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_z \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} + \omega_y \end{aligned}$$

si n existe, les grandeurs des seconds membres ne peuvent pas être arbitraires mais doivent vérifier les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \end{cases}$$

+ 3^e équ. semblables à partir de v.
 + 3^e équ. semblables à partir de w

On peut résoudre les 9 équations par rapport aux dérivées de w_x, w_y, w_z (en l'aidant si on le désire d'une équation supplémentaire

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$$

(divergence d'un rotationnel = 0)

on trouve notamment

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial z^2} \right) & (a) \\ \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} & (b) \\ \frac{\partial w_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial z^2} & (c) \end{aligned} \right.$$

et trois équations semblables en w_y
trois équations semblables en w_z

En éliminant w_x entre trois paires successives prises parmi (a) (b) et (c) et en recommençant de même avec les deux autres groupes de trois équations, on obtient les 9 équations de compatibilité locale de Beltrami.

on peut observer que 6 seulement sont distinctes :

- 3 équations du type $P = 0$ obtenues par élimination entre (b) et (c)

$$P = \frac{\partial^2 w_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial z} = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} \right)$$

$$P \equiv \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial y \partial z} = 0$$

- 3 équations du type $Q = 0$ obtenues par élimination entre (a) et (c)

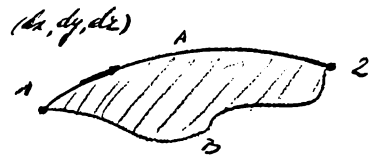
$$Q \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = 0$$

Les conditions de compatibilité étant satisfaites, on se pose à nouveau la question des déplacements sont-ils accessibles

B. Construction de ω_x

On connaît

$$d\omega_x = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} dz$$



Si, partant d'un point 1, on parcourt un certain chemin, un segment découpé dans ce chemin et pour composants dx, dy, dz

Comme on connaît les trois dérivées partielles, on peut, en cheminant de proche en proche le long de ce chemin trouver en 2 :

$$(\omega_x)_2 = (\omega_x)_1 + \int_1^2 \underbrace{\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)}_A dx + \underbrace{(\dots)}_B dy + \underbrace{(\dots)}_C dz$$

Aurait-on obtenu la même valeur en se déplaçant le long d'un autre chemin :

Oui, si on suppose qu'on peut tracer une surface bordée par les deux chemins et telle que tous ses points appartiennent au corps déformable, c.à.d. si on a affaire à un corps simplement connexe.

En effet on a

$$(\omega_x)_{2, \text{2e chemin}} - (\omega_x)_{2, \text{1er chemin}} = \oint_{\text{surface}} d\omega_x$$

En transformant l'intégrale de contour en une intégrale de surface par la formule de Stokes

$$\oint A dx + B dy + C dz = \iint \left[\underbrace{1 \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right)}_P + \underbrace{m \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right)}_Q + \underbrace{n \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right)}_R \right] dS$$

Si la surface existe et si les conditions d'intégrabilité sont partout satisfaites sur la surface (voir conditions de la p. 36)

$$P = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0 ; \quad Q = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = 0 ; \quad R = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

Alors deux chemins quelconques donnent le même résultat.

C Construction de u

en fait le même raisonnement que pour w_x

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ &= A dx + B dy + C dz \end{aligned}$$

avec $A = \epsilon_x$

$$B = \frac{1}{2} (\gamma_{xy} - \omega_z)$$

$$C = \frac{1}{2} (\gamma_{xz} + \omega_y)$$

si on intègre de nouveau de a à z par deux chemins différents

$$\delta u = \oint A dx + B dy + C dz = \iint [l(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}) + m(\dots) + n(\dots)] dS$$

si le domaine est simplement connexe et si les conditions d'intégrabilité de Cauchy sont satisfaites, les parenthèses sont nulles, $\delta u = 0$ et u est indépendant du chemin choisi.

D. Conclusion.

Pour un domaine simplement connexe, les 6 conditions de compatibilité locale sont nécessaires et suffisantes pour la construction de w_x, w_y, w_z et u, v, w .

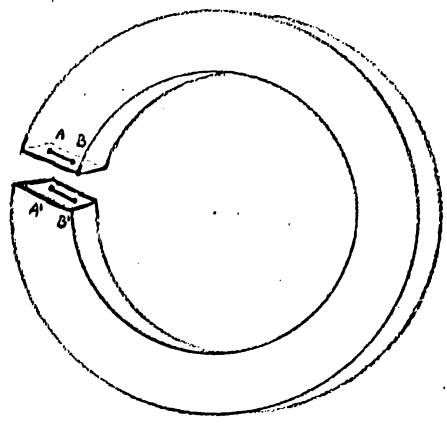
Il reste une indétermination de la forme d'un déplacement général d'un corps solide : en effet les valeurs initiales sont arbitraires w_x, w_y, w_z, u, v, w . Ces 6 paramètres définissent complètement un champ différent d'un autre par un déplacement d'ensemble.

Le champ des déplacements est donc déterminé à un déplacement cinématique près (à 6 paramètres)

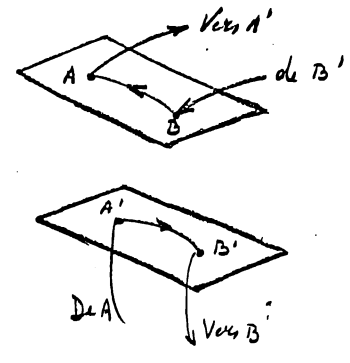
2. Cas spécial de domaines multiconnexes.

On utilise la théorie de Weingarten reprise par Volterra (théorie des déplacements)

Si le champ de déformation est continu, les deux bords d'une coupure peuvent prendre un déplacement cinématique l'une par rapport à l'autre.



Le système étant rendu simplement connexe par la coupure, tous les chemins qui ne traversent pas la barrière sont réconciliables.



En particulier, on prend d'un côté de la coupe deux points A et B et un chemin AB ainsi que leurs homologues A', B', A'B'. Le domaine étant simplement connexe, le chemin AA'B'BA est réconciliable.

A. Construction de ω_x

Si les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, on a

$$\oint_{AA'B'BA} d\omega_x = 0$$

En distinguant les différents portions de chemin

$$\int_{AA'} + \int_{A'B'} + \int_{B'B} + \int_{BA} = 0$$

Le deuxième et quatrième terme se détruisent car les chemins AB et A'B' sont homologues et, le long de ces chemins, le champ de déformation est continu aussi que les dérivées premières. Il reste donc

$$\int_{AA'} = \int_{BB'} = (\omega_x)_{A'} - (\omega_x)_A = (\omega_x)_{B'} - (\omega_x)_B = \Delta\omega_x$$

$\Delta\omega_x$ est une constante cyclique: un côté de la barrière a subi une rotation \rightarrow l'autre

On fait le même raisonnement

$$\oint_{AA'B'BA} du = 0$$

$$\int_{AA'} du - \int_{BB'} du + \int_{A'B'} du - \int_{AB} du = 0.$$

Les deux derniers intégrales ne se simplifient plus car ω intervient dans les dérivées partielles et n'a pas la même valeur des deux côtés de la barrière.

$$\begin{array}{l} \text{Sur } A'B', \omega_x \text{ est devenu } \omega_x + \Delta\omega_x ; \\ \omega_y \quad \quad \quad \quad \quad \omega_y + \Delta\omega_y \\ \omega_z \quad \quad \quad \quad \quad \omega_z + \Delta\omega_z \end{array}$$

les autres termes de la déformation sont les mêmes des deux côtés.

on trouve (avec les formules de la p 56)

$$\begin{aligned} \int_{A'B'} du - \int_{AB} du &= \int_{AB} -\Delta\omega_z dy + \Delta\omega_y dz \\ &= -\Delta\omega_z (y_B - y_A) - \Delta\omega_y (z_A - z_B) \end{aligned}$$

en effet les $\Delta\omega$ sont constants tout le long du chemin d'un côté de la barrière.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{BB'} du &= \int_{AA'} du + \Delta\omega_y (z_B - z_A) - \Delta\omega_z (y_B - y_A) \\ (\Delta u)_B &= (\Delta u)_A - \Delta\omega_y (z_B - z_A) - \Delta\omega_z (y_B - y_A) \end{aligned}$$

ou $(\Delta u)_B$ est une constante cyclique propre au point B
 $(\Delta u)_A$ " " " " " " " " A

$-\Delta\omega_y \dots$ représente la contribution des rotations

Il faut choisir un point A sur la barrière (point de réduction des grandeurs cinématiques). Pour tout autre point sur la barrière

$$\Delta u = \underbrace{(\Delta u)_A}_{\text{Translat. barrière}} - \underbrace{\Delta\omega_y (z - z_A) - \Delta\omega_z (y - y_A)}_{\text{Rot. barrière}}$$

$$\Delta \vec{u} = (\Delta \vec{u})_A + \Delta \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_A)$$

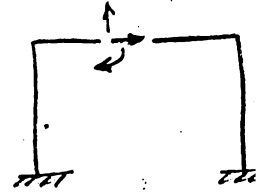
Pour un domaine multillement connexe, les 6 conditions de compatibilité locale sont nécessaires, mais ne sont plus suffisantes pour la construction de w_x, w_y, w_z et u, v, w .

Il faut des conditions supplémentaires de type hyperstatique pour assurer la compatibilité globale:

$$(\Delta \vec{u})_A = 0 \quad \Delta \vec{w} = 0$$

pour une barrière qui rend le domaine simplement connexe.

Pour beaucoup de cas les 6 inconnues cinématiques ne sont pas toutes actives; par exemple, dans un portique plan, seules deux translations et une rotation sont actives.



3. Compléments sur les principes en hyperstatistique.

Soit une pièce à connexion multiple (6 fils)
 On introduit deux barrières, sur chacune d'elles,
 on fait choix arbitraire et d'une seule face pour
 définir la normale ext. ure.



Quand on reprend les principes, établis pour des pièces simplement connexes, des modifications s'introduisent lors des différentes intégrations par parties.

A. Principe de variation des déplacements.

On a l'expression (pp 28 et 25)

$$\delta \left\{ \int_V W(\epsilon_x \dots) dV - \int_V (\bar{X}u + \dots) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \dots) dS \right\} = 0$$

L'énergie de déformation peut s'écrire

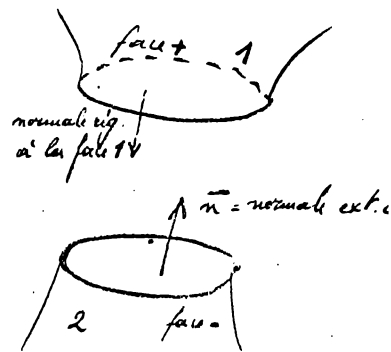
$$\int_V \delta W dV = \int_V \left[\sigma_x \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots \right] dV$$

Lorsqu'on intègre ceci par parties en faisant appel à des intégrales de surface, les formules utilisées ne peuvent s'appliquer qu'aux domaines simplement connexes; il faut donc introduire des barrières et S désigne alors la surface totale (les 2 faces de la barrière comprises)

$$\int_V \delta W dV = \int_S (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dS - \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta u + \dots \right] dV$$

$$\int_S = \int_{\text{face non comp.}} \delta u + \int_{S_\sigma} + \int_{\text{face de la barrière}}$$

En chaque barrière, on fait choix d'une face - et d'une face + et d'une normale extérieure de référence (ici, celle qui va de la face - à la face +)
 Si on explicite alors le dernier terme de l'intégrale de surface, on a



$$\int_{\text{face}} = \sum_{\text{barrières}} \int_{\text{face à normale ext.} = \text{norme de } \vec{n}} \{ (p_x \cdot \delta u_x - p_{x+} \delta u_{x+}) + (\dots) + (\dots) \} dS$$

Aux coupures, on exige la continuité des déplacements u_x et u_y (comme on exige dans le chap III $u = \bar{u}$ sur S_u). Dès lors

$$\delta u_x = \delta u_{x+}$$

Après application adéquate du principe, on trouve sur chaque barrière

$$\int_{\text{face}} [(p_x - p_{x+}) \delta u_x + \dots] dS = 0$$

$$\boxed{p_x = p_{x+}}$$

Le principe exige donc la continuité des efforts aux coupures.

B. Principe général.

Comme dans le principe général du chap III on a réussi à se libérer de $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u = \bar{u}$ en introduisant des multiplicateurs, de même ici on se libère de $u_x = u_{x+}$ en enrichissant d'un terme supplémentaire le potentiel de dislocation; le terme supplémentaire est dû aux barrières.

$$D = \int_V \left[\sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \epsilon_x \right) + \dots \right] dV + \int_{S_u} [p_x (\bar{u} - u) + \dots] dS + \sum_{\text{barr.}} \int_{\text{sur } \vec{n}} [p_x (u_x - u_{x+}) + \dots] dS$$

C. Principe de Reiner

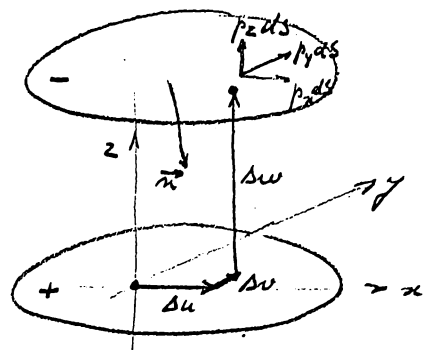
Il s'écrit (voir p 32) en imposant u, v, w sur chaque face de barrière:

$$D \left\{ \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots - \phi(\epsilon_x \dots) \right] dV - \int_V (\bar{x} u + \dots) dV - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \dots) dS + \int_{S_u} [p_x (\bar{u} - u) + \dots] dS + \sum_{\text{barrières}} \int_{\text{face-}} [p_x (\bar{u}_- - u_-) + \dots] dS + \sum_{\text{barrières}} \int_{\text{face+}} [p_x (\bar{u}_+ - u_+) + \dots] dS \right\} = 0$$

- Si - on introduit à priori que $p_{x+} = p_{x-} = p_x$
- on renverse le sens de la normale sur les faces +
- les deux derniers termes s'écrivent

$$\sum_{\text{barrière}} \int_{\text{face-}} \left\{ p_x \left[\underbrace{(\bar{u}_- - \bar{u}_+)}_{\Delta \bar{u}} - \underbrace{(u_- - u_+)}_{\Delta u} \right] + \dots \right\} ds$$

En utilisant pour les $\Delta u, \Delta v, \Delta w$,
les formules de Weingarten, on
obtient sur une barrière k



$$\int_{\text{face-}} \left\{ p_x \left[\Delta \bar{u}_k + \bar{q}_k (z - z_k) - \bar{r}_k (y - y_k) - \Delta u_k - q_k (z - z_k) + r_k (y - y_k) \right] + \dots \right\} ds =$$

$$(\Delta \bar{u}_k - \Delta u_k) \int_{\text{face-}} p_x ds + (\bar{q}_k - q_k) \int_{\text{face-}} [p_x (z - z_k) - p_z (x - x_k)] ds$$

$$+ (\Delta \bar{v}_k - \Delta v_k) \int_{\text{face-}} p_y ds + (\bar{r}_k - r_k) \int_{\text{face-}} [p_y (x - x_k) - p_x (y - y_k)] ds$$

$$+ (\Delta \bar{w}_k - \Delta w_k) \int_{\text{face-}} p_z ds + (\bar{r}_k - r_k) \int_{\text{face-}} [p_z (y - y_k) - p_y (z - z_k)] ds$$

On introduit

- des efforts normaux appliqués au centre de réduction

$$N_{xk} = \int_{\text{face-}} p_x ds \quad ; \quad N_{yk} = \int_{\text{face-}} p_y ds \quad ; \quad N_{zk} = \int_{\text{face-}} p_z ds$$

- des moments par rapport au centre de réduction

$$M_{xk} = \int_{\text{face-}} [p_z (y - y_k) - p_y (z - z_k)] ds \quad ; \quad M_{yk} = \dots \quad ; \quad M_{zk} = \dots$$

L'énergie de dislocation sur chaque coupure se simplifie donc en

$$\sum_k \left(N_{xk} (\Delta \bar{u}_k - \Delta u_k) + N_{yk} (\Delta \bar{v}_k - \Delta v_k) + N_{zk} (\Delta \bar{w}_k - \Delta w_k) + M_{xk} (\bar{r}_k - r_k) + M_{yk} (\bar{q}_k - q_k) + M_{zk} (\bar{r}_k - r_k) \right)$$

A la solution exacte, il faut que toutes les dislocations soient nulles.

on peut notamment tirer de ceci les formules de Haibach.

3. Principe de variation des tensions.

Il s'écrit au vu de la formule p 34 et des notations précédentes

$$\delta \left\{ \int_V \phi(\sigma_2 \dots) dV - \int_{S_u} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS - \sum_k (N_{xk} \bar{\Delta u}_k + N_{yk} \bar{\Delta v}_k + N_{zk} \bar{\Delta w}_k + M_{xk} \bar{\varphi}_k + M_{yk} \bar{\vartheta}_k + M_{zk} \bar{\psi}_k) \right.$$

on se fait y introduire que des tensions en équilibre (voir p 35)

Si on arrive à exprimer

$$\Psi = \int_V \phi dV = \Psi(\text{paramètres } N_{xk}, \dots, M_{zk})$$

on peut retrouver le principe de Minabria.

Par exemple, en variant N_{xk} , on a

$$\frac{\delta \Psi}{\delta N_{xk}} - \bar{\Delta u}_k = 0$$

et pour annuler les déplacements aux bords des coupures, il faut que

$$\frac{\delta \Psi}{\delta N_{xk}} = 0 \dots$$

Cours de Théorie des Structures

Deuxième partie : Ponts en Caisson.

par

Le Professeur Traets de Vauchoke

I Application de la théorie variationnelle aux poutres en caisson.

1. Caisson rectangulaire soumis à torsion par le point. de var. des defl.

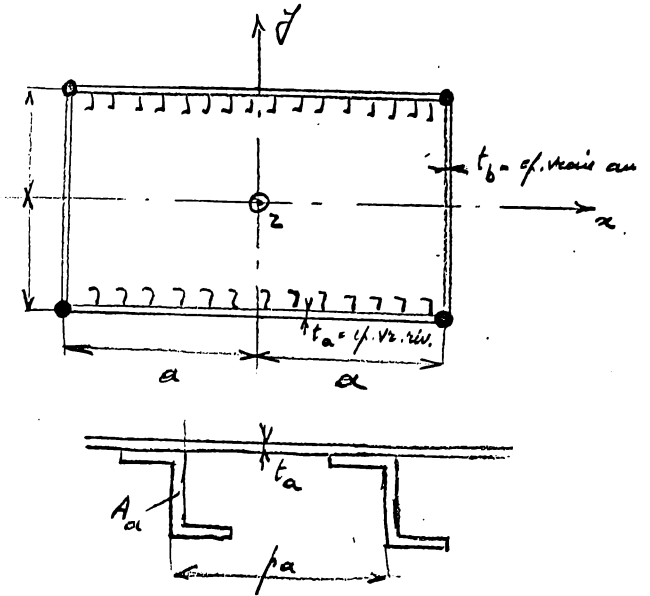
A Généralités

Le nombre de raidisseurs est supposé suffisant pour que la tôle puisse être considérée comme orthotrope.

Les épaisseurs, t_a et t_b transmettent le flux de cisaillement q_a et q_b

$$q_a = t_a \tau_{xz}$$

$$q_b = t_b \tau_{yz}$$



A cause des raidisseurs, il y a une épaisseur équivalente plus grande que l'épaisseur réelle pour le flux d'effort, moyenne. La section d'une ligne de renfort étant A_a et le pas du renforcement pa , on a

$$e_a = t_a + \frac{A_a}{pa}$$

Il existe une famille de diaphragmes infiniment minces qui maintiennent la forme de la section ; ils sont rigides dans leur plan et souples perpendiculairement à leur plan.

On a donc :

- dans le plan des diaphragmes

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

- dans le plan xz du revêtement

$$\epsilon_x = 0 \rightarrow E \epsilon_x = 0 = \sigma_x - \nu \sigma_z$$

$$\sigma_x = \nu \sigma_z$$

$$E \epsilon_z = \sigma_z - \nu \sigma_x$$

$$= \sigma_z (1 - \nu^2)$$

Donc la tôle se comporte comme si elle avait un module effectif $\frac{E}{1-\nu^2}$ pour l'allongement dans le sens des z . Pour ramener le module à E , on modifie fictivement une seconde fois son épaisseur

$$e_a = \frac{t_a}{1-\nu^2} + \frac{A_a}{\rho_a}$$

dans le plan yz du revêtement, on trouve de même

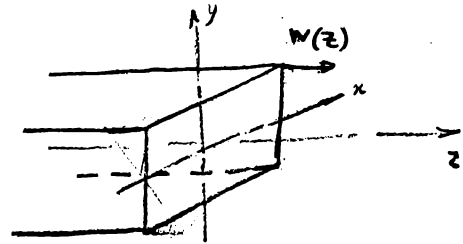
$$e_b = \frac{t_b}{1-\nu^2} + \frac{A_b}{\rho_b}$$

B. Expression de l'énergie dans le cas de la torsion

On fait des hypothèses simplificatrices :

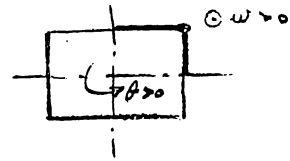
- la poutre est soumise uniquement à des couples extérieurs,
- chaque diaphragme tourne autour de l'axe oz selon une fonction $\theta(z)$
- les déplacements axiaux sont du type $\left\{ \begin{array}{l} w = w(x, z) \text{ pour un revêtement} \\ w = w(y, z) \text{ pour une auge} \end{array} \right.$

et on suppose que le gauchissement varie linéairement ; il peut donc être défini à partir du déplacement $w(z)$ de l'arête supérieure droite



- on prend comme inconnues $w(z)$
 $\theta(z)$

Par raison de symétrie, on peut n'étudier que l'énergie sur $1/4$ de la section.



on a $w(x, z) = \frac{x}{a} w(z)$ Revêtement

$w(y, z) = \frac{y}{b} w(z)$ Auge

$u(x, z) = -b \theta(z)$ Revêtement

$u(y, z) = +a \theta(z)$ Auge

Energie d'une tôle de revêtement

Comme on fait des hypothèses sur les déplacements, il faut exprimer cette énergie en fonction des déplacements.

Par unité de volume on a (Laplace)

$$\frac{1}{2} (\epsilon_2 \sigma_2 + \epsilon_2 \sigma_z + \tau_{xz} \gamma_{xz})$$

Or $\epsilon_x = 0$ (à cause des diaphragmes)

$$\sigma_z = \frac{n_a}{\epsilon_a} \quad (n_a = \text{flux d'effort normal})$$

$$\tau_{xz} = \frac{q_a}{t_a}$$

Par unité de surface, il reste

$$\frac{1}{2} (\epsilon_2 n_a + \gamma_{xz} q_a)$$

$$\text{Or } \epsilon \epsilon_2 = \sigma_z = \frac{n_a}{\epsilon_a} \rightarrow n_a = \epsilon \epsilon_2 \epsilon_a$$

$$G \gamma_{xz} = \tau_{xz} = \frac{q_a}{t_a} \rightarrow q_a = G \gamma_{xz} t_a$$

$$\epsilon_2 = \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} = \frac{z}{a} w'$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = \frac{w}{a} - b \theta'$$

Donc l'énergie par unité de surface de la tôle de revêtement vaut

$$\frac{1}{2} [\epsilon \epsilon_a \epsilon_2^2 + G t_a \gamma_{xz}^2]$$

$$\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_a \frac{z^2}{a^2} w'^2 + \frac{1}{2} G t_a \left(\frac{w}{a} - b \theta' \right)^2$$

Energie d'une tôle d'aune

De la même façon on trouve que l'énergie par unité de surface de la tôle d'aune vaut

$$\frac{1}{2} \epsilon \epsilon_b \frac{z^2}{b^2} w'^2 + \frac{1}{2} G t_b \left(\frac{w}{b} + a \theta' \right)^2$$

Energie d'un longeron.

Si N et S sont respectivement l'effort normal et la section du longeron

$$\epsilon \epsilon_2 = \frac{N}{S}$$

L'énergie par unité de longueur du longeron

$$\frac{1}{2} E_2 N = \frac{1}{2} E S \varepsilon_2^2 = \frac{1}{2} E S W'^2$$

Energie totale de déformation par unité de longueur

L'énergie totale dans les quatre quart de la poutre par unité de longueur

$$H = \int_0^a \left[2Ee_a W'^2 \frac{x^2}{a^2} + 2Gt_a \left(\frac{W}{a} - b\theta' \right)^2 \right] dx + \int_0^b \left[2Ee_b W'^2 \frac{y^2}{b^2} + 2Gt_b \left(\frac{W}{b} + a\theta' \right)^2 \right] dy + 2ESu$$

$$H = 2E \underbrace{\left(S + \frac{1}{3} a e_a + \frac{1}{3} b e_b \right)}_{S^*} W'^2 + 2G a t_a \left(\frac{W}{a} - b\theta' \right)^2 + 2G b t_b \left(\frac{W}{b} + a\theta' \right)^2$$

S^* est appelée section équivalente

Energie potentielle des charges appliquées par unité de longueur

Le travail virtuel change de signe de signe de

- pour un couple concentré dans la section z_m

$$- C_m \theta'(z_m)$$

- pour un couple réparti

$$- c(z) \theta'(z)$$

c. Utilisation du principe de variation des déplacements dans le cas de la torsion.

Expression du principe

$$\delta \left[\int_0^L H dz - \int_0^L c \theta dz - C_m \theta(z_m) \right] = 0$$

$$\delta H = 4ES^* W' \delta W' + 4G a t_a \underbrace{\left(\frac{W}{a} - b\theta' \right)}_{a\varphi_a} \left(\frac{\delta W}{a} - b\delta\theta' \right) + 4G b t_b \underbrace{\left(\frac{W}{b} + a\theta' \right)}_{b\varphi_b} \left(\frac{\delta W}{b} + a\delta\theta' \right)$$

$$\delta H = 4ES^* W' \delta W' + M_0 \delta\theta' + 4G (\varphi_a W + \varphi_b b \theta') \delta W$$

où - on a posé $\varphi =$ facteur de forme $= \frac{t_b}{b} - \frac{t_a}{a}$

- on a posé $\varphi = \frac{t_b}{b} + \frac{t_a}{a}$

- on a introduit le couple de torsion interne

$$M_0 = 4 \left(\int_0^b a q_b dy - \int_0^a b q_a dx \right)$$

avec $q_a = G t_a \left(\frac{w}{a} - \theta' b \right) = f(z)$

$q_b = G t_b \left(\frac{w}{b} - \theta' a \right) = f(z)$

$$M_0 = 4ab (q_b - q_a) = 4abG \left[\theta' (at_b + bt_a) + w \left(\frac{t_b}{b} - \frac{t_a}{a} \right) \right]$$

$$M_0 = 4a^2 b^2 G \psi \theta' + 4abG \psi w$$

(a)

on va varier les déplacements

- on sait a priori que en $z=0$ on a un encastrement $\theta(0) = 0$ $\delta\theta(0) = 0$
 $w(0) = 0$ $\delta w(0) = 0$

en $z=L$ on a une extrémité libre $\delta\theta(L)$ $\delta w(L)$ { arbitraire

- comme on varie les déplacements, on va sortir les équations d'équilibre et notamment l'équilibre interne qui donne M_0

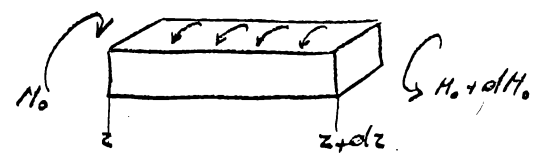
Variation sur $\delta\theta$

On obtient après intégration par parties l'équation d'équilibre

$$-M_0' - c = 0$$

(b)

Variation sur δw



Après intégration, partiellement par parties, on a

$$-(4ES^* w')' + 4G(\psi w + 4ab\varphi\theta') = 0$$

$$\left(\frac{4ES^*}{a} w' \right)' - \psi w = ab\varphi\theta'$$

(c)

Compte tenu de l'introduction de l'inconnue auxiliaire θ' , les équations encadrées constituent un système de trois équations à trois inconnues.

Comme ce système est du quatrième ordre, il faut 4 conditions aux limites

3. Solution s'il n'y a pas de couple concentré intermédiaire.

Conditions aux limites

Dans les intégrations, on a utilisé les conditions aux limites

$$\left[M_0 \delta\theta + 4ES^* w' \delta w \right]_{z=0}^{z=L} = 0$$

$$M_0(L) \delta\theta(L) + 4ES^* w'(L) \delta w(L) - \underbrace{M_0(0)}_{=0} \delta\theta(0) - \underbrace{4ES^* w'(0)}_{=0} \delta w(0) = 0$$

$$\text{On a vu que } \begin{cases} \theta(0) = 0 \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

D'autre part, pour que l'on puisse varier arbitrairement $\delta\theta(L)$, $\delta w(L)$ il faut que

$$M_0(L) = 0 \quad : \text{canton libre en } z=L$$

$$w'(L) = 0 \quad : \text{pas d'effort normal sur le longeron en } z=L.$$

On a ainsi les 4 conditions aux limites nécessaires.

Résolution

On part de (b). Par une simple quadrature, on a M_0 .

Les deux autres conditions sont couplées mais θ peut être éliminé entre (a) et (c)

$$\left(\frac{E}{G} S^* w'\right)' + \left(-\psi + \frac{ab\psi^2}{4a^2b^2G\psi}\right) w = \frac{\psi}{4abG\psi} M_0$$

$$\left(\frac{E}{G} S^* w'\right)' + \frac{\psi^2 - \psi^2}{\psi} w = \frac{\psi}{4abG\psi} M_0$$

On peut résoudre l'équation différentielle du second ordre par voie numérique ou par voie analytique dans les cas simples.

Connaissant w , on utilise (a) ou (c) pour obtenir θ par une simple quadrature

Solution s'il y a un couple concentré intermédiaire.

Conditions aux limites

Il faut séparer les limites pour franchir la discontinuité concentrée. Donc l'équation du bas de la p 54 devient.

$$\left[4ES^*w'\delta w + M_0\delta\theta\right]_{z=0}^{z=z_m+0} + \left[4ES^*w'\delta w + M_0\delta\theta\right]_{z=z_m+0}^{z=L} = 0$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \theta(z_m+0) = \theta(z_m-0) \\ w(z_m+0) = w(z_m-0) \\ \delta\theta(z_m+0) = \delta\theta(z_m-0) = \delta\theta(z_m) \\ \delta w(z_m+0) = \delta w(z_m-0) = \delta w(z_m) \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} \theta(z_m+0) = \theta(z_m-0) \\ w(z_m+0) = w(z_m-0) \\ \delta\theta(z_m+0) = \delta\theta(z_m-0) = \delta\theta(z_m) \\ \delta w(z_m+0) = \delta w(z_m-0) = \delta w(z_m) \end{cases}} \right\} \text{conditions physiquement nécessaires}$$

On en déduit (en regroupant les termes entoursés) et en faisant varier arbitrairement δw et $\delta\theta$

$$\delta W(z_m) [4ES^* W'(z_m - 0) - 4ES^* W'(z_m + 0)] = 0 \quad ; \text{condition de transition: } W \text{ continue}$$

$$\delta \theta(z_m) [M_0(z_m - 0) - M_0(z_m + 0) - C_m] = 0 \quad ; \text{ " " " " " } ; M_0 \text{ discontinue}$$

Résolution

Quand on intègre, il faut intégrer sur deux tronçons pour avoir M_0, W, θ

- de l'origine à z_m
- on a un saut de M_0 en z_m
- on continue sur le second tronçon avec W inchangé
 M_0 inchangé

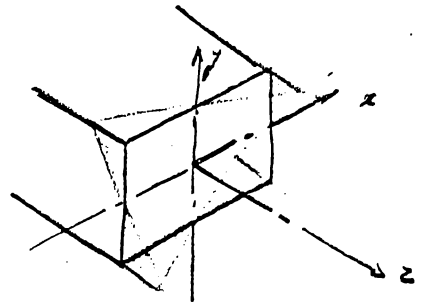
2. Caisson rectangulaire soumis à torsion par le princ. de Roesser

On reprend le même caisson que au § 1 et on introduit de la même façon les épaisseurs équivalentes des toles de revêtement et d'âme, $w(z)$, $\theta(z)$.

A. Expression de l'énergie

On suppose que les efforts normaux se répartissent linéairement sur les toles :

$$\left. \begin{aligned} n_a &= \frac{x}{a} A(z) \\ n_b &= \frac{y}{b} B(z) \\ N &= N(z) \end{aligned} \right\} A, B, N \text{ sont trois } f(z) \text{ inconnues.}$$



Dans une tole de revêtement, la somme de l'énergie de déformation et de dislocation vaut :

$$\int_0^a \left[n_a \frac{\partial w}{\partial z} + q_a \left(\frac{\partial w}{\partial x} - b\theta' \right) - \frac{n_a^2}{2Ee_a} - \frac{q_a^2}{2Gt_a} \right] dx$$

Dans une tole d'âme, on a

$$\int_0^b \left[n_b \frac{\partial w}{\partial z} + q_b \left(\frac{\partial w}{\partial y} + a\theta' \right) - \frac{n_b^2}{2Ee_b} - \frac{q_b^2}{2Gt_b} \right] dy$$

Dans une lame de coin

$$N \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES}$$

Pour 1/4 de caisson, par unité de longueur on a

$$H = \int_0^a \left[\frac{x}{a} A(z) \frac{\partial w}{\partial z} + q_a \left(\frac{\partial w}{\partial x} - b\theta' \right) - \frac{x^2}{a^2} \frac{A^2(z)}{2Ee_a} - \frac{q_a^2}{2Gt_a} \right] dx \\ + \int_0^b \left[\frac{y}{b} B(z) \frac{\partial w}{\partial z} + q_b \left(\frac{\partial w}{\partial y} + a\theta' \right) - \frac{y^2}{b^2} \frac{B^2(z)}{2Ee_b} - \frac{q_b^2}{2Gt_b} \right] dy + N(z) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{N^2(z)}{2ES}$$

Énergie potentielle par unité de longueur : $-c(z)\theta(z)$
 par couple concentric : $-c_i\theta(z_i)$

B. Application du principe

On doit avoir stationnarité de

$$\int_V \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \dots - \phi(\sigma_x, \dots) \right) dV - P$$

Soit ici

$$\delta \left[\int_0^L H dz - \int_0^L c(z) \theta(z) dz - C_1 \theta(z_1) \right] = 0$$

Une variation de $\delta W(x, z)$ dans le voisinage de x

$$\frac{x}{a} A' - \frac{\partial q_a}{\partial x} = 0$$

$$q_a = - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \frac{a}{2} A' + f(z)$$

$$q_a = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{a^2} \right) A' + c(z)$$

(a)

Une variation de $\delta W(y, z)$ sur l'axe z

$$\frac{y}{b} B' - \frac{\partial q_b}{\partial y} = 0$$

$$q_b = \frac{b}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{y^2}{b^2} \right) B' + D(z)$$

(b)

Une variation sur w dans le coin supérieur droit ($w(z) = w/a, z) = w/b,$

c. a. d. une variation de $\delta W(z) = \delta W(a, z) = \delta W(b, z)$, donne

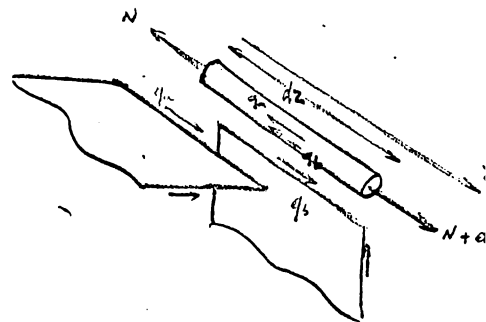
$$\int_0^L \left\{ q_a [\delta w(x, z)]_{x=0}^{x=a} + q_b [\delta w(y, z)]_{y=0}^{y=b} - N' \delta w \right\} dz = 0$$

$$- q_a(a, z) + q_b(b, z) - N' = 0$$

Il s'agit de l'équilibre d'un morceau de bois

en remplaçant q_a et q_b par les expressions
trouvées ci-dessus

$$N' = - \frac{a}{3} A' + c(z) - \frac{b}{3} B' + D(z)$$



Une variation sur w_a , ou A donne

$$\int_0^a \frac{x}{a} \frac{\partial w}{\partial z} dx - A \int_0^a \frac{x^2}{a^2 E E_a} dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^a \frac{x}{a} w dx = A \frac{a}{3 E E_a}$$

Ceci ne permet pas de connaître les déplacements exacts, mais seulement leur moyenne pondérée par une fonction de poids x . Si on fixe pour la moyenne pondérée $\alpha(z) = \frac{\int_0^a x w dx}{\int_0^a x dx} = \frac{2}{a^2} \int_0^a x w dx$, on a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{2A(z)}{3E e_a}$$

(c)

De même, une variation sur b donne après introduction de la

moyenne pondérée $\beta(z) = \frac{\int_0^b y w dy}{\int_0^b y dy} = \frac{2}{b^2} \int_0^b y w dy$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{2B(z)}{3E e_b}$$

(d)

Une variation sur N donne

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{N}{ES}$$

(e)

Une variation sur q_a donne

$$\frac{\partial w(x, z)}{\partial x} = b \theta' + \frac{q_a}{6t_a}$$

En remplaçant q_a par (a), on peut intégrer w

$$w(x, z) = b x \theta' + \frac{c}{6t_a} \left[c(x) - \frac{a^2}{6} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a} \right) A' \right]$$

(f)

on peut remarquer que le greuchissement n'est plus linéaire: il y apparaît un terme en $\frac{x^3}{a^3}$

De même une variation sur q_b donne

$$w(y, z) = -a y \theta' + \frac{c}{6t_b} \left[c(y) - \frac{b^2}{6} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) \theta' \right]$$

(g)

Une variation sur $\theta(z)$ donne

$$\frac{d}{dz} \int_0^a b q_a dx - \frac{d}{dz} \int_0^b a q_b dy - \frac{c(z)}{4} = 0$$

$$ab c'(z) - ab \theta'(z) - \frac{c(z)}{4} = 0$$

$$4ab (c' - \theta') = c$$

(h)

On peut encore exprimer la condition de continuité du déplacement axial.

$$w(a, z) = w(z) = w(b, z)$$

(f) et (g) donnent

$$ab\theta' + \frac{a}{Gt_a} C = W \quad \rightarrow \quad C = \frac{Gt_a}{a} (W - ab\theta')$$

$$-ab\theta' + \frac{b}{Gt_b} D = W \quad \rightarrow \quad D = \frac{Gt_b}{b} (W + ab\theta')$$

En introduisant ainsi (f) et (g) dans les définitions des moments pondérés, on a

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{2}{a^2} b\theta' \frac{a^3}{3} + \frac{2C}{Gt_a a^2} \frac{a^3}{3} - \frac{A'}{3Gt_a} \left(-\frac{2a^2}{15}\right) \\ &= \frac{2}{3} ab\theta' + \frac{2}{3} \frac{C}{Gt_a} + \frac{2}{45} \frac{a^2 A'}{Gt_a} \end{aligned}$$

$$\alpha(z) = \frac{2}{3} W + \frac{2a^2}{45Gt_a} A' \quad (i)$$

$$\text{et } \beta(z) = \frac{2}{3} W + \frac{2b^2}{45Gt_b} B' \quad (j)$$

de la même façon

(j)

En introduisant encore les valeurs de C et D dans l'expression de N' et dans (h), on a

$$\frac{dN}{dz} = G \left(\frac{t_a}{a} + \frac{t_b}{b} \right) W + ab\theta' \left(\frac{t_b}{b} - \frac{t_a}{a} \right) G - \frac{a}{3} A' - \frac{b}{3} B'$$

$$\frac{dN}{dz} = G\psi W + Gab\psi\theta' - \frac{a}{3} A' - \frac{b}{3} B' \quad (k)$$

$$\frac{Gt_a}{a} (W' - ab\theta'') - \frac{Gt_b}{b} (W' + ab\theta'') = \frac{c}{gab}$$

$$G\psi W' + abG\psi\theta' = -\frac{c}{gab} \quad (l)$$

Les expressions encadrées (c), (d), (e), (i), (j), (k), (l) constituent un système de 7 équations à 7 inconnus $\alpha, \beta, A, B, W, N, \theta$

Une simplification supplémentaire consiste à lier A, B et N par la condition de continuité des tensions axiales dans la section droite.

Si, contrairement à ce que l'on a supposé jusqu'à présent, on exprime que

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{n_a(a, z)}{e_a} = \frac{n_b(b, z)}{e_b}$$

on a une condition supplémentaire

$$\frac{N}{S} = \frac{A}{e_a} = \frac{B}{e_b} = \frac{F(z)}{S^*}$$

où F(z) est une fonction unique qui va jouer le rôle de A, B et N

$$S^* = S + \frac{1}{3}(e_a a + e_b b)$$

Cette fois, α et β ne seront plus indépendants, mais liés en une fonction unique

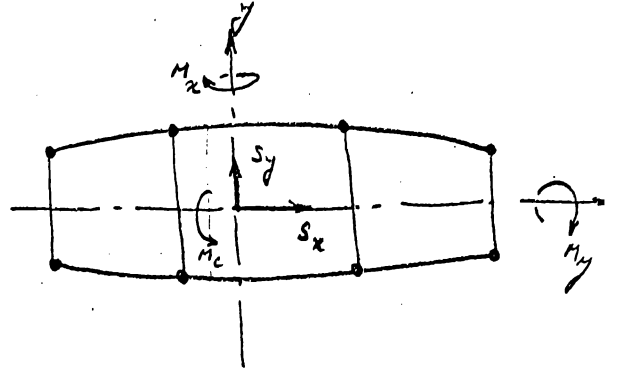
$$V = \frac{S}{S^*} W + \frac{e_a}{2\alpha S^*} \int_0^a x w dx + \frac{e_b}{2\beta S^*} \int_0^b y w dy$$

En recommençant le processus de résolution on arriverait à un système d'équations ne contenant plus comme inconnues que F(z), γ , W et θ .

1. Introduction

On envisage une section droite de forme quelconque raidie par des diaphragmes. Elle est constituée :

- de parois minces et d'épaisseurs effectives
 } et pour le flux de cisaillement
 } et pour le flux d'efforts normaux.
- de sections concentriques S_m où m est un indice de numérotation.

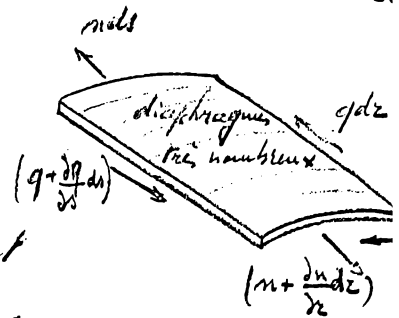


On choisit les axes du plan de forme et on suppose leur origine au centreide c.a.d. au centre de gravité des sections résistante aux efforts normaux.

On suppose que les diaphragmes ne flottent pas sur la toile de manière ils agissent perpendiculairement à l'axe ox mais n'exercent aucune force parallèlement à l'axe ox .

2. Equilibres.

A. Equilibre d'un élément de revêtement.



Soit n le flux d'effort normal dans le revêtement
 q le flux de cisaillement positif dans le sens de rotation choisi le long de l'axe.

L'équilibre selon oz donne

$$\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

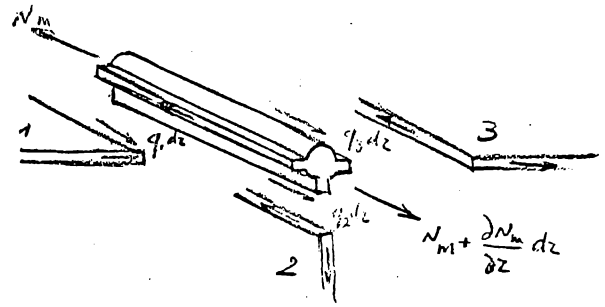
(a)

B. Equilibre d'un élément de ligne concentrée.

$$\frac{\partial N_m}{\partial z} - q_1 + q_2 + q_3 = 0$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial z} = \sum q_{\text{converg}} - \sum q_{\text{div}} = T_m(q)$$

(b)



ou T_m est un opérateur représentant la somme des quantités convergentes en m moins la somme des quantités divergentes en m .

C. Equilibre transversal de toute la section

Si on appelle S_x et S_y les efforts tranchants dans la section envisagée, on a

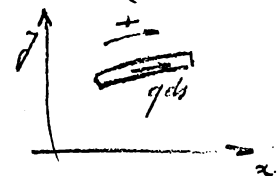
$$S_x = \int q dx$$

$$S_y = \int q dy$$

(c)

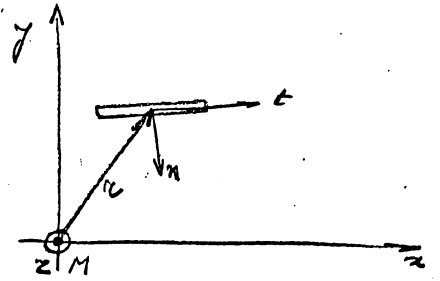
(d)

En effet, sur un élément de cos. directeurs $\frac{dx}{dy}$ et $\frac{dy}{dx}$ agit un cisaillement $q ds$ qui après projection donne $q dx$.



D. Moment de torsion par rapport au centroïde.

Le moment est l'intégrale de produits vectoriels du type $\vec{r} \wedge q \vec{ds}$



si on prend un nouveau système d'axe :

\vec{t} est selon la tangente à la paroi et dirigé dans la direction + du flux
 \vec{n} est tel que le dièdre (\vec{n}, \vec{t}) soit superposable au dièdre (\vec{x}, \vec{y})

on voit ici que les cos. directeurs de la normale n valent

$$\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds}$$

et la projection r de \vec{r} sur \vec{n} , c.à.d. le bras de levier du moment

$$r = x \frac{dy}{ds} + y \left(-\frac{dx}{ds} \right)$$

d'où

$$M_z = \int q r ds$$

(c)

E. Equilibre des efforts normaux

M_x
 M_y } sont les moments de flexion par rapport aux axes $\left\{ \frac{\partial y}{\partial x} \right.$ dus aux tensions
 selon oz .

on a

$$M_x = \int n x ds + \sum_m N_m x_m$$

(f)

$$M_y = \int n y ds + \sum_m N_m y_m$$

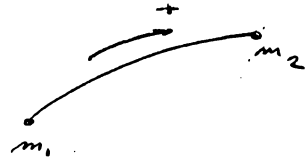
(g)

$$N = \int n ds + \sum_m N_m$$

(h)

3. Transformation des intégrales.

A. Règle d'intégration par parties



Soit un élément de poutre allant de la
ligne m_1 à la ligne m_2 dans le sens positif

Une intégrale du type $\int_{m_1}^{m_2} \alpha ds$ peut se transformer en

$$\int_{m_1}^{m_2} \alpha ds = [\alpha \beta]_{m_1}^{m_2} - \int_{m_1}^{m_2} \beta d\alpha$$

Si on fait la même chose pour tous les forces

$$\int \alpha ds = \sum_m T_m(dA) - \int \beta d\alpha$$

(c)

B. Application à l'équilibre des efforts normaux

Si on dérive par rapport à z la formule (b), on a

$$\frac{dN}{dz} = \int \frac{\partial n}{\partial z} ds + \sum_m \frac{dN_m}{dz}$$

en utilisant les formules (a) et (b)

$$\frac{dN}{dz} = - \int \frac{\partial q}{\partial z} ds + \sum_m T_m(q)$$

En appliquant l'intégration par parties, le premier terme

$$\int \frac{\partial q}{\partial z} ds = \int n \cdot dq = \int q d(n) + \sum_m T_m(q) = \sum_m T_m(q)$$

D'où

$$\frac{dN}{dz} = 0$$

N est constant ainsi qu'il fallait s'y attendre d'après la dernière hypothèse de l'introduction.

C. Application aux moments fléchissants

On dérive (f) par rapport à z , on utilise (a) et (b), on applique l'intégration par parties et on a :

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_x}{dz} &= \int \frac{\partial n}{\partial z} x ds + \sum_m x_m \frac{dN_m}{dz} \\
 &= - \int x \frac{\partial q}{\partial z} ds + \sum_m x_m T_m(q) \\
 &= - \int x dq + \sum_m x_m T_m(q) \\
 &= + \int q dx - \sum_m T_m(qx) + \sum_m x_m T_m(q)
 \end{aligned}$$

On voit que x qui représente la coordonnée au point envisagé' et constante vis à vis de z en

$$\frac{dM_x}{dz} = \int q dx - \sum_m x_m T_m(q) + \sum_m x_m T_m(q)$$

$$\boxed{\frac{dM_x}{dz} = S_x}$$

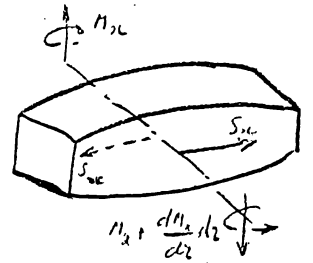
(j)

Ce qui est évident si on prend l'équilibre d'une tranche

on trouve de la même façon

$$\boxed{\frac{dM_y}{dz} = S_y}$$

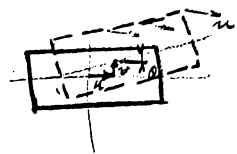
(k)



4. Déformations

1. Déplacements d'un diaphragme.

Soit un diaphragme (supposé indéformable dans son plan).



Trois mouvements sont possibles dans son plan :

- $u \parallel \text{à } ox$
- $v \parallel \text{à } oy$
- θ rotation dans son plan

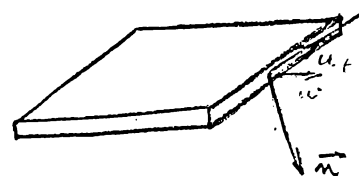
Il peut en outre subir un gauchissement et

les inconnues de déplacement sont donc :

- $u(z), v(z), \theta(z)$
- $w(s, z)$ sur la paroi
- $w_m(z)$ sur les lés

3. Déformations d'un élément de revêtement.

Les déformations du diaphragme se ramènent à w et u_t (projection sur t des déplacements du diaphragme)

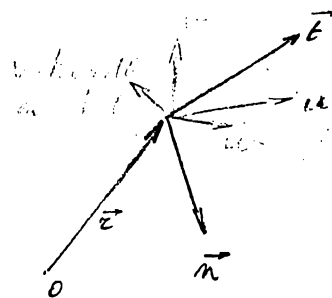


Or les déplacements du diaphragme donnent en

un point

- un déplacement selon x : $u + y\theta$
- un déplacement selon y : $v + x\theta$
- un déplacement projeté sur la direction t

$$u_t = (u + y\theta) \frac{dx}{ds} + (v + x\theta) \frac{dy}{ds}$$



$$u_t = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + x\theta$$

(1)

Des déplacements w et u_t de la paroi dans son plan on déduit les déformations proportionnelles

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz}$$

$$\gamma = \frac{du_t}{dz} + \frac{dw}{ds}$$

En remplaçant u_t par (1), on ramène γ aux 4 fonctions inconnues de déplacements

$$\gamma = \frac{dw}{ds} + \frac{du}{dz} \frac{dx}{ds} + \frac{dv}{dz} \frac{dy}{ds} + x \frac{d\theta}{dz}$$

A partir des ε et γ , on déduit

$$u = E\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$N_m = E S_m \frac{\partial w_m}{\partial z}$$

$$\tau = G\gamma = \frac{T}{t}$$

on peut réécrire ces formules en tenant compte de la façon dont les grandeurs ε , S et t varient dans la section et longitudinalement. C'est à dire on pose

$$- S_m = A_m g(z)$$

$$\text{si } A_m = c t$$

$$- \text{si } g(0) = 1$$

} A_m est la section de la ligne en $z=0$, c'est la section repère

$$S_m = g(z) \cdot S_m(0)$$

$$- \varepsilon = b(s) \cdot g(z)$$

$$\varepsilon = g(z) \cdot \varepsilon(s, 0)$$

en prenant ε à l'origine de la section en $z=0$ comme section repère.

$$- t = a(s) \cdot h(z)$$

En introduisant les notations $\frac{d}{dz}$, $\frac{d}{ds}$, on peut réécrire les formules de u , N , τ

$$\frac{q}{G h a} = \frac{\partial w}{\partial z} + u \cdot z' + v \cdot y' + r \theta \quad (m)$$

$$\frac{n}{E g b} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (n)$$

$$\frac{N_m}{E g A_m} = w_m' \quad (o)$$

Les équations encadrées constituent un système complet qui permet de résoudre le problème.

6. Axes de cisaillement de Dyrmaal.

on injecte l'expression (m) de q dans (c) et (d) pour calculer les expressions de S_x et S_y

$$\begin{aligned} \frac{S_x}{Gh(z)} &= \int a \left(\frac{dw}{ds} + u x' + v y' + z \theta' \right) ds \\ &= \int a \frac{dw}{ds} ds + u \int a x'^2 ds + v \int a x' y' ds + \theta \int a z ds \end{aligned}$$

on trouverait de même

$$\frac{S_y}{Gh} = \int a \frac{dw}{ds} dy + u \int a x' y' ds + v \int a y'^2 ds + \theta \int a z dy$$

et, en partant de l'expression (e) du moment de torsion

$$\frac{M_z}{Gh} = \int a z \frac{dw}{ds} ds + u \int a z dx + v \int a z dy + \theta \int a z^2 ds$$

on appelle axes réduits ou axes de cisaillement

$$A_{xx} = \int a x'^2 ds$$

$$A_{xy} = \int a x' y' ds$$

$$A_{yy} = \int a y'^2 ds$$

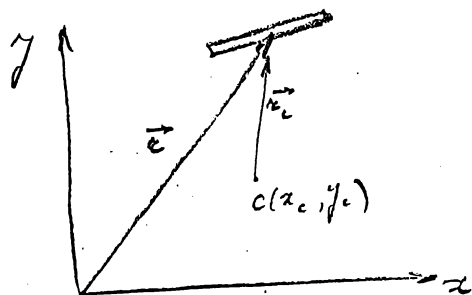
Comme il s'agit d'un toreux du second ordre, on peut par une rotation appropriée des axes annuler A_{xy}

De plus, par une translation appropriée des axes, on peut s'arranger pour,
 $\int a x dx = \int a z dy = 0$

en effet, soit une nouvelle origine des axes de coordonnées x_c, y_c dans l'ancien système. A un élément de paroi est maintenant associé un nouveau vecteur \vec{e}_c relié à l'ancien vecteur \vec{e} par

$$\vec{e}_c = (x - x_c) \frac{dy}{ds} - (y - y_c) \frac{dx}{ds}$$

$$x_c = x - x_c y' + y_c x'$$



D'où

$$\int a x_c dx = \int a x dx - x_c A_{xy} + \int_c A_{yx}$$

$$\int a x_c dy = \int a x dy - x_c A_{yy} + \int_c A_{xy}$$

Ceci montre qu'on peut toujours déterminer un point $c(x_c, y_c)$ tel que les deux intégrales $\int a x_c dx$ et $\int a x_c dy$ soient nulles.

Donc par une rotation et une translation appropriée des axes, on peut ramener les équations en S_x, S_y et M_0 à

$$\begin{cases} \frac{S_x}{Gh} = \int a \frac{dw}{ds} dx + u' A_{xx} \\ \frac{S_y}{Gh} = \int a \frac{dw}{ds} dy + v' A_{yy} \\ \frac{M_0}{Gh} = \int a x \frac{dw}{ds} ds + \theta' I_c \end{cases}$$

Les axes particuliers ainsi obtenus sont les axes de cisaillement de Breda et ont une propriété supplémentaire : c'est de rendre minimum

$$I_c = \int a x_c^2 ds$$

Le centre de cisaillement c est malheureusement distinct du centre de flexion-torsion K .

III Solution de St Venant pour les pontons en caisson.

1. Hypothèse fondamentale de la solution : loi d'équarissage.

A. Loi d'équarissage.

- On suppose a priori une distribution de efforts normaux n, N, N_m

- Les tensions σ_z (rapport du flux de l'effort normal à l'épaisseur équivalente pour la transmission de effort normaux) sont des fonctions linéaires de x et y

$$\sigma_z = \zeta(z) + (x-x_g) \xi(z) + (y-y_g) \eta(z)$$

- La loi d'équarissage s'écrit donc avec les notations du chapitre précédent

$$\sigma_z(x_m) = \frac{N_m}{A_m g(z)} = \zeta(z) + (x_m - x_g) \xi(z) + (y_m - y_g) \eta(z) \quad (a)$$

$$\sigma_z = \frac{n}{b(z) g(z)} = \zeta(z) + (x - x_g) \xi(z) + (y - y_g) \eta(z) \quad (b)$$

B. Transformation de la loi d'équarissage.

on élimine ζ, η et ξ au profit de N et M .

- L'effort normal total

$$N = \int n ds + \sum_m N_m$$

$$N = g(z) \left[\zeta(z) \int b ds + \xi(z) \int b(x-x_g) ds + \eta(z) \int b(y-y_g) ds + \zeta(z) \sum_m A_m + \xi(z) \sum_m A_m (x-x_g) + \eta(z) \sum_m A_m (y-y_g) \right]$$

- Le coefficient de $\zeta(z)$ représente l'aire totale (module de l'aire totale $A \times g(z)$),

$$A = \int b ds + \sum A_m \quad (c)$$

- Les coefficients de $\xi(z)$ et $\eta(z)$ sont nuls en vertu de la définition du centroïde. Ils servent à déterminer la position de celui-ci pour les relations

$$A x_g = \int b x ds + \sum_m x_m A_m \quad (d)$$

$$A y_g = \int b y ds + \sum_m y_m A_m \quad (e)$$

Finalement

$$N = A g(z) \xi(z) = Ck$$

$$\xi(z) = \frac{N}{A g(z)}$$

(f)

- Le moment M_x total autour d'un axe passant par le centre de masse vaut

$$M_x = \int n(x-x_g) ds + \sum_m N_m (x_m - x_g)$$

En remplaçant n et N par (a) et (b), on trouve que

- le coefficient de $\xi(z) = 0$

- le coefficient de $\xi(z)$ représente une constante

I_{xx} , le moment d'inertie, à multiplier par la fonction d'évolution $g(z)$

$$I_{xx} = \int b(x-x_g)^2 ds + \sum_m A_m (x-x_g)^2$$

(g)

- le coefficient de $\eta(z)$ représente une constante I_{xy} , le produit d'inertie, à multiplier par la fonction d'évolution $g(z)$.

$$I_{xy} = \int b(x-x_g)(y-y_g) ds + \sum_m A_m (x-x_g)(y-y_g)$$

(h)

Finalement

$$\frac{M_x}{g(z)} = \xi(z) I_{xx} + \eta(z) I_{xy}$$

- En exprimant de la même façon le moment M_y autour d'un axe passant par G

$$\frac{M_y}{g(z)} = \xi(z) I_{xy} + \eta(z) I_{yy}$$

- Pour tirer ξ et η de ces deux dernières relations, on définit

- la matrice des tenseurs d'inertie

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix} = (\mathbf{I})$$

- la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} i_{xx} & i_{xy} \\ i_{xy} & i_{yy} \end{pmatrix} = (\mathbf{II})$$

- par définition de l'inverse, on doit avoir

$$(\mathbf{I}) \times (\mathbf{II}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{xx} i_{xx} + I_{yy} i_{yy} &= 1 \\ I_{xx} i_{xy} + I_{yy} i_{yy} &= 0 \\ I_{xx} i_{xx} + I_{yy} i_{xy} &= 0 \\ I_{yy} i_{xy} + I_{yy} i_{yy} &= 1 \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} \Delta I_m &= 2 I_{xy} I_{yy} - I_{xy}^2 \\ i_{xx} &= \frac{I_{yy}}{\Delta I_m} \\ i_{yy} &= \frac{I_{xx}}{\Delta I_m} \\ i_{xy} &= \frac{-I_{xy}}{\Delta I_m} \end{aligned}$$

(i)

Finalement

$$\xi(z) = \frac{i_{xx} M_x + i_{xy} M_y}{g(z)}$$

(j)

$$\eta(z) = \frac{i_{xy} M_x + i_{yy} M_y}{g(z)}$$

(k)

En remplaçant dans (a) et (b), ξ , ξ et η par leurs valeurs (f) (j) et (k) la loi d'équarissage transformée s'écrit

$$\frac{x}{b} = \frac{x}{a} + (i_{xx} M_x + i_{xy} M_y)(x - x_g) + (i_{xy} M_x + i_{yy} M_y)(y - y_g)$$

(l)

$$\frac{N_m}{A_m} = \frac{N}{A} + (i_{xx} M_x + i_{xy} M_y)(x_m - x_g) + (i_{xy} M_x + i_{yy} M_y)(y_m - y_g)$$

(m)

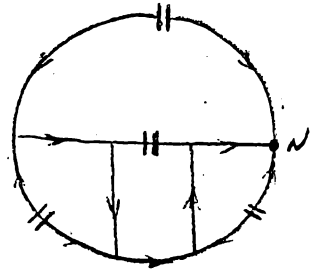
Donc à partir de l'effort normal et des moments fléchissants, on peut calculer partout les tensions normales ; il reste à calculer le flux de cisaillement

2. Calcul des flux de cisaillement

A. Règles à observer

- Dans une section droite, il faut ouvrir les circuits fermés en pratiquant des coupures de façon astucieuse; on définit ainsi un arbre
- Il faut faire choix, toujours et d'une façon arbitraire et d'un nœud de contrôle n : point commun à plusieurs branches.
- En un point qq. de l'arbre, il n'y a qu'un seul chemin pour aller à n ; le sens de cheminement vers le nœud n définit le sens positif conventionnel de chaque branche de l'arbre.

Exemple : en rouge, les coupures
 en vert, les sens positifs



B. Introduction des moments statiques

Toute coupure supplémentaire sépare l'arbre en deux tronçons complètement isolés l'un de l'autre par les coupures. Sur les branches où on fait la coupure supplémentaire, on avait déjà défini un sens positif; il y a donc un tronçon + et un tronçon -; on passe de + à un moins quand on traverse la coupure supplémentaire dans le sens positif de la branche coupée.

Exemple :

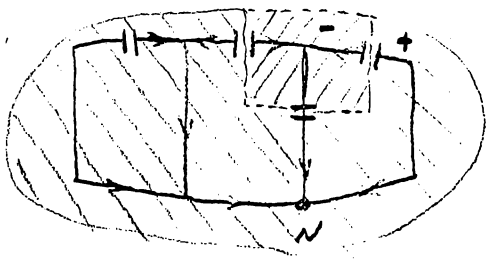
a. Moments statiques "ouverts"

Ils sont définis par

$$A_o = \int b(x-x_g) ds + \sum A_m(x_m-x_g) \quad (a)$$

$$B_o = \int b(y-y_g) ds + \sum A_m(y_m-y_g) \quad (b)$$

Ils sont à calculer pour tous les morceaux de tôles et de bois contenus ds le tronç



A_0 et B_0 ne sont pas des constantes, mais sont fonction de la position de la coupure arbitraire.

Pour trouver les équations auxquelles obéissent ces moments statiques auverts, lorsqu'on déplace la coupure, il faut envisager 2 cas :

- on est au milieu d'une branche et on déplace un peu la coupure : il y a transformation continue de A_0 et B_0 .
- on est près d'un nœud et on le saute : A_0 et B_0 subissent une discontinuité.

b. Déplacement de la coupure le long d'une branche dans le sens positif.

Les variations de A_0 et B_0 sont positives

$$A_0(s+ds) = A_0(s) + b(x-x_g) ds \quad \rightarrow \quad \frac{dA_0}{ds} = b(x-x_g) \quad (p)$$

$$B_0(s+ds) = B_0(s) + b(y-y_g) ds \quad \rightarrow \quad \frac{dB_0}{ds} = b(y-y_g) \quad (q)$$

c. Saut d'un nœud.

On a vu qu'en un nœud, on a généralement une branche divergente et les autres convergentes. Si on connaît les A_0 et B_0 juste avant le nœud en passant toutes les branches convergentes, il faut sauter par dessus le nœud en passant l'expression des moments statiques A_0 et B_0 dans la branche divergente. On a :

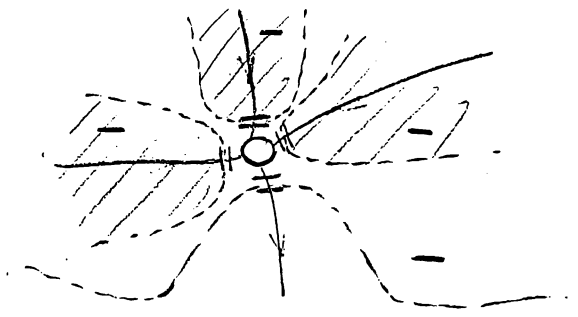
$$\sum_{\text{de branches}} A_0 + A_m(x_m - x_g) = A_0$$

converg.
nœud ou
au déj. br.
divergente

D'où, avec l'opérateur T_m , l'expression pour le calcul des moments statiques au départ de la branche divergente

$$A_m(x_m - x_g) = -T_m(A_0) \quad (2)$$

$$A_m(y_m - y_g) = -T_m(B_0) \quad (3)$$



Les grandeurs ainsi introduites interviennent en fait dans l'intégration des équations d'équilibre (c'est équ. (a) et (b) du chap. précédent)

$$\frac{dq}{ds} = - \frac{dm}{dz} \quad (t)$$

$$T_m(q) = \frac{dN_m}{dz} \quad (u)$$

où les seconds membres sont connus par la loi d'équarissage (l) et (m)

c. Intégration des équations d'équilibre

a. Solution particulière des équations d'équilibre avec second membre

Une solution particulière des équations (t) et (u) est donnée par le flux de cisaillement ouvert

$$q = q_0 = -(i_{xx} S_x + i_{xy} S_y) A_0 - (i_{yy} S_x + i_{yx} S_y) B_0 \quad (v)$$

En effet, si on introduit (l) et (v) dans (t), on a bien

$$(i_{xx} \frac{dM_x}{dz} + i_{xy} \frac{dM_y}{dz})(x-z) + (i_{yy} \frac{dM_x}{dz} + i_{yx} \frac{dM_y}{dz})(y-z) - (i_{xx} S_x + i_{xy} S_y) \frac{dA_0}{dz} - (i_{yy} S_x + i_{yx} S_y) \frac{dB_0}{dz}$$

compte tenu de (j) et (k) du chapitre précédent et de (f) et (g)

De même si on introduit (m) et (v) dans (u), on a bien

$$A_m (i_{xx} \frac{dM_x}{dz} + i_{xy} \frac{dM_y}{dz})(x_m - z) + A_m (i_{yy} \frac{dM_x}{dz} + i_{yx} \frac{dM_y}{dz})(y_m - z) = T_m(q) \\ = -(i_{xx} S_x + i_{xy} S_y) T_m(A_0) - (i_{yy} S_x + i_{yx} S_y) T_m(B_0)$$

compte tenu de (j) et (k) du chapitre précédent et de (r) et (s)

b. Solution générale des équations d'équilibre sans second membre

Il faut évidemment reformer les branches, sinon la solution précédente risque de fournir un déplacement axial qui n'est pas le même de part et d'autre de la coupure. Les deux bords glissant l'un par rapport à l'autre, il faut des conditions de fermeture définissant des flux de mailles ou flux fermés.

Le flux de fermeture ou de maille est la solution des équations différentielles

Il faut intégrer cette équation sur un circuit fermé; soit, sur la maille i .
 En reprenant les notations et sens de la page précédente et l'opérateur.

on a

$$q\delta_i = q_0\delta_i + \sum_p \delta_p \delta_i q_p$$

$$\oint_i \frac{q\delta_i}{Gh a} ds = \oint_i \frac{q_0\delta_i + \sum_p \delta_p \delta_i q_p}{Gh a} ds = \oint_i dw + u \oint_i ds + v \oint_i dy + \theta' \int \rho r ds$$

or - on exige $\oint_i dw = 0$

- on a $\oint_i du = 0$ p.c.q. $x_y = x_d \Rightarrow$ coupure

$\oint_i dy = 0$ pour la même raison.

$\int \rho r ds = 2w_i$ si w_i est l'aire de la maille i .

D'où

$$\frac{1}{Gh} \oint \frac{q_0\delta_i + \sum_p \delta_p \delta_i q_p}{a} ds = 2w_i \theta'$$

$$\frac{1}{Gh} \sum_p q_p \oint \frac{\delta_i \delta_p}{a} ds = 2w_i \theta' - \frac{1}{Gh} \oint \frac{q_0 \delta_i}{a} ds \quad (a')$$

Cette équation écrite autant de fois qu'il y a de mailles permet de trouver les flux de fermeture inconnus.

Les calculs s'effectuent en 3 étapes.

a. Introduction du centre de flexion-torsion

Les flux inverts s'expriment sous la forme (a)

$$q_0 = -(i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) A_0 - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) B_0$$

Les flux de fermeture sont exprimés de façon identique

$$q_p = Gh \theta' \gamma_p - (i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) \alpha_p - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) \beta_p$$

De cette façon, le système (a') est résolu sous trois formes diffé.

$$\left. \begin{aligned} \sum_p \alpha_p \oint \frac{\delta_i \delta_p}{a} ds &= \oint \frac{A_0}{a} \delta_i ds & \longrightarrow & \alpha_p \\ \sum_p \beta_p \oint \frac{\delta_i \delta_p}{a} ds &= \oint \frac{B_0}{a} S_x ds & \longrightarrow & \beta_p \\ \sum_p \gamma_p \oint \frac{\delta_i \delta_p}{a} ds &= 2w_i & \longrightarrow & \gamma_p \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, m \text{ (nombre mailles)}$$

Après une triple résolution, on peut reconstituer le flux complet

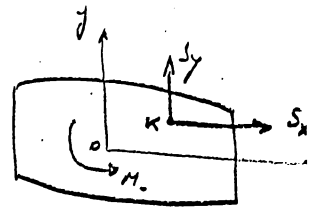
$$q = q_0 + \sum_p \delta_p [Gh \theta'_p - (i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) \alpha_p - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) \beta_p]$$

On remarque que cette solution n'a pas une allure homogène :

- le premier terme du crochet fait intervenir une déformation
- le second et le troisième font intervenir des forces (les efforts tranchants)

on introduit le centre de flexion-torsion qui permet le déplacement dans la solution de Saint Venant :

- si S_x et S_y sont appliqués en K , on n'aura que des déplacements de translation sans torsion.
- si on applique en K un couple de torsion pur il n'y a que rotations autour de l'axe par K sans translation.



b. Détermination du centre de flexion-torsion K.

on peut déterminer K à partir de l'une ou l'autre des définitions ci-dessus
 on suppose qu'on part de la seconde, que $\theta' = 0$ et que $M_K = 0$ ce qui donne les coordonnées x_K, y_K .

on a

$$M_0 = \int q_i r ds$$

en remplaçant les q_i et q_p par leurs expressions à la p. 25 et en regroupant les termes en S_x, S_y on a

$$q = -(i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) A - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) B + Gh \theta' (\sum_i \rho_i \delta_i)$$

où

$$A_i = A_0 - \sum_i \alpha_i \delta_i$$

$$B_i = B_0 - \sum_i \beta_i \delta_i$$

} moments statiques premiers

donc

$$M_0 = -(i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) \int r A ds - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) \int r B ds + Gh \theta' \sum_i \rho_i \int \delta_i r ds \quad (1)$$

Or $\int \delta_i r ds = 2W_i$ puisque $\delta_i = 0$ partout au dehors de la maille i

Si on suppose qu'il n'y a pas de moment de torsion en K, le moment de torsion en O doit provenir de S_x et S_y

$$M_0 = \alpha_K S_y - \gamma_K S_x$$

on identifie les deux expressions de M_0 $\left\{ \begin{array}{l} \text{une fois en prenant } S_y=0, S_x=-1 \rightarrow \gamma_K \\ \text{une fois en prenant } S_y=1, S_x=0 \rightarrow \alpha_K \end{array} \right.$

Il vient

$$\alpha_K = -i_{xy} \int A x ds - i_{yy} \int B x ds$$

$$\gamma_K = i_{xx} \int A x ds + i_{xy} \int B x ds$$

c. Transport des axes au centre de flexion-torsion

Comme à la p. 69, on a

$$\alpha_K = (x-x_K) \frac{dy}{ds} - (y-y_K) \frac{dx}{ds}$$

Il n'y a pas de moment appliqué au point K et si, par conséquent, $\theta' = 0$, l'expression (6') de M_0 exige que

$$\int A x_K ds = 0$$

$$\int B x_K ds = 0$$

et il reste finalement

$$M_K = G h \theta' \cdot 2 \sum_i \gamma_i \omega_i = G h J \theta' \quad (c')$$

avec $J = 2 \sum_i \gamma_i \omega_i =$ raideur de torsion de Saint Venant.

Avec des axes transportés en K, l'expression de θ' se réduit à

$$\theta' = - (i_{xx} S_x + i_{xy} S_y) A - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) B + \frac{M_K}{J} \sum_i \gamma_i \omega_i \quad (d')$$

3. Calcul du gauchissement de la section.

A. Equation générale.

Il faut intégrer le déplacement axial $w(z, s)$ et ceci est nettement facilité si on prend en K l'origine des systèmes de référence. on a par (2)

$$\frac{dw}{ds} = \frac{q}{Gh} - u_K x' - v_K y' - r_K \theta'$$

En remplaçant q et θ' par leur valeur (e') et (c'), on obtient

$$\frac{dw}{ds} = - \frac{S_x}{Gh} (i_{xx} \frac{A}{a} + i_{yy} \frac{B}{a}) - \frac{S_y}{Gh} (i_{yy} \frac{A}{a} + i_{xx} \frac{B}{a}) + \frac{M_K}{GhJ} (-r_K + \frac{\sum i_i \delta_i}{a}) - u_K x' - v_K y'$$

on peut vérifier qu'en intégrant sur n'importe quel circuit fermé, on a zéro, il n'apparaît pas de constante cyclique. En effet l'annulation

$$\oint_p \delta_p \frac{dw}{ds} ds = 0$$

entraîne trois conditions distinctes

$$\oint_p \delta_p \frac{A}{a} ds = 0$$

$$\oint_p \delta_p \frac{B}{a} ds = 0$$

$$\sum_i \delta_i \frac{\delta_i}{a} ds = \oint_p r_K \delta_p ds = 2 \Omega_p$$

En remplaçant les moments statiques fermés par leur équation, on retrouve les 3 conditions qui, à la p. 85, ont servi à fixer $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$

Le déplacement au point s est la constante d'intégration; en partant à rebours sur les chemins concourant en c , on trouve le gauchissement en n'importe quel point.

B. Les 3 gauchissements de St Venant.

Dans l'équation (e') ci-dessus, on distingue trois sorts de termes obtenus comme suit

$$w_x^* = w \quad \text{lorsque} \quad S_y = M_x = u'_K = v'_K = 0 \quad S_x = Gh$$

$$w_y^* = w \quad \text{lorsque} \quad S_x = M_y = u'_K = v'_K = 0 \quad S_y = Gh$$

$$w_K^* = w \quad \text{lorsque} \quad S_x = S_y = u'_K = v'_K = 0 \quad M_K = GhJ$$

les trois conjointement aboutissent à trois équations différentielles qui peuvent être considérées comme les équations de définition

$$\frac{dw_x^*}{ds} = - \left(i_{xx} \frac{A}{a} + i_{yy} \frac{B}{a} \right)$$

$$\frac{dw_y^*}{ds} = - \left(i_{xy} \frac{A}{a} + i_{xx} \frac{B}{a} \right)$$

$$\frac{dw_K^*}{ds} = \frac{1}{a} \left(\sum_i f_i d_i - \frac{r_K}{a} \right)$$

La solution générale du groupement peut donc s'écrire

$$w = \frac{S_x}{Gh} w_x^* + \frac{S_y}{Gh} w_y^* + \frac{M_K}{GhJ} w_K^* - u'_K (x-x_0) - v'_K (y-y_0) - \alpha(z)$$

(f')

c. Vérification de la solution

Il faut enfin vérifier que la distribution des m et N obtenue à partir de w correspond à celle supposée par St Venant (loi d'équarrissage), on doit avoir (cfr p.65)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{m}{Eg b}$$

$$\frac{dw_m}{dz} = \frac{N_m}{Eg A_m}$$

la loi d'équarrissage (l) donne :

$$\frac{m}{g b} = \frac{N}{g A} + \frac{i_{xx} M_x + i_{yy} M_y}{g} (x-x_0) + \frac{i_{xy} M_x + i_{yy} M_y}{g} (y-y_0)$$

D'autre part, l'équation (f') donne

$$E \frac{dw}{dz} = \frac{E}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{h} \right) w_x^* + \frac{E}{G} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{h} \right) w_y^* + \frac{E}{GJ} \frac{d}{dz} \left(\frac{M_K}{h} \right) w_K^* - E u'_K (x-x_0) - E v'_K (y-y_0) - E \alpha'$$

lorsqu'on identifie ces deux équations, on remarque que les termes

soulignés n'ont pas d'équivalent c. a. d. il faut qu'ils soient identiquement nuls. Donc il faut avoir

$$\begin{array}{|l} \frac{S_x}{h} = c \underline{a} \\ \frac{S_y}{h} = c \underline{a} \\ \frac{M_x}{h} = c \underline{a} \end{array}$$

Conditions d'identité de gauchissement.

(g')

Si ces conditions sont satisfaites, l'identification des autres termes de l'équation fournit le moyen de calculer u et w . On a en effet

$$\frac{d^2 u_x}{dz^2} = - \frac{i a_x M_x + i a_y M_y}{Eg}$$

$$\frac{d^2 w_x}{dz^2} = - \frac{i a_y M_x + i a_x M_y}{Eg}$$

$$\frac{d \alpha(z)}{dz} = \frac{M}{Eg A}$$

4. Corrections à la théorie de St Venant.

En pratique, on applique la théorie de St Venant même si les conditions (g') ne sont pas vérifiées. Ceci n'est pas très grave dans les pièces massives (d'où 3 dimensions pour dissiper les irrégularités) mais c'est inacceptable dans les pièces à parois minces (2 dimensions pour dissiper les surtensions). Si les termes soulignés ne sont pas nuls il faut introduire une correction par des tensions additionnelles. On peut s'arranger pour que les tensions additionnelles soient statiquement équivalentes à zéro.

A. Équivalence à zéro des tensions normales additionnelles dues aux incompatibilités de genre

on définit le produit scalaire de 2 fonctions α et β définies sur la section

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha \beta \, d\Omega + \sum_m \alpha_m \beta_m \, \vartheta_m$$

les termes correctifs de déplacements, et les tensions axiales qui en découlent sont pris proportionnels respectivement aux w_x^* , w_y^* , w_k^* ; de plus, on s'arrange pour qu'ils ne donnent aucun moment supplémentaire. On écrit

$$w_x = w_x^* = U_x (x - x_g) - V_x (y - y_g) - d_x$$

Avec la convention introduite ci-dessus pour le produit vectoriel, on peut vérifier que

$$(w_x, 1) = (w_x, x - x_g) = (w_x, y - y_g) = 0$$

lorsqu'on sépare les différents termes, on obtient, par ex. pour la première égalisation à zéro,

$$(w_x, 1) = (w_x^*, 1) - \underbrace{U_x (x - x_g, 1)}_{=0} - \underbrace{V_x (y - y_g, 1)}_{=0} - \underbrace{d_x (1, 1)}_{=A = \text{section}} = 0$$

Jéf. du centre de gravité

D'où

$$d_x = \frac{(w_x^*, 1)}{A}$$

et de la même façon

$$U_x(x-x_g, x-x_g) + V_x(y-y_g, x-x_g) = (W_x^*, x-x_g)$$

$$U_x(x-x_g, y-y_g) + V_x(x-x_g, y-y_g) = (W_x^*, y-y_g)$$

on arrive ainsi à finalement déterminer

w_x = le gauchissement de de St Venant dû à S_x

w_y = " " " " " " " à S_y

w_k = " " " " " " " à M_k

Si on utilise abusivement la théorie de St Venant et si on arrête les résultats comme indiqué ci-dessus, les valeurs de u et de v calculés à la p 80 doivent être retouchés, puisque les w^* sont remplacés par des w .
On obtient

$$\frac{d^2 w_k}{dz^2} = - \frac{i_{xx} M_x + i_{yy} M_y}{Eg} + u_x \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{Gh} \right) + v_y \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{Gh} \right)$$

$$\frac{d^2 w_x}{dz^2} = - \frac{i_{yy} M_x + i_{xx} M_y}{Eg} + v_x \frac{d}{dz} \left(\frac{S_x}{Gh} \right) + u_y \frac{d}{dz} \left(\frac{S_y}{Gh} \right)$$

B. Organisation des éléments a(1), b(1), A_m pour que $w_x = w_y = w_k = 0$

les conditions dans lesquelles le gauchissement de St Venant disparaît sont les suivantes.

a. Cas d'un caisson monocellulaire

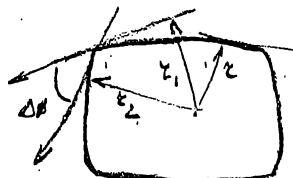
1. Il faut que $\left\{ \begin{array}{l} a \text{ le centre de } \\ c \text{ le centre de torsion} \\ k \text{ le centre de flexion-torsion} \end{array} \right.$ soient confondus.

2. Il faut que la paroi soit partout convexe (= condition sur ρ rayon de courbure)

3. Il faut que

$$a(1) = \frac{k}{2}$$
$$b(1) = \frac{k}{2}$$

$\xi_0 z^2$



aux points anguleux, la loi de lever joue véritablement de r_1 à r_2 ,
il faut une ligne concentrée de section

$$A_m = \frac{k}{\xi} \frac{\sin \Delta \phi}{r_1 r_2}$$

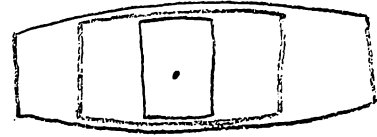
avec $k = c t_0$

$$\xi = c t_0 = \frac{A_{xx}}{I_{xx}} = \frac{A_{yy}}{I_{yy}} = \frac{A_{yy}}{I_{yy}} = \frac{\text{aire réduite}}{\text{moments et inertie}}$$

b. Cas d'un caisson multicellulaire

Ils sont considérés comme un
empilement de caissons monocellulaires.

Chaque caisson peut avoir un k particulier mais la valeur de ξ est
commune à tous les caissons.



Cours de Théorie des Structures

Troisième partie : Méthode des éléments finis

par

le Professeur Fraeyn de Veerbeke.

I Introduction

Les éléments finis existent depuis le sous-sol. La méthode a été mise au point chez :

- Boeing : méthode des raideurs (stiffness) par J. Turner et ses compagnons appliquée seulement dans le département de recherche.
- Douglas : méthode des forces (force) appliquée dans la production courante par le centre de calcul digital avec P. Denke.
- English Electric : application par Y. Taig aux chasseurs anglais, P.B.1 - P.B.2.

Au début toute l'attention s'est portée sur le langage matriciel et la programmation ; c'est ce qui a donné le nom de Matrix Structural Analysis.

Maintenant, on arrive à des modèles mathématiques d'éléments ; avec de bons modèles de dimensions assez petites la précision augmente ; c'est le finite elements methods.

Le stade suivant sera l'identification précise de la structure c.a.d. l'assemblage des modèles mathématiques ; cette décomposition en éléments finis reste à l'heure actuelle un véritable art ; les progrès possibles sont liés au problème de convergence et à la comparaison avec des essais.

Dans ce cours, tout l'accent est mis sur la seconde phase : les modèles mathématiques d'éléments. On distingue :

- les modèles déplacements qui donnent une borne inférieure des déplacements,
 - les modèles équilibre qui donnent une borne supérieure des déplacements,
- les premiers sont liés au principe de variation des déplacements ; les seconds, au principe de variation des tensions. Entre les deux existent quelques modèles hybrides.

II Théorie des bords inférieurs et supérieurs

1. Hypothèses et définitions

A. Théorie linéarisée

- On suppose que les rotations et déformations proportionnelles sont suffisamment petits pour justifier les relations tensions-déformations linéaires.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \dots \quad \gamma_{xy} = \frac{dv}{y} + \frac{dw}{dx}$$

- L'énergie de déformation W et l'énergie complémentaire Φ (qui permettent de relier les tensions et déformations proportionnelles

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \quad \dots \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_x} \quad \dots \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_{xy}} \quad)$$

(1)

sont quadratiques, homogènes et définies positives

- Les équations d'équilibre interne et à la surface sont linéaires.
- En conséquence du caractère linéaire de toutes les équations, le principe de superposition est applicable.

B. Définition des champs

On définit

- (E) un champ de déformations dans un corps élastique ; la connaissance de (E) entraîne la connaissance en tout point de $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- (σ) le champ de tensions, associé singulièrement à (E) par la relation

Le donner (E) ou (σ) revient au même ; c'est à dire que lorsqu'on parle de la solution d'un problème d'élasticité, il s'agit d'un champ (E) totalement connu et constitué de (E) et (σ) associés ; il y correspond un point dans un espace de fonctions et dans cet espace de fonctions un vecteur qui lie l'origine à ce point. L'origine est constituée par un champ identiquement nul c.à.d. l'état naturel du corps élastique $(\sigma) \equiv 0, (E) \equiv 0$.

La solution d'un problème d'élasticité doit avoir deux propriétés :

- il faut que le champ soit compatible c.a.d. qu'il existe des déplacements u, v, w tels que

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \quad (2)$$

en général et tels que

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w} \quad (3)$$

là où on impose des déplacements

- il faut que le champ soit en équilibre c.a.d. que les tensions $\sigma_x \dots \tau_{xz}$ vérifient

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} = 0, \dots \quad (4)$$

en volume, et

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \bar{F}_x \quad (5)$$

là où des forces de surface sont imposées.

Dans l'espace de fonctions, on peut distinguer deux parties complémentaires : l'espace des champs compatibles et l'espace des champs d'équilibre.

Dans les champs quelconques (F), on peut distinguer

- les champs compatibles particuliers (C) qui satisfont (2) et (3)
- les champs compatibles homogènes (H) qui satisfont (2) et

$$u = \bar{u} = 0, \quad v = \bar{v} = 0, \quad w = \bar{w} = 0$$

là où on impose des déplacements

- les champs d'équilibre particuliers (E) qui satisfont (4) et (5)
- les champs d'équilibre homogènes ou d'auto-tension (A) qui satisfont

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \bar{X} = 0$$

en volume et

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \bar{F}_x = 0$$

en surface

L'expression générale d'un champ compatible est du type (C)+(H) :
se compose d'un champ compatible particulier (C) et d'un champ comp. général (H)

de même l'expression générale d'un champ d'équilibre est $(E) + (A)$

c. Produit scalaire de deux champs

Soit deux champs (F) et (F') . On définit leur produit scalaire comme l'intégrale sur le volume des corps du produit des déformations du premier état par les tensions du second état.

$$(F, F') = \int_V (\epsilon_x \sigma'_x + \epsilon_y \sigma'_y + \epsilon_z \sigma'_z + \nu_{xy} \tau'_{xy} + \nu_{yz} \tau'_{yz} + \nu_{zx} \tau'_{zx}) dV$$

Le scalaire jouit des propriétés habituelles du produit scalaire :

- $(F, F') = (F', F)$: principe de réciprocité de Betti-Rayleigh
- $(F_1 + F_2, F') = (F_1, F') + (F_2, F')$
- $(\alpha F, \beta F') = \alpha\beta (F, F')$

Ayant défini le produit scalaire de deux champs, on peut introduire :

- la norme d'un champ, c.à.d. sa distance à l'origine.

$$\|F\| = \sqrt{(F, F)} = \sqrt{2 \times \text{énergie de déformation}} \Rightarrow 0 \quad (6)$$

- la distance entre deux champs

$$d(F, F') = \sqrt{(F, F) + (F', F') - 2(F, F')}$$

d. Produit scalaire d'un champ d'équilibre et d'un champ compatible.

On commence par des champs particuliers (C) et (E) quelconques; on passera ensuite au cas le plus général $(C)+(H)$ et $(E)+(A)$

$$(C, E) = \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sigma_{xc} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} c + \frac{\partial v}{\partial x} c \right) \tau_{xye} + \dots \right] dV$$

on intègre par parties

$$(C, E) = \int_S [u_c (l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz})_c + v_c(\dots)_c + w_c(\dots)_c] dS - \int_V [u_c \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)_c + \dots + \dots] dV$$

on utilise ensuite les propriétés que vérifient chacun des champs :

- (d) pour E dans le volume
- (e) pour E sur une surface S_σ
- (c) pour C sur une surface S_u

$$(C, E) = \int_{S_u} (\bar{u} p_{xe} + \bar{v} p_{ye} + \bar{w} p_{ze}) ds + \int_{S_\sigma} (u_c \bar{p}_x + v_c \bar{p}_y + w_c \bar{p}_z) ds + \int_V (u_c \bar{x} + v_c \bar{y} + w_c \bar{z}) dV$$

Les deux derniers termes $(u, v, w)_c \times$ (force de vol. en surf) $_c$ représentent $-P_c$ c.a.d.
- l'énergie potentielle du champ C .

Le premier terme représente $-Q_E$ c.a.d. - l'énergie potentielle complémentaire de E .

$$(C, E) = -Q_E - P_C \quad (7)$$

Si on avait pris des champs (H) et (E) , il n'y aurait pas eu de déplacements imposés sur S_u et on aurait trouvé

$$(H, E) = -P_H \quad (8)$$

Si on avait pris des champs (C) et (A) , il n'y aurait pas eu de force de volume ou de surface imposés sur V et S_σ et on aurait trouvé

$$(C, A) = -Q_A \quad (9)$$

Enfin si on avait pris des champs (H) et (A) il n'y aurait eu ni déplacements ni forces imposés et on aurait trouvé

$$(H, A) = 0 \quad (10)$$

La solution exacte (S) est, à la fois, compatible (C) et en équilibre (E) ; elle satisfait à la fois $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

2. Application des principes variationnels.

On applique les principes variationnels en explicitant la stationnarité sous forme de maximum et de minimum.

A cause de la linéarité du problème, le principe de variation des déplacements est équivalent au principe du minimum de l'énergie totale; le principe de variation des tensions est équivalent au principe du minimum de l'énergie complémentaire.

A. Application du principe du minimum de l'énergie totale.

Théorème 1: $\frac{1}{2}(C+H, C+H) - (C+H, E)$ est minimum lorsque $(C+H) = (S) = \text{sol. exact}$

Démonstration:

(C) et (H) sont des champs compatibles particuliers et homogènes

(E) est un champ d'équilibre particulier, parasite mais nécessaire à la démo

$\frac{1}{2}(C+H, C+H)$ représente l'énergie de déformation du champ $(C+H)$ [voir]

$(C+H, E) = -P_C - P_H - Q_E$ c.à.d. l'énergie potentielle de $(C+H)$ à

une constante près Q_E [voir (7)]

Soit S la solution exacte; elle ne peut différer de $(C+H)$ que par un champ compatible homogène δH

$$S = C + H + \delta H$$

L'énergie s'écrit alors

$$\frac{1}{2}(S - \delta H, S - \delta H) - (S - \delta H, E) = \text{En. pot.}(C+H) + \text{En. dif.}(C+H) + \text{cte}$$

$$\frac{1}{2}(S, S) - (S, \delta H) - (S, E) + (\delta H, E) + \frac{1}{2}(\delta H, \delta H) = \text{cte}$$

Or $\frac{1}{2}(S, S) = \text{en. déformation de } S = \text{cte}$

$$(\delta H, S) = -P_H \text{ d'après (8)}$$

$$(\delta H, E) = -P_H \quad " \quad "$$

$$\frac{1}{2}(\delta H, \delta H) = \text{en. déformation } \delta H$$

Le membre de gauche est minimum lorsque $(\delta H) = 0$, $(C+H) = (S)$ c.q.f.d.

En particulier si $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sont nuls on peut prendre $c \equiv 0$ et le théorème se ramène à

$$\boxed{\frac{1}{2}(H, H) - (H, E) \geq \frac{1}{2}(S, S) - (S, E)} \quad (11)$$

si H est une solution approchée du problème.

B. Application du principe du minimum de l'énergie complémentaire

On suppose que $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$; la solution (S) est donc un champ compat. homog.

Théorème 2: $\frac{1}{2}(E+A, E+A)$ est minimum lorsque $(E+A) = (S)$ = solution exacte

Démonstration:

(E) et (A) sont des champs d'équilibre particuliers et d'autotension.

$\frac{1}{2}(E+A, E+A)$ représente l'énergie de déformation du champ d'équilibre général.

Soit (S) la solution exacte; elle ne peut différer de $(E+A)$ que par un champ d'équilibre d'autotension (δA)

$$S = E + A + \delta A$$

L'énoncé s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E+A, E+A) &= \frac{1}{2}(S - \delta A, S - \delta A) \\ &= \frac{1}{2}(S, S) - (S, \delta A) + \frac{1}{2}(\delta A, \delta A) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2}(S, S) = \text{én. déformation de } S = \text{cte}$

$(S, \delta A) = 0$ d'après (10) [opt. hypothèse de départ]

$\frac{1}{2}(\delta A, \delta A) = \text{énergie déf. de } \delta A \text{ toujours positive.}$

Le membre de gauche est minimum lorsque $(\delta A) = 0$, $(E+A) = (S)$ c.q.f.d.

ce qui peut encore s'écrire

$$\boxed{\frac{1}{2}(E+A, E+A) \geq \frac{1}{2}(S, S)} \quad (12)$$

C. Application du théorème de Clapeyron extérieur

On suppose toujours que $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$; la solution (S) est toujours compat. homogène

Démonstration :

la formule peut s'écrire

$$(S, S - E) = 0$$

or cela est évident d'après (10) puisque (S) est compatible et homogène tandis que $(S - E)$ est un champ d'équilibre en auto-tension.

Puis on applique (8) et on arrive à la thèse.

On peut aussi raisonner en partant de (8)

$$(S, E) = -P_S = \int_{S_0} (\bar{f}_x u_s + \dots) dS + \int_V (\bar{x} u_s + \dots) dV$$

où $\bar{x}, \bar{f}_x, \dots$ sont des forces de volume ou de surface imposées.

u_s, \dots sont les déplacements exacts

D'après le théorème de Clapeyron, ces deux intégrales représentent le double du travail de déformation c.a.d

$$2 \times \frac{1}{2} (S, S) = (S, S) \quad \text{c.q.f.d.}$$

5. Extension du théorème de Clapeyron aux solutions approchées

On suppose toujours que $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$

Théorème 4 : Pour une solution approchée, on a toujours $(H, H) = (H, E)$

Démonstration :

Si (H) est une solution approchée, en cherchant le minimum de $\frac{1}{2} (H, H) - (H, E)$, on n'arrive normalement pas à $-\frac{1}{2} (S, S)$ [Voir (11) et théor. mais à

$$\frac{1}{2} (H, H) - (H, E) > -\frac{1}{2} (S, S)$$

On appelle (H^*) le champ qui rend minimum le membre de gauche.

On introduit une variation

$$(\delta H) = \varepsilon (H^*)$$

On peut introduire une telle solution si tous les déplacements sont multipliés⁹ par un scalaire sans incompatibilité avec les conditions aux limites puisque celles-ci sont nulles sur la frontière.

Si (H^*) rend minimum le membre de gauche toute variation première de ce membre de gauche doit être nulle c. a. d.

$$\delta \left[\frac{1}{2} (H^*, H^*) - (H^*, E) \right] = 0$$

$$(H^*, \delta H) - (E, \delta H) = 0$$

ou, en remplaçant δH par sa valeur,

$$E(H^*, H^*) - E(H^*, E) = 0$$

$$(H^*, H^*) - (E, H^*) = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

E. Seconde application du minimum de l'énergie complémentaire

On suppose toujours que $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$; la solution (S) est un ch. comp. et l'on

Théorème 2 bis : $\frac{1}{2} (A, A) - (C, A)$ est minimum lorsque $(A) = (S) =$ solution exacte

de la traction :

(C) est un champ compatible particulier ou homogène puisque $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$

(A) est un champ d'équilibre en autotension.

Soit (S) la solution exacte qui diffère de (A) de (δA)

$$S = A + \delta A$$

$$\frac{1}{2} (A, A) - (C, A) = \frac{1}{2} (S - \delta A, S - \delta A) - (C, S - \delta A)$$

$$= \frac{1}{2} (S, S) - (S, \delta A) + \frac{1}{2} (\delta A, \delta A) - (C, S) + (C, \delta A)$$

Or $(S - C, \delta A) = 0$ d'après (10) (voir hypothèse de départ)

Le membre de gauche est minimum lorsque $(\delta A) = 0$ et $(A) = (S)$ c. q. f. d.

ce qui peut encore s'écrire

$$\boxed{\frac{1}{2} (A, A) - (C, A) \geq \frac{1}{2} (S, S) - (C, S)}$$

(13)

F. Extension aux solutions approchées,

9

on suppose toujours que $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$

Théorème 4 bis : Pour une solution approchée, on a toujours $(A^*, A^*) = (C, A^*)$

Démonstration :

Si (A^*) est une solution approchée qui rend minimum le membre de gauche de (13), toute variation première de ce membre de gauche doit être nulle. En introduisant (de façon semblable à ce qui a été fait au théorème

$$\delta A \cdot \delta A^*$$

on a

$$(A^*, \delta A^*) - (C, \delta A^*) = 0$$

$$\varepsilon [(A^*, A^*) - (C, A^*)] = 0$$

$$(A^*, A^*) = (C, A^*) \quad \text{c.q.f.d.}$$

3. Bornes supérieures et inférieures

A. Bornes de l'énergie de déformation

lorsqu'on introduit les théorèmes 3 et 4 dans (11), on obtient

$$-\frac{1}{2} (H^*, H^*) \geq -\frac{1}{2} (S, S)$$

En combinant cette relation avec (12), on a

$$\boxed{\frac{1}{2} (H^*, H^*) \leq \frac{1}{2} (S, S) \leq \frac{1}{2} (E + A^*, E + A^*)} \quad (14)$$

L'énergie de déformation correspondant à la solution exacte est comprise entre l'énergie de déformation des solutions compatibles homogènes et des solutions d'équilibre.

B. Bornes de l'énergie potentielle

On peut transformer l'inégalité de gauche de façon à faire apparaître les énergies potentielles. Si on repart de l'inégalité (11)

$$\frac{1}{2} (H^*, H^*) - (H^*, E) \geq \frac{1}{2} (S, S) - (S, E)$$

et si on la transforme de nouveau par les théorèmes 3 et 4 de façon à faire apparaître seulement (H^*, E) et (S, E) , on a

$$-\frac{1}{2} (H^*, E) \geq -\frac{1}{2} (S, E)$$

et, d'après (8)

$$\boxed{\frac{1}{2} P_{H^*} \geq \frac{1}{2} P_S} \quad (15)$$

L'énergie potentielle de la solution exacte est une borne inférieure de l'énergie potentielle de la solution homogène approchée.

On peut également transformer l'inégalité de droite de façon à faire apparaître les énergies potentielles complémentaires. Si, au lieu de (12), on repart de la seconde application du principe des minimums de l'énergie complémentaire, c.à.d. (13), on a

$$\frac{1}{2} (A^*, A^*) - (C, A^*) \geq \frac{1}{2} (S, S) - (C, S)$$

Et, par le théorème 4 bis,

$$(A^*, A^*) = (C, A^*) \text{ et, à fortiori } (S, S) = (C, S)$$

$$-\frac{1}{2} (C, A^*) \geq -\frac{1}{2} (C, S)$$

et, d'après (9)

$$\boxed{\frac{1}{2} Q_A \geq \frac{1}{2} Q_S}$$

(16)

L'énergie potentielle complémentaire de la solution exacte est une borne inférieure de l'énergie potentielle complémentaire de la solution d'équilibre approchée.

c. Borne des coefficients d'influence.

On appelle ici coefficient d'influence le rapport d'un déplacement p à la charge R qui lui correspond.

Pour faciliter l'étude, on se borne au cas où il y a une seule charge imposée \bar{R} ou un seul déplacement imposé \bar{p} .

Lorsqu'on part de l'énergie potentielle, on suppose qu'il y a une charge imposée \bar{R} , à laquelle correspond un déplacement p_H dans la solution s^* et p_S dans la solution exacte.

On a

$$p_{H^*} = -\bar{R} p_H$$

$$p_S = -\bar{R} p_S$$

$$(15) \longrightarrow -\bar{R} p_H \geq -\bar{R} p_S$$

$$\boxed{\frac{p_H}{\bar{R}} \leq \frac{p_S}{\bar{R}}}$$

(17)

En travaillant sur des champs compatibles homogènes (par variation des déplacements), on a rendu le corps plus raide qu'il n'est réellement; on trouve des déplacements inférieurs à la réalité.

lorsqu'on part de l'inverse potentielle complémentaire, on suppose qu'il y a un déplacement imposé \bar{p} sous une charge qui vaut R_A dans la solution exacte
 R_S dans la solution exacte

On a

$$R_A^* = -\bar{p} R_A$$

$$R_S = -\bar{p} R_S$$

$$(16) \rightarrow -\bar{p} R_A \geq -\bar{p} R_S$$

$$\boxed{\frac{\bar{p}}{R_S} \leq \frac{\bar{p}}{R_A}}$$

(15)

en travaillant, vers des champs d'équilibre en auto-tension (par variation des tensions), on trouve des forces inférieures à la réalité.

les coefficients d'influence par éléments déplacement et par éléments équilibrés donnent le coefficient d'influence exact.

1. Introduction

Un problème est résolu lorsqu'on connaît les champs (ϵ) et (σ) à l'intérieur du corps.

Dans l'approche déplacements, on se donne des u, v, w approchés, on applique le principe de variation des déplacements de façon à satisfaire aux équations de la meilleure façon possible et à obtenir une borne inférieure aux coefficients d'influence directs.

Soit une division en éléments finis

- dans chaque élément, on prend un champ (u, v, w) différentiable une fois seulement

- aux frontières, on doit avoir continuité dans les déplacements



Les éléments ainsi obtenus sont appelés conforming elements. on peut prouver que les conditions qui leur sont imposées sont nécessaires et suffisantes pour qu'on ait convergence c.a.d. pour qu'on tende vers la solution exacte.

2. Théorie des modèles déplacements (conforming éléments) à 2 dimensions.

73

On a donc

$$\begin{cases} u = \sum_i \alpha_i U_i(x, y) \\ v = \sum_i \alpha_i V_i(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

- u et v doivent comporter les modes rigides de déplacement,
- U_i et V_i sont des fonctions, et on donne le plus habituellement possible (le plus souvent on se contente de polynômes)
- on appelle

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

les coefficients inconnus qui doivent finalement conduire à la connaissance de

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

on peut alors calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x = \sum_i \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = \sum_i \alpha_i \frac{\partial V_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \gamma_{xy} = \sum_i \alpha_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

on introduit une matrice $(3 \times m)$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial U_m}{\partial x} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial V_m}{\partial y} \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial U_m}{\partial y} + \frac{\partial V_m}{\partial x} \end{pmatrix}$$

qui permet d'écrire

$$\varepsilon = B \alpha \quad (2)$$

quel que soit l'élément, on a aussi une relation

$$\sigma = D \varepsilon \quad (3)$$

où D est une matrice (3×3) linéarisant les conditions σ, ε et d'après la matricielle, en particulier, pour un milieu isotrope,

$$\left. \begin{aligned} t E \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \sigma_y \\ t E \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \sigma_x \\ t G \gamma_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \rightarrow \varepsilon = D^{-1} \sigma \quad \text{avec} \quad D^{-1} = \frac{1}{E t} \begin{pmatrix} +1 & -\nu & 0 \\ -\nu & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{t E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Si on veut calculer l'énergie, on commence par calculer l'énergie par unité de surface

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon = \frac{1}{2} \alpha^T \underbrace{(B^T D B)}_{\text{mem}} \alpha$$

En intégrant sur la surface

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \alpha^T A \alpha} \quad \text{avec} \quad A = \iint (B^T D B) \, dxdy \quad (4)$$

Jusqu'à présent, on a assuré la compatibilité à l'intérieur des éléments. Il faut encore assurer la continuité aux frontières entre éléments; or chaque élément a plusieurs frontières, est en contact avec plusieurs éléments.

Pour cela, dans un élément, on exprime le champ (u, v) en fonction d'un nombre fini de paramètres; de l'autre côté de la frontière, dans un autre élément, on prend le même type de représentation. On a continuité des déplacements à la frontière si on identifie les paramètres dans les éléments de part et d'autre de la frontière.

Comme paramètres, on prend généralement des valeurs locales des déplacements; soit q_j les paramètres ainsi définis.

- si le nombre de paramètres q_j est plus grand que le nombre de paramètres α , on est dans un cas impossible.

- si le nombre de paramètres q_j est inférieur au nombre de paramètres α , il faut définir des q_j supplémentaires de façon à arriver à l'égalité.

- si le nombre de paramètres q_j est égal au nombre de paramètres d , la situation est idéale ; il faut que'il existe une matrice non singulière T de dimensions $(n \times n)$ telle que

$$\boxed{d = Tq} \quad (5)$$

L'expression (4) de l'énergie s'écrit alors

$$\boxed{U = \frac{1}{2} q^T K q} \quad \text{avec} \quad K = T^T A T = \iint (T^T B^T D B T) dx dy \quad (6)$$

$K = \text{matrice raideur (Stiffness)}$

Pour appliquer le principe du minimum de l'énergie totale, il faudrait encore exprimer l'énergie potentielle des charges imposées.

on peut avoir un système de forces de surface à l'intérieur \bar{x}, \bar{y} , et sur les bords \bar{f}_x, \bar{f}_y . on a alors

$$P = - \iint_{\text{int}} (\bar{x} u + \bar{y} v) dx dy - \int_{\text{front}} (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v) ds$$

Après remplacement des u, v par des d ; puis des q_j on peut ramener l'énergie potentielle à une expression de la forme

$$P = - \sum q_j Q_j$$

où $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ est le vecteur des forces généralisées Q_j correspondant aux déplacements q_j choisis comme coordonnées généralisées. Comme l'énergie potentielle est un scalaire, on a indifféremment

$$P = - q^T Q = - Q^T q$$

En appliquant le théorème de Cauchy extérieur

$$U = \frac{1}{2} q^T Q \quad (7)$$

et l'identification de (6) et (7) qui doit être réalisée pour tout vecteur q donne

$$\boxed{Q = K q} \quad (8)$$

C'est l'équation aux raideurs fondamentales qui relie forces et coordonnées généralisées

3. Premier modèle déplacements : triangle de Turner

Les déplacements u et v sont polynômes linéaires, en x et y

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

Les déplacements contiennent les modes rigides ; en effet

- si $\alpha_1 \neq 0$, tous les autres $\alpha = 0$: translation selon x
- si $\alpha_4 \neq 0$ " " " $\alpha = 0$: translation selon y
- si $\alpha_5 = -\alpha_3 = \omega$, " " " $\alpha = 0$: petite rotation $u = -\omega y$, $v = \omega x$

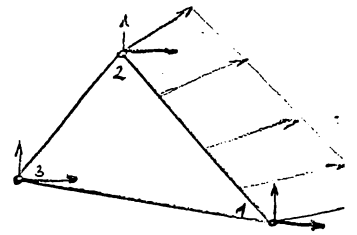
On en déduit

$$\epsilon_x = \alpha_2$$

$$\epsilon_y = \alpha_6$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5$$

Si on prend une frontière rectiligne, la variation de u et v sera linéaire ; donc le diagramme des déplacements le long de la frontière sera automatiquement connu si on donne la valeur des déplacements aux extrémités.



Tout logiquement, on arrive ainsi à faire correspondre un élément à 3 frontières rectilignes et 3 sommets, le triangle, au champ de déplacements. Et on prend comme paramètres q_j correspondant aux α_j : $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3$; il faut encore préciser l'ordre des q_j .

$$q = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

On peut alors construire la matrice T ($\alpha = Tq$), en résolvant deux systèmes de 3 équations à trois inconnues (les α) en fonction des q_j .

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \\ v_1 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 y_1 \\ v_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_2 + \alpha_6 y_2 \\ v_3 = \alpha_4 + \alpha_5 x_3 + \alpha_6 y_3 \end{cases}$$

Dans ce cas particulier, on peut faire ce qu'on n'a pas fait en théorie, écrire u et v sous forme polynomiale en fonction des coordonnées généralisées et de fonctions de poids

$$u = u_1 w_1(x, y) + u_2 w_2(x, y) + u_3 w_3(x, y)$$

$$v = v_1 w_4(x, y) + v_2 w_5(x, y) + v_3 w_6(x, y)$$

En posant $x_{ij} = x_i - x_j$, on trouve par exemple

$$x_{12} = x_1 - x_2$$

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$w_2(x, y) = \dots$$

(1, 2, 3)

$$w_3(x, y) = \dots$$

où $2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Δ peut être interprétée comme l'aire du triangle, comptée positivement si les sommets 1, 2, 3 sont numérotés dans le sens trigonométrique.

Le nom de fonction de poids s'explique quant on retourne à l'expression de l'énergie potentielle

$$P = \sum_i q_i q_i$$

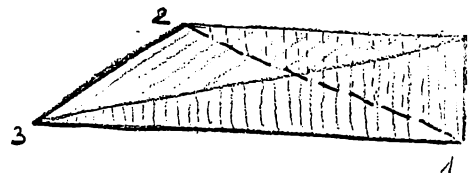
où q_i est un déplacement u_i ou v_i et est pondéré par les w_i .

$$P = - (u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 + v_1 g_1 + v_2 g_2 + v_3 g_3)$$

avec $h_i = \iint_{\text{surf}} \bar{x} w_i dx dy + \int_{\text{point}} \bar{p} w_i ds$

c. a. d. que toutes les forces sont multipliées par les valeurs locales de la fonction poids pour donner une force généralisée.

Lorsqu'on développe le calcul, on peut voir que la fonction poids w_1 par exemple a une distribution en pyramide triangulaire partant de l'ordonnée 1 au droit du sommet 1.



4. Second modèle déplacements: élément uniaxial (poutre)

Dans l'exemple précédent, on a utilisé un système cartésien d'axes. Parfois, il est plus intéressant d'utiliser un système de coordonnées propre à l'élément. Après étude de l'élément, il faut toutefois effectuer une transformation de coordonnées pour replacer l'élément dans un système général d'axes commun à toute la structure. C'est, par exemple, le cas d'une poutre oblique insérée dans un assemblage d'éléments triangulaires.

On prend un déplacement u linéaire en x

$$u = a_1 + a_2 x$$

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = a_2$$

$$N = EE S(\alpha)$$

Comme coordonnées généralisées,

les déplacements u_1 et u_2 des deux extrémités s'imposent

$$u_1 = a_1$$

$$u_2 = a_1 + a_2 c$$

Le calcul des fonctions de poids est immédiat

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{c} x$$

$$u = u_1 w_1(x) + u_2 w_2(x) \quad \text{avec} \quad w_1 = 1 - \frac{x}{c}$$

$$w_2 = \frac{x}{c}$$

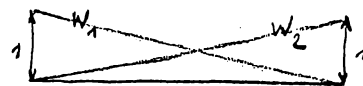
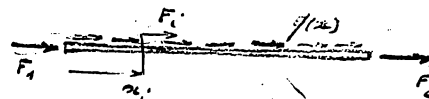
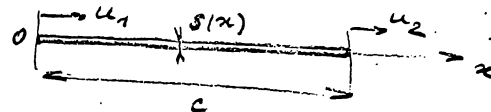
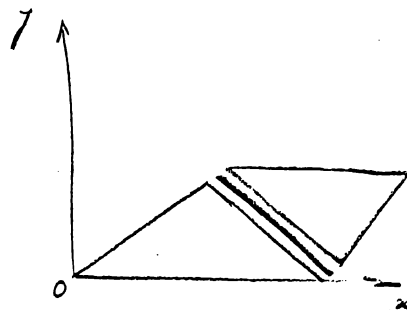
Dans l'hypothèse où des forces réparties agissent sur l'élément on a

$$-P = + F_1 u_1 + F_2 u_2 + F_i [u_1 w_1(x_i) + u_2 w_2(x_i)] + \int_0^c q(x) [u_1 w_1(x) + u_2 w_2(x)] dx =$$

$$= -u_1 h_1 - u_2 h_2$$

$$\text{avec} \quad h_1 = F_1 + F_i w_1(x_i) + \int_0^c q(x) w_1(x) dx$$

$$h_2 = F_2 + F_i w_2(x_i) + \int_0^c q(x) w_2(x) dx$$



$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^c \varepsilon N dx \\
 &= \frac{E}{2} \int_0^c \left(u_1 \frac{dw_1}{dx} + u_2 \frac{dw_2}{dx} \right)^2 S dx \\
 &= \frac{1}{2} (u_1^2 k_{11} + 2u_1 u_2 k_{12} + u_2^2 k_{22}) \\
 &= \frac{1}{2} q^T K q \\
 &= \frac{1}{2} (u_1 \ u_2) K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

avec $k_{11} = E \int_0^c \left(\frac{dw_1}{dx} \right)^2 S dx = \frac{E}{c^2} \int_0^c S dx$

$$k_{12} = E \int_0^c \frac{dw_1}{dx} \frac{dw_2}{dx} S dx = -\frac{E}{c^2} \int_0^c S dx$$

$$k_{22} = E \int_0^c \left(\frac{dw_2}{dx} \right)^2 S dx = \frac{E}{c^2} \int_0^c S dx$$

$$K = \frac{E \int_0^c S dx}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ajoutant un astérisque pour indiquer qu'il s'agit d'un système local, on :

$$q^* = K^* q^*$$

Si on veut obtenir la matrice raideur en coordonnées générales, il faut commencer par exprimer u_1^* et u_2^* dans le système général

$$u_1^* = u_1 \frac{x_2 - x_1}{c} + v_1 \frac{y_2 - y_1}{c}$$

$$u_2^* = u_2 \frac{x_2 - x_1}{c} + v_2 \frac{y_2 - y_1}{c}$$

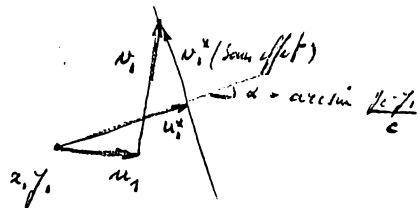
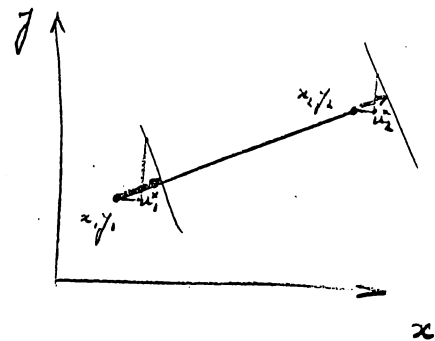
Donc

$$q^* = R q$$

avec $q^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{c} & \frac{y_2 - y_1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2 - x_1}{c} & \frac{y_2 - y_1}{c} \end{pmatrix}$ $q = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$q^* = K^* R q$$

or l'identité des travaux virtuels dans le système local et le système général donne



$$q^T q^* = q^T q \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow q^T R^T q^* = q^T q \rightarrow \boxed{q = R^T q^*} \\ q^* = R q \rightarrow q^{*T} = q^T R^T \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} q = R^T q^* \\ q^* = K^* R q \end{array} \right\} \rightarrow q = R^T K^* R q = K q \rightarrow \boxed{K = R^T K^* R}$$

on peut vérifier que la matrice K est bien singulière et contient les 3 modes rigides (rotation, translation selon l'axe et perpendiculaire à l'axe) puisque les modes rigides de déplacements n'induisent pas de forces, le vecteur q_r qui les représente est tel que

$$K q_r = 0$$

i.e. d. q_r est solution de

$$R^T K^* R q_r = 0$$

- un premier groupe de solutions est celui qui annule

$$R q_r = 0$$

- un second est celui qui annule

$$K^* R q_r = 0$$

Premier groupe

$$R q_r = 0 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{x_2 - x_1}{c} & \frac{z_2 - z_1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_2 - x_1}{c} & \frac{z_2 - z_1}{c} \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Soit deux équations à 4 inconnues

$$\frac{x_2 - x_1}{c} u_1 + \frac{z_2 - z_1}{c} v_1 = 0$$

$$\frac{x_2 - x_1}{c} u_2 + \frac{z_2 - z_1}{c} v_2 = 0$$

Comme un seul sous-déterminant de la matrice R est différent de zéro, deux seulement des inconnues peuvent être différents de zéro

- 1^{er} cas $\left. \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ v_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = -\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \\ u_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{: rotation autour de } z$

- 2^{em} cas $\left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_2 = x_2 - x_1 \\ u_2 = -(z_2 - z_1) \end{array} \right. \quad \text{: rotation autour de } x$

- pas d'autres cas possible.

$$K^* R q_2 = 0$$

Si on pose $R q_2 = \gamma$, on constate qu'on retrouve bien la condition qui a conduit au seul mode singulier possible dans le axe locaux : la translation selon l'axe (voir p 105)

$$K^* \gamma = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$R q_2 = \gamma \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{c} & \frac{y_2 - y_1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_1 - x_2}{c} & \frac{y_2 - y_1}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où un nouveau système,

$$\frac{x_2 - x_1}{c} u_1 + \frac{y_2 - y_1}{c} v_1 = 1$$

$$\frac{x_1 - x_2}{c} u_2 + \frac{y_2 - y_1}{c} v_2 = 1$$

1^{er} cas $\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{c}{y_2 - y_1} \\ u_2 = -\frac{c}{x_2 - x_1} \end{cases}$: rotation autour de (x_2, y_1)

d'autres cas sont possibles ; on peut se contenter de vérifier que la translation

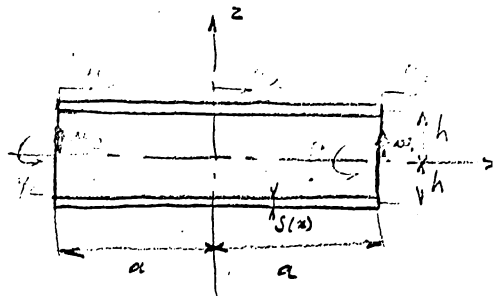
selon l'axe $\begin{cases} u_1 = \frac{x_2 - x_1}{c} \\ v_1 = \frac{y_2 - y_1}{c} \end{cases} \begin{cases} u_2 = \frac{x_2 - x_1}{c} \\ v_2 = \frac{y_2 - y_1}{c} \end{cases}$

satisfait bien le système en question.

5. Troisième modèle déplacement : longeron.

A. Choix des paramètres et des coordonnées généralisées.

Soit un élément de longeron, rectangulaire, à semelles parallèles, parfaitement symétrique par rapport aux axes x et y .



Dans le choix des champs de déplacement on est guidé par ce qu'on connaît déjà grâce à la théorie de la flexion des poutres :

- conservation des sections planes
- rotation des sections autour de l'axe neutre
- inextensibilité des fibres transversales

$$\rightarrow u(x, z) = z \omega(x)$$

$$\rightarrow w(x, z) = w(x)$$



Il faut expliciter $\omega(x)$ et $w(x)$ en polynômes. Comme on a en vue les constructions aéronautiques, on exige que l'élément représente au mieux le cas d'un longeron encasturé soumis à une charge en bout. Or on sait que, dans ce cas

- T est constant selon x
- M est linéaire en x
- la rotation $\omega = f(x^2)$
- le déplacement $w = f(x^3)$

On est donc amené à choisir comme champs de déplacement

$$\omega(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

$$w(x) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 x^2 + \alpha_7 x^3 \quad (1)$$

soit des champs à 7 paramètres.

Il faut alors choisir les déplacements qui seront pris comme paramètres q_j , coordonnées généralisées.

Au niveau de la semelle on a

$$u(x, h) = h(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)$$

Comme une parabole est définie par 3 points, on prend comme coordonnées générales les 3 déplacements u , au début, au milieu et à la fin de la semelle supérieure on sait qu'à la semelle inférieure, les déplacements sont égaux et opposés.

On a donc, entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et les 3 coordonnées généralisées u_1, u_2 et u_3 , les trois relations

$$\begin{aligned} u_1 &= h(\alpha_1 + \alpha_2 a + \alpha_3 a^2) \\ u_2 &= h\alpha_1 \\ u_3 &= h(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 a^2) \end{aligned} \tag{2}$$

Les coordonnées u_1 et u_3 permettent d'assurer la continuité du déplacement horizontal entre les nœuds de deux éléments successifs de longueur. Pour assurer la continuité du déplacement vertical, deux coordonnées généralisées supplémentaires w_1 et w_3 s'imposent

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_4 + \alpha_5 a + \alpha_6 a^2 + \alpha_7 a^3 \\ w_3 &= \alpha_4 - \alpha_5 a + \alpha_6 a^2 - \alpha_7 a^3 \end{aligned} \tag{3}$$

On a donc 5 coordonnées généralisées pour 7 paramètres. Il faut introduire deux coordonnées généralisées supplémentaires. On choisit les points φ_1 et φ_3 aux raccords.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \left(\frac{dw}{dx}\right)_1 = \alpha_5 + 2\alpha_6 a + 3\alpha_7 a^2 \\ \varphi_3 &= \left(\frac{dw}{dx}\right)_3 = \alpha_5 - 2\alpha_6 a + 3\alpha_7 a^2 \end{aligned} \tag{4}$$

En résolvant (2) (3) et (4), on peut trouver les α en fonction des coordonnées généralisées; lorsqu'on les introduit dans les champs de déplacement on obtient, en posant $\frac{z}{a} = \xi$

$$\begin{aligned} hw(x) &= u_2 + \frac{u_1 - u_3}{2} \xi + \frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{2} \xi^2 \\ 4w(x) &= 2(w_1 + w_3) - a(\varphi_1 - \varphi_3) + [3(w_1 - w_3) - a(\varphi_1 + \varphi_3)]\xi + a(\varphi_1 - \varphi_3)\xi^2 + [w_3 - w_1 + a(\varphi_1 + \varphi_3)]\xi^3 \end{aligned} \tag{5}$$

B. Calcul de l'énergie

Si on suppose l'anneau isotrope, l'énergie par unité de surface γ vaut

$$W = \frac{1}{2} (E_x \sigma_x + E_z \sigma_z + \nu \sigma_x \sigma_z)$$

$$\text{avec } E E_z = 0 = \sigma_z - \nu \sigma_x \rightarrow \sigma_z = +\nu \sigma_x$$

$$E E_x = \sigma_x - \nu \sigma_z \rightarrow \frac{E}{1-\nu^2} \sigma_x = \sigma_x$$

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \epsilon_x^2 + G \gamma_{xz}^2 \right) \ell(x, z)$$

avec $\epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{dw}{dx}$

$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \omega + \frac{dw}{dx}$

L'énergie totale, pour l'axe et les semelles, vaut

$$U = \int_{-h}^{+h} dz \int_{-a}^{+a} \left[\frac{E}{2(1-\nu^2)} z^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{G}{2} \left(\omega + \frac{dw}{dx} \right)^2 \right] t dx + 2 \frac{E}{2} \int_{-a}^{+a} S(x) h^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx$$

Si l'épaisseur t et la section S sont constantes, on trouve après intégration

$U = \frac{1}{2} q^T K q$ (6)

avec $q = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

$$K = \begin{pmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{u\varphi} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{w\varphi} \\ K_{u\varphi}^T & K_{w\varphi}^T & K_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

$$K_{uu} = \frac{EI}{6ah^2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \frac{6ta}{15h} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 4 & 32 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$I = 2Sh^2 + \frac{2}{3} \frac{th^3}{1-\nu^2}$$

$$K_{uw} = \frac{Gt}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K_{u\varphi} = \frac{Gta}{15} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$K_{ww} = \frac{6Gth}{5a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{w\varphi} = \frac{6Gth}{5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{\varphi\varphi} = \frac{2Gtah}{15} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

c. calcul des forces généralisées

Aux coordonnées généralisées q correspondent des forces généralisées

$$q = \begin{pmatrix} 2U_1 \\ 2U_2 \\ 2U_3 \\ W_1 \\ W_3 \\ \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = K q \quad (*)$$

On calcule ces forces généralisées par le théorème du travail virtuel.

En coordonnées généralisées, le travail vaut

$$\delta = 2U_1 u_1 + 2U_2 u_2 + 2U_3 u_3 + w_1 w_1 + w_3 w_3 + \phi_1 \phi_1 + \phi_3 \phi_3$$

en fonction des charges extérieures appliquées

- efforts tranchants constants aux extrémités T_1, T_3

(pas de charge concentrée sur l'élément en construction, aéronautique)

- moments aux extrémités M_1 et M_3

- distribution $p(x)$ normale à l'axe

(le niveau et l'application n'a pas d'importance à cause de l'indextensibilité transversale)

- flux de cisaillement $q(x)$ correspondant à l'amarrage du revêtement.

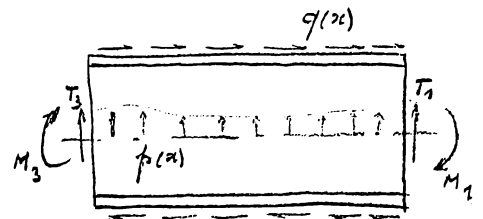
Le travail vaut

$$\delta = T_1 w_1 + T_3 w_3 + M_1 \frac{u_1}{h} + M_3 \frac{u_3}{h} + 2 \int_{-a}^{+a} q(x) h w(x) dx + \int_{-a}^{+a} p(x) w(x) dx$$

En identifiant les 2 expressions du travail, on trouve, par exemple pour U_1

$$2U_1 = \frac{T_1}{h} + 2 \int_{-a}^{+a} q(x) \left(\frac{1}{2} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{a^3} \right) dx$$

et de même pour les autres forces généralisées



D. Elimination de ϕ_1 et ϕ_3

On peut se servir de (*) pour éliminer ϕ_1 et ϕ_3 . Les deux dernières lignes de cette équation matricielle donnent

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = K_{u\phi}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + K_{w\phi}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} + K_{\phi\phi} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant de $K_{\varphi\varphi}$ est différent de zéro (il vaut $2Gta$), on peut résoudre le système par rapport à φ_1 et φ_3

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = K_{\varphi\varphi}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \end{pmatrix} - K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi u}^T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi w}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Si on substitue dans les équations précédentes, il reste finalement 5 coordonnées généralisées et 5 forces généralisées

$$\begin{pmatrix} 2H_1 \\ 2H_2 \\ 2H_3 \\ V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{HH} & K_{HV} \\ K_{HV}^T & K_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (7')$$

$$\text{avec } K_{HH} = \frac{EI}{6\alpha h^2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} + \frac{6Gta}{9h} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{HV} = \frac{Gt}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K_{VV} = \frac{Gta}{a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Après des calculs algébriques simplés, on arrive à l'expression des forces généralisées

$$H_1 = \frac{H_1}{2h} + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} q(x) \frac{x}{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx + \frac{a}{24h} \int_{-a}^{+a} \left(3 + 2\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) p(x) dx$$

$$H_3 = \frac{H_3}{2h} + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} q(x) \frac{x}{a} \left(\frac{x}{a} - 1\right) dx - \frac{a}{24h} \int_{-a}^{+a} \left(3 - 2\frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) p(x) dx$$

$$H_2 = \int_{-a}^{+a} q(x) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx - \frac{a}{6h} \int_{-a}^{+a} \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) p(x) dx$$

$$V_1 = T_1 + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} p(x) \left(1 + \frac{x}{a}\right) dx$$

$$V_2 = T_2 + \frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} p(x) \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx$$

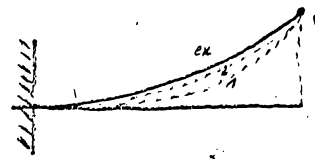
5 Vérification du comportement

Pour étudier le comportement, on a pris une poutre soumise à une charge uniforme et à un effort tranchant concentré en bout.



on s'est aperçu que l'allure de la flèche

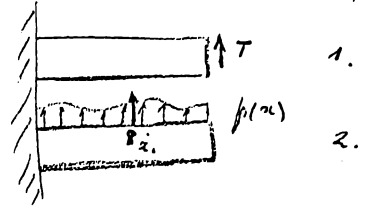
est améliorée lorsqu'on prend un plus grand nombre d'éléments mais la flèche au bout est correcte quelle que soient les charges et le nombre d'éléments.



Ceci découle du principe de réciprocité de Betti.

Soit deux états de charge et de déformation.

- le premier état de charge est constitué de la force T ; l'élément a été conçu pour que les déplacements soient partout corrects.
- le second état est celui de force transversale, $p(x)$



D'après Betti :

charges état 2 x déplacements état 1 = charges état 1 x déplacements état 2

$$P_a \underbrace{w_a^{(1)}}_{\text{correct}} + \int p(x) \underbrace{w_x^{(1)}}_{\text{correct}} dx = T \underbrace{w_a^{(2)}}_{\text{nécessairement correct aussi.}}$$

5. Remarque : cas particulier où on néglige la déformation de T.

Cela revient à faire tendre a vers l'infini. Alors

$$v = 0 = w + \frac{dw}{dx} \quad (12)$$

cette hypothèse supplémentaire revient à coupler la pente de la fibre neutre et la rotation de la section : toutes les fibres transversales restent perpendiculaires à la fibre neutre. En introduisant les valeurs (5) dans cette condition et en annulant les coefficients de ξ^2, ξ

$$u_1 = -h\varphi_1$$

$$u_3 = -h\varphi_3$$

$$u_2 = \frac{3h}{4a}(w_3 - w_1) + \frac{h}{4}(\varphi_1 + \varphi_3)$$

L'élimination de φ_1 et φ_3 donne la forme finale de la condition (8)

$$\frac{a}{3h}(u_1 + 4u_2 + u_3) + w_1 - w_3 = 0 \quad (9)$$

Comme la matrice en a ne saurait subsister, l'équation (9) se ramène à un système de 3 déplacements et 3 forces généralisés qui définissent complètement l'élément

$$\begin{pmatrix} 2H_1 \\ 2H_2 \\ 2H_3 \end{pmatrix} = K_{ff} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

11.
(10)

avec K_{ff} = partie non singulière de K_{HH}

$$= \frac{EI}{6ah^2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de K_{ff} est nul ; en effet, on peut avoir à droite un mouvement d'ensemble auquel ne correspond aucune force généralisée

$$K_{ff} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Avec ce système de coordonnées, on ne connaît pas les déplacements w .
Il faut procéder par intégration..

En général, on connaît les déplacements au moins en un point ; soit, pour exemple, u_3 et w_3 à gauche du premier élément, à l'encastrement. Les forces généralisées étant calculées, on peut déduire u_1 et u_2 de (10) ; puis on calcule w , grâce à la condition (9).

Les déplacements sont ainsi connus à droite du premier élément et on peut avancer de proche en proche.

1. Théorie des modèles à 2 dimensions.

1. Description de l'état de tension.

L'état de tension est décrit de façon paramétrique. La description a pour objet de satisfaire exactement les conditions d'équilibre. Ceci entraîne inévitablement l'inconvénient que les charges qu'on va admettre sur l'élément doivent être connues au départ et que des charges tout à fait arbitraires nécessiteraient un nombre infini de paramètres.

On écrit l'état de tension sous la forme

$$\begin{cases} \sigma_x = \sum \beta_i S_{xx}^i(x,y) + \sum \eta_j T_{xx}^j(x,y) \\ \sigma_y = \sum \beta_i S_{yy}^i(x,y) + \sum \eta_j T_{yy}^j(x,y) \\ \tau_{xy} = \sum \beta_i S_{xy}^i(x,y) + \sum \eta_j T_{xy}^j(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

Il doit satisfaire aux équations d'équilibre interne, équilibre en volume et aux équations d'équilibre au contours, équilibre de transmission entre éléments adjacents

Les équations d'équilibre en volume sont

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{x} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{y} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où σ_x, σ_y et τ_{xy} sont des produits tension \times épaisseur $t(x,y)$

- \bar{x}, \bar{y} sont des forces par unité de surface

comme charges, il faut se restreindre, au départ, à des polynômes avec un nombre fini de coefficients qui caractérisent les charges

La description paramétrique de l'état de charge est telle que - les termes en S sont des solutions des équations (2) homogènes (sans second membre)

$$\frac{\partial S_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}^i}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial S_{xy}^i}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}^i}{\partial y} = 0$$

- les termes en T sont des solutions particulières des équations (2) avec second membre

$$\frac{\partial T_{xx}^j}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}^j}{\partial y} = -\bar{x}_j$$

$$\frac{\partial T_{xy}^j}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}^j}{\partial y} = -\bar{y}_j$$

avec $\bar{x} = \sum \eta_j \bar{x}_j$
 $\bar{y} = \sum \eta_j \bar{y}_j$

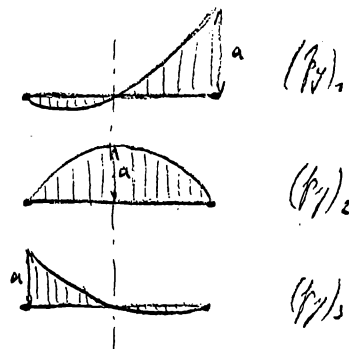
Pour réaliser l'équilibre de transmission, il faut exiger la continuité des tractions de surface à la jonction entre éléments.

Soit \vec{n} de cosinus directeurs (l, m) la normale à la frontière d'un élément. Chaque groupe S ou T , donne naissance à un mode de traction de surface

- modes issus de S $\left\{ \begin{array}{l} (p_x)_i = l S_{xx}^i + m S_{xy}^i \\ (p_y)_i = l S_{xy}^i + m S_{yy}^i \end{array} \right.$

- modes issus de T $\left\{ \begin{array}{l} (p_x)_i = l T_{xx}^i + m T_{xy}^i \\ (p_y)_i = l T_{xy}^i + m T_{yy}^i \end{array} \right.$

Un mode peut par exemple être une répartition parabolique telle que l'un des $(p_y)_i$ donnés ci-contre; l'ordonnée a suffit à caractériser un de ces modes et, par superposition, on peut réaliser n'importe quelle distribution parabolique.



Pour assurer la diffusion correcte des tensions, il faut qu'on ait les mêmes modes et réciprocié des tractions de surface de part et d'autre de la frontière commune de deux éléments adjacents.

B. Définition et recensement des forces généralisées le long d'une frontière

Soit $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ le vecteur représentant l'état de tension le long d'une frontière.

Soit \vec{P}_k le vecteur représentant un mode de traction de surface (qui peut résulter de divers modes de tension de surface).

On a

$$\vec{F} = \sum_k \gamma_k \vec{P}_k \quad (3)$$

où γ_k représente une force généralisée (ce peut être l'ordonnée caractéristique d'un diagramme parabolique de la p -préséente, ou la surface d'un tel diagramme ; le plus souvent on cherche à rééllement lui donner la dim. d'une force

Aux forces généralisées γ_k , on va tout naturellement associer des déplacements généralisés x_k définis à partir du théorème des travaux virtuels

$$\int_{\text{front}} \vec{F} \cdot \vec{u} \, ds = \sum_k \gamma_k x_k \quad (4)$$

Si on veut isoler un des déplacements généralisés on introduit (3) dans (4) et on a

$$x_k = \int_{\text{front}} (\vec{P}_k \cdot \vec{u}) \, ds \quad (5)$$

La signification de ces déplacements généralisés est ainsi peu claire ; la formule (5) montre qu'il s'agit d'une sorte de déplacement moyen le long de la frontière pondéré par \vec{P}_k qui est une sorte de fonction poids et a, en tous cas, une signification plus complexe que la constante qui peut parfois la représenter.

C. Construction de la matrice raideur

On connaît d'une séquence pour les forces généralisées et on divise cette séquence en deux groupes

$$g = \begin{pmatrix} h \\ \dots \\ p \end{pmatrix}$$

- Les modes de traction qui sont à l'origine des forces généralisées de surface sont des combinaisons linéaires des tractions de surface indépendantes par les états de tension
- le groupe h provient des états de tension $s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}, t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}$
 - le groupe p provient des états de tension t_{xx}, t_{xy}, t_{yy}

En introduisant la vecteurs

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

on a donc

$$h = B\beta + C\eta$$

$$p = H\eta$$

$$q = \begin{pmatrix} h \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \eta \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \beta \\ \eta \end{pmatrix} \quad (6)$$

où B, C et H sont des matrices d'incidence partielles

D est la matrice d'incidence complète.

h , en association des déplacements généralisés q ,

à p , en association des déplacements généralisés z .

Pour trouver la matrice de rigidité, on va utiliser le principe de variation de tension (ou du minimum de l'énergie complémentaire)

On part de l'énergie complémentaire de déformation (voir p. 25)

- c'est une fonction quadratique homogène des tensions.
- les tensions sont des combinaisons linéaires de coefficients β_i et η_j .
- l'intégrale sera une fonction quadratique homogène des paramètres β_i et η_j .

$$\iint_{\text{élémt.}} \phi(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dx dy = \frac{1}{2} (\beta^T F_{\beta\beta} \beta + 2\beta^T F_{\beta\eta} \eta + \eta^T F_{\eta\eta} \eta) = \Psi$$

où F est une matrice partitionnée en différents matrices de couplage

$$F = \begin{pmatrix} F_{\beta\beta} & F_{\beta\eta} \\ F_{\beta\eta}^T & F_{\eta\eta} \end{pmatrix} \quad (7)$$

On considère tous les déplacements aux frontières \bar{q} et \bar{z} comme imposés

Donc la somme de l'énergie complémentaire et de l'en. potent. complémen

$$\Psi - (q^T h + z^T p)$$

est stationnaire et minimum lorsqu'on varie les tensions, donc les β et η

on réalise les h et p appelés déplacements de frontière imposés.

On envoie

$$\Psi = (q^T B \beta + q^T C \eta + z^T H \eta)$$

est minimum les coefficients des variations sur β et η sont nuls.

Or sous forme matricielle la variation s'écrit

$$\frac{1}{2} \delta \beta^T F_{\beta\beta} \beta + \frac{1}{2} \beta^T F_{\beta\beta} \delta \beta + \delta \beta^T F_{\beta\eta} \eta + \beta^T F_{\beta\eta} \delta \eta + \frac{1}{2} \delta \eta^T F_{\eta\eta} \eta + \frac{1}{2} \eta^T F_{\eta\eta} \delta \eta - q^T B \delta \beta - q^T C \delta \eta - z^T H \delta \eta$$

$$\text{avec } \frac{1}{2} \delta \beta^T F_{\beta\beta} \beta = \frac{1}{2} \beta^T F_{\beta\beta} \delta \beta$$

L'annulation du coefficient de $\delta \beta^T$ donne

$$F_{\beta\beta} \beta + F_{\beta\eta} \eta = B^T q$$

L'annulation du coefficient de $\delta \eta^T$ donne

$$F_{\eta\beta} \beta + F_{\eta\eta} \eta = C^T q + H^T z$$

Donc connaissant les déplacements généralisés q et z , on dispose, pour les deux équations précédentes, d'un système pour calculer β et η . Compte tenu de (6) et (7), ce système s'écrit

$$F \begin{pmatrix} \beta \\ \eta \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

On arrive finalement à

$$q = D F^{-1} D^T \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{q = K \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix}} \quad (9)$$

où K est la matrice raideur de l'élément $\rightarrow K$ est symétrique.

F est la matrice de flexibilité (symétrique)

D est la matrice d'incidence complète.

2. Poutre modélisée équilibre : triangle à tension constante

On suppose que dans ce triangle d'équilibre

- il n'y a pas de charge interne
- l'épaisseur est constante $t(x,y) = ct_0$.

on écrit l'état de tension sous la forme

$$\sigma_x = \beta_1$$

$$\sigma_y = \beta_2$$

$$\tau_{xy} = \beta_3$$

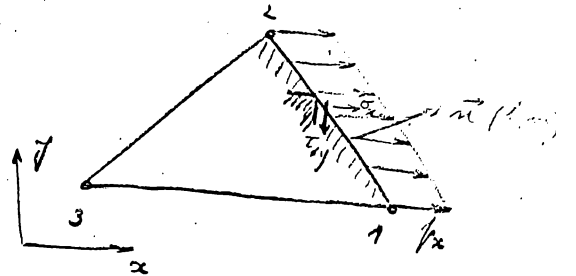
Ces champs de tension satisfont aux équations d'équilibre en volume (2)

les modes de traction de surface

issus de ces champs sont également constants

$$p_n = l\beta_1 + m\beta_3$$

$$p_{ty} = l\beta_3 + m\beta_2$$



On choisit comme forces généralisées

$$\int p_x ds \quad \text{et} \quad \int p_y ds$$

(ce sont ici de vrais forces)

les forces généralisées le long de r.e., par exemple, valent

$$h_{12} = \int_0^1 p_x ds = \int_0^1 \sigma_x dy - \int_0^1 \tau_{xy} dx = \beta_1 y_{21} - \beta_3 x_{21}$$

$$g_{12} = \int_0^1 p_y ds = \int_0^1 -\sigma_y dx + \int_0^1 \tau_{xy} dy = -\beta_2 x_{21} + \beta_3 y_{21}$$

$$\text{avec} \quad x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

Les forces généralisées suffisent à décrire complètement l'état de tension le long d'une frontière puisqu'il suffit de les diviser par la longueur L_{ij} de la frontière pour connaître la tension constante en tout point

Pour trouver les déplacements généralisés correspondants, on applique le théorème des travaux virtuels

$$\begin{aligned}
 u_{12} h_{12} + v_{12} g_{12} &= \int_1^2 (\rho_x u + \rho_y v) ds \\
 &= \int_1^2 \left(\frac{\rho_x}{E_{12}} u + \frac{\rho_y}{E_{12}} v \right) ds \quad \rightarrow \quad u_{12} = \frac{1}{E_{12}} \int_1^2 u ds \\
 & \quad \quad \quad v_{12} = \frac{1}{E_{12}} \int_1^2 v ds
 \end{aligned}$$

On voit bien qu'il s'agit d'un déplacement moyen.

La matrice d'incidence D qui relie $\begin{pmatrix} \varphi \\ h \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est construite dans des relations du type

$$h_{12} = \beta_1 \gamma_{12} - \beta_3 \alpha_{11}$$

Il suffit de choisir la séquence des forces généralisées et on obtient immédiatement pour le triangle

$$\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{13} \\ h_{31} \\ g_{12} \\ g_{23} \\ g_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21} & 0 & -\alpha_{21} \\ \gamma_{32} & 0 & -\alpha_{32} \\ \gamma_{13} & 0 & -\alpha_{13} \\ 0 & -\alpha_{21} & \gamma_{21} \\ 0 & -\alpha_{32} & \gamma_{32} \\ 0 & -\alpha_{12} & \gamma_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

En reportant le triangle isotrope, on trouve pour l'énergie, à partir de Clapeyron

$$\phi = \frac{1}{2} (E_x \sigma_x + E_y \sigma_y + \nu_{xy} \tau_{xy}) = \frac{1}{2EL} [\sigma_x (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \sigma_y (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \tau_{xy}^2 2(1+\nu)]$$

En remplaçant σ et τ par les β puis en intégrant, on a

$$\Psi = \frac{1}{2} \iint \left[\beta_1^2 + \beta_2^2 - 2\nu \beta_1 \beta_2 + 2(1+\nu) \beta_3^2 \right] \frac{1}{L} dx dy$$

D'où la matrice de flexibilité

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \iint \frac{dx dy}{L} & -\frac{\nu}{E} \iint \frac{dx dy}{L} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} \iint \frac{dx dy}{L} & \frac{1}{E} \iint \frac{dx dy}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \iint \frac{dx dy}{L} \end{pmatrix} = \frac{1}{EL} \iint \frac{dx dy}{L} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}$$

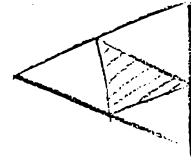
L'inversion de cette matrice donne

$$F^{-1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \iint \frac{dxdy}{t} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

On obtient alors sans peine la matrice de raideur par

$$K = D F^{-1} D^T$$

On trouve une raideur $k = \frac{1}{4}$ de la raideur k de l'élément Tenu si l'épaisseur est constante, on montre aussi que u_{11} représente le déplacement au milieu des côtés des triangles. Finalement on trouve que le comportement est identique à celui d'un triangle de Turner de surface $\frac{1}{4}$ du triangle équilatère et ayant ses sommets au milieu des côtés (triangle "squelette" des triangles primitif)



Second modélisation équilibre : triangle à tensions linéairement variables.

Triangle à tensions linéairement variables.

On décrit l'état de tension sous la forme

$$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

$$\sigma_y = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y$$

$$\tau_{xy} = \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y$$

Cette description comporte 9 paramètres.

On sait d'autre part que les équations d'équilibre en volume sont satisfaites si les tensions dérivent d'une fonction de tension d'Airy $\phi(x, y)$ par

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_x$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \tau_{xy}$$

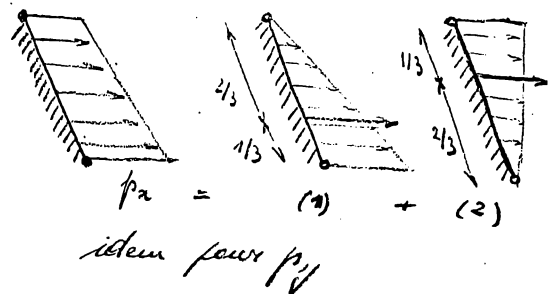
Pour que les tensions soient linéaires, la fonction d'Airy doit être au plus du 3^e degré ; d'autre part les termes constants ou linéaires ne jouent aucun rôle. Don

$$\phi = \beta_1 x^2 + \beta_2 xy + \beta_3 y^2 + \beta_4 x^3 + \beta_5 x^2 y + \beta_6 xy^2 + \beta_7 y^3$$

- Cette description comporte 7 paramètres.

Cette fonction d'Airy qui correspond à la satisfaction de l'équilibre en volume impose certaines relations entre les paramètres et impose de réduire leur nombre total à 7.

Les modes de traction de surface issus de ces champs sont linéaires, également et il faut 4 paramètres pour décrire p_x et p_y sur une frontière.

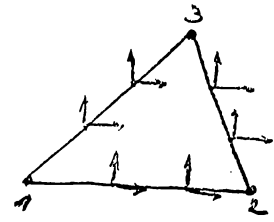


On choisit comme forces généralisées

les résultantes des diagrammes triangulaires représentés ci-dessus.

Pour un élément triangulaire (avec 3 frontières) il y a donc

- 12 forces généralisées
- 3 relations d'équ. stat. entre elles
- soit 9 forces généralisées indépendantes



or on n'a que 7 paramètres β :

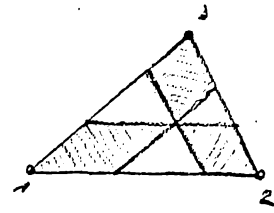
il y a 2 modes de déformation

n'engendrant aucune tension et

s'écrit « disloque » il « comporte

comme s'il était constitué de 3 losanges

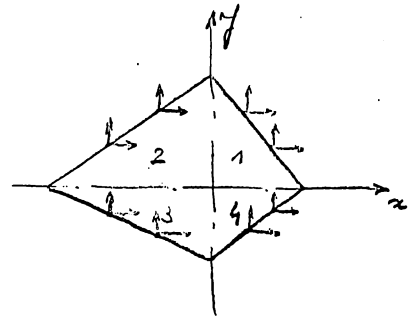
articulés ; les 2 modes de déformation sont obtenus en bloquant un des losanges)



B. Quadrilatère à diagonales rectangulaires.

on le considère comme formé de 4 triangles non chargés le long des frontières intérieures,

on peut superposer 4 champs avec la même fonction et s'écrire que ci. dessus, et finalement arriver au nombre correct de paramètres.



on part d'une description paramétrique linéaire des tensions.

Grâce à la fonction et s'écrire, on satisfait aux équations d'équilibre en volume. Il faut encore, le long des interfaces, entre triangles assurer la continuité des tractions de surface.

Le long de la frontière 1-2

- on a dans 1

$$\phi = \beta_1 x^2 + \dots + \beta_7 y^3$$

- dans 1, le long de la frontière

$$(\sigma_x)_{x=0} = 2\beta_3 + 6\beta_7 y$$

$$(\tau_{xy})_{x=0} = \beta_2 + 2\beta_6 y$$

- dans 2, le long de la frontière, on doit avoir les mêmes valeurs de σ_x, τ_{xy} (σ_y n'intervient pas dans les tractions de surface le long de cette frontière)
- donc la fonction et s'écrire dans 2 doit conserver les paramètres $\beta_2, \beta_3, \beta_6, \beta_7$

mais les autres β_1, β_4 et β_5 peuvent changer et devenir $\beta'_1, \beta'_4, \beta'_5$

- on a dans 2

$$\phi = \beta'_1 x^2 + \dots + \beta_4 y^3$$

Le long de la frontière 1-4

- les tensions

$$(\sigma_y)_{y=0} = 2\beta_1 + 6\beta_4 x$$

$$(-\tau_{xy})_{y=0} = \beta_2 + 2\beta_5 x$$

doivent se conserver

- dans 4, les paramètres $\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5$ sont conservés; $\beta_3, \beta_6, \beta_7$ changent en β'_3, β'_6

Par la frontière 2-3 et 4-3, on voit que

- dans 3, on a les paramètres $\beta'_1, \beta_2, \beta'_3, \beta'_4, \beta'_5, \beta'_6, \beta'_7$

les forces généralisées sont définies comme précédemment. On a

- 16 forces généralisées

- 3 relations d'équilibre statique entre elles } 13 forces généralisées indépendantes

soit $7\beta + 6\beta' = 13$ paramètres.

On peut exprimer les forces généralisées en fonction des paramètres au moyen d'une matrice d'incidence D.

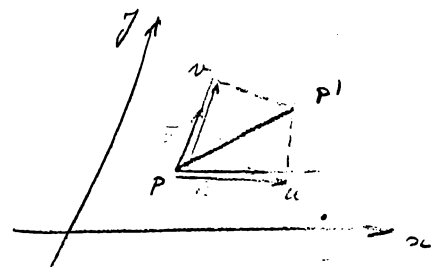
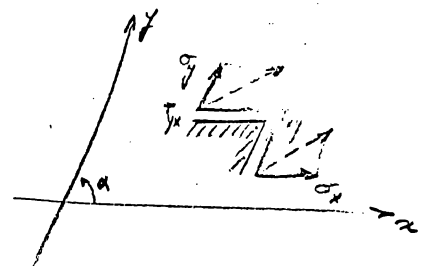
c. Parenthèse sur le traitement des coordonnées obliques.

Définition des tensions.

σ et τ (tension \times épaisseur) sont définies sur des éléments de faces parallèles à ox et oy . La composition des tensions se fait par la règle du parallélogramme au lieu de la règle du rectangle.

Définition des déplacements

Soit un point P venant en P'



On n'utilise pas les composantes contrainte du déplacement \tilde{u} et \tilde{v} mais on utilise les projections orthogonales du déplacement sur les axes obliques, c.à.d. les quantités covariantes u et v . Ceci en vue d'avoir une expression simple du travail virtuel de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et τ_{yx}

Expression du travail virtuel.

- Sur une face parallèle à oy , le travail au cours d'un déplacement virtuel vaut

$$\sigma_x dy \delta u + \tau_{xy} dy \delta v$$

- Sur une paire de faces parallèles à oy , le travail résultant vaut

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x dy \delta u + \tau_{xy} dy \delta v) dx$$

- Sur une paire de faces parallèles à ox

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} dx \delta u + \sigma_y dy \delta v) dy$$

- Les forces de surface s'il y en a

$$x dx dy \sin \alpha \delta u + y dx dy \sin \alpha \delta v$$

- Or le travail virtuel représente l'accroissement d'énergie par unité de surface.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x dy \delta u + \tau_{xy} dy \delta v) dx + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} dx \delta u + \sigma_y dy \delta v) dy + x dx dy \sin \alpha \delta u + y dx dy \sin \alpha \delta v = dx dy \sin \alpha \delta w}$$

Equations d'équilibre

Au cours d'un déplacement comme un corps rigide, l'énergie ne varie pas

$$\delta W = 0$$

- Soit une translation $\delta v = 0$, $\delta u = \delta u_0$; il vient

$$\delta u_0 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + x \sin \alpha \right) dx dy = 0$$

D'où l'équation d'équilibre

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + x \sin \alpha = 0}$$

- De même par une translation $\delta u = 0$, $\delta v = \delta v_0$, on a

$$\boxed{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + y \sin \alpha = 0}$$

- Soit une petite rotation autour de l'origine des axes demandant un déplacement δw .

A cause de la similitude des triangles hachurés, on a

$$\frac{x}{x \delta w} = \frac{y \sin \alpha}{-\delta u} \rightarrow \delta u = -y \sin \alpha \delta w$$

$$\frac{y}{y \delta w} = \frac{x \sin \alpha}{\delta v} \rightarrow \delta v = x \sin \alpha \delta w$$

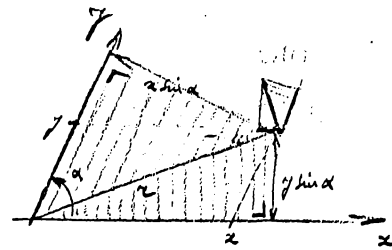
En introduisant ces valeurs de δu et δv dans

$$\delta W = 0, \text{ on a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-y \sigma_x + x \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (-y \tau_{yx} + x \sigma_y) - x y \sin \alpha + y x \sin \alpha = 0$$

$$-y \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + x \sin \alpha \right) + x \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + y \sin \alpha \right) + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$



Expressions de ϵ et σ

Compte tenu de l'équilibre, l'équation du travail virtuel se réduit à

$$\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \tau_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v \right) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta v = \sin \alpha \delta W$$

Comme les opérateurs δ et $\frac{\partial}{\partial}$ permutent

$$\delta W = \frac{\sigma_x}{\sin \alpha} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\tau_{xy}}{\sin \alpha} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_y}{\sin \alpha} \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$W = W(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \sigma_x &= \sin \alpha \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} \\ \tau_{xy} &= \sin \alpha \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \\ \sigma_y &= \sin \alpha \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} \end{aligned}}$$

Comme pour les équations d'équilibre, on constate qu'on retrouve les équations du système de coordonnées rectangulaires, à un $\sin \alpha$ près.

Loi de Hooke en coordonnées obliques.

Pour trouver cette loi il faut refaire un détail par les coordonnées rectangulaires.

Relation entre les ϵ, γ en coordonnées obliques et en coordonnées rectangulaires

- Pour ϵ_{ξ} on a de suite

$$\epsilon_{\xi} = \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Pour ϵ_{η}

on voit par la fig ci. contre

$$\begin{cases} u = \bar{u} + \bar{v} \cos \alpha \\ v = \bar{v} + \bar{u} \cos \alpha \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} u - \bar{v} \cos \alpha = \bar{u} \sin^2 \alpha \\ v - \bar{u} \cos \alpha = \bar{v} \sin^2 \alpha \end{cases} \rightarrow \bar{v} \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} (v - u \cos \alpha)$$

D'autre part

$$\begin{cases} dy = \frac{1}{\sin \alpha} d\eta \\ dx = -\cot \alpha d\eta \\ dx = d\xi \end{cases} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\cot \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial y}$$

ou

$$\epsilon_{\eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{v} \sin \alpha)$$

Avec les relations ci. dessus

$$\begin{aligned} \epsilon_{\eta} &= \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} (v - u \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} (-\cot \alpha) \frac{\partial}{\partial x} (v - u \cos \alpha) + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial y} (v - u \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\eta} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\cos^2 \alpha \cdot \epsilon_x - \cos \alpha \sqrt{\epsilon_{xy}} + \epsilon_y)$$

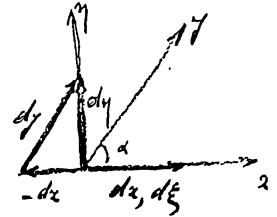
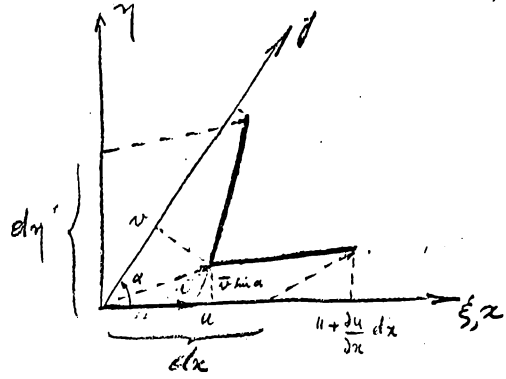
- Pour $\gamma_{\xi\eta}$

Par la fig en haut de la page, on voit que la réduction d'angle est donnée par la somme de

- la variation avec x ou ξ de $\bar{v} \sin \alpha$
- la variation avec η de u

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\sin \alpha} (v - u \cos \alpha)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{\sin \alpha} (-2 \cos \alpha \cdot \epsilon_x + \sqrt{\epsilon_{xy}})$$



lorsqu'on rassemble ces relations sous forme matricielle, on a

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

avec $M = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & 0 & 0 \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos^2 \alpha & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$

Expression de l'énergie

Pour une épaisseur constante, l'énergie par unité de surface dans un milieu isotrope vaut

$$W = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x \quad \gamma_{xy} \quad \epsilon_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

On passe en coordonnées obliques $\epsilon_x, \gamma_{xy}, \epsilon_y$ au moyen de la relation ci-dessus :

$$W = \frac{E t}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x \quad \gamma_{xy} \quad \epsilon_y) M^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \nu & 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

Loi de Hooke

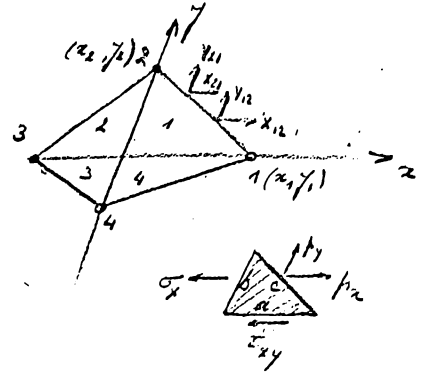
Au moyen des relations de la p.122, on peut dériver de l'énergie les lois en fonction des ϵ et γ ; cela permet (après un grand effort) d'exprimer la loi de Hooke en coordonnées obliques

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E t}{(1-\nu^2) \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha \\ -\cos \alpha & \frac{1-\nu}{2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & -\cos \alpha \\ \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_y \end{pmatrix}$$

3. Calcul de la matrice d'incidence.

Après les compléments sur les coordonnées obliques, on peut reformuler le calcul de la matrice d'incidence pour un quadrilatère quelconque.

On commence par calculer une force généralisée, par exemple x_{12}



Pour un triangle infiniment petit

$$p_x c = \tau_{xy} a + \sigma_x b$$

$$p_y c = \tau_{xy} b + \sigma_y a$$

En transférant au triangle 1, avec

$$\begin{cases} c = c_{12} \\ b = l_2 \\ a = z_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = \partial^2 \phi / \partial x^2 \\ \sigma_y = \partial^2 \phi / \partial x^2 \\ \tau_{xy} = \partial^2 \phi / \partial x \partial y \end{cases} \quad \phi = \beta_1 x^2 + \dots + \beta_7 y^3$$

on obtient

$$c_{12} p_x = l_2 (2\beta_3 + 2\beta_6 x + 6\beta_7 y) - z_1 (\beta_2 + 2\beta_5 x + 2\beta_6 y)$$

et au point 1, c. a. d. en $y=0$, on a

$$c_{12} (p_x)_{y=0} = l_2 (2\beta_3 + 2\beta_6 x_1) - z_1 (\beta_2 + 2\beta_5 x_1)$$

Comme avant $(p_x)_{y=0}$, on peut calculer

$$x_{12} = \frac{1}{2} (p_x)_{y=0} c_{12} = l_2 (\beta_3 + \beta_6 x_1) - z_1 (\frac{1}{2} \beta_2 + \beta_5 x_1)$$



En procédant de la même façon pour les 15 autres forces généralisées, on peut calculer la matrice d'incidence qui relie les x_{ij}, y_{ij} aux paramètres β_k

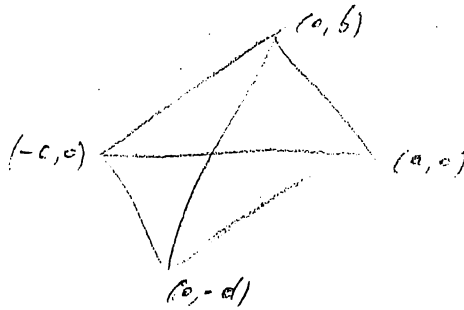
$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{21} \\ x_{23} \\ x_{32} \\ x_{34} \\ x_{43} \\ x_{41} \\ x_{14} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} z_1 l_2 & 0 & -z_1 x_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \vdots \\ \beta_7 \end{pmatrix} \quad \text{soit } g = c \beta$$

Matrice $16 \rightarrow 13$ à compléter

A faire comme exercice.

- Calculer pour chaque triangle les ϕ en fonction des β . $\phi = \frac{1}{2} (\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)$ $\left\{ \begin{matrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{matrix} \right\}$
- On arrive à une matrice de flexibilité de $\frac{13 \times 14}{2} = 71$ coefficients.
- Et comme il y a seulement 2 familles pour triangle $\frac{7 \times 8}{2} = 28$ coefficients
- on cherche finalement F (13×13)

Indication : prendre les $\frac{1}{2}$ diag. du quadrilatère en valeur absolue

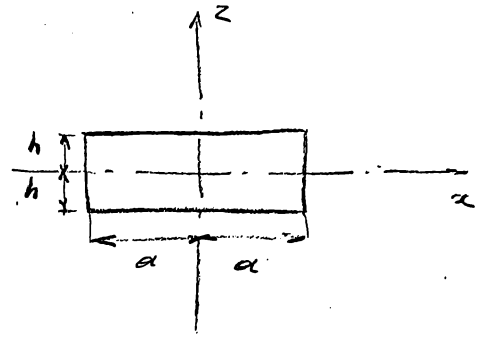


4. Troisième modèle équilibre : élément d'axe de longueur.

A. Choix des champs de tension.

Dans le choix des champs de tension, on est guidé par deux considérations

- il s'agit d'un élément d'axe qui devra s'intégrer dans une poutre en flexion
- il s'agit d'un problème plan d'élasticité où, pour satisfaire l'équilibre en ses tensions, dérivent d'une fonction de tension.



En flexion σ_x doit être une fonction impaire de z (diagramme bitriangulaire) et, comme elle dérive de ϕ par une double dérivation par rapport à z , il faut que ϕ soit impaire en z . D'où l'idée de développer ϕ en puissances impaires de z en x limitant à deux termes pour finalement concevoir un σ_x bitriangulaire

$$\phi(x, z) = z \phi_1(x) + z^3 \phi_2(x) \rightarrow \sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 6z \phi_2(x) \quad \text{linéaire en } z : \sigma_k$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{d\phi_1}{dx} - 3z^2 \frac{d\phi_2}{dx} \quad \text{parabolique en } z : R.d.t.$$

$$\sigma_z = z \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + z^3 \frac{d^2 \phi_2}{dx^2}$$

Dans la théorie habituelle de la flexion $\sigma_z = 0$, il faut donc que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \begin{aligned} \phi_1 &= a_1 + a_2 x & \rightarrow \tau_{xz} &= -a_2 - 3z^2 a_4 & \tau \text{ ind. de } x \rightarrow T=C \\ \phi_2 &= a_3 + a_4 x & \sigma_x &= 6z(a_3 + a_4 x) & M \text{ variable linéaire} \end{aligned}$$

On constate que a_1 ne joue aucun rôle et, finalement, le champ de tensions fait intervenir quatre paramètres

$$\sigma_x = \frac{6z}{h^2} (\beta_1 + \beta_2 x)$$

$$\tau_{xz} = \beta_3 - \frac{3z^2}{h^2} \beta_4$$

$$\sigma_z = 0$$

B. Introduction des forces généralisées.

Les forces généralisées vont réaliser l'accrochage de l'élément à ses voisins

Frontière $z = h$: accrochage des semelles

Le long de cette frontière il n'y a ni σ_x , ni σ_z , seulement

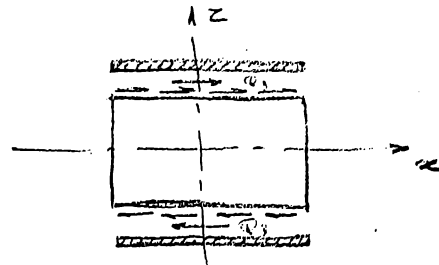
$$\tau_{xz} = \beta_3 - 3\beta_2 = C_2^1$$

On prend comme force généralisée, l'effort tranchant total

$$Q_3 = \int_{-a}^{+a} \tau_{xz} dx$$

$$Q_3 = 2a(\beta_3 - 3\beta_2)$$

Par raison d'antisymétrie, on prend également Q_3 à la frontière $z = -h$



Frontière $x = a$

- On a d'abord une tension σ_x dont la résultante est un moment de flexion

$$\sigma_x = \frac{Gz}{h^2} (\beta_1 + a\beta_2)$$

Le diagramme bitriangulaire est complètement défini si on prend le moment de flexion comme force généralisée

$$M_2 = \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz = \frac{G(\beta_1 + a\beta_2)}{h^2} \int_{-h}^{+h} z^2 dz$$

$$M_2 = 4h(\beta_1 + a\beta_2)$$

- On a aussi une tension parabolique

$$\tau_{xz} = \beta_3 - \frac{3z^2}{h^2} \beta_2$$

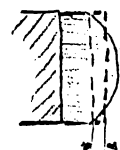
Deux paramètres sont nécessaires pour définir la parabole; il faut prendre 2 forces généralisées

La première force généralisée représente la surface du diagramme parabolique ou du rectangle équivalent, c'est l'effort tranchant

$$T_2 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz = \beta_3 \int_{-h}^{+h} dz - 3\beta_2 \int_{-h}^{+h} \frac{z^2}{h^2} dz$$

$$T_2 = 2h(\beta_3 - \beta_2)$$

La seconde force généralisée tient compte de la partie parabolique du diagramme de τ_{xz} ; c'est l'ordonnée moyenne du rectangle équivalent à la partie



parabolique; elle est nulle si le diagramme de τ_{xz} est constant.
 Elle vaut

$$V_2 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} w(z) dz$$

où w_z est une fonction poids telle que, si $\tau_{xz} = C_0$, $\int_{-h}^{+h} w(z) dz = 0$
 on prend.

$$w(z) = 1 - \alpha \frac{z^2}{h^2}$$

Pour déterminer α , on a que

$$0 = \int_{-h}^{+h} w(z) dz = \int_{-h}^{+h} \left(1 - \alpha \frac{z^2}{h^2}\right) dz = 2 - \alpha \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 3$$

$$V_2 = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) dz$$

$$V_2 = \frac{8}{5} h \beta_2$$

Frontière $x = -a$

Comme à la frontière $x = a$, on définit

$$M_1 = - \int_{-h}^{+h} \sigma_z z dz \rightarrow$$

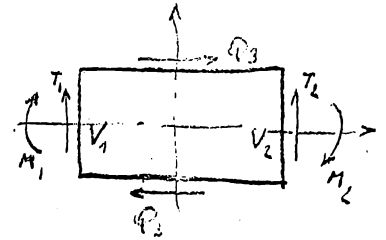
$$M_1 = 4h(-\beta_1 + a\beta_2)$$

$$T_1 = - \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz \rightarrow$$

$$T_1 = 2h(\beta_2 - \beta_3)$$

$$V_1 = - \int_{-h}^{+h} \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) dz \rightarrow$$

$$V_1 = -\frac{8}{5} h \beta_2$$



Au total on a donc 8 forces généralisées
 3 équations d'équilibre } 5 forces généralisées indépendantes

D'autre part on n'a que 3 paramètres β et il restera donc 2 mécanismes

c. Matrice d'incidence.

L'écriture de la matrice d'incidence est immédiate à partir des relations ci. dessus

$$q = c \beta$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ 2Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2h & -2h \\ 0 & -\frac{12}{5}h & 0 \\ -4h & 4ah & 0 \\ 0 & -2h & 2h \\ 0 & \frac{12}{5}h & 0 \\ 4h & 4ah & 0 \\ 0 & -12a & 4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

D: Introduction des déplacements généralisés.

On écrit que le travail virtuel exact le long d'un bord est égal au travail virtuel des forces généralisées.

Le long du bord $x = -a$

$$\int_{-h}^{+h} (-\sigma_x u - \tau_{xz} w) dz = T_1 w_1 + V_1 v_1 + M_1 \varphi_1$$

Pour trouver w_1, v_1 et φ_1 , on exprime les tensions en fonction des forces généralisées, puis on identifie les deux membres de l'équation.

$$\tau_{xz} = -\frac{T_1}{2h} - \frac{5}{8} V_1 \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right)$$

$$\sigma_x = -\frac{3}{2h^3} M_1 z$$

Le membre de gauche du travail virtuel vaut

$$\frac{3}{2h^3} M_1 \int_{-h}^{+h} z u dz + T_1 \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} w dz + V_1 \frac{5}{8} \int_{-h}^{+h} w \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) dz$$

Par identification

$$\varphi_1 = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{+h} u z dz \quad : \text{moyenne pondérée de } u$$

$$w_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} w dz \quad : \text{moyenne ordinaire de } z$$

$$v_1 = \frac{5}{8} \int_{-h}^{+h} w \left(1 - \frac{3z^2}{h^2}\right) dz \quad : \text{moyenne pondérée de } w ; \text{ si } w = \text{cte (tout le côté mou en bloc)} \quad v_1 = 0 \rightarrow v_1 \text{ représente une déformation.}$$

Le long du bord $x = a$

On calcule de la même façon φ_2, w_2, v_2

Le long des bords $z = \pm h$

On a pour le travail virtuel

$$2 \int_{-a}^{+a} \tau_{xz} u \, dx = 2Q_3 u_3$$

$$\text{avec } (\tau_{xz})_{z=th} = Q_3/2a$$

$$2 \int_{-a}^{+a} \frac{Q_3}{2a} u \, dx = 2Q_3 u_3 \quad \rightarrow \quad u_3 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} u \, dx \quad : \text{moyenne ordinaire de}$$

2. Matrice de flexibilité

L'énergie de déformation par unité de surface vaut

$$\phi = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz})$$

$$\text{avec } \sigma_z = 0$$

$$\sigma_x = t E \epsilon_x$$

$$\tau_{xz} = t G \gamma_{xz}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xz}^2}{G} \right) \frac{dx dz}{t(x,z)}$$

Si $t = ct_0$ et si on remplace σ_x et τ_{xz} en fonction des paramètres, on arrive de suite à

$$\psi = \frac{1}{2} \beta^T F \beta$$

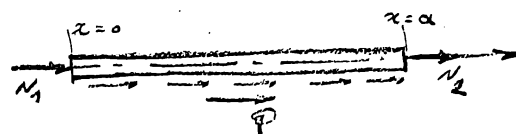
$$\text{avec } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad F = \frac{4a}{ht} \begin{pmatrix} \frac{12}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4a^2}{E} + \frac{7h^2}{5G} & -\frac{h^2}{G} \\ 0 & -\frac{h^2}{G} & \frac{h^2}{G} \end{pmatrix}$$

On peut ensuite avoir la matrice raideur

$$K = C F^{-1} C^T$$

5. Quatrième modèle équilibre : élément de Lisse

Cet élément est conçu pour s'appliquer à une barre de longueur l et en représenter la section.



Description de l'état de charge :

Il est soumis à un flux de cisaillement : $\tau = cte$
 deux forces concentriques : N_1 et N_2

L'intensité du flux de cisaillement constitue le premier paramètre : τ

Par l'équilibre d'un tronçon, on trouve le second paramètre : β

$$dN + \tau dx = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = -\tau \rightarrow N = -\tau x + \beta$$

Les forces généralisées sont

- l'effort tranchant total $Q = \int_0^a \tau dx = \tau a$
- l'effort normal en $x=0$ $N_1 = -\beta$
- l'effort normal en $x=a$ $N_2 = -\tau a + \beta$

On a immédiatement la matrice de connexion

$$q = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ Q \end{pmatrix} = C \beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \beta \end{pmatrix}$$

On trouve les déplacements généralisés à partir du travail virtuel

- à l'interface $x=0$

$$u(0) N_1 = u_1 N_1 \rightarrow u_1 = u(0) : \text{déplacement } u \text{ à l'interface } x=0$$

- à l'interface $x=a$

$$u(a) N_2 = u_2 N_2 \rightarrow u_2 = u(a) : \text{déplacement } u \text{ à l'interface } x=a$$

- à l'interface de connexion

$$\int_0^a u(x) \tau dx = Q u_3 \rightarrow u_3 = \frac{1}{a} \int_0^a u(x) dx : \text{déplacement moyen}$$

On a donc - 3 forces généralisées

- 1 équation d'équilibre global } 2 forces généralisées indépendantes

pour 2 paramètres ; la situation est idéale.

Pour trouver la matrice de flexibilité,

- on calcule l'énergie de déformation

$$\frac{1}{2} \int_0^a \frac{N^2}{ES(x)} dx$$

- on exprime les tensions en fonction des paramètres

$$\frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{ES(x)} (\tau^2 x^2 + \beta^2 - 2\beta\tau x) dx = \frac{1}{2} (\tau^2 f_{11} + 2\beta\tau f_{12} + \beta^2 f_{22})$$

- en identifiant à

$$\frac{1}{2} \beta^T F \beta$$

on voit que

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} \int_0^a \frac{x^2 dx}{S(x)} & -\frac{1}{E} \int_0^a \frac{x dx}{S(x)} \\ -\frac{1}{E} \int_0^a \frac{x dx}{S(x)} & \frac{1}{E} \int_0^a \frac{dx}{S(x)} \end{pmatrix} = \frac{1}{ES} \begin{pmatrix} \frac{a^3}{3} & -\frac{a^2}{2} \\ -\frac{a^2}{2} & a \end{pmatrix}$$

$$\text{si } S(x) = cx$$

Pour trouver la matrice de raideur, on a

$$F^{-1} = \frac{12ES}{a^4} \begin{pmatrix} a & \frac{a^2}{2} \\ \frac{a^2}{2} & \frac{a^3}{3} \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} C^T = \frac{12ES}{a^4} \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{2} & -\frac{a^2}{2} & a^2 \\ -\frac{a^3}{3} & -\frac{a^3}{6} & \frac{a^3}{2} \end{pmatrix}$$

$$K = C F^{-1} C^T = \frac{12ES}{a} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

II Propriétés des matrices raides.

1. Nature des matrices raides

A. Généralités

Les matrices raides sont nécessairement singulières car le système

$$Kq = q = 0$$

possède des solutions non nulles : au moins celles correspondant aux modes rigides déplacements du corps indéformable. On appelle ces modes $u_i \rightarrow Ku_i = 0$

Dans les modèles déplacements, ceci résulte de l'introduction a priori des modes rigides dans les champs paramétriques de déplacements ; mais le système $Kq = 0$ n'a pas d'autre solution que les modes rigides mentionnés ci-dessus.

Dans les modèles équilibre, à cause de la nature de la matrice raide

$K = CF^{-1}C^T$, les solutions de $Kq = 0$ sont également solution de $C^Tq = 0$ et réciproquement. En effet

- F^{-1} est nécessairement non singulière
- si $C^Tq = 0$, on a évidemment $Kq = 0$
- si $Kq = 0$, on a

$$CF^{-1}C^Tq = 0 \rightarrow q^T C F^{-1} C^T q = 0$$

$$(C^Tq)^T F^{-1} (C^Tq) = 0 \rightarrow C^Tq = 0$$

Donc, dans les modèles équilibre, il suffit d'examiner les solutions de $C^Tq = 0$

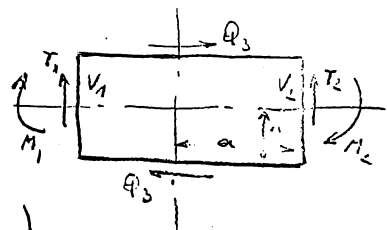
et on constate qu'il y a d'autres solutions que les modes rigides ; il y a possibilité de déformabilité cinématique.

B. Exemple : solutions pour le modèle équilibre de l'anneau de longeron.

On a

$$q = \begin{pmatrix} T_1 \\ v_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ v_2 \\ M_2 \\ 2Q_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } C^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4h & 0 & 0 & 4h & 0 \\ 2h & -\frac{1}{3}h & 4ah & -2h & \frac{8}{3}h & 4ah & -12a \\ -2h & 0 & 0 & 2h & 0 & 0 & 4a \end{pmatrix}$$



La matrice C^T comporte 4 colonnes pour 3 lignes ; au moins un déterminant 3×3 dans C^T n'est pas nul ; donc il y a 4 solutions et pas plus qui donnent $C^T q = 0$

- Une première solution est visible : c'est un mode rigide, la translation verticale
seuls T_1 et T_2 travaillent dans ce mode rigide ; donc

$$u_1^T = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

On vérifie par le calcul $C^T u_1 = 0$

- Une seconde solution est visible : c'est un mode rigide, la rotation autour du centre de l'élément

- T_1 et T_2 travaillent avec des signes contraires, et des bras de levier a

- M_1 et M_2 travaillent dans le même sens

- Q_3 et $-Q_4$ travaillent avec un bras de levier h ; donc

$$u_2^T = (a \ 0 \ 1 \ -a \ 0 \ 1 \ h)$$

On vérifie encore par le calcul $C^T u_2 = 0$

- Les deux dernières solutions n'apparaissent pas physiquement ; il faut les trouver algébriquement ; on appelle z_i ces modes cinématiques.

$$z_3^T = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

$$z_4^T = (0 \ sa \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

Leurs combinaisons linéaires couvrent également.

C. Interprétation des solutions

Chaque solution u_i ou z_i correspond à la nullité d'un travail virtuel des charges.

Démonstration mathématique :

$$K z = 0 \longrightarrow z^T K^T = z^T K = 0$$

$$\text{Travail virtuel} = z^T q = z^T K q = 0$$

Interprétation physique pour les modes rigides

Cette nullité du travail virtuel est une restriction évidente pour les modes rigides ; elle conduit à de simples conditions d'équilibre statiques

$$u_1^T q = 0 \longrightarrow T_1 + T_2 = 0 \quad : \text{équilibre vertical}$$

$$u_2^T q \rightarrow T_1 a + M_1 - T_2 a + M_2 = 0 \quad : \text{équilibre de rotation,} \quad -191$$

La nullité du travail virtuel pour les modes cinématiques conduit à des restrictions supplémentaires.

$$z_3^T q = 0 \rightarrow v_1 + v_2 = 0$$

$$z_4^T q = 0 \rightarrow 5a v_1 + M_1 + M_2 = 0$$

C'est à dire si M_1 et M_2 sont donnés, il faut s'imposer

$$v_1 = -v_2 = -\frac{M_1 + M_2}{5a} \quad (= 0 \text{ s'il s'agit de moments purs } M_1 = -M_2)$$

Si on exige la parfaite transmissibilité de efforts v entre tous les éléments, comme $v_1 = -v_2$ dans chaque élément, cela impose $M_1 + M_2 = \text{cte}$.

Ceci est évidemment trop limitatif; aussi, pour pouvoir traiter des $M_1 + M_2$ variable, on sacrifie un peu la transmissibilité de v c.à.d. on admet une variation de la parabolicité des τ et d'un élément à l'autre. Ce n'est pas grave du point de vue physique (le principe de St Venant arrange tout) mais il faut vérifier que cela n'affecte pas le caractère équilibré de l'élément et, en particulier, sa propriété de fournir une borne supérieure.

D. Conservation du caractère de borne supérieure

Si l'épaisseur est constante et si le champ ε est intégrable, l'élément conserve son caractère de borne supérieure

L'intégration de ε_x et ε_z déduits des tensions de la p.133 donne

$$Et u = -\alpha_1 z + 6\beta_1 \frac{xz}{h^2} + \beta_2 \left[3 \frac{z^2 x^2}{h^2} - (2+\nu) \frac{z^3}{h^2} \right] + 2(1+\nu) \beta_3 z$$

$$Et w = \alpha_2 + \alpha_1 z - 3\beta_1 \left[\frac{x^2}{h^2} + \nu \frac{z^2}{h^2} \right] - \beta_2 \left[\frac{x^3}{h^2} + 3\nu \frac{xz^2}{h^2} \right]$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \text{la rotation } \alpha_1 \\ \text{la translation } \alpha_2 \end{array} \right.$ sont les constantes d'intégration.

On peut vérifier que

$$Et \varepsilon_x = Et \frac{\partial u}{\partial x} = \left(6\beta_1 \frac{z}{h^2} + 6\beta_2 \frac{xz}{h^2} \right) - \nu \cdot 0 = \sigma_x - \nu \sigma_z$$

$$Et \varepsilon_z = Et \frac{\partial w}{\partial z} = 0 - \nu \left(6\beta_1 \frac{x}{h^2} + 6\beta_2 \frac{xz}{h^2} \right) = \sigma_z - \nu \sigma_x$$

$$\text{et } \gamma_{xz} = \frac{E t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ -\alpha_1 + \nu \beta_1 \frac{z}{h^2} + 3\beta_2 \left(\frac{z^2}{h^2} - (2+\nu) \frac{z^2}{h^2} \right) + 2(1+\nu)\beta_3 \right. \\ \left. + \alpha_1 - \nu \beta_1 \frac{z}{h^2} - 3\beta_2 \frac{z^2}{h^2} - 3\nu\beta_2 \frac{z^2}{h^2} \right\} \\ = -3\beta_2 \frac{z^2}{h^2} + \beta_3 = \tau_{xz}$$

si on substitue ces expressions de u et w dans les 2 déplacements généralisés de l'ex 135, on obtient après intégration

- w_1 associé à T_1

$$w_1 = \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} w dz \right]_{x=a} = \frac{1}{2E t h} \left\{ 2h\alpha_2 - 2h\alpha_1 - 3\beta_1 \frac{a^2}{h^2} 2h - \nu 2h + \beta_2 \frac{a^3}{h^2} 2h + \nu \beta_2 a 2h \right\}$$

- φ_1 associé à M_1

$$\varphi_1 = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{+h} [u]_{x=a} z dz =$$

à calculer à titre d'exercice.

En éliminant les paramètres entre les déplacements généralisés, on arrive à

$$v_1 + v_2 = \nu \frac{h^2}{6a} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$v_2 - v_1 = \nu \frac{h(\varphi_1 + \varphi_2) - 2u_3}{2\left(\frac{a}{h} + \frac{2+\nu}{5} \frac{h}{a}\right)}$$

Donc v_1 et v_2 dépendent } des autres déplacements généralisés.
 } du coefficient de Poisson ν

On reprend le principe des minimum de l'énergie complémentaire

en considérant tous les déplacements comme imposés (voir p.119). L'expression de l'énergie complémentaire est

$$\left(\frac{1}{2} \beta^T F \beta\right) + (\text{énergie potentielle compl. provenant de l'imposition des déplacements} = g^T \bar{q})$$

$$\frac{1}{2} \beta^T F \beta - (T_1 \bar{u}_1 + M_1 \bar{\varphi}_1 + T_2 \bar{u}_2 + M_2 \bar{\varphi}_2 + 2Q_3 \bar{u}_3) - (v_1 \bar{v}_1 + v_2 \bar{v}_2)$$

Le dernier terme est gênant puisque v_1 et v_2 dépendent des autres déplacements généralisés et ne peuvent être choisis librement.

Or on connaît

- les v en fonction des paramètres (p.134)

$$v_1 = -v_2 = -\frac{8}{5} h \beta_2$$

- les v en fonction des paramètres (p.142)

$$v_2 - v_1 = \nu \frac{2a}{Et} \beta_2$$

D'où on a

$$-v_1(v_2 - v_1) = v_1 v_1 - v_1 v_2 = v_1 v_1 + v_2 v_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{5} \nu \frac{a h}{Et}\right) \beta_2^2$$

Ceci permet de transférer le terme gênant dans l'énergie $\frac{1}{2} \beta^T F \beta$; il faut pour cela modifier la matrice de flexibilité; ce transfert est toujours possible lorsque le champ est intégrable. L'énergie devient

$$\frac{1}{2} \beta^T H \beta - (T_1 \bar{u}_1 + M_1 \bar{\varphi}_1 + T_2 \bar{u}_2 + M_2 \bar{\varphi}_2 + 2Q_3 \bar{u}_3)$$

La matrice de flexibilité modifiée vaut

$$H = F - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{32}{5} \nu \frac{a h}{Et} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{8a}{Et h} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 + \frac{9+5\nu}{5} h^2 & -(1+\nu) h^2 \\ 0 & -(1+\nu) h^2 & +(1+\nu) h^2 \end{pmatrix}$$

La matrice de connexion est réduite

$$g = \begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \\ 2R_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire s'écrit $\frac{1}{2} \beta^T H \beta - g^T \bar{q} = \frac{1}{2} \beta^T H \beta - \beta^T D^T \bar{q}$ et minimum lorsque on varie la tension donc les paramètres c. a. d.

$$\delta \beta^T (H \beta - D^T \bar{q}) = 0 \quad \text{pour toute variation } \delta \beta^T ; \text{ donc}$$

$$H \beta = D^T \bar{q}$$

H est définie positive et peut être inversée

$$\beta = H^{-1} D^T \bar{q}$$

$$g = D \beta = (D H^{-1} D^T) g = K \bar{q}$$

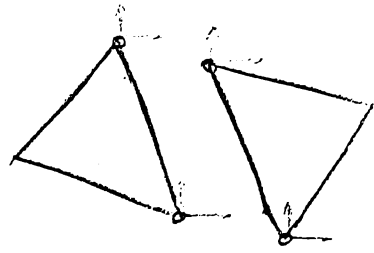
Comme la représentation obtient toujours au principe du minimum de l'énergie complémentaire, le caractère de borne supérieure des coefficients d'influence est préservé.

Les avantages de la nouvelle représentation sont : la réduction de la matrice raideur, l'élimination des modes de déformation inélastiques et l'existence d'un champ de déplacement inconnu correspondant. Par contre, il existe une violation de la continuité des tensions sous la forme d'une amplitude différente de la distribution parabolique des cisaillements ($\tau = 3z/2$) aux bords verticaux de l'âme. Toutefois l'équilibre est rétabli si on considère la différence comme artificiellement absorbée par une distribution extérieure de charge puisque la charge locale est statiquement équivalente à zéro, on peut attendre, sur la base du principe de Saint Venant, que son effet sur les flèches et les rotations soit faible.

2. Assemblage des éléments par les matrices rigides.

L'assemblage se fait par identification de déplacements généralisés ramené à des déplacements de points d'attache.

On adopte une liste en séquence bien déterminée des déplacements nodaux pour chaque élément (q_e) et pour l'ensemble de la structure (q) et on écrit



$$q_e = L_e q$$

où L_e est une matrice de localisation des déplacements de l'élément e ; si tous les déplacements sont ramené à un système d'axe unique, L_e n'est composé que de 0 et de 1; mais, dans le cas le plus général, la matrice de localisation contient les rotations nécessaires pour passer des systèmes locaux des éléments au système général.

Soit q les charges nodales (forces extérieures) associées aux déplacements nodaux q . Le travail virtuel des forces extérieures appliquées à l'ensemble

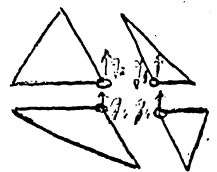
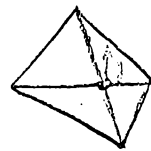
$$q^T q$$

est équivalent à la somme des travaux virtuels dans les éléments

$$q^T q = \sum_e q_e^T q_e$$

$$= q^T \sum_e L_e^T q_e \quad \rightarrow \quad \boxed{q = \sum_e L_e^T q_e}$$

Donc q est la sommation de forces internes destinées à reconstituer la charge extérieure au nœud; la répartition est un problème hyperstatique.



Pour chaque élément on a

$$q_e = K_e q_e$$

où K_e est la matrice de raideur de l'élément étudié dans les chapitres précédents.

Pour toute la structure, on a

$$q = \sum_e L_e^T q_e = \sum_e L_e^T K_e q_e = \left(\sum_e L_e^T K_e L_e \right) q = K q$$

où $K = \sum_e L_e^T K_e L_e$

est la matrice raideur de la structure dans son ensemble (master stiffness matrix) chaque K_e étant régulière, K est aussi régulière.

En général, le problème se pose comme suit : les charges q étant données, résoudre $q = Ky$ c.à.d. inverser K ; ce qui est impossible directement puisqu'il existe des degrés de liberté de la structure comme corps indéformable qui donnent les solutions $Ku = 0$

On repère alors les déplacements et forces nodaux selon que nœud est fixe ou non.

- aux nœuds fixes correspondent $q_1 =$ réactions d'appui (généralement inconnues), $q_1 = 0$ (sans déplacement et appui donné)
- aux nœuds non fixes correspondent $q_2 =$ forces données, $q_2 =$ déplacement inconnus.

On a alors

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = Kq$$

avec $K_{1,2}^T = K_{2,1} =$ matrice rectangulaire
 $K_{11}, K_{22} =$ matrices carrées symétriques.

D'où

$$q_1 = K_{11} q_1 + K_{12} q_2$$

$$q_2 = K_{21} q_1 + K_{22} q_2$$

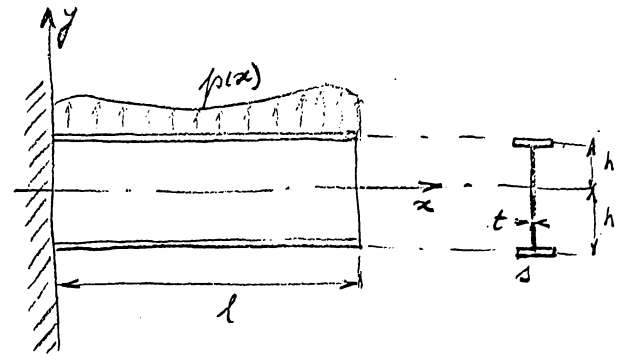
Cours de Théorie des Structures

Exercices.

I Poutre fléchie traitée par le principe de variation des déplacements.

On suppose :

- que l'anne est en état plan de tension
- que les semelles sont en état de traction ou de compression simple,
- que $u = y \alpha(x)$ conservation des sections planes,
- que $v = V(x)$



1. Energie de déformation interne.

A. Dans l'anne

Par le théorème de Castiglione (cours p 21), on a

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

Or, d'après la loi de Hooke :

$$\left. \begin{aligned} E \epsilon_x &= \sigma_x - \eta \sigma_y \\ E \epsilon_y &= \sigma_y - \eta \sigma_x \\ E \epsilon_z &= -\eta (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\eta^2} (\epsilon_x + \eta \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\eta^2} (\epsilon_y + \eta \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \end{aligned} \right.$$

$$W_{\text{anne}} = \frac{1}{2} \left[\frac{E}{1-\eta^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2) + 2 \frac{E\eta}{1-\eta^2} \epsilon_x \epsilon_y + G \gamma_{xy}^2 \right]$$

Avec les hypothèses sur les déplacements, on a (cours p 8 et 9)

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$W_{\text{anne}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\eta^2} y^2 \left[\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right]^2 + G \left[\alpha(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]^2 \right\}$$

L'énergie interne de déformation vaut (cours, p. 24)

$$U_{\text{ame}} = \int_0^l \int_{-h}^{+h} \frac{t}{2} \left\{ \frac{E}{1-\gamma^2} \gamma^2 \alpha'^2(x) + G [\alpha(x) + v'(x)]^2 \right\} dx dy$$

$$U_{\text{ame}} = \int_0^l \frac{t}{2} \left\{ \frac{E}{1-\gamma^2} \frac{2h^3}{3} \alpha'^2(x) + 2Gh [\alpha(x) + v'(x)]^2 \right\} dx$$

B. Dans les semelles.

Pour le théorème de Castiglione, on a pour une semelle

$$W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2$$

Pour les deux semelles

$$W = E \epsilon^2$$

En exprimant la valeur de ϵ_x aux niveaux $y = \pm h$, on a, compte tenu de l'hypothèse sur les déplacements

$$\epsilon = h \alpha'$$

$$W = E h^2 \alpha'^2(x)$$

$$U_{\text{sem}} = \int_0^l S E h^2 \alpha'^2(x) dx$$

C. Energie interne totale.

$$U = \int_0^l \left\{ \frac{t}{2} \left[\frac{E}{1-\gamma^2} \frac{2h^3}{3} + 2Gh (\alpha + v')^2 \right] + S E h^2 \alpha'^2 \right\} dx$$

Où, en posant

$$I = 2Sh^2 + \frac{2}{3} \frac{t h^3}{1-\gamma^2}$$

$$U = \int_0^l \left[\frac{E I}{2} \alpha'^2 + G t h (\alpha + v')^2 \right] dx$$

D. Moment de flexion et effort tranchant.

On a par définition

$$M = \int_{-h}^{+h} t \sigma_x y dy + 2Nh$$

$$T = \int_{-h}^{+h} t \tau_{xy} dy$$

En introduisant les valeurs de σ_x et τ_{xy} tirées de la loi de Hooke

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\eta^2} (\epsilon_x + \eta \epsilon_y) = \frac{E}{1-\eta^2} y \alpha'(x) \quad ; \quad (\sigma_x)_{y=h} = E (\epsilon_x)_{y=h} = E h \alpha'$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G [\alpha(x) + v'(x)]$$

$$M = \int_{-h}^{+h} t \frac{E}{1-\eta^2} y^2 \alpha'(x) dx + 2(\sigma_x)_{y=h} S h$$

$$= \frac{E}{1-\eta^2} \frac{2t}{3} h^3 \alpha'(x) + 2Nh$$

$$= \frac{E}{1-\eta^2} \frac{2t}{3} h^3 \alpha'(x) + 2Eh^2 \alpha'(x) S$$

$$= E \alpha' \left(\frac{2}{3} \frac{t h^3}{1-\eta^2} + 2h^2 S \right)$$

$$M = EI \alpha'$$

$$T = \int_{-h}^{+h} t G (\alpha + v') dy = 2ht G (\alpha + v')$$

2. Energie de charges extérieures.

elle vaut

$$P = \int_0^l -p(x) v dx$$

3. Expression du principe de variation des déplacements.

On exprime que la variation d'énergie totale est nulle lors d'une petite variation appliquée sur les déplacements $u(x)$ et $v(x)$ (cours p.21)

$$\delta(U + P) = 0$$

Soit

$$\int_0^l \left[\frac{EI}{2} 2\alpha' \delta\alpha' + 2Gth (\alpha + v') (\delta\alpha + \delta v') \right] dx - \int_0^l p(x) \delta v dx = 0$$

En général, on peut écrire

$$\delta \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta F(x)$$

Soit ici

$$\delta \alpha' = \delta \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta \alpha$$

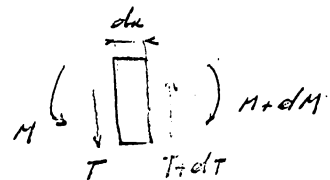
en intégrant par parties et en appliquant la formule ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \delta(U+P) &= [EI \alpha' \delta\alpha]_0^l - \int_0^l EI \alpha'' \delta\alpha dx \\ &+ [2Gth (\alpha + v') \delta v]_0^l - \int_0^l 2Gth (\alpha + v')' \delta v dx \\ &+ \int_0^l 2Gth (\alpha + v') \delta\alpha dx - \int_0^l p(x) \delta v dx \\ &= [EI \alpha' \delta\alpha + 2Gth (\alpha + v') \delta v]_0^l + \int_0^l \left[\{2Gth (\alpha + v') - p(x)\} \delta v + \{2Gth (\alpha + v') - EI \alpha''\} \delta\alpha \right] dx \end{aligned}$$

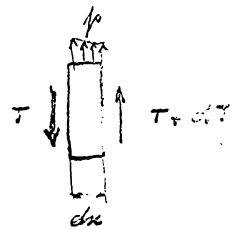
Comme $\delta(U+P) = 0$ et comme les variations sur α et v sont indépendantes, leurs coefficients doivent être nuls simultanément :

- l'annulation des coefficients de $\delta\alpha$ dans le terme intégral donne l'équation d'équilibre de rotation d'une tranche

$$T = \frac{dM}{dx}$$



- l'annulation du coefficient de δv dans le terme intégral donne l'équation d'équilibre de translation d'une tranche



$$p = - \frac{dT}{dx}$$

- en $x=0$, par les conditions d'appui supposés, on sait avoir

$$\delta\alpha = \delta v = 0$$

- mais pour que la variation totale soit nulle, il faut que si

limite de droite, en $x = l$, on a

$$\{EI \alpha'\}_{x=l} = M_l = 0$$

$$\{2Gth(\alpha + v')\}_{x=l} = T_l = 0$$

on a donc retrouvé toutes les équations d'équilibre global par tranches (mais l'équilibre local n'est pas nécessairement vérifié)

4. Cas d'une charge concentrée F

L'énergie des charges extérieures est modifiée et vaut

$$P = - \int_0^l p(x)v \, dx - Fv(a)$$

le terme supplémentaire donne après variation

$$- F \delta v(a)$$

et au total

$$\delta(U + P) = \int_0^l [M \delta \alpha' + T(\delta \alpha + \delta v') - p(x) \delta v] \, dx - F \delta v(a)$$

Il faut cette fois intégrer séparément de 0 en a et de a en l

$$\delta = [M \delta \alpha + T \delta v]_0^a + [M \delta \alpha + T \delta v]_a^l + \int_0^a \{(-M' + T) \delta \alpha - [T' + p(x)] \delta v\} \, dx - F \delta v(a) = 0$$

comme précédemment

- en annulant les coefficients de $\delta \alpha$ et δv dans le terme intégral, on a

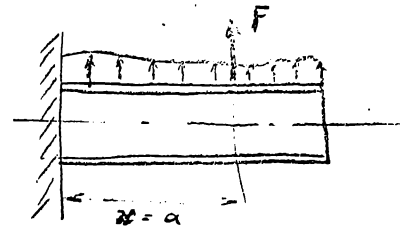
$$M' = T$$

$$T' = -p$$

- en exprimant la continuité des variations en a

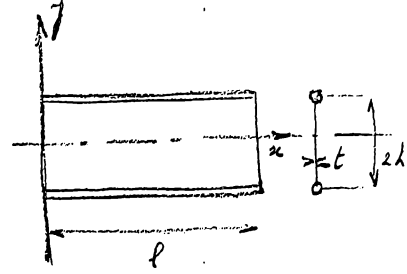
$$\delta \alpha(a-0) = \delta \alpha(a+0) = \delta \alpha(a) \quad \rightarrow \quad M(a-0) = M(a+0) = 0 \quad \text{: continuité de } \alpha$$

$$\delta v(a-0) = \delta v(a+0) = \delta v(a) \quad \rightarrow \quad T(a-0) - T(a+0) - F = 0 \quad \text{: saut de } T$$



II Application du problème précédent.

1. Rappel



- On a fait des hypothèses
- sur l'élasticité du matériau (Hooké)
 - sur les déplacements (conservation des sections planes)

$$u = \int \alpha(x)$$

$$v = \int \nu(x)$$

On a trouvé

- l'inertie : $I = 2Sh^2 + \frac{2}{3} \frac{t^3}{1-\nu^2}$

- les moments et effort tranchant : $M = EI \alpha'$

$$T = 2Gth (\alpha + \nu')$$

(1)

(2)

- les conditions aux limites

- à l'encastrement en $x=0$: $\left. \begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array} \right\}$

- sous une charge P concentrée en a : $\left. \begin{array}{l} T(a-0) - T(a+0) = P \\ M(a-0) - M(a+0) = 0 \end{array} \right\}$

- à l'extrémité libre en $x=l$: $\left. \begin{array}{l} M=0 \\ T=0 \end{array} \right\}$

- si on avait supposé qu'une charge agit à l'extrémité en $x=l$

$$\left[M \delta x + T \delta v \right]_{x=l} - \left[\text{force} \times \delta \text{dépl} \right]_{x=l} = 0 \quad (3)$$

- les équations d'équilibre : $T = M'$

(4)

$$p = T'$$

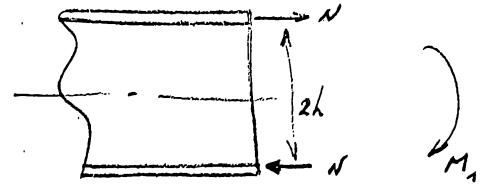
(5)

Les équations déduites de définitions ou de l'application des principes de variation des déplacements suffisent à résoudre des problèmes de poutres, on va le montrer dans quelques cas particuliers.

2. Poutre chargée par un moment d'extrémité'

On suppose que le moment est remplacé par deux forces N sur les semelles telles que

$$M_1 = 2Nh.$$



On voit immédiatement que le moment est constant sur la poutre.

D'après la relation (1), cela suggère de chercher pour μ une fonction linéaire. On pose

$$\mu = \gamma (\alpha_1 + \alpha_2 x)$$

Pour déterminer α_1 et α_2 , on utilise les conditions aux limites.

- $\mu_{x=0} = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$

- en $x = l$, la relation (3) donne

$$[M \delta \alpha]_{x=l} - 2 [N \delta u]_{x=l, y=\pm h} = 0$$

Or on a : $[M]_{x=l} = EI \alpha_2$

$$[N]_{x=l} = \frac{M_1}{2h}$$

$$[\delta \alpha]_{x=l} = \delta \alpha_2$$

$$[\delta u]_{x=l, y=\pm h} = h \delta \alpha_2$$

J'ai

$$EI \alpha_2 \delta \alpha_2 = \frac{M_1}{2h} 2h \delta \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{M_1}{EI}$$

$$\boxed{\mu = 2h \frac{M_1}{EI} x}$$

D'autre part

(5) $\rightarrow T' = 0 \rightarrow$

(1) $\rightarrow M = M_1$

(4) $\rightarrow T = M'$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \\ (4) \end{array} \right\} T = M = 0$$

(2) $\rightarrow 2Gth(\alpha + v') = 0 \rightarrow v' = -\alpha = -\frac{2M_1}{EI}$

D'au

$$V = - \frac{M_1}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$$

En $x=0$, $V=0 \rightarrow C_2=0$

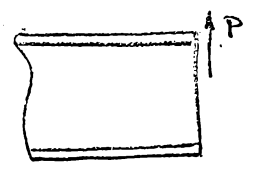
D'au

$$V = - \frac{M_1}{EI} \frac{x^2}{2}$$

En particulier, à l'extrémité l, on retrouve la formule de la r.d. M.

$$V = - \frac{M_1}{EI} \frac{l^2}{2}$$

3. Poutre chargée par une force concentrée à l'extrémité.



La condition d'extrémité (B) en $x=l$, donne

$$[T \delta V]_{x=l} - P[\delta V]_{x=l} = 0$$

$$[T]_{x=l} = P$$

(5) $\rightarrow T' = p = 0 \rightarrow T = C_3$ } $\rightarrow T = P$

(4) $\rightarrow M' = T = P \rightarrow M = Px + C_4$
La condition $[M]_{x=l} = 0 \rightarrow C_4 = -Pl$ } $\rightarrow M = P(x-l)$

(1) $\rightarrow \alpha' = \frac{M}{EI} = \frac{P(x-l)}{EI}$

Ceci suggère de prendre une fonction du second degré pour $\alpha(x)$

$$u = \int \alpha(x) = \int (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)$$

$$\alpha(x) = \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - lx + C_5 \right)$$

La condition $[\alpha]_{x=0} = 0 \rightarrow C_5 = 0$

$$u = \frac{Px}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right)$$

(2) $\rightarrow T = 2Gth(\alpha + V') = P$

$$V' = \frac{P}{2Gth} - \alpha = \frac{P}{2Gth} - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right)$$

$$V(x) = \frac{Px}{2Gth} - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + C_6$$

la condition $[V]_{x=0} = 0 \rightarrow C_4 = 0 \rightarrow \boxed{v = \frac{Px}{2Gk} - \frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} \right)}$

En particulier, la flèche en $x = l$ vaut

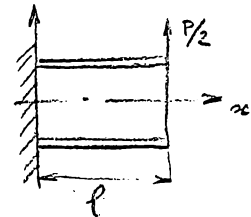
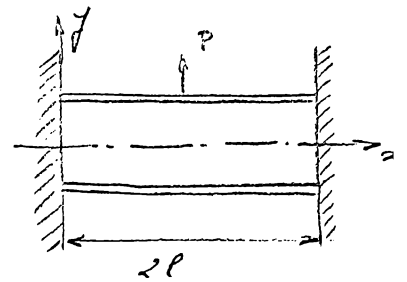
$$v = \frac{Pl}{2Gk} + \frac{Pl^3}{3EI}$$

On retrouve le résultat commun dans ce cas si les R.d.M et à l'élasticité.

4. Poutre biencastée chargée par une force au centre

En la symétrie, on peut se ramener à l'étude d'une demi-poutre où, en vertu de la symétrie $u_{x=l} = 0$.

L'expérience du cas précédent montre qu'on peut prendre pour u une fonction 2^e degré
 pour v une fonction 3^e degré



$$u = f(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2)$$

$$v = d_4 + d_5 x + d_6 x^2 + d_7 x^3$$

Les conditions aux limites donnent

$$[u]_{x=0} = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad (6)$$

$$[v]_{x=0} = 0 \rightarrow d_4 = 0$$

$$[u]_{x=l} = 0 \rightarrow \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3 l$$

$$(5) \rightarrow T' = 0 \rightarrow T = C_4$$

$$[T]_{x=l} = \frac{P}{2}$$

$$\rightarrow T = P/2$$

$$(4) \rightarrow M' = \frac{P}{2}$$

$$(1) \rightarrow M = EI \alpha' = EI(\alpha_2 + 2\alpha_3 x)$$

$$M' = 2EI \alpha_3$$

$$\rightarrow \alpha_3 = \frac{P}{4EI} \quad (7)$$

$$\alpha_2 = -\frac{Pl}{4EI} \quad (8)$$

(6), (7), (8) \rightarrow

$$\boxed{u = \frac{Px}{4EI} (l - x)}$$

$$(2) \rightarrow \begin{cases} T = 2GtL(\alpha + \nu^4) \\ T = P/2 \end{cases} \rightarrow \nu' = \frac{P}{4GtL} - \alpha$$

$$\nu = \frac{Px}{4GtL} - \alpha_2 \frac{x^2}{2} - \alpha_3 \frac{x^3}{3} + C_2$$

En identifiant avec l'expression supposée pour ν et en remplaçant α_2 et α_3 , on

$$\boxed{\nu = \frac{Px}{4GtL} + \frac{Pl}{4EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Px^3}{12EI}}$$

En particulier on retrouve au centre de la poutre biencastée la flèche R.d.M.

$$\nu = \frac{Pl}{4GtL} + \frac{Pl^3}{24EI}$$

5. Exercice proposé

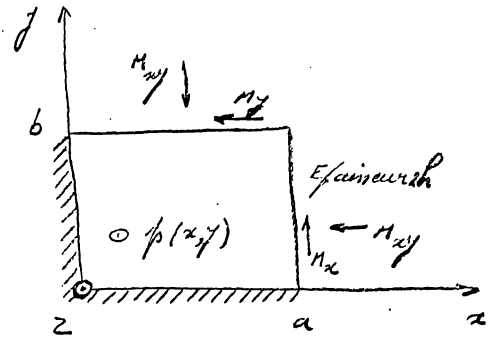
Traiter le cas d'une charge concentrique appliquée à l'extrémité en prenant pour ν une forme linéaire.

définie :
$$\nu = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{GtL} + \frac{Pl}{3EI} \right)$$

avec
$$I = \frac{2}{3} \frac{Et^3}{(1-\nu^2)} + 2St^3$$

III Plaque fléchie traitée par le principe de variation des déplacements.

1. Hypothèses et définitions.



- On suppose que $\sigma_z = 0$;
en fait σ_z est \ll les autres tensions.

- On admet la loi de conservation des normales, c.à.d les déplacements peuvent être représentés par des fonctions

$$u = z \cdot \alpha(x, y)$$

$$v = z \cdot \beta(x, y)$$

$$w = w(x, y)$$

Les fonctions α et β représentent les flèches.

- On définit les moments et efforts tranchants dans la plaque, (par unité de large)

$$M_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

$$M_y = \int_{-h}^{+h} \sigma_y \cdot z \cdot dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz$$

$$V_x = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \cdot dz$$

$$V_y = \int_{-h}^{+h} \tau_{yz} \cdot dz$$

- La loi de Hooke est applicable ; donc on a :

$$E \epsilon_x = \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)$$

$$E \epsilon_y = \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)$$

$$E \epsilon_z = \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau = G \gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} E \epsilon_x = \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \\ E \epsilon_y = \sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \\ E \epsilon_z = \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E [\epsilon_x (1-\nu) + \nu \epsilon_y]}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \sigma_y = \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

- Et, dans le cas présent, les ϵ et γ valent :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \frac{\partial \alpha}{\partial y} + z \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta + \frac{\partial w}{\partial y}$$

2. Expression de l'énergie

On a

$$P = - \int_S p(x, y) \cdot w \cdot dS$$

$$U = \int_{\text{vol}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots) dV$$

On pourrait dans U remplacer les σ et ε par leur valeur en fonction de ε et γ ; mais il est plus simple de procéder comme suit :

$$\delta U = \int_{\text{vol}} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \dots) dV$$

$$\text{avec } \delta \varepsilon_x = z \frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial x}$$

$$\delta \gamma_{xz} = \delta \alpha + \frac{\partial (\delta w)}{\partial x}$$

$$\delta \varepsilon_y = \dots$$

$$\delta \gamma_{yz} = \delta \beta + \frac{\partial (\delta w)}{\partial y}$$

$$\delta U = \int_S \int_{-h}^{+h} \left\{ \sigma_x z \frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial x} + \sigma_y z \frac{\partial (\delta \beta)}{\partial y} + \dots + \tau_{xz} \left[\delta \alpha + \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] \right\} dz dy dx$$

En faisant sortir de l'intégrale $\int_{-h}^{+h} dz$ tous les termes qui ne dépendent pas de z , on voit apparaître les moments fléchissants définis précédemment.

$$\delta U = \int_S \left\{ \underbrace{\frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial x}}_{M_x} \int_{-h}^{+h} \sigma_x z dz + \underbrace{\frac{\partial (\delta \beta)}{\partial y}}_{M_y} \int_{-h}^{+h} \sigma_y z dz + \dots + \left[\delta \alpha + \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dz \right\} dy dx$$

$$= \int_S \left\{ M_x \frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial x} + M_y \frac{\partial (\delta \beta)}{\partial y} + M_{xy} \left[\frac{\partial (\delta \beta)}{\partial x} + \frac{\partial (\delta \alpha)}{\partial y} \right] + V_x \left[\delta \alpha + \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right] + V_y \left[\delta \beta + \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} \right] \right\} dy dx$$

Le principe s'écrit donc finalement

$$\delta(U+P) = \int_S \left[M_x \frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial x} + M_y \frac{\partial(\delta\beta)}{\partial y} + M_{xy} \left[\frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\beta)}{\partial x} \right] + V_x \left[\delta\alpha + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right] + V_y \left[\delta\beta + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right] - p(x,y) \delta w \right]$$

3. Variations des déplacements.

A. Variation de α

En a

$$\int_S \left[M_x \frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial(\delta\alpha)}{\partial y} + V_x \delta\alpha \right] dS = 0$$

En intégrant par parties les deux premiers termes, on a

$$\int_0^b [M_x \delta\alpha]_0^a dy + \int_0^a [M_{xy} \delta\alpha]_0^b dx + \int_S \left[-\frac{\partial M_x}{\partial x} \delta\alpha - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta\alpha + V_x \delta\alpha \right] dS = 0.$$

En identifiant à zéro, les différents coefficients de $\delta\alpha$, on obtient

- une équation d'équilibre de rotation

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + V_x = 0 \quad (1)$$

- quatre conditions aux limites évidentes a priori

$$\text{en } x=0 \quad \alpha = 0$$

$$\text{en } y=0 \quad \alpha = 0$$

$$\text{en } x=a \quad M_x = 0$$

$$\text{en } y=b \quad M_{xy} = 0$$

} en particulier le long de ces deux bords pas de variation possible.

} bords libres.

B. Variation de β

En procédant de façon identique, on obtient

$$\int_S \left(M_y \frac{\partial(\delta\beta)}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial(\delta\beta)}{\partial x} + V_y \delta\beta \right) dS = 0$$

$$\int_0^a [M_y \delta\beta]_0^b dx + \int_0^b [M_{xy} \delta\beta]_0^a dy + \int_S \left(-\frac{\partial M_y}{\partial y} \delta\beta - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta\beta + V_y \delta\beta \right) dS$$

Ce qui donne

- une équation d'équilibre de rotation

$$-\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} + V_z = 0 \quad (2)$$

- quatre conditions aux limites

$$\text{en } x=0 \quad \beta = 0$$

$$\text{en } y=0 \quad \beta = 0$$

$$\text{en } x=a \quad M_{xy} = 0$$

$$\text{en } y=b \quad M_y = 0$$

} encastrement le long de ces deux bords; pas de variation possible

} bords libres.

c. Variation de w

en procédant de façon identique, on obtient

$$\int_S \left[V_x \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} + V_y \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} - p(x,y) \delta w \right] dS = 0$$

$$\int_0^b [V_x \delta w]_0^a dy + \int_0^a [V_y \delta w]_0^b dx + \int_S \left[-\frac{\partial V_x}{\partial x} \delta w - \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta w - p(x,y) \delta w \right] dS = 0$$

J'ai

- une équation d'équilibre vertical

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p(x,y) = 0 \quad (3)$$

- quatre conditions aux limites

$$\text{en } x=0 \quad w = 0$$

$$\text{en } y=0 \quad w = 0$$

$$\text{en } x=a \quad V_x = 0$$

$$\text{en } y=b \quad V_y = 0$$

} encastrement; pas de w

} bords libres

4. Solution du problème.

On a, au total, 8 champs inconnus

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta, w \\ M_x, M_y, M_{xy} \\ V_x, V_y \end{array} \right.$$

Le problème peut être résolu à partir } des équations (1) (2) (3)
 } des définitions de μ et de ν

En effet, la définition de M_x , par exemple, transformée comme suit

$$M_x = \int_{-h}^{+h} \sigma_x \cdot z \cdot dz$$

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x(1-\nu) + \nu \epsilon_z}{(1+\nu)(1-2\nu)} = E z \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}(1-\nu) + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y}}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$M_x = E \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}(1-\nu) + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-h}^{+h} z^2 dz$$

multi

on pose

$$D = \frac{2h^3 E}{(1-\nu)^3}$$

et on en déduit

$$M_x = D \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} + \frac{\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] \quad (4)$$

de la même façon,

$$M_y = D \left[\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} + \frac{\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right] \quad (5)$$

$$M_{xy} = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} z \cdot dz = G \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \int_{-h}^{+h} z^2 dz = G \frac{2h^3}{3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$V_x = \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} \cdot dz = G \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right) 2h = 2Gh \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$V_y = 2Gh \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

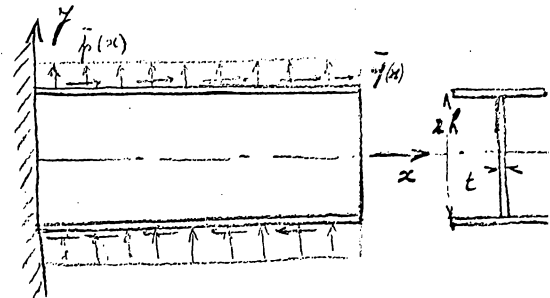
Les équations (1) à (8) permettent théoriquement de trouver les 8 champs inconnus.

En pratique, le système n'est pas intégrable (sauf pour une plaque triangulaire troncquée où on peut trouver α , β et w) et on se donne pour α , β , w des fonctions déduites de l'expérience (souvent des funct. lin. du 1^{er} degré)

IV Poutre fléchi traitée par le principe de Reissner.

On suppose

- que l'âme est en état de tension
- que les semelles sont en état de traction ou compression simple
- que la charge est répartie par moitié entre les deux semelles (\bar{p} et \bar{q} continues)



En outre, on fait des hypothèses sur les tensions

- $p_{xz} = Et \frac{1}{R} \epsilon'(x)$ distribution bilinéaire des tensions sur l'âme. (loi d'équarissage)
- $N_f = EA_f \epsilon'(x)$ compression ou traction simple dans les semelles.

on pose $\epsilon'_x = \epsilon(x, h)$
 $p_{xz} = \sigma_{xz} t$

1. Somme de l'énergie

L'énergie de déformation vaut :

$$U = \int_{\text{vol}} w \, d\omega = \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \dots)$$

L'énergie potentielle des charges mortes vaut :

$$P = - \int_{\text{vol}} (\bar{x}u + \bar{y}v + \bar{z}w) \, d\omega - \int_{S_\sigma} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w) \, dS$$

L'énergie potentielle de distorsion vaut :

$$D = \int_{\text{vol}} \left[\sigma_x \left(\epsilon_x - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \sigma_y \left(\epsilon_y - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \dots \right] d\omega - \int_{S_u} \left[p_x (\bar{u} - u) + p_y (\bar{v} - v) + \dots \right] dS$$

Tenant compte de la loi de Hooke en état plan de tension

$$E \epsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad \rightarrow \quad Et \epsilon_x(x, h) = p_{xz}(x, h) - \nu \frac{p_{yy}}{t}(x, h) \\ = Et \epsilon'(x) - \nu \frac{p_{yy}}{t}(x, h)$$

on obtient, tous calculs faits :

$$\delta(U+P+D) = \delta \int_0^l \int_0^h \left[p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{p_{xx}^2 + p_{yy}^2 - 2p_{xy} p_{xx}}{2Et} - \frac{1}{2} \frac{p_{xy}}{Gt} \right] dx dy$$

$$+ \int_0^l \left[N_f \frac{du(x, h)}{dx} - \frac{N_f^2}{2EA_f} \right] dx - \int_0^l \left[\bar{q}(x) u(x, h) + \bar{p}(x) v(x, h) \right] dx \quad (1)$$

Remarque:

Par définition

$$M(x) = 2h N_f + 2 \int_0^h p_{xx} y dy$$

$$= 2h A_f E \epsilon'(x) + 2 \int_0^h E t \frac{y^2}{h} \epsilon'(x) dy$$

$$= 2h^2 A_f \frac{E \epsilon'(x)}{h} + \frac{2k^3}{3h} E t \epsilon'(x)$$

$$M(x) = \frac{EI}{h} \epsilon'(x)$$

en posant

$$I = 2h^2 A_f + \frac{2}{3} t h^3$$

on en déduit

$$p_{xx} = \frac{E t}{h} \frac{M(x) h}{EI} \epsilon'(x) = \frac{M(x)}{I} \quad (2)$$

$$N_f = E A_f \frac{M(x) h}{EI} = \frac{A_f h}{I} M(x)$$

On voit que, en vertu des hypothèses de départ sur p_{xx} et N_f ces deux quantités sont liées et ne pourront être variées séparément.

2 Variation des déplacements

$$\text{On doit avoir } \delta(U+P+D) = 0.$$

A. Variation de $u(x, y)$

La variation sur $u(x, y)$ n'intervient que pour le premier et le second terme de la première intégrale.

Le premier de ces termes est une au moyen d'une intégration par parties

$$\int_0^h \int_0^l p_{xx} \frac{du}{dx} dx dy = \int_0^h [p_{xx} u]_0^l dy - \int_0^h \int_0^l \frac{dp_{xx}}{dx} u dx dy$$

Le terme à la surface est traité séparément.

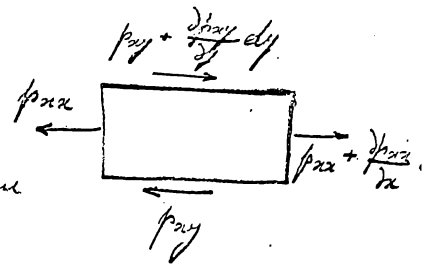
En traitant de la même façon le second terme de la première intégrale, on arrive finalement à

$$\delta(U + P + D) = - \int_0^h \int_0^l \left(\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} \right) \delta u(x, y) dx dy.$$

Les variations sur δu étant arbitraires, cela exige

$$\boxed{\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} = 0} \quad (3)$$

C'est l'équation d'équ. horiz. d'un élément de l'âme



En remplaçant, par (3), on obtient

$$t y \frac{d}{dx} \left(\frac{M(x)}{I} \right) + \frac{dp_{xy}}{dy} = 0$$

$$p_{xy} = - \frac{t y^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{M(x)}{I} \right) + F(x)$$

On pose

$$F(x) = \frac{t k^3}{6} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) + \frac{S(x)}{2h}$$

$$p_{xy} = t \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{h^3 - 3y^2}{6} + \frac{S(x)}{2h} \quad (4)$$

En intégrant p_{xy} sur la hauteur de l'âme, on doit retrouver T , ce qui montre que

$$T = 2 \int_0^h p(x, y) dy = S(x)$$

$$T = S(x)$$

B. Variation de $v(x, y)$

La variation sur $v(x, y)$ n'intervient dans (1) que pour les seconde et troisième terme de la première intégrale.

En intégrant par parties comme dans le premier cas, on arrive finalement à la condition

$$\boxed{\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0} \quad (5)$$

C'est l'équation d'équilibre vertical d'un élément de l'anneau.

Connaisant p_{xy} par (4), on peut tirer p_{yy} de (5)

$$p_{yy} = t \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{y^3 - k^2 y}{6} - \frac{dS}{dx} \frac{y}{2h} + X(x)$$

En prenant la variation de v le long de $y=0$ c'est à dire $\delta v(x, 0)$ on trouve qu'il n'intervient que un seul terme : p_{yy}

Soit $\delta(v+p+S) = \dots p_{yy} \delta v = 0$, on obtient que $p_{yy} = 0$ sur l'axe x

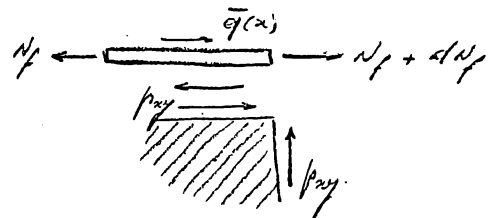
Grâce à cette condition on voit que

$$X(x) = 0.$$

C. Variation de $u(x, h)$

On obtient

$$\boxed{\frac{dN_f}{dx} = p_{xy} - \bar{q}(x)} \quad (6)$$



C'est l'équation d'équilibre horizontal d'un tronçon de semelle.

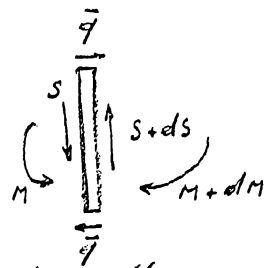
En substituant pour N_f et p_{xy} les valeurs trouvées précédemment, on a

$$\frac{d}{dx} \left(M \frac{A/h}{I} \right) = - \frac{tR^3}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) + \frac{S}{2h} - \bar{q}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2k^2 A J + \frac{2}{3} E k^3}{I} M \right) = S - 2k \bar{y}(x)$$

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = S - 2k \bar{y}}$$

(7)



C'est l'équation d'équilibre en rotation d'une tranche avec et sans elle.

2. Variation de $v(x, h)$

On trouve

$$\boxed{f_{yy}(x, h) = \bar{p}(x)} \quad (8)$$

C'est l'équation d'équilibre vertical d'un tronçon de semelle ; on en déduit :

$$\frac{dS}{dx} = -2\bar{p} \quad (9)$$

3. Variation des tensions

A. Variation de p_{xy} et p_{yy}

La première donne

$$\frac{du}{dy} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{p_{xy}}{Gt} = \frac{1}{G} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{h^3 - 3y^2}{6} + \frac{S}{2Ght} \quad (10)$$

La seconde donne

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{p_{yy} - \eta p_{xx}}{Et} \quad (11)$$

(10) et (11) constituent un système de deux équations aux dérivées partielles on se

$$(12) \rightarrow v = \frac{1}{E} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{\gamma^4 - 2ky^2 + \alpha k^4}{24} - \frac{1}{Ekt} \frac{dS}{dx} \frac{\gamma^2 - \beta k^2}{4} - \frac{\eta M}{EI} \frac{\gamma^2 - \gamma k^2}{2} + V(x)$$

où α, β, γ sont des constantes d'intégration choisies de façon un peu particulière pour faciliter certaines annulations.

En substituant cette valeur de v dans (10), on a :

$$u = \frac{1}{G} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{ky - \gamma^3}{6} + \frac{Sy}{2Ght} - \frac{1}{E} \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{M}{I} \right) \frac{\eta^5 - \frac{2}{3} \gamma^3 k^2 + \alpha k^4 \eta}{24} \\ + \frac{1}{Ekt} \frac{d^2 S}{dx^2} \frac{\beta^3 - \beta k^4}{4} + \frac{\eta}{E} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{I} \right) \left(\frac{\beta^3 - \gamma k^2 \eta}{2} \right) - \gamma \frac{dM}{dx}$$

3. Variation de p_{xx} et N_f

22

Ainsi qu'on l'a signalé, ces quantités sont liées par $M(x)$ et ne peuvent être variées indépendamment. On a

$$\delta p_{xx} = \frac{t}{I} \delta M(x)$$

$$\delta N_f = \frac{A_f h}{I} \delta M(x)$$

Une variation sur $M(x)$, équivalente à une variation sur p_{xx} et N_f , donne

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p_{xx} - \eta p_{yy}}{E t} \right) \frac{t}{I} dy + \left(\frac{\partial u(x, h)}{\partial x} - \frac{N_f}{E A_f} \right) \frac{A_f h}{I} = 0$$

Le premier terme représente une sorte d'équation de compatibilité dans l'âme si on interprète $\frac{\partial u}{\partial x}$ comme un ϵ_x ; le second terme représente une sorte d'équation de compatibilité dans les semelles. La compatibilité globale est satisfaite sur l'âme et dans les semelles mais on n'a pas de compatibilité locale.

Si on remplace p_{xx} , p_{yy} , N_f , u et v par les quantités précédemment trouvées puis si on effectue l'intégrale, on trouve :

$$\text{un terme en } \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{M}{I} \right) : - \frac{t}{24 E I} \int_0^h \left(\frac{75}{I} - \frac{2}{3} (t y^3 + 2 h^2 y) \right) y dy - \frac{A_f h}{24 E I} h^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \alpha \right)$$

on peut annuler ce terme si on pose

$$\alpha = \frac{11 t h + 49 A_f}{35 (t h + 3 A_f)}$$

- un terme en $\frac{d^3 S}{dx^3}$ qu'on peut annuler par un choix approprié de β

- un terme en $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M}{I} \right)$ qu'on peut annuler par un choix approprié de γ .

- il reste finalement

$$\frac{t}{I} \left(\frac{1}{24 h t} \frac{dS}{dx} - \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{M}{E I} - \frac{M}{2 E I t} \frac{dS}{dx} \right) \int_0^h y^2 dy + \frac{A_f h}{I} \left(\frac{1}{24 t} \frac{dS}{dx} - h \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{h M}{E I} \right) = 0$$

Après regroupement des termes.

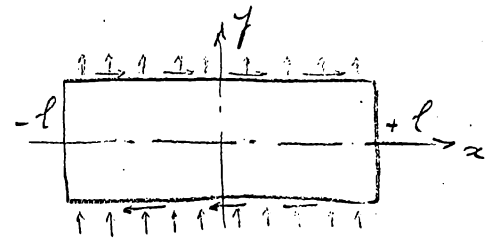
$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{M}{EI} = \frac{1}{2Ght} \left(1 - \frac{\eta}{1+\eta} \frac{tL^3}{3I} \right) \frac{dS}{dx}$$

cette forme transformée de l'équation de compatibilité globale permet de trouver la constante d'intégration inconnue $v(x)$ dans le cas où on a affaire à une distribution simple de forces \bar{p} et \bar{q} admettant des expressions simples pour S et M . A partir de $v(x)$ on connaît alors aux x et tantôt que les η et N sont calculés directement à partir de M et

4. Remarque sur les conditions d'appui.

En cours, une discussion s'est élevée quand on a essayé de retrouver la formule (1) : alors qu'un encastrement est représenté à gauche, il n'y a pas de surface à déplacement imposé et, par conséquent, pas d'intégrale \int_{Su} .

L'opinion qui a finalement prévalu est que l'exercice, tel qu'il est conçu, est cohérent sans qu'il soit nécessaire de préciser les conditions d'appui. Pour le montrer, on travaille sur une poutre de longueur $2l$, supportée "dans l'air toute seule".



- les équations d'équilibre local dans l'aire sont satisfaites en vertu de (3) (5) et (7).

- les équations d'équilibre local dans les sections sont satisfaites en vertu de (6) (7) et (8).

Si on suppose, par exemple, $\bar{p}(x) = \text{cte}$, les équilibres d'ensemble sont également satisfaites :

- (9) \rightarrow $S(L) - S(-L) = -4\bar{p}l$

c'est l'équation d'équilibre vertical d'ensemble.

- (2) \rightarrow $M(L) - M(-L) = \int_{-l}^{+l} S dx - 2l \int_{-l}^{+l} \bar{q} dx$

c'est l'équation d'équilibre d'ensemble en rotation ; en effet, si

on prend la forme classique de l'équilibre et d'ensemble en rotation, on a

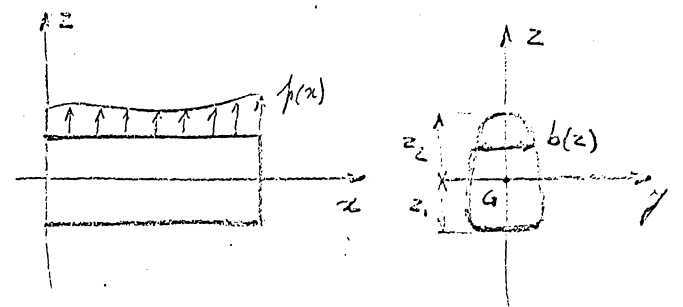
$$H(l) - H(-l) = 2 \int_{-l}^l \bar{p} x dx + 2h \int_{-l}^l \bar{q} dx - L [S(l) - S(-l)] = 0$$

Au moyen de (9) et après une intégration par parties, on retrouve bien l'équation de la page précédente.

V. Poutre non rectangulaire traitée par le principe de Reissner.

1. Hypothèses.

On utilise les hypothèses R. et M sur la théorie des poutres



- Hypothèse sur les tensions

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Mz}{I} & \text{avec } I &= \iint z^2 dy dz = \int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz \\ \sigma_y &= 0 \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{xy} &= -\tau_{xz} \frac{y}{z} = \tau_{xz} \frac{zy b'(z)}{b(z)} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}(x, z) \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \right.$$

- Hypothèse sur les déplacements

$$\left\{ \begin{aligned} u &= u(x) \\ v &= 0 \\ w &= w(x) \end{aligned} \right.$$

2. Principe de Reissner

$$\begin{aligned} \delta U + \delta P + \delta B &= \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \dots \right) dV - \int_0^L (\bar{p}_x u + \dots) dx + \int_V \left[\sigma_x \left(\frac{du}{dx} - \epsilon_x \right) + \dots \right] dV + \int_{S_u} \bar{p}_x (u - u_0) \\ &= \iiint \left[\frac{Mz}{I} \frac{du}{dx} + \tau_{xz} \left(\frac{du}{dz} + w' \right) - \frac{\tau_{xz}^2}{2G} - \frac{\tau_{xz}^2}{2G} \left(1 + 4 \frac{y^2 b'^2}{b^2} \right) \right] dy dz dx - \int_0^L \bar{p}_x u dx \\ &= \int_0^L \int_{z_1}^{z_2} \int \left[\frac{Mz b}{I} \frac{du}{dx} + b \tau_{xz} \left(\frac{du}{dz} + w' \right) - \frac{\tau_{xz}^2}{2G} \left(b + \frac{b b'^2}{3} \right) \right] dy dz dx - \int_0^L \bar{p}_x u dx \end{aligned}$$

A. Variation sur τ_{xz}

L'annulation du coefficient de la variation donne

$$b \left(\frac{du}{dz} + w' \right) = \frac{\tau_{xz}}{G} \left(b + \frac{b b'^2}{3} \right)$$

$$\boxed{\frac{du}{dz} + w' = \frac{\tau_{xz}}{G} \left(1 + \frac{b'^2}{3} \right)} \tag{1}$$

Après deux intégrations par parties, on obtient

$$\int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{M' b}{I} \delta u \right]' dz + \int_0^l [b \tau_{xz} \delta u]_{z_1}^{z_2} dz - \int_0^l \left[\frac{dz}{I} \frac{\partial M}{\partial x} \delta u + \frac{d}{dz} (b \tau_{xz}) \delta u \right] dz dz = 0$$

- la première intégrale est nulle *per se*, en $z=0$ et $z=l$, $\int_{z_1}^{z_2} b dz =$ moment statique =
- la seconde intégrale est nulle *per se*, en $z=z_1$ et $z=z_2$, $b = \tau_{xz} = 0$.
- la troisième intégrale donne

$$M' \frac{b z}{I} + \frac{d}{dz} b \tau_{xz} = 0.$$

En intégrant de z à z_2 , on obtient

$$\frac{M'}{I} \int_z^{z_2} b(s) s ds = b(z) \tau_{xz}(z, z)$$

$$\tau_{xz} = \frac{M'}{I b(z)} \int_z^{z_2} b(s) s ds$$

(1)

C'est la formule classique des tensions de cisaillement.

On en déduit

$$T = \int_{z_1}^{z_2} b \tau_{xz} dz = \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{M' b}{I b} \int_z^{z_2} b(s) s ds \right] dz = \frac{M'}{I} \int_{z_1}^{z_2} u dz$$

$$du = \int_z^{z_2} \frac{d}{dz} [b(s) s] dz + \frac{dz}{dz} [b(z) z dz] - \frac{dz}{dz} [b(z) z dz]$$

$$\text{avec } - \int_z^{z_2} \frac{d}{dz} [b(s) s] dz = 0 \quad \text{per se et est une variable différentielle de } z$$

$$- \frac{dz}{dz} = 0$$

D'où

$$T = [u v] - \int v du$$

$$= \frac{M'}{I} \left\{ \left[z \int_z^{z_2} b(s) s ds \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz \right\}$$

$$= \frac{M'}{I} \left[\underbrace{+ z_2 \int_{z_1}^{z_2} b(s) s ds}_{=0} - \underbrace{z_1 \int_{z_1}^{z_2} b(s) s ds}_{=0 \text{ Moment stat.}} - \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz}_{=I} \right]$$

$$T = M'$$

c. Variation sur M

on obtient

$$-\frac{M}{EI} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{zb}{I} \frac{\delta u}{\delta x} dz = 0$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{I} \int_{z_1}^{z_2} bz u dz$$

Puisque, dans le second membre, seul u dépend de x , on obtient en posant

$$\alpha(x) = \frac{1}{I} \int_{z_1}^{z_2} bz u dz$$

$$M = EI \alpha'(x)$$

(4)

d. Variation de w

Dans le principe, les seuls termes où intervient w sont

$$\int_V \tau_{xz} w' dx - \int f w dx$$

Après variation et intégration par parties, on a

$$\delta w \left[\int_{z_1}^{z_2} b \tau_{xz} dz \right]_0^l - \int_0^l \int_{z_1}^{z_2} \delta w \frac{d}{dx} b \tau_{xz} dx dz - \int_0^l f \delta w dx = 0$$

Le terme aux limites peut encore s'écrire

$$[T \delta w]_0^l$$

il est toujours nul parce qu'en $x=0$ ou $x=l$ on a soit un appui $\rightarrow w=0$
 soit un déplacement $\rightarrow T=0$

Les deux termes restants donnent

$$\int_0^l - (T' + p) \delta w = 0$$

$$T' + p = 0$$

3. Remarques.

a. L'intégrale du moment statique donne le moment et l'inertie.

En effet

$$S_2(z) = \int_z^{z_2} b(z) z dz$$

avec

$$\Omega(z_1) = 0$$

$$\Omega(z_2) = 0$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = -bz$$

D'où

$$\int_{z_1}^{z_2} \Omega dz = \left[\Omega z \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} z \frac{d\Omega}{dz} dz = \int_{z_1}^{z_2} z^2 b dz = I \quad \text{par}$$

B. Détermination de la section réduite.

On a posé

$$\alpha(x) = \frac{1}{I} \int_{z_1}^{z_2} bz u dz$$

Or, on veut de voir ci-dessus que

$$bz dz = -d\Omega$$

D'où

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{I} \int_{z_1}^{z_2} u d\Omega \\ &= -\frac{1}{I} \left[u \Omega \right]_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{I} \int_{z_1}^{z_2} \Omega(z) \frac{du}{dz} dz \end{aligned}$$

Or - la première terme est nul parce que $\Omega_{z_1} = \Omega_{z_2} = 0$

$$\begin{aligned} - (1) &\rightarrow \frac{du}{dz} = -w' + \frac{2uz}{G} \left(1 + \frac{b^2}{3} \right) \\ - (2) &\rightarrow \tau_{xz} = \frac{M'}{Ib(z)} \int_{z_1}^{z_2} b(\eta) \eta d\eta = \frac{T}{Ib(z)} \Omega(z) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} - (1) \\ - (2) \end{aligned}} \right\} \rightarrow \frac{du}{dz} = -w' + G \left(1 + \frac{b^2}{3} \right) \frac{T}{I}$$

$$\alpha(x) = -\frac{w'}{I} \int_{z_1}^{z_2} \Omega dz + \frac{T}{GI^2} \int_{z_1}^{z_2} \left(1 + \frac{b^2}{3} \right) \Omega^2 dz$$

On définit l'inverse de la section réduite comme

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{I^2} \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{1}{b} + \frac{b^2}{3b} \right) \Omega^2 dz$$

Alors

$$\alpha(x) = -w' + \frac{T}{GS}$$

$$\boxed{w'' = -\frac{M'}{EI} + \frac{T'}{GS}}$$

C'est l'équation classique de la déformée en R. d. M.

VI Poutre fléchie traitée par le principe de variation des tensions.

1. Hypothèses et leurs conséquences.

On suppose que

- Les fibres sont en état de traction ou compression simple.
- L'axe est en état plan de tension.
- La loi de Hooke est applicable; c'est à dire qu'on a

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

- Les conditions d'équilibre local sont satisfaites, c. a. d. on a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0$$

Ceci est automatiquement satisfait si on part d'une fonction de tension d'Air
c. a. d. une fonction de tension telle que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$$

ce qu'on sait à l'avance sur la distribution de tension incite à choisir A telle,

- σ_x soit une fonction impaire en y
- τ_{xy} soit une fonction paire en y

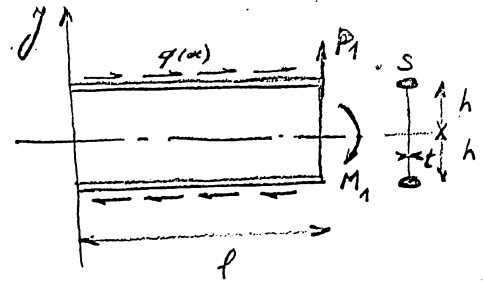
Cela suggère de prendre

$A = y B(x) + y^3 C(x) + \dots + y^5 D(x)$ et d'autres termes selon la précision désirée

$$\sigma_x = 6y C(x)$$

$$\sigma_y = y B''(x) + y^3 C''(x)$$

$$\tau_{xy} = - B'(x) - 3y^2 C'(x)$$



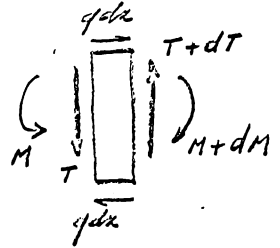
2. Equilibre global et conditions aux limites

On a

$$T = t \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} dy = t \int_{-h}^{+h} [-B'(x) - 3y^2 C'(x)] dy = -2ht [B'(x) + h^2 C'(x)] = T \quad (1)$$

$$M = t \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dy + 2Nh = t \int_{-h}^{+h} 6y^2 C(x) dy + 2Nh = 4t h^3 C(x) + 2Nh = M \quad (2)$$

On exprime l'équilibre d'une tranche



- en translation

$$T'(x) - q(x) = 0$$

$$B''(x) + h^2 C''(x) = 0 \quad (3)$$

- en rotation

$$M + dM - T dx + 2hq dx - M = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = T - 2hq$$

$$M(x) = \int T dx - 2hqx + C_1 \quad (4)$$

On exprime les conditions aux limites

$$- T(l) = P_1 \rightarrow -2ht [B'(l) + h^2 C'(l)] = P_1 \quad (5)$$

$$M(l) = M_1 \quad (6)$$

$$N(l) = N_1 \quad (7)$$

On transforme ensuite ces équations

$$(2) \rightarrow \frac{dM}{dx} = 4t h^3 C'(x) + 2h \frac{dN}{dx}$$

$$(4) \rightarrow \frac{dM}{dx} = -2ht [B'(x) + h^2 C'(x)] - 2hq \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dN}{dx}$$

$$\frac{dN}{dx} = -t [B'(x) + h^2 C'(x)] - q - 2ht C'(x)$$

$$\frac{dN}{dx} = -t B'(x) - q - 3t h^2 C'(x)$$

$$N = -t B(x) - qx - 3t h^2 C(x) + C_2$$

$$(7) \rightarrow N_1 = -t B(l) - ql - 3t h^2 C(l) + C_2 \rightarrow C_2$$

$$N = N_1 + t [B(l) - B(x)] + q(l-x) + 3t h^2 [C(l) - C(x)] \quad (8)$$

On pose ensuite, pour simplifier,

$$\left. \begin{aligned} C(x) &= \frac{\beta_1 + \beta_2 x}{R^2} \\ B'(x) &= -\beta_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \sigma_x = q \frac{\beta_1 + \beta_2 x}{h^2} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \beta_3 - \frac{3x^2}{R^2} \beta_2 \end{cases}$$

$$(1)(5) \rightarrow T(x) = -cht(-\beta_3 + \beta_2) = P_1 \quad (9)$$

$$(2) \rightarrow M(x) = 4h^3 t \frac{\beta_1 + \beta_2 x}{R^2} + 2N_1 h \quad (10)$$

(3) est automatiquement vérifié par le choix de $C(x)$, $B'(x)$

(4)(2) on tire ultérieurement pour trouver (8)

$$(6) \rightarrow M_1 = 4ht(\beta_1 + \beta_2 l) + 2N_1 h \quad (11)$$

Toutes les équations d'équilibre et aux limites ont donc été ramené au système ci-dessus.

3. Principe de variation des tensions

Il s'écrit dans sa forme générale

$$\delta \left[\iiint \phi(\sigma) dx dy dz - \iint_{S_{ex}} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v}) dx dy \right] = 0.$$

$$\text{avec } \phi(\sigma) = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \dots + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

Il s'écrit donc, le cas présent

$$\delta \left\{ t \int_0^l \int_{-h}^{+h} \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right) dx dy + \int_0^l \frac{N^2}{2ES} dx - \int_0^l q \bar{u}(x, h) dx - \int_{-h}^{+h} t \frac{\tau_{xy}}{h} \bar{v}(l, y) dy - \int_{-h}^{+h} t \sigma_x u(l, y) dy - 2N_1 \bar{u}(l, h) \right\} = 0.$$

4. Cas d'une charge P_1

Dans ce cas, on a

$$[\sigma_x]_{x=l} = 0 \rightarrow \beta_1 + \beta_2 l = 0$$

$$(11) \rightarrow 0 = 4ht \left(\frac{\beta_1 + \beta_2 l}{\epsilon_0} \right) + 2N_1 h = 0 \rightarrow N_1 = 0$$

Si, en plus, on suppose que la poutre n'a pas de semelles, on a

$$\{\tau_{xy}\}_{y=h} = 0 \rightarrow \beta_3 = 3\beta_2$$

et il reste dans ce cas

$$\sigma_x = \frac{6\gamma\beta_2(x-l)}{h^2}$$

$$\tau_{xy} = 3\beta_2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$

Pour varier les tensions, il suffit de varier β_2 ; le principe s'écrit donc

$$\epsilon \int_{-l}^{+l} \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\sigma_x \delta \sigma_x}{E} + \frac{\tau_{xy} \delta \tau_{xy}}{G} \right) dx dy - \int_{-l}^{+l} \epsilon \delta \tau_{xy} \bar{v} dy = 0$$

$$\epsilon \int_{-l}^{+l} \int_{-h}^{+h} \left[\frac{6\gamma}{h^2} \beta_2 (x-l) \cdot \frac{6\gamma}{h^2} (x-l) \delta \beta_2 + \frac{1}{G} 3\beta_2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) 3 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \delta \beta_2 \right] dx dy - \int_{-l}^{+l} 3 \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \delta \beta_2 dy \epsilon \bar{v} = 0$$

L'annulation du coefficient de $\delta \beta_2 \rightarrow \frac{4l^3}{Eh} \beta_2 + \frac{9h}{G} \frac{16}{15} h \beta_2 - 4h \bar{v} = 0$

$$(9) \rightarrow 4ht\beta_2 = P_1$$

$$\bar{v} = \frac{P_1 l^3}{3EI} + \frac{3}{5} \frac{P_1 l}{Gt}$$

avec $I = \frac{2}{3} t h^3$

Pour $E = 7500 \text{ kg/mm}^2$ $l = 1500 \text{ mm}$

$t = 10 \text{ mm}$ $\nu = 0,3$

$h = 100 \text{ mm}$ $P = 1000 \text{ kg}$

on trouve $v = 22,81 \text{ mm}$

C'est le même résultat que celui fourni par la RDM lorsque on prend en compte les effets de

4. Exercice proposé

Travailler par le principe de minimisation des tensions. Le cas est un rectangle uniformément

$$N(l) = N_1 = \int_{-h}^{+h} [\sigma_x]_{x=l} y dy + 2N_1 h$$

Réponse : $v = - \frac{N l^2}{2EI}$

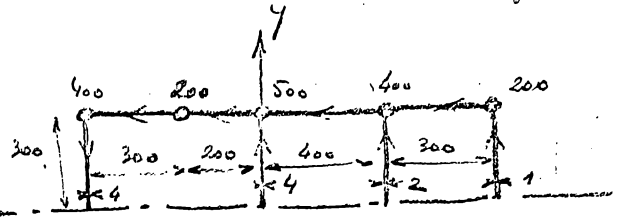
VII Calcul d'un caisson rectangulaire

1. Problème

Le caisson est demi-circulaire.

On demande :

- l'abscisse x du centre de cisaillement
- la rigidité torsionnelle de Bernoulli Navier
- l'abscisse du centre de torsion
- les moments d'inertie
- le flux ouvert
- le flux de fermeture et l'abscisse du centre de flexion-torsion.



2. Caractéristiques courants.

A. Centre de cisaillement.

Par symétrie, on a immédiatement $y_c = 0$

L'abscisse x est donnée par (voir p. 62)

$$\int a x_c dy = A y y_c$$

$$\text{avec } A y y_c = \int a \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 dz$$

$$a(z) = \frac{t}{h(z)} = t$$

Parce que, ici, l'épaisseur est censée ne pas varier avec z , on a $h(z) = 1$

$$A y y_c = \int_{-300}^{+300} (1+2+4+4) dy = 11.600 = 6600 \text{ mm}^2$$

$$\int a x_c dy = \int_{-300}^{300} (200.1 + 400.2 - 500.4) dy = -300000 \text{ mm}^3$$

$$x_c = - \frac{300000}{6600} = -45,5 \text{ mm}$$

B. Centre de torsion.

Par symétrie, on a immédiatement $y_a = 0$

L'abscisse x_G est donnée par

$$\int b(s) (x - x_G) ds + \sum_m S_m (x_m - x_G) = 0$$

Tous calculs faits on a

$$\left. \begin{aligned} \int b(s) (x - x_G) ds &= 66 \cdot 10^4 - 16200 x_G \\ \sum S_m (x_m - x_G) &= 120000 - 3400 x_G \end{aligned} \right\} \rightarrow x_G = 39,8 \approx 40 \text{ mm}$$

c. Moments d'inertie

$$I_{xx} = \int b(x - x_G)^2 ds + \sum S_m (x_m - x_G)^2 = 2843 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = \int b(y - y_G)^2 ds + \sum S_m (y_m - y_G)^2 = 1368 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

d. Rigidité torsionnelle de Bresse-Navier

Dans l'hypothèse de Navier, les sections restent planes et tournent autour du centre de cisaillement c. On a :

$$w(s, z) = F_0(z) + X_0(z) (x - x_G) + Y_0(z) (y - y_G)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = X_0(z) x' + Y_0(z) y'$$

En introduisant ces relations dans l'expression (m) de θ puis dans les expressions de la p66, on a

$$\frac{S_{xx}}{Gh} = (X_0 + u'_c) A_{xx} + (Y_0 + v'_c) A_{xy} + \theta \int a r_c dx$$

$$\frac{S_{yy}}{Gh} = (X_0 + u'_c) A_{xy} + (Y_0 + v'_c) A_{yy} + \theta \int a r_c dy$$

$$\frac{M_c}{Gh} = (X_0 + u'_c) \int a r_c dx + (Y_0 + v'_c) \int a r_c dy + \theta \cdot I_c$$

Puisque c est le centre de cisaillement

$$\int a r_c dx = \int a r_c dy = 0$$

et la dernière équation s'écrit

$$M_c = Gh I_c \theta$$

$$I_c = \int a x_c^2 ds = \int a (x_c - x_c y' - y_c x')^2 ds$$

$$= \int a x_c^2 ds - 2 \int a x_c y_c dy + \int a y_c^2 ds$$

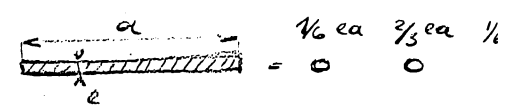
avec ici $y_c = 0$

$$I_c = 1936,4 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

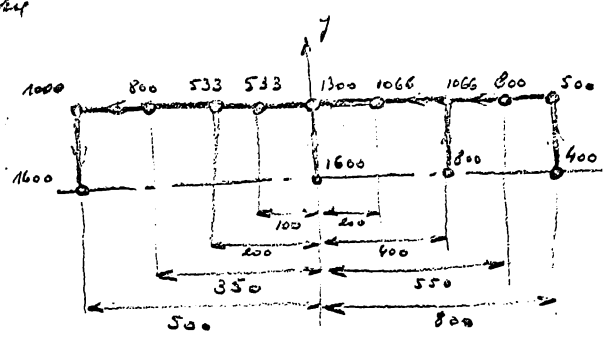
kGI_c = rigidité torsionnelle de Bernoulli Navier.

3. Calcul du flux ouvert

On commence par remplacer chaque tôle par des lignes équivalentes du point de vue effort normal



On suppose que les efforts appliqués au centre de flexion torsion sont



$$S_x = 0$$

$$S_y = 1,7$$

$$M_x = 1 \text{ Tm}$$

L'expression (20) de la p 73 donne

$$\varphi_0 = - (i_{xx} S_x + i_{xy} S_y) A_0 - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) B_0$$

comme les axes sont principaux et l'inertie

$$I_{xy} = 0 \rightarrow i_{xx} = \frac{1}{I_{xx}}, \quad i_{yy} = \frac{1}{I_{yy}}$$

$$\varphi_0 = - i_{yy} S_y B_0$$

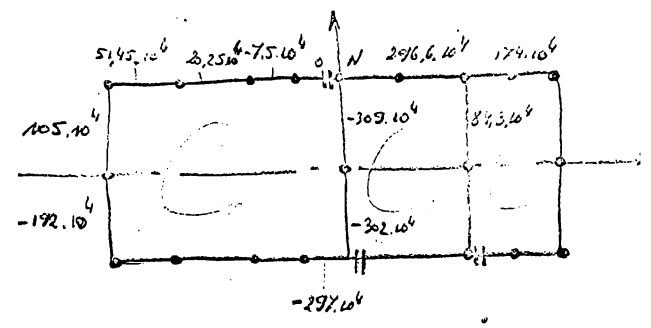
comme on s'est ramené au cas où il n'y a que des lignes, on a d'après la p 72

$$A_0 \text{ dis} = \sum A_i \cdot x_{im} + A_m (x_m - x_a)$$

Pex. pour la bouche de gauche, avant le premier noeud $A_0 \text{ dis} = 0$

après le 1er noeud

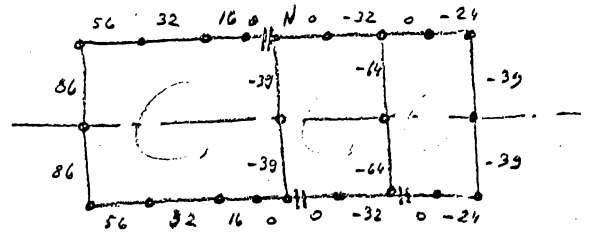
$$A_0 \text{ dis} = 0 + 533 (-100 - 40) = -7,5 \cdot 10^4$$



De même, on a

$$B_{0,dis} = \sum B_{0,cans} + A_m (\gamma_m - \gamma_a)$$

et le diagramme de $B_0/10^4$ est celui représenté ci-contre



on peut donc tracer le diagramme du flux au vent

$$q_0 = -i_{yy} S_y B_0 = -\frac{B_0}{1368}$$

4. Calcul du flux complet

Les flux de fermeture sont des solutions générales de l'équation différentielle sans second membre

$$\frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

$$T_m(q) = 0$$

On a vu à la p75 qu'ils s'expriment sous la forme générale

$$q_p = - (i_{xx} S_x + i_{yy} S_y) \alpha_p - (i_{xy} S_x + i_{yy} S_y) \beta_p + C_k \theta'_p$$

les $\alpha_p, \beta_p, \theta_p$ étant donnés par les relations en bas de la p75.

Le flux total est donné par (cf') de la p77, qui se ramène ici à

$$q = -i_{yy} S_y B + \frac{H_k}{J} \sum_i V_i \delta_i$$

A. Calcul des β_p

Les relations en bas de la p75 se ramènent ici à un système de 3 eqns. à 3

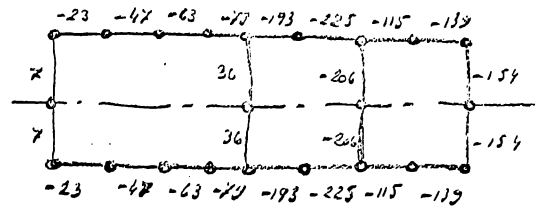
$$\left. \begin{aligned} \beta_1 \left[\frac{2200}{4} \right] - \beta_2 \frac{600}{4} + 0 &= \int_1 \frac{B_0}{a} ds \\ -\beta_1 \left[\frac{600}{4} \right] + \beta_2 \left[\frac{1900}{4} + \frac{600}{2} \right] - \beta_3 \frac{600}{2} &= \int_2 \frac{B_0}{a} ds \\ 0 - \beta_2 \left[\frac{600}{2} \right] + \beta_3 \left[\frac{600}{4} + \frac{600}{2} + 600 \right] &= \int_3 \frac{B_0}{a} ds \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \beta_1 &= 79 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 \\ \beta_2 &= 193 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 \\ \beta_3 &= 115 \cdot 10^4 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

On en déduit le diagramme des

$$B = B_0 - \sum_i \beta_i \delta_i$$

On en déduit aussi l'abscisse du centre de flexion torsion qui se réduit ici à

$$x_x = - i_{yy} \int B z \, ds = 860 \text{ mm.}$$



B. Calcul des γ_i

La relation

$$\sum_i \gamma_i \int \delta_i \delta_z \frac{ds}{a} = 2 \omega_z$$

appliquée trois fois donne ici

$$\gamma_1 = 0,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\gamma_2 = 0,81 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\gamma_3 = 0,62 \cdot 10^4 \text{ mm}^2$$

On en déduit la rigidité torsionnelle de Saint-Venant

$$J = 2 \sum_i \gamma_i \omega_i$$

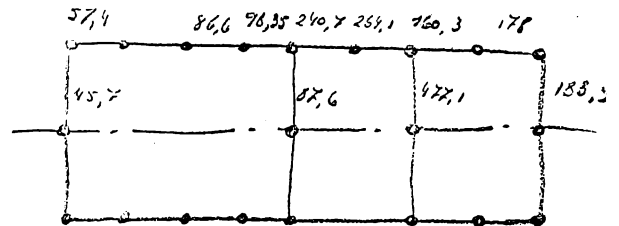
c. Diagramme du flux total

on a respectivement des q_x , q_y , q_z aux nœuds

$$q_x = -0,731 \cdot 10^{-6} B + 40,6 \cdot 10^{-2}$$

$$q_y = -0,731 \cdot 10^{-6} B + 99,63 \cdot 10^{-2}$$

$$q_z = -0,731 \cdot 10^{-6} B + 76,26 \cdot 10^{-2}$$



VIII Recherche du centre de flexion-torsion (Théorie de Weierstrass)

1. Théorie

A. Rappel.

Par l'équation (m) p 66, on a, par rapport à des axes quelconques et en particulier, par rapport à des axes passant par K :

$$\frac{q}{Gh a} = \frac{dw}{ds} + u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + r \theta'$$

$$\frac{q}{Gh a} = \frac{dw}{ds} + u_K \frac{dx}{ds} + v_K \frac{dy}{ds} + r_K \theta'$$

Par l'équation (d') p 77, on a

$$q = -S_x (i_{xx} A + i_{xy} B) - S_y (i_{xy} A + i_{yy} B) + \frac{M_K}{J} \sum_i \gamma_i \delta_i$$

La combinaison de ces deux équations donne

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{S_x}{Gh} (i_{xx} \frac{A}{a} + i_{xy} \frac{B}{a}) - \frac{S_y}{Gh} (i_{xy} \frac{A}{a} + i_{yy} \frac{B}{a}) + \frac{M_K}{Gh J} \left(\frac{\sum_i \gamma_i \delta_i}{a} - r_K \right) - u_K \frac{dx}{ds} - v_K \frac{dy}{ds}$$

Avec

- par définition des a

$$\int_i \frac{A}{a} \delta_i ds = \int_i \frac{B}{a} \delta_i ds = \sum_i \int_i \frac{\delta_i \delta_i}{a} ds - 2w_i = 0$$

- par le fait des contours fermés

$$\int_i dx = \int_i dy = 0$$

Dans l'expression de w , on peut distinguer

- la partie qui provient de l'intégration du terme avec $i_{xx} \frac{A}{a} + i_{xy} \frac{B}{a}$, soit w_x^* tel que

$$\frac{dw_x^*}{ds} = - (i_{xx} \frac{A}{a} + i_{xy} \frac{B}{a})$$

- de même

$$\frac{dw_y^*}{ds} = - (i_{xy} \frac{A}{a} + i_{yy} \frac{B}{a})$$

- de même, enfin,

$$\frac{dw_K^*}{ds} = \frac{\sum_i \gamma_i \delta_i}{a} - r_K$$

Soit au total, par intégration de $\frac{dw}{dz}$,

$$w = \frac{S_x}{Gh} w_x^* + \frac{S_y}{Gh} w_y^* + \frac{M_K^*}{GhJ} w_K^* - u_x (x - x_0) - u_K (y - y_0) - \alpha(z)$$

B. Théorie de Weingstein

Weingstein définit par 3 conditions un plan moyen dans une section gauche. Ces conditions sont :

$\int w b(s) ds + \sum w_m S_m = 0$
$\int w b(s) (x - x_0) ds + \sum w_m S_m (x - x_0) = 0$
$\int w b(s) (y - y_0) ds + \sum w_m S_m (y - y_0) = 0$

Si on prend l'origine des axes au point G dans la section d'encastrement et si seul un moment M_K est appliqué, toute la section tourne autour d'un axe passant par K (définition du centre de flexion-torsion) et l'expression de w se réduit :

$$S_x = S_y = u_x = u_K = 0$$

$$w = \frac{M_K}{GhJ} w_K^* - \alpha(z)$$

On écrit w sous la forme

$$w = w_K^* - w_0$$

et, en vérifiant les 3 conditions de Weingstein, on doit retrouver les coordonnées de K

- La première condition donne

$$\int w_K^* b(s) ds + \sum w_{K_m}^* S_m - w_0 \left[\int b(s) ds + S_m \right]$$

Cette première condition peut être satisfaite en choisissant w_0 .

- Avant d'introduire la seconde condition, on pose (voir p. 72)

$$\frac{dA}{ds} = b(x - x_0)$$

$$\frac{dB}{ds} = b(y - y_0)$$

- la seconde condition donne

$$\int w_k^* dA + \sum S_m (x_m - x_a) w_{km}^* - w_0 \left[\int b(x - x_a) ds + \sum S_m (x - x_a) \right] = 0$$

- Le dernier terme est nul par définition du moment statique.

- le second peut être remplacé (voir p 72)

$$\sum_m S_m (x_m - x_a) w_{km}^* = \sum_m T_m(A) w_{km}^*$$

- par la relation (i) de transformation, la condition se ramène à

$$- \int A \frac{dw_k^*}{ds} ds + \sum T_m (w_{km}^* A) - \sum w_{km}^* T_m(A) = 0$$

$$- \int A \frac{dw_k^*}{ds} ds + w_{km}^* \sum T_m(A) - \sum w_{km}^* T_m(A) = 0$$

$$\int A \frac{dw_k^*}{ds} ds = 0$$

- enfin, par définition de w_k^* (p 38), la seconde condition se ramène à

$$\sum_i \gamma_i \int \delta_i \frac{A}{a} ds - \int A z_x ds = 0$$

la première intégrale est nulle sur une boucle, la seconde est une des exigences du centre de flexion-torsion (voir p 77)

- la troisième condition donnerait de même

$$\int B z_x ds = 0$$

donc les conditions de Weinstein se ramènent bien à des conditions de flexion-torsion de centre de flexion-torsion.

2. Cas d'un cylindre fin de t ; calcul de K par la méth. gén.

on a immédiatement

$$x_G = y_G = 0$$

$$I_{xx} = \int t(x-x_G)^2 ds = \int_0^{2\pi} tR^3 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= tR^3 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi tR^3$$

$$I_{yy} = I_{xx} = \pi tR^3$$

$$i_{xx} = \frac{1}{I_{xx}} = \frac{1}{\pi tR^3} = i_{yy}$$

$$A_\theta = A(\theta) = \int t(x-x_G) ds = \int_0^\theta tR^2 \cos \theta d\theta = tR^2 \sin \theta$$

$$B_\theta = B(\theta) = \int t(y-y_G) ds = \int_0^\theta tR^2 \sin \theta d\theta = -tR^2(\cos \theta - 1)$$

$$x_K = -i_{xy} \int A_\theta ds - i_{yy} \int B_\theta ds$$

Vu la symétrie $i_{xy} = 0$ et il reste

$$x_K = \frac{1}{\pi tR^3} \int_0^{2\pi} -tR^2(\cos \theta - 1) R^2 d\theta$$

$$= \frac{tR^4}{\pi tR^3} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - 1) d\theta$$

$$= -\frac{2\pi R^4 t}{\pi R^3 t}$$

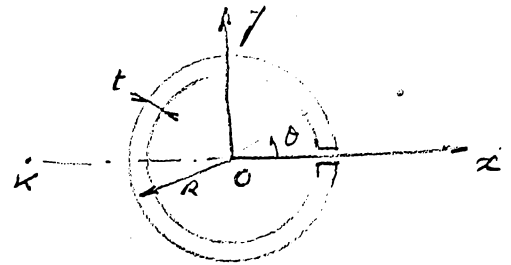
$$x_K = -2R$$

$$y_K = -i_{xx} \int A_\theta ds + i_{xy} \int B_\theta ds$$

Vu la symétrie $i_{xy} = 0$

la première intégrale est nulle ; donc

$$y_K = 0$$



3. Cas d'un cylindre fermé ; calcul de κ par la méth. de Weinstein.

comme il n'y a pas de flux de jonction, les γ sont nuls et l'équation de définition de x_k se réduit à

$$\frac{dw_k^*}{ds} = -x_k$$

or

$$x_k = x_0 - x_k \frac{dy}{ds} + \gamma_k \frac{dz}{ds}, \quad x_0 = R$$

Il en résulte, en introduisant cette expression de R_k

$$w_k^* = \int_0^\theta (R^2 + R x_k \cos \theta + R \gamma_k \sin \theta) d\theta$$

$$w_k^* = -R^2 \theta + R x_k \sin \theta - R \gamma_k \cos \theta$$

Les deux dernières conditions de Weinstein donnent

$$- \int w_k^* b (x - x_0) ds = 0$$

$$\int_0^{2\pi} w_k^* t R^2 \cos \theta d\theta = 0$$

$$t R^3 \int_0^{2\pi} [-R\theta + x_k \sin \theta - \gamma_k (\cos \theta - 1)] \cos \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} [R\theta \cos \theta + x_k \frac{\sin 2\theta}{2} - \gamma_k (\cos^2 \theta - \cos \theta)] d\theta = 0$$

$$\left[\frac{R\theta \sin \theta}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{2} R d\theta - \gamma_k \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - \cos \theta) d\theta = 0$$

$$\gamma_k = 0$$

$$- \int w_k^* b (\gamma - \gamma_0) ds = 0$$

$$\int_0^{2\pi} w_k^* t R^2 \sin \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} [(-R\theta + x_k \sin \theta) - \gamma_k (\cos \theta - 1)] \sin \theta d\theta = 0$$

$$\left[R\theta \cos \theta \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} R \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} x_k \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$2\pi R + x_k \pi = 0$$

$$x_k = -2R$$

4. Cas d'un cylindre fermé

On ferme le tube et on obtient une maille avec

$$A = A_0 - \alpha_1 \delta_1$$

$$B = B_0 - \beta_1 \delta_1$$

$$\sum_i \alpha_i \int \delta_i \delta_{1,2} \frac{ds}{a} = \int \frac{A_0}{a} \delta_{1,2} ds \rightarrow \alpha_1 \int \frac{ds}{a} = \int \frac{A_0}{a} ds = 0 \quad (\text{Voir calcul de } A_0)$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\sum_i \beta_i \int \delta_i \delta_{1,2} \frac{ds}{a} = \int \frac{B_0}{a} \delta_{1,2} ds \rightarrow \beta_1 \int \frac{ds}{a} = \int \frac{B_0}{a} ds = R^3 2\pi \quad (\text{Voir } B_0)$$

$$\beta_1 \frac{2\pi R}{t} = R^3 2\pi$$

$$\beta_1 = t R^2$$

$$A = A_0$$

$$B = B_0 - t R^2$$

Par la méthode générale, on trouve

$$y_K = 0$$

$$x_K = -2R + \int \text{cyc} \beta_1 R ds$$

$$= -2R + 2R$$

$$x_K = 0$$

} comme on pourrait s'y attendre.

La rigidité torsionnelle de St Venant est calculée par

$$\sum_i \gamma_i \int \delta_i \delta_{1,2} \frac{ds}{a} = 2 \omega_K \rightarrow \gamma_i \frac{2\pi R}{t} = 2\pi R^2 \rightarrow \gamma_i = R t$$

$$J = 2 \sum_i \gamma_i \omega_i \rightarrow J = 2\pi R^3 t$$

Et, si on suppose l'épaisseur constante par rapport à z

$$M_K = G t J \frac{d\theta}{dz}$$

$$= G 2\pi R^3 t \frac{d\theta}{dz}$$

$$= G I_c \frac{d\theta}{dz}$$

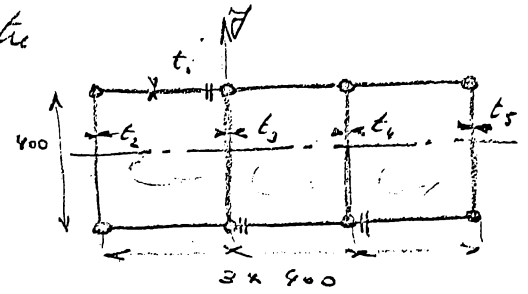
Si pour calculer x_K et y_K on utilisait la méthode de Weierstrass

on partirait avec $\frac{dw_K^*}{ds} = \frac{\sum \gamma_i \delta_i}{a} - \tau_i$

IX Exercice proposé

1. Énoncé

Soit la poutre en caisson représentée ci-contre



On demande

- l'abscisse x_c du centre de cisaillement.
- la rigidité bimomentale de Bresse-Bernoulli-Navier.

$$I_c = \int a^2 c^2 ds$$

- l'abscisse du centroïde.
- les moments d'inertie I_{xx} et I_{yy}
- les moments statiques (en remplaçant chaque toile entre 2 lins par 3 lins équivalents ; cf. ex. VII)
- les flux ouverts, A_1 et B_1 . (Voir coupures ci-dessus)
- les flux de fermeture.
- l'abscisse x_K du centre de flexion torsion.

Données particulières

Type	Lins	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$S_y (T)$	$M_K (Txm)$
1	200mm ²	4mm	4	4	4	2	1	2
2	300	4	4	4	2	1	2	1
3	400	4	4	4	3	2	1	1
4	500	4	4	3	3	2	2	2
5	600	4	4	4	2	2	1	1
6	700	4	2	2	4	4	2	1