

n° inventaire 69504

UNIVERSITE DE LIÈGE

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUÉES

NOTES
DE
MECANIQUE DES FLUIDES

TOME I

PAR

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

PROFESSEUR A L'UNIVERSITE

1968

I. Cinématique d'un milieu continu.

I. Description eulérienne du champ des vitesses.

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées cartésiennes d'une particule. Ce sont des fonctions du temps t , dont les dérivées

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.1})$$

sont les composantes cartésiennes du vecteur vitesse \vec{u} de cette particule. Le champ des vitesses de l'écoulement est connu quand on en possède les valeurs des composantes en tout point et pour toute valeur du temps. Cette connaissance des fonctions $u_i(x_j, t)$ constitue une "description eulérienne" du champ des vitesses.

2. Trajectoires et coordonnées de Lagrange.

L'équation de la trajectoire décrite par une particule s'obtient en intégrant le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{u_1(x_j, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_j, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_j, t)} = dt \quad (\text{I.2})$$

L'intégration fait apparaître trois constantes arbitraires (a_1, a_2, a_3) . Un système complet d'intégrales, résolu par rapport à ces constantes, sera de la forme

$$a_i = A_i(x_j, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.3})$$

Comme les a_i sont des constantes pour une particule déterminée, les équations (I.3) représentent trois surfaces qui se déplacent et se déforment avec le temps; la particule est constamment située à leur intersection. Les trois valeurs (a_1, a_2, a_3) qui caractérisent ainsi une particule donnée et permettent de déterminer sa trajectoire à l'aide des intégrales (I.3) sont ses "coordonnées de Lagrange". Pour former un système complet, les intégrales (I.3) ne peuvent être liées par une identité

$$F(A_1(x_j, t)) \equiv 0$$

Par conséquent pour toute valeur du temps le jacobien

$$\frac{D(A_1, A_2, A_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \quad (\text{I.4})$$

Dans le voisinage d'une intersection les trois surfaces n'ont alors pas d'autre point commun correspondant aux mêmes valeurs des coordonnées de Lagrange et on peut en principe résoudre les relations (I.3) par rapport aux coordonnées cartésiennes

$$x_j = X_j(a_i, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{I.5})$$

Ce sont, pour une particule (a_1, a_2, a_3) donnée, les équations paramétriques en t de sa trajectoire. Les composantes cartésiennes de sa vitesse s'en dédui-

sont par

$$\frac{\partial X_j}{\partial t} = U_j (a_i, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.6)$$

Elles sont ici exprimées comme fonctions des variables (a_i, t) et constituent la "description lagrangienne" du champ des vitesses.

De même, le champ des accélérations est fourni en description de Lagrange par les composantes $\partial^2 X_j / \partial t^2$.

Soient (x_1^0, x_2^0, x_3^0) les coordonnées cartésiennes d'une particule à une époque conventionnelle que nous pouvons toujours, sans nuire à la généralité, caractériser par $t = 0$. Nous tirons de (I.3) ses coordonnées de Lagrange

$$a_i = A_i (x_j^0, 0) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.7)$$

Comme d'autre part la propriété (I.4) est valable pour $t = 0$, nous voyons que les équations (I.7) constituent un changement de variables lagrangiennes. Les formules de transformation inverse sont, selon (I.5)

$$x_j^0 = X_j (a_i, 0) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.8)$$

En d'autres termes, les coordonnées cartésiennes d'une particule à une époque repère conventionnelle sont des coordonnées de Lagrange particulières auxquelles il est toujours possible de se ramener en principe. Un tel choix n'est cependant pas nécessairement le plus commode.

3. Lignes de courant.

Contrairement au cas d'une trajectoire, une ligne de courant est définie à une époque $t = \xi$ déterminée et est constituée de particules différentes. Un élément d'arc $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ d'une ligne de courant est orienté suivant la vitesse de la particule occupant l'origine de l'élément à l'époque considérée. Les équations différentielles d'une ligne de courant seront donc

$$\frac{\delta x_1}{u_1(x_j, \xi)} = \frac{\delta x_2}{u_2(x_j, \xi)} = \frac{\delta x_3}{u_3(x_j, \xi)} \quad (I.9)$$

Deux intégrales distinctes de ces équations

$$G_1(x_j, \xi) = c_1 \quad (I.10)$$

$$G_2(x_j, \xi) = c_2$$

représentent deux familles de surfaces dont les intersections sont les lignes recherchées. Ces surfaces et les lignes de courant se modifient en général quand on change le paramètre ξ .

4. Lignes d'émission.

Une ligne d'émission est, à une époque t déterminée, le lieu formé des particules qui ont passé (et qui vont passer) par un point donné $E(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ de l'espace. Cherchons d'abord les coordonnées de Lagrange de la particule passant par E à l'instant t : par (I.3)

$$a_i = A_i(\hat{x}_j, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

et substituons ces données dans (I.5) pour l'époque t . Il vient :

$$x_j = X_j(A_i(\hat{x}_k, t), t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.II)$$

Ce sont les équations paramétriques en t de la ligne d'émission du point E à l'époque t . Cette ligne se modifie en général suivant l'époque considérée.

5. Cas du mouvement permanent.

Le champ des vitesses est dit "permanent" si sa représentation eulérienne est indépendante du temps. Suivant cette définition on a par (I.I)

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.I2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.I3)$$

cherchons la structure particulière qui lui correspond pour la description lagrangienne de mouvement. Observons à cet effet que les deux premières équations différentielles du système (I.2) des trajectoires deviennent en vertu de (I.I2-I3) identiques aux équations différentielles (I.9) des lignes de courant et fournissent deux intégrales indépendantes du temps

$$a_i = A_i(x_j) \quad (i = 1, 2) \quad (I.I4)$$

Elles représentent deux familles à un paramètre de surfaces fixes, dont les intersections, également fixes, définissent aussi bien les trajectoires que les lignes de courant. En tant que trajectoires ces lignes peuvent être, pour une particule donnée, graduées dans le temps à l'aide d'une troisième intégrale de (I.2). Le temps étant maintenant une variable séparée, cette troisième intégrale est de la forme

$$a_3 + t = A_3(x_j) \quad (I.I5)$$

Résolues par rapport aux coordonnées cartésiennes, les intégrales (I.I4) et (I.I5) fournissent finalement du mouvement permanent la représentation lagrangienne particulière

$$x_j = X_j(a_1, a_2, a_3 + t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (I.I6)$$

Toutes les particules dont les deux premières coordonnées lagrangiennes sont les mêmes suivent donc la même trajectoire ou sont situées sur la même ligne de courant. Il est également intuitif qu'une trajectoire devient ligne d'émission pour chacun de ses points. En effet, exprimant dans (I.I4) et (I.I5) que les coordonnées d'une particule sont celles (\hat{x}_1) d'un point d'émission à l'époque t

$$A_1(\bar{x}_1) = a_1 \quad A_2(\bar{x}_1) = a_2 \quad A_3(\bar{x}_1) = a_3 + t$$

et substituant ceci dans (I.16) pour $t = \xi$

$$x_j = X_j (A_1(\bar{x}_1), A_2(\bar{x}_1), A_3(\bar{x}_1) - t + \xi) \quad (I.17)$$

Ce sont des équations paramétriques en t pour la ligne d'émission de $E(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ à l'époque ξ . Elles ne diffèrent des équations paramétriques (I.16) d'une trajectoire que par une transformation linéaire du paramètre. Trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission peuvent être relevées par des techniques expérimentales variées. Si le champ des vitesses est permanent ces courbes doivent s'identifier l'une à l'autre.

6. Analyse locale du champ des vitesses.

Analysons le champ des vitesses dans le voisinage d'un point P à une époque donnée. Pour faciliter l'écriture nous pouvons toujours, à l'aide de translations appropriées, ramener l'époque considérée à $t = 0$ et les coordonnées de P à $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Si le champ des vitesses est différentiable en P , on peut écrire pour sa partie principale

$$u_i(x_j, 0) = u_i(0, 0) + \sum_j x_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.18)$$

Les termes négligés peuvent, par définition de la différentiabilité, être rendus arbitrairement petits par rapport aux termes conservés en limitant le voisinage du point P , c'est-à-dire les écarts x_j . Dénotons par

$$A = \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_0 \right\} \quad (I.19)$$

la matrice des gradients du champ au point P . Sa partie symétrique sera notée

$$\frac{1}{2} (A + A') = \Theta = \{ \theta_{ij} \} \quad (I.20)$$

et ses éléments auront donc pour valeur

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_0 = \theta_{ji} \quad (I.21)$$

La partie symétrique gauche sera notée

$$\frac{1}{2} (A - A') = \Omega = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (I.22)$$

Elle ne contient que trois éléments distincts : les composantes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ d'un pseudo-vecteur ω . Si la suite d'indices (i, j, k) est une permutation cyclique de la suite $(1, 2, 3)$, on trouve pour composantes du pseudo-vecteur les valeurs

$$\omega_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (I.23)$$

Dès lors, comme

$$A = \theta + \Omega \quad (I.24)$$

les relations (I.18) se laissent mettre sous la forme

$$u_k(x_j, 0) = u_k(0, 0) + (\omega_i x_j - \omega_j x_i) + \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \quad (I.25)$$

avec

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \theta_{ij} x_i x_j \quad (I.26)$$

Sous forme vectorielle, les trois relations (I.25) s'écrivent

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \text{grad } \psi \quad (I.27)$$

Cette décomposition du champ des vitesses, due à Helmholtz (I), fait apparaître :

- 1) un champ de translation d'ensemble avec la vitesse \vec{u}_0 du point P,
- 2) un champ de rotation d'ensemble autour d'un axe passant par P, caractérisé par le pseudo-vecteur rotation $\vec{\omega}$. On sait en effet par la mécanique analytique que \vec{r} étant le vecteur de position d'un point Q (de coordonnées x_i) par rapport à un point de l'axe de rotation (ici le point P), le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{r}$ fournit la vitesse en Q due à la rotation. L'axe de la rotation est le support du pseudo-vecteur et le module de ce dernier est égal à la vitesse angulaire. En mécanique des fluides le pseudo-vecteur $\vec{\omega}$ a reçu le nom de "vecteur tourbillon".
- 3) un champ de vitesses de déformation pure, gouverné par un potentiel ψ .

Dans un changement de repère cartésien

$$x_p = \sum_{p'} x_{p'} \cos(p, p') \quad x_{p'} = \sum_p x_p \cos(p, p') \quad (I.28)$$

les cosinus directeurs entre anciens et nouveaux axes obéissent aux relations d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \sum_p \cos(p, p') \cos(p, r') &= \delta_{p'r'} \\ \sum_{p'} \cos(p, p') \cos(r, p') &= \delta_{pr} \end{aligned} \quad (I.29)$$

(I) Ueber integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche der wirbelbewegung entsprechen. Crelles J. 55, 25 (1858).

où les seconds membres sont les symboles de Kronecker

$$\delta_{pr} = 0 \quad \text{si } p \neq r \\ = 1 \quad \text{si } p = r.$$

Lors du changement de repère, le vecteur vitesse, qui est un vecteur polaire ou tenseur cartésien du premier ordre, voit ses coordonnées subir la transformation suivante

$$u_{q'} = \sum_q u_q \cos(q, q') \quad u_q = \sum_{q'} u_{q'} \cos(q, q') \quad (I.30)$$

On en déduit la règle de transformation des éléments de la matrice des gradients

$$\frac{\partial u_{q'}}{\partial x_{p'}} = \sum_q \frac{\partial u_q}{\partial x_{p'}} \cos(q, q') = \sum_q \sum_p \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_{p'}} \cos(q, q')$$

ou, finalement

$$\frac{\partial u_{q'}}{\partial x_{p'}} = \sum_p \sum_q \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \cos(p, p') \cos(q, q') \quad (I.31)$$

De même

$$\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = \sum_{p'} \sum_{q'} \frac{\partial u_{q'}}{\partial x_{p'}} \cos(p, p') \cos(q, q') \quad (I.32)$$

Ce sont les lois de transformation d'un tenseur cartésien à deux indices. Par échange des indices p et q et simultanément des indices p' et q' il est clair que les éléments de la matrice transposée A' obéissent aux mêmes lois de transformation. Les éléments de la matrice Θ , définie par (I.20) et (I.21), sont donc les coordonnées d'un tenseur symétrique du second ordre : le tenseur des vitesses de déformation. D'où les formules

$$\Theta_{p'q'} = \sum_p \sum_q \Theta_{pq} \cos(p, p') \cos(q, q') \quad (I.33)$$

$$\Theta_{pq} = \sum_{p'} \sum_{q'} \Theta_{p'q'} \cos(p, p') \cos(q, q')$$

La même conclusion peut être tirée en ce qui concerne les éléments Ω_{pq} de la matrice Ω définie par (I.22)

$$\Omega_{p'q'} = \sum_p \sum_q \Omega_{pq} \cos(p, p') \cos(q, q')$$

Un regroupement des termes au second membre, tenant compte du caractère symétrique gauche de Θ , fournit

$$\begin{aligned} \Omega_{p'q'} &= \Omega_{12} (\cos(1, p') \cos(2, q') - \cos(2, p') \cos(1, q')) \\ &+ \Omega_{23} (\cos(2, p') \cos(3, q') - \cos(3, p') \cos(2, q')) \\ &+ \Omega_{31} (\cos(3, p') \cos(1, q') - \cos(1, p') \cos(3, q')) \end{aligned}$$

L'échange des indices p' et q' montre que le caractère de symétrie gauche est conservé dans le nouveau repère. Dès lors, si (p', q', r') est une permutation cyclique de $(1, 2, 3)$, la formule précédente peut mettre en évidence la loi de transformation des composantes strictes w_p de Ω :

$$w_{p'q'} = w_{r'} = \sum_p w_p \Omega_{pr'} \quad (I.34)$$

où $\Omega_{pr'}$ désigne le mineur de l'élément $\cos(p, r')$ dans le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(1, 1') & \cos(1, 2') & \cos(1, 3') \\ \cos(2, 1') & \cos(2, 2') & \cos(2, 3') \\ \cos(3, 1') & \cos(3, 2') & \cos(3, 3') \end{vmatrix}$$

les formules bien connues de la théorie des déterminants

$$\sum_{r'} \cos(r, r') \Omega_{pr'} = \Delta \delta_{rp}$$

permettent finalement de mettre la loi de transformation (I.34) sous une forme

$$\sum_{r'} w_{r'} \cos(r, r') = w_r \Delta \quad (I.35)$$

qui rappelle celle des coordonnées d'un vecteur. Elle n'en diffère que par la présence du facteur Δ et celui-ci est égal à ± 1 si le nouveau repère conserve le sens (dextrogyre ou lévogyre) de l'ancien. S'il y a changement de sens, Δ est égal à -1 . Le vecteur $\vec{\Omega}$, formé des composantes strictes d'un tenseur symétrique gauche, est donc sensible aux changements de sens du repère : c'est un pseudo-vecteur.

De même, le produit vectoriel de deux vecteurs polaires \vec{A} et \vec{B} est un pseudo-vecteur. Il suffit pour le voir de considérer le tenseur cartésien du second ordre : produit tensoriel de \vec{A} et de \vec{B} , dont les coordonnées sont les éléments de la matrice

$$C = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

Le tenseur symétrique gauche correspondant $C - C'$ a précisément pour composantes strictes les coordonnées du produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$.

Par contre, comme l'exige le sens physique de la décomposition (I.27), le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ est un vecteur polaire. La sensibilité au changement de sens du repère a disparu du fait qu'un des deux facteurs est lui-même un pseudo-vecteur.

Quant au potentiel ψ , c'est un invariant. En effet, appliquant successivement les formules (I.33) et (I.28)

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_q \theta_{pq} x_p x_q = \frac{1}{2} \sum_{p'} \sum_{q'} \theta_{p'q'} \left(\sum_p x_p \cos(p,p') \right) \left(\sum_q x_q \cos(q,q') \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p'} \sum_{q'} \theta_{p'q'} x_{p'} x_{q'}\end{aligned}$$

7. Vitesses de dilatation et de glissement. Directions principales et invariants de la déformation pure.

Le champ des vitesses correspondant aux deux premières parties de la décomposition de Helmholtz est compatible avec celui d'une particule rigide. Pour étudier la signification physique des coordonnées du tenseur des vitesses de déformation nous portons uniquement l'attention sur le terme grad ψ ; ceci revient à analyser le champ dans un repère local dont l'origine serait entraînée avec le point P et les axes orientés par la rotation $\vec{\omega}$.

Au point Q ($x_1, 0, 0$) à l'époque $t = 0$, les composantes de grad ψ sont $(x_1 \theta_{11}, x_1 \theta_{12}, x_1 \theta_{13})$. Par conséquent, après un intervalle de temps élémentaire dt , les nouvelles coordonnées de Q seront devenues $(x_1(1+\theta_{11} dt), x_1 \theta_{12} dt, x_1 \theta_{13} dt)$ et sa distance à l'origine P

$$|x_1| \sqrt{1 + 2 \epsilon_1}$$

avec
$$\epsilon_1 = \theta_{11} dt + \frac{1}{2} (\theta_{11}^2 + \theta_{12}^2 + \theta_{13}^2) dt^2 .$$

Négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, cette distance vaut

$$|x_1| (1 + \epsilon_1) \approx |x_1| (1 + \theta_{11} dt) .$$

La vitesse avec laquelle s'accroît la distance PQ est donc $|x_1| \theta_{11}$ et, divisant ceci par la distance primitive $|x_1|$, on voit qu'on peut reconnaître à θ_{11} la nature d'un accroissement spécifique de longueur par unité de temps, ou vitesse de dilatation linéaire dans la direction 1 au point P.

De même, θ_{22} et θ_{33} sont respectivement les vitesses de dilatation linéaire en P dans les directions 2 et 3.

Considérons maintenant, en même temps que celles de Q, les nouvelles coordonnées $(x_2 \theta_{21} dt, x_2(1 + \theta_{22} dt), x_2 \theta_{23} dt)$ du point R, primitivement situé en $(0, x_2, 0)$. Le produit scalaire des nouveaux vecteurs de position est

$$\begin{aligned}x_1 x_2 \{ (1 + \theta_{11} dt) \theta_{21} dt + \theta_{12} dt (1 + \theta_{22} dt) + \theta_{13} dt \theta_{23} dt \} = \\ 2 x_1 x_2 \theta_{12} dt\end{aligned}$$

en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur. Le même produit scalaire peut s'écrire

$$|x_1| \sqrt{1 + 2 \epsilon_1} |x_2| \sqrt{1 + 2 \epsilon_2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - d \alpha_{12} \right)$$

où $d\alpha_{12}$ représente la diminution subie par l'angle, primitivement droit, entre les directions PQ et PR . Prenant x_1 et x_2 positifs, pour que ces directions soient elles-mêmes coïncidant primitivement avec les axes 1 et 2 du repère, réalisant au même ordre d'approximation et égalant au résultat précédent :

$$x_1 x_2 d\alpha_{12} = 2 x_1 x_2 \theta_{12} dt \quad \text{soit} \quad 2 \theta_{12} = \frac{d\alpha_{12}}{dt}$$

On trouverait de même que $2 \theta_{23}$ et $2 \theta_{31}$ sont respectivement les vitesses de diminution des angles entre des directions primitivement alignées sur les axes 2 et 3 d'une part, 3 et 1 d'autre part. Revenant aux formules (I.2I) nous dirons que

$$\gamma_{1j} = 2 \theta_{1j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \quad i \neq j$$

sont les vitesses de glissement associées aux paires de directions indicées.

Nous dirons qu'un point Q est situé sur une direction principale de la déformation si les coordonnées x_i de son vecteur de position \vec{r} relativement à P obéissent aux relations de proportionnalité

$$\frac{\partial \psi / \partial x_1}{x_1} = \frac{\partial \psi / \partial x_2}{x_2} = \frac{\partial \psi / \partial x_3}{x_3} = \theta$$

Cette définition, vectoriellement équivalente à

$$\text{grad } \psi = \theta \vec{r}$$

est justifiée par le caractère homogène du système linéaire qui en résulte pour la recherche de ces coordonnées :

$$\sum_j \theta_{1j} x_j = \theta x_1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.36})$$

De moment que (x_i) est une solution non triviale de ce système, (αx_i) où α est un scalaire arbitraire en est une autre.

Tous les points d'une droite PQ vérifient le système (I.36) du moment qu'un seul de ses points, autre que P , le fait.

En notation matricielle, le système (I.36) pour la recherche d'une direction principale s'écrit

$$\theta r = \theta r \quad (\text{I.37})$$

où r est la matrice unicolonne $\{ x_i \}$ représentant le vecteur \vec{r} dans le repère utilisé. Le problème posé est donc celui de la recherche des vecteurs propres r et valeurs propres θ de la matrice symétrique θ . Les valeurs propres sont les racines de l'équation algébrique du troisième degré en θ

$$\begin{vmatrix} \theta_{11} - \theta & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - \theta & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} - \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I.38})$$

qui rendent compatibles les équations (I.36). La théorie des valeurs propres nous apprend que ces racines sont réelles ainsi que les vecteurs propres, définis à un facteur scalaire près, qui leur sont associés. Ainsi la déformation

possède au moins trois directions principales réelles. Si les trois racines, qui seront notées θ_α , θ_β et θ_γ sont distinctes, les trois directions associées sont orthogonales. Si une racine est double, la déformation possède un plan dans lequel toutes les directions sont principales et, associée à l'autre racine, une direction principale perpendiculaire à ce plan. Enfin pour une racine triple, toutes les directions sont principales.

Dans un repère orienté suivant des directions principales, la matrice du tenseur des vitesses de déformation se ramène à la forme diagonale

$$\theta = \begin{vmatrix} \theta_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \theta_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\gamma \end{vmatrix}$$

Les valeurs propres sont donc les vitesses de dilatation linéaire suivant les directions principales et les vitesses de glissement associées aux directions principales sont nulles. Le potentiel prend la forme

$$\psi = \frac{1}{2} (x_\alpha^2 \theta_\alpha + x_\beta^2 \theta_\beta + x_\gamma^2 \theta_\gamma)$$

Dans le langage de la géométrie analytique on dira que la famille des quadriques $\psi = \text{constante}$ a été ramenée à ses axes principaux.

A partir du système (I.36) il est facile de montrer que les vecteurs propres sont des vecteurs polaires et les valeurs propres des invariants. Ceci est par ailleurs évident si l'on observe que, le potentiel ψ étant invariant, les axes principaux des quadriques $\psi = \text{constante}$ ont une orientation indépendante du repère et que les valeurs propres sont les vitesses de dilatation linéaire suivant ces axes. Développons alors l'équation (I.38) aux valeurs propres et ordonnons-la selon les puissances de θ

$$-\theta^3 + \theta_1 \theta^2 - \theta_2 \theta + \theta_3 = (\theta_\alpha - \theta)(\theta_\beta - \theta)(\theta_\gamma - \theta) = 0 \quad (\text{I.39})$$

Les racines étant des invariants, il en est de même des coefficients : ce sont les invariants fondamentaux du tenseur des vitesses de déformation

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} = \theta_\alpha + \theta_\beta + \theta_\gamma \quad (\text{I.40})$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_{11} \theta_{22} + \theta_{22} \theta_{33} + \theta_{33} \theta_{11} - (\theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2) \\ &= \theta_\alpha \theta_\beta + \theta_\beta \theta_\gamma + \theta_\gamma \theta_\alpha \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

$$\theta_3 = \begin{vmatrix} \theta_{ij} \end{vmatrix} = \theta_\alpha \theta_\beta \theta_\gamma \quad (\text{I.42})$$

La signification du premier invariant fondamental est liée au changement de volume d'une particule. Les vitesses de glissement étant nulles dans un repère de directions principales, un petit parallépipède rectangle de volume primitif $dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma$ reste rectangle à l'époque dt , où son volume est devenu

$dx_\alpha(1 + \theta_\alpha dt) dx_\beta(1 + \theta_\beta dt) dx_\gamma(1 + \theta_\gamma dt)$ par suite de la dilatation des arêtes. Négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur, nous trouvons pour l'accroissement de volume l'expression

$$dx_x dx_y dx_z (\theta_x + \theta_y + \theta_z) dt$$

Par conséquent l'invariant $\theta_1 = \theta_x + \theta_y + \theta_z$ est la vitesse d'accroissement spécifique de volume ou vitesse de dilataion cubique au point P considéré, (voir (I.40) et les définitions (I.21)) on trouve aussi pour la vitesse de dilataion cubique

$$\theta_1 = \sum_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{u} \quad (I.43)$$

donnant ainsi le même sens physique au scalaire "divergence du vecteur vitesse" et établissant son caractère d'invariance.

Le second invariant fondamental θ_2 est plus avantageusement interprété en relation avec le premier. Il y a en effet intérêt à imaginer une décomposition de la déformation pure en deux parties :

- la première est un changement de volume respectant l'homothétie par rapport à P de la particule,
- la seconde est un changement de forme de la particule sans changement de volume ou "distortion".

Cette décomposition revient à considérer la matrice θ comme une somme

$$\theta = \begin{vmatrix} 1/3 \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \theta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta_{11} - 1/3 \theta_1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} - 1/3 \theta_1 & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} - 1/3 \theta_1 \end{vmatrix} \quad (I.44)$$

Le premier terme représente un tenseur isotrope avec vitesse de dilataion linéaire égale dans toutes les directions, ce qui respecte l'homothétie de la particule tout en rendant compte de la totalité de la vitesse de dilataion cubique. Le second terme représente le tenseur "déviateur" dont le premier invariant fondamental est nul par construction. Le second invariant θ_2 du déviateur s'obtient à partir de (I.41) en remplaçant les vitesses de dilataion linéaire θ_{ij} par les mêmes quantités diminuées de $1/3 \theta_1$. On trouve

$$\theta_2 = \theta_2 - \frac{1}{3} \theta_1^2 \quad (I.45)$$

On trouve aussi en remplaçant θ_1 et θ_2 par leurs expressions en fonction des θ_{ij} l'expression remarquable

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{6} \left((\theta_{11} - \theta_{22})^2 + (\theta_{22} - \theta_{33})^2 + (\theta_{33} - \theta_{11})^2 \right) \\ &\quad + \theta_{12}^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{31}^2 \end{aligned} \quad (I.46)$$

Elle montre que, tout comme l'annulation de θ_1 fait disparaître intégralement la partie isotrope de la déformation, l'annulation de θ_2 exige

$$\theta_{11} = \theta_{22} = \theta_{33} = 1/3 \theta_1 \quad \theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{31} = 0$$

et entraîne la disparition intégrale du déviateur.

Au cours de l'analyse locale du champ des vitesses, les opérations $\vec{u} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \vec{u}$ grad ϕ et $\text{div } \vec{u}$ sont apparues en succession et ont reçu des expressions mathématiques définies pour un repère cartésien. Leur sens physique permet de leur donner des définitions intrinsèques et d'en déduire leur expression mathématique dans des repères curvilignes parfois mieux adaptés à la nature de chaque problème.

En examinant ces définitions dans les sections suivantes, nous aurons en même temps l'occasion de faire un rappel succinct des théorèmes de Gauss-Green et de Stokes.

6. L'opérateur divergence et le Théorème de Gauss-Green.

Nous avons déjà reconnu à l'expression $\text{div } \vec{u}$ la nature d'une vitesse de dilatation cubique. Considérons un volume fini D , simplement connexe, limité par une surface fermée S et un point O de référence à l'intérieur. Soit \vec{n} la normale unitaire extérieure en un point P de la surface, où la vitesse a pour valeur \vec{u} , et \vec{r} le vecteur de position du point P par rapport à O . Considérant la surface comme entraînée avec le fluide, le changement de volume du cône élémentaire issu de O et découpant une aire dS autour de P est mesuré par

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS dt$$

Supposant le produit scalaire $(\vec{u} \cdot \vec{n})$ positif, cette mesure est celle de l'accroissement du volume si $(\vec{r} \cdot \vec{n})$ est positif, de la diminution du volume si $(\vec{r} \cdot \vec{n})$ est négatif. Par conséquent, si le même angle solide élémentaire découpe plusieurs éléments dS sur la surface limite, la somme des mesures correspondantes serait égale à l'accroissement du volume appartenant à D .

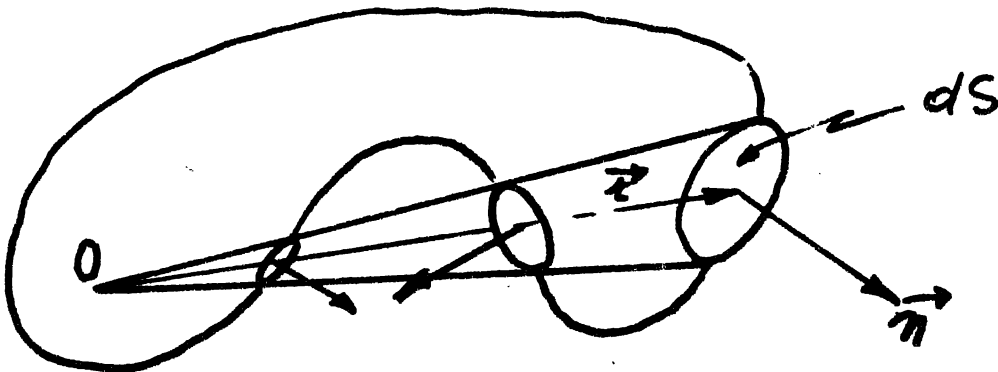


Fig. I.I.

La vitesse d'accroissement du volume total de D est donc mesurée par l'intégrale de surface $\iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$.

La divergence du champ des vitesses en O peut alors être définie en tant que vitesse de dilatation cubique par la limite

$$\text{div } \vec{u} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \quad (I.47)$$

obtenue en faisant tendre vers zéro le volume τ contenant le point O . Cette formule peut servir de définition intrinsèque à la divergence de tout autre champ de vecteurs.

Pour un volume élémentaire $\Delta\tau$, la définition précédente revient à la forme différentielle du théorème de Gauss-Green

$$\operatorname{div} \vec{u} \Delta\tau = \sum (\vec{u} \cdot \vec{n}) \Delta S \quad (I.48)$$

où la somme est étendue aux facettes élémentaires limitant le volume élémentaire. Le théorème s'étend à un volume fini en divisant ce dernier par des cloisons intérieures en une juxtaposition de volumes élémentaires. Comme sur une cloison intérieure le flux du vecteur \vec{u} ne fait que sortir d'un volume élémentaire pour entrer dans un autre, la somme des flux ne doit s'étendre qu'à la surface extérieure S . On obtient ainsi le théorème de Gauss

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{u} \, d\tau = \iint_S (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (I.49)$$

La définition intrinsèque (I.47) ou la forme différentielle équivalente (I.48) sont particulièrement commodes pour obtenir l'expression mathématique de la divergence en coordonnées curvilignes.

Soient

$$x_i = x_i(q_j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (I.50)$$

$$(j = 1, 2, 3)$$

les formules de transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées curvilignes (q_j) . En chaque point de l'espace existe un repère naturel local constitué de trois vecteurs de base \vec{g}_j , définis par leurs composantes cartésiennes

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}, \frac{\partial x_2}{\partial q_j}, \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) \quad j = 1, 2, 3$$

Ils sont tangents en ce point aux courbes suivant lesquelles se coupent les surfaces $q_j = \text{constante}$. Le carré de la distance entre le point $P(q_j)$ et le point voisin $Q(q_j + dq_j)$ vaut

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right)^2 = \sum_j \sum_k \left(\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_j} \frac{\partial x_l}{\partial q_k} \right) dq_j dq_k$$

Nous nous limitons au cas où les surfaces se coupent toujours à angle droit, c'est-à-dire aux coordonnées curvilignes orthogonales. Les vecteurs de base du repère local sont orthogonaux :

$$\sum_l \frac{\partial x_l}{\partial q_j} \frac{\partial x_l}{\partial q_k} = 0 \quad j \neq k \quad (I.51)$$

et le carré de la distance élémentaire se réduit à

$$ds^2 = \sum_j g_j^2 dq_j^2 \quad (I.52)$$

avec la notation

$$g_j^2 = \sum_l \left(\frac{\partial x_l}{\partial q_j} \right)^2 \quad (I.53)$$

pour les modules carré des vecteurs de base.

Nous appellerons u_j ($j = 1, 2, 3$) les projections orthogonales du champ \vec{u} sur les directions du repère local. Pour le calcul de la divergence du champ \vec{u} au point $O(q_j)$ nous considérons le volume élémentaire formé des points

$$q_j + \xi_j \Delta q_j \quad 0 \leq \xi_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

Le flux sortant de la facette $\xi_1 = 0$ a pour valeur

$$- \Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3$$

Le flux sortant de la facette opposée $\xi_1 = 1$

$$+ \Delta q_2 \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3$$

Pour évaluer ces contributions avec la précision nécessaire pour effectuer par la suite le passage à la limite $\Delta q_j \rightarrow 0$, supposons le champ \vec{u} différentiable au point O et calculons la partie principale de $u_1 g_2 g_3$ dans le volume :

$$u_1 g_2 g_3 = (u_1 g_2 g_3)_0 + \sum_j \xi_j \Delta q_j \frac{\partial}{\partial q_j} (u_1 g_2 g_3)$$

Les dérivées partielles sont évaluées au point O ($\xi_j = 0$). On en déduit

$$\left((u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=1} - (u_1 g_2 g_3)_{\xi_1=0} \right) = \Delta q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3)$$

et la contribution des deux facettes au flux sortant est

$$\Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3)$$

Par un calcul similaire pour les deux autres paires de facettes il vient au total

$$\Sigma (\vec{u} \cdot \vec{n}) \Delta S = \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 g_3 g_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 g_1 g_2) \right)$$

Au même ordre d'approximation le volume élémentaire vaut

$$\Delta \tau = (g_1 g_2 g_3)_0 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

et, par application de (I.48), on trouve finalement

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (u_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (u_2 g_3 g_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (u_3 g_1 g_2) \right) \quad (\text{I.54})$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ψ) par exemple, où

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\theta) + \frac{\partial}{\partial \psi} (r u_\psi) \right) \quad (\text{I.55})$$

9. L'opérateur rotationnel et le Théorème de Stokes.

On peut établir une première définition intrinsèque du rotationnel en suivant une voie semblable.

Le second membre de (I.48) est remplacé par l'expression analogue

$$\int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$$

comportant un produit vectoriel au lieu du produit scalaire et représentant par conséquent un vecteur. Étendons d'abord la sommation en coordonnées cartésiennes aux six facettes du parallélépipède rectangle élémentaire

$$x_i + \xi_i \Delta x_i \quad 0 \leq \xi_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Pour la facette $\xi_1 = 0$ les composantes cartésiennes de $(\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$ sont

$$0, \quad + \Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_3)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3, \quad - \Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_2)_{\xi_1=0} d\xi_2 d\xi_3$$

Pour la facette opposée $\xi_1 = 1$

$$0, \quad - \Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_3)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3, \quad + \Delta x_2 \Delta x_3 \int_0^1 \int_0^1 (u_2)_{\xi_1=1} d\xi_2 d\xi_3$$

Par des développements limités aux termes du premier ordre, comme pour le calcul de la divergence, on trouve

$$(u_i)_{\xi_1=1} - (u_i)_{\xi_1=0} = \Delta x_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \quad (i = 2, 3)$$

les dérivées partielles étant évaluées au point $(\xi_1 = 0)$. La contribution de la première paire de facettes à $\int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S$ est alors

$$0, \quad - \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad + \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Ajoutant par des calculs similaires la contribution des deux autres paires de facettes et définissant en coordonnées cartésiennes $\operatorname{rot} \vec{u}$ par ses composantes

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2},$$

le résultat final peut s'écrire

$$\operatorname{rot} \vec{u} \Delta \tau = \int (\vec{n} \times \vec{u}) \Delta S \quad (\text{I.56})$$

Cette forme différentielle, ou la définition intrinsèque qui lui correspond, montre bien que l'opérateur rotationnel se comporte comme un produit vectoriel, c'est-à-dire engendre un pseudo-vecteur à partir d'un vecteur polaire. Pour un volume fini, considéré comme la juxtaposition de parallélépipèdes élémentaires (I.56) devient

$$\iiint_D \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = \iint_S (\vec{n} \times \vec{u}) \, dS \quad (I.57)$$

Les intégrales sur les cloisons intérieures se détruisent du fait que la normale \vec{n} change de sens suivant qu'elle appartient à la surface d'un parallélépipède ou de celui qui lui est adjacent.

Appliquons maintenant (I.57) au volume limité par deux surfaces planes parallèles S_1 et S_2 et une bande cylindrique perpendiculaire B .

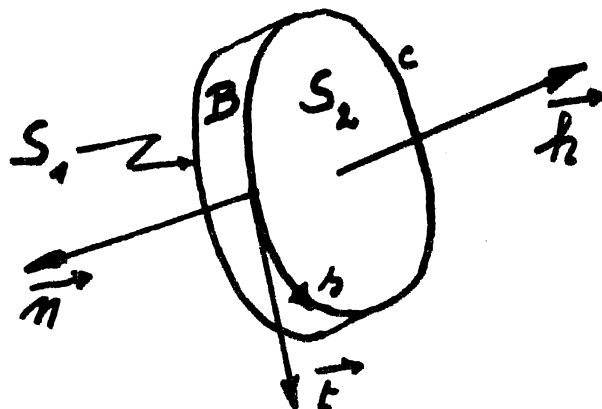


Fig. I.2.

Les normales unitaires extérieures aux faces S_1 et S_2 sont liées par $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{h}$, d'où

$$\iiint_D \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = - \iint_{S_1} \vec{h} \times \vec{u} \, dS + \iint_{S_2} \vec{h} \times \vec{u} \, dS + \iint_B \vec{n} \times \vec{u} \, dB$$

Cette relation vectorielle est maintenant projetée sur la direction \vec{h} ; comme $\vec{h} \cdot (\vec{h} \times \vec{u}) = 0$, il reste

$$\iiint_D \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = \iint_B \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) \, dB$$

Prenons maintenant pour la bande cylindrique une largeur élémentaire dh , de sorte que l'élément de volume puisse s'écrire

$$d\tau = dh \, dS$$

et l'élément de surface de la bande

$$dB = dh \, ds$$

où ds est l'élément d'arc du contour c limitant $S_2 = S$.
Alors

$$\iint_S \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} \, dS = \oint_c \vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) \, ds$$

Mais $\vec{h} \cdot (\vec{n} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{h} \times \vec{n}) = \vec{u} \cdot \vec{t}$

où \vec{t} est un vecteur unitaire tangent au contour et orienté de telle façon que la trièdre $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{t})$ soit superposable au trièdre de référence. Le résultat final

$$\iint_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{u} \, d\sigma = \oint_C \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds \quad (I.58)$$

est un cas particulier du théorème de Stokes. Il exprime que le flux du rotationnel du champ \vec{u} à travers une surface plane est égal à la circulation de \vec{u} sur le contour fermé limitant cette surface.

La correspondance entre sens positif du flux et sens positif de la circulation dépend évidemment du sens du trièdre de référence, puisque le rotationnel est un pseudo-opérateur vectoriel. Elle se décide par la règle de superposabilité du trièdre $(\vec{n}, \vec{u}, \vec{t})$.

Le théorème de Stokes s'étend à une surface gauche arbitraire limitée par un contour fermé simple en la considérant comme la limite d'un réseau de mailles planes élémentaires. Le flux total est composé de la somme des flux à travers les mailles individuelles et fournit à la limite le premier membre de (I.58) étendu à la surface considérée. Dans la sommation des circulations autour de chaque maille, la contribution de chaque segment du contour réseau intérieur est nulle car il est parcouru une fois dans chaque sens. Il ne subsiste que la circulation sur le contour limitant la surface, c'est-à-dire le second membre de (I.58) dont la validité est maintenant généralisée.

Appliqué à une maille infinitésimale, le théorème de Stokes fournit lui aussi une définition intrinsèque du rotationnel. Nous l'utilisons pour établir son expression mathématique en coordonnées curvilignes orthogonales.

Prenons une maille élémentaire dans la surface $q_1 = \text{constante}$, caractérisée par l'ensemble des points

$$q_2 + \epsilon_2 \Delta q_2 \quad q_3 + \epsilon_3 \Delta q_3 \quad 0 < \epsilon_2, \epsilon_3 < 1$$

Si \vec{n} est orienté selon \vec{g}_1 , il faut que \vec{u} et \vec{t} soient, dans l'ordre, superposables à \vec{g}_2 et \vec{g}_3 et ceci impose comme sens de parcours de la maille celui ABCD correspondant à la rotation de \vec{g}_2 vers \vec{g}_3 .

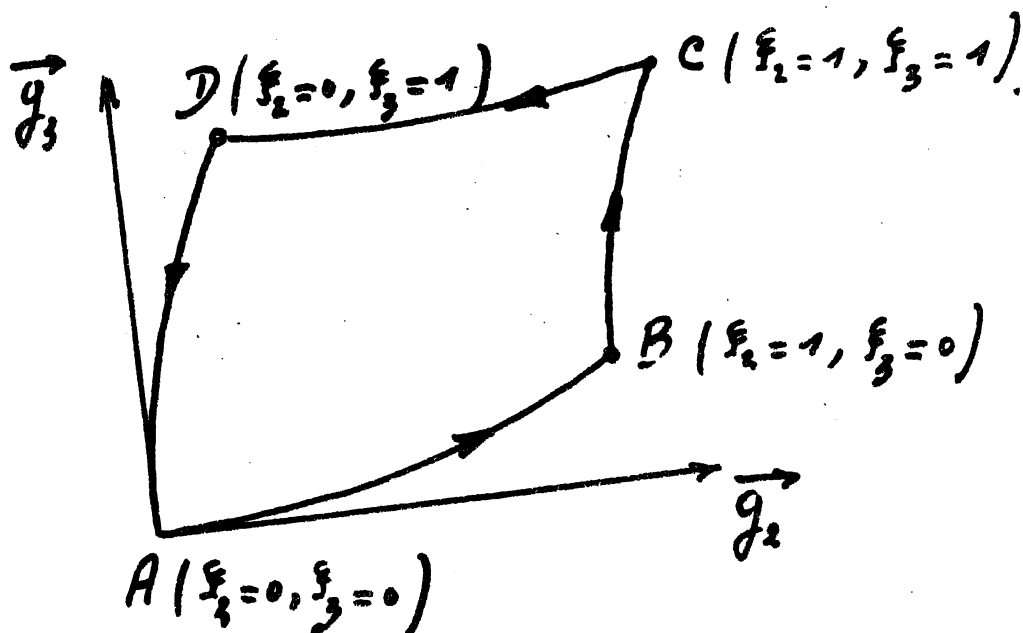


Fig. I.3.

La circulation sur la maille a pour valeur

$$\Delta q_2 \int_0^1 (u_2 \xi_2)_{\xi_3=0} d\xi_2 + \Delta q_3 \int_0^1 (u_3 \xi_3)_{\xi_2=1} d\xi_3 - \Delta q_2 \int_0^1 (u_2 \xi_2)_{\xi_3=1} d\xi_2 - \Delta q_3 \int_0^1 (u_3 \xi_3)_{\xi_2=0} d\xi_3$$

Mais, supposant la différentiabilité du champ au point A, on trouve les parties principales

$$(u_2 \xi_2)_{\xi_3=1} - (u_2 \xi_2)_{\xi_3=0} = \Delta q_3 \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 \xi_2)$$

$$(u_3 \xi_3)_{\xi_2=1} - (u_3 \xi_3)_{\xi_2=0} = \Delta q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 \xi_3)$$

D'où pour la circulation l'estimation

$$\Delta q_2 \Delta q_3 \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 \xi_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 \xi_2) \right)$$

Au même ordre d'approximation le flux de $\text{rot } \vec{u}$ à travers la maille est

$$\Delta q_2 \Delta q_3 \left(\xi_2 \xi_3 \text{rot}_1 \vec{u} \right)$$

D'où l'expression de la composante du rotationnel dans la direction \vec{e}_1

$$\text{rot}_1 \vec{u} = \frac{1}{\xi_2 \xi_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 \xi_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 \xi_2) \right) \quad (\text{I.59})$$

Les deux autres composantes s'en déduisent par permutation cyclique des indices. Ainsi en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{u} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta u_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r u_\theta) \right) \\ \text{rot}_\theta \vec{u} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} u_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta u_\varphi) \right) \\ \text{rot}_\varphi \vec{u} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right) \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

10. Propriétés géométriques du rotationnel.

La propriété

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = 0$$

(I.61)

se vérifie immédiatement par calcul en coordonnées cartésiennes. Une démonstration plus instructive peut être basée sur les définitions intrinsèques des opérateurs.

Par le théorème d'Ostrogradski appliqué à une région simplement connexe :

$$\iiint_D \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = \iint_S \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS$$

Divisons la surface fermée simple S en deux parties S_1 et S_2 par un contour fermé simple c , tracé sur cette surface et définissons un sens de parcours sur c tel que la normale extérieure \vec{n} sur S_1 corresponde au sens positif du flux dans le théorème de Stokes. Alors

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

Sur la partie S_2 le sens positif du flux est opposé à la normale extérieure et donc

$$\iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS = - \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

Par addition des deux derniers résultats il vient

$$\iiint_D \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} \, d\tau = 0$$

et la propriété (I.61) en découle par un passage à la limite. Cette propriété s'applique en particulier au vecteur tourbillon

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{u} \quad \operatorname{div} \vec{\omega} = 0 \quad (\text{I.62})$$

où \vec{u} est le champ des vitesses. Définissons une ligne tourbillon comme une courbe partout tangente au vecteur tourbillon à une époque spécifiée. En coordonnées cartésiennes les équations différentielles de cette ligne seront donc

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}} \quad (\text{I.63})$$

Un tube tourbillon sera défini à la même époque comme l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur un contour fermé c . Appliquons à un segment de ce tube la propriété (I.62) ou plus exactement sa forme intégrale

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

La surface fermée S est constituée des sections transversales limites S_1 et S_2 qui s'appuient sur les bords c_1 et c_2 et de la surface enveloppe engendrée par les lignes tourbillons à travers laquelle le flux est nul par construction. Par conséquent

$$\iint_{S_1} \vec{u} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} \vec{u} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 0$$

ou encore, prenant une normale unitaire \vec{h}_1 opposée à \vec{n}_1 de façon à définir un seul sens de parcours le long du tube

$$2 \iint_{S_1} \vec{u} \cdot \vec{h}_1 \, dS = 2 \iint_{S_2} \vec{u} \cdot \vec{h}_2 \, dS = I \quad (\text{I.64})$$

Cette propriété peut s'énoncer comme suit : le flux du rotationnel de la vitesse à travers une section d'un tube tourbillon est indépendant de la position de la section; c'est, par définition, l'intensité I du tube.

Il en découle que la section d'un tube tourbillon ne peut s'annuler au sein du fluide sans que le module du rotationnel ne tende vers l'infini. Un tube tourbillon ne peut que s'étendre à l'infini, se fermer sur lui-même en anneau ou se terminer sur une paroi limitant l'écoulement.

Une application du théorème de Stokes transforme également le résultat (I.64) dans celui, équivalent,

$$\oint_C \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds = I \quad (\text{I.65})$$

L'intensité du tube est égale à la circulation de la vitesse autour d'un contour fermé entourant une fois le tube.

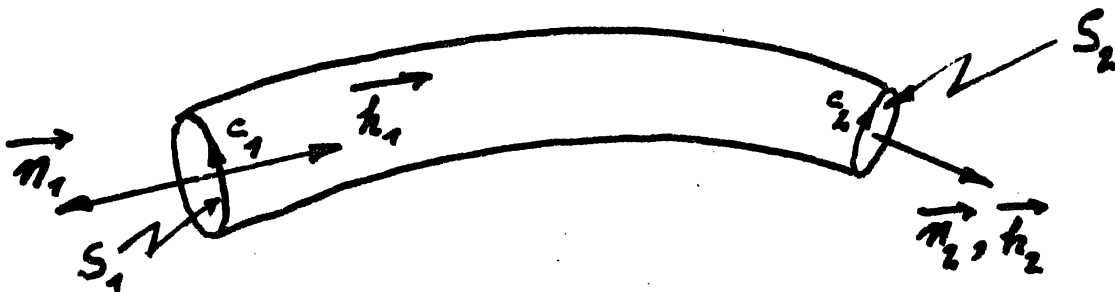


Fig. I.4.

Dans certains écoulements contournant un obstacle il peut arriver que des lignes de courant se rejoignent derrière l'obstacle pour former une surface de discontinuité dans la vitesse tangentielle. On peut montrer qu'une telle surface est équivalente à une nappe portant une densité superficielle de tourbillons.

Rapportons la surface à des coordonnées curvilignes orthogonales q_1 et q_2 et soit $\vec{e}_3 \, dq_3$ le déplacement élémentaire perpendiculairement à la surface. Au cours de ce déplacement on passe du côté $q_3 = -0$ de la surface au côté $q_3 = +0$. Par la formule (I.59)

$$\vec{e}_2 \left(\text{rot}_1 \vec{u} \cdot \vec{e}_3 \, dq_3 \right) = \frac{\partial}{\partial q_2} (u_3 \vec{e}_3) \, dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (u_2 \vec{e}_2) \, dq_3$$

Passant à la limite $dq_3 \rightarrow 0$ avec continuité de la composante normale u_3 de la vitesse, il vient pour la discontinuité de la composante tangentielle u_2

$$\lim \left(\text{rot}_1 \vec{u} \cdot \vec{s}_3 \, dq_3 \right) = 2 \Omega_1 = u_2 (q_1, q_2, -0) - u_2 (q_1, q_2, +0) \quad (\text{I.66})$$

De même par la formule correspondante pour la seconde composante du rotationnel

$$\lim \left(\text{rot}_2 \vec{u} \cdot \vec{s}_3 \, dq_3 \right) = 2 \Omega_2 = u_1 (q_1, q_2, +0) - u_1 (q_1, q_2, -0)$$

Ω_1 et Ω_2 sont les composantes de la densité superficielle du tourbillon.

II. L'opérateur gradient.

Cherchons encore une définition intrinsèque de $\text{grad } \psi$.
Considérons à cet effet l'expression vectorielle $\Sigma \psi \cdot n \, \Delta S$ étendue aux facettes d'un parallélépipède élémentaire en coordonnées cartésiennes. Pour la facette $\xi_1 = 0$, les contributions à l'expression sont

$$-\Delta q_2 \, \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (\psi)_{\xi_1=0} \, d\xi_2 \, d\xi_3 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Pour la facette $\xi_1 = 1$

$$+\Delta q_2 \, \Delta q_3 \int_0^1 \int_0^1 (\psi)_{\xi_1=1} \, d\xi_2 \, d\xi_3 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Pour un potentiel ψ différentiable au point $(\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0)$ on trouve la partie principale

$$(\psi)_{\xi_1=1} - (\psi)_{\xi_1=0} = \Delta q_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)$$

et la contribution des deux facettes a pour partie principale

$$\Delta q_1 \, \Delta q_2 \, \Delta q_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad , \quad 0 \quad , \quad 0$$

Ajoutant les contributions des deux autres paires de facettes il vient, en égard à la définition de $\text{grad } \psi$ en coordonnées cartésiennes

$$\Sigma \psi \vec{n} \, \Delta S = \text{grad } \psi \, \Delta \tau \quad (\text{I.67})$$

Par un passage à la limite $\Delta \tau \rightarrow 0$ ceci constitue une définition intrinsèque du gradient.

Le résultat s'étend de nouveau à un volume fini en le considérant comme un assemblage de parallélépipèdes élémentaires. Il y a destruction des contributions sur les cloisons intérieures par suite du changement de sens de la normale suivant qu'elle est extérieure pour un des parallélépipèdes ou pour celui qui lui est

adjacent; il ne subsiste que l'intégrale sur la surface S délimitant le volume.

$$\iint_S \psi \vec{n} \, dS = \iiint_D \text{grad } \psi \, d\tau \quad (\text{I.68})$$

Appliquons cette formule au volume délimité par deux facettes planes parallèles $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ et un manteau cylindrique ΔB d'épaisseur Δh qui leur est perpendiculaire. Avec

$$-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{h}$$

pour les normales unitaires extérieures aux facettes planes, il vient

$$\vec{h} (\psi_2 - \psi_1) \Delta S + \iint_{\Delta B} \psi \vec{n} \, dS = \Delta S \Delta h \text{ grad } \psi$$

Projetant cette relation sur la direction \vec{h} et observant que $\vec{h} \cdot \vec{n} = 0$ sur le manteau :

$$(\psi_2 - \psi_1) = \Delta h \vec{h} \cdot \text{grad } \psi$$

Passant finalement à la limite :

$$\vec{h} \cdot \text{grad } \psi = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta h} = \frac{d\psi}{dh} \quad (\text{I.69})$$

La projection du gradient de ψ dans une direction donnée est égale à la dérivée de ψ dans cette direction. Si celle-ci était située dans un plan tangent à une surface équipotentielle $\psi = \text{constante}$ passant par ce point, on aurait $d\psi/dh = 0$: la projection du gradient sur le plan tangent est nulle. En un point où la surface équipotentielle possède un plan tangent, le gradient de ψ est donc perpendiculaire à cette surface.

L'application de la définition intrinsèque à un volume élémentaire en coordonnées curvilignes orthogonales conduit aux expressions

$$\frac{1}{g_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{I.70})$$

pour les projections de $\text{grad } \psi$ dans le trièdre local. On a en particulier pour les coordonnées sphériques

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (\text{I.71})$$

12. L'opérateur "dérivation particulière".

Appelons grandeur intensive toute grandeur qui peut être définie en un point du milieu continu (composante de vitesse, d'accélération, pression, température, masse volumique, entropie spécifique, ...).

En description lagrangienne le champ d'une telle grandeur

$$F(a_i, t)$$

permet un calcul facile de sa variation dans le temps quand on la considère comme liée aux particules. Dans ce cas les coordonnées (a_i) sont maintenues fixes et la variation dans le temps ou "dérivée particulaire" s'exprime par

$$\frac{\partial F(a_i, t)}{\partial t}$$

Quand le même champ est utilisé en description eulérienne

$$F(A_i(x_j, t), t) = f(x_j, t)$$

la dérivation particulaire doit tenir compte des variations temporelles dans les coordonnées cartésiennes de la particule :

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } f \end{aligned} \quad (I.72)$$

Le second terme représente l'effet de la convection de la grandeur par l'écoulement. De plus la forme vectorielle

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad}$$

de l'opérateur dérivation particulaire permet, grâce à la définition intrinsèque du gradient, de l'utiliser en coordonnées curvilignes.

L'identité

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{DF}{Dt} \quad (I.73)$$

est utile à retenir pour la transformation des lois exprimées en représentation lagrangienne aux mêmes lois en description eulérienne et réciproquement.

L'opération de dérivation particulaire peut aussi être appliquée à la grandeur extensive fondamentale : l'élément de volume. Si l'élément de volume $d\tau$ est considéré comme lié à l'ensemble de particules qui le constitue à une époque donnée en a , par la définition même de la vitesse de dilatation cubique

$$\frac{1}{d\tau} \frac{D}{Dt} (d\tau) = \text{div } \vec{u} \quad (I.74)$$

Le même résultat se retrouve en considérant l'élément de volume en coordonnées de Lagrange. Le volume occupé à une époque déterminée par l'ensemble des particules dont les coordonnées de Lagrange sont comprises entre les valeurs a_i et $a_i + da_i$ a pour valeur

$$d\tau = J da_1 da_2 da_3 \quad (I.75)$$

où J est le (déterminant) jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(a_1, a_2, a_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} & \frac{\partial X_1}{\partial a_2} & \frac{\partial X_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial a_1} & \frac{\partial X_2}{\partial a_2} & \frac{\partial X_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial a_1} & \frac{\partial X_3}{\partial a_2} & \frac{\partial X_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} \quad (I.76)$$

construit à partir des expressions (I.5). On aura pour la variation temporelle du volume de cet ensemble de particules

$$\frac{D}{Dt} (d\tau) = \frac{\partial J}{\partial t} da_1 da_2 da_3 \quad (I.77)$$

Le développement de la dérivée du déterminant fournit l'expression

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial t \partial a_1} \frac{D(x_2, x_3)}{D(a_2, a_3)} + \dots$$

dont les 9 termes comportent les combinaisons des permutations cycliques des indices au numérateur et au dénominateur. Transformons alors le premier facteur de chaque terme suivant le modèle

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t \partial a_1} = \frac{\partial U_1}{\partial a_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial X_1}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial X_2}{\partial a_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial X_3}{\partial a_1}$$

et regroupons les 27 termes trois par trois en mettant les dérivées du type $\partial u_1 / \partial x_m$ en évidence :

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_i \sum_m \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \left\{ \sum_p \frac{\partial X_m}{\partial a_p} \frac{D(x_j, x_k)}{D(a_q, a_r)} \right\}$$

Dans cette expression (i, j, k) et (p, q, r) sont des permutations cycliques des indices $(1, 2, 3)$. Or

$$\sum_p \frac{\partial X_m}{\partial a_p} \frac{D(x_j, x_k)}{D(a_q, a_r)} = J \quad \text{si } m = i$$

$$= 0 \quad \text{si } m \neq i$$

car dans le premier cas il s'agit du produit des éléments d'une ligne de J par ses mineurs, dans le second du produit des éléments d'une ligne par les mineurs d'une autre ligne.

Dès lors

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \sum_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} = J \operatorname{div} \vec{u} \quad (I.78)$$

et, substitué dans (I.77), le résultat est identique à (I.74).

Appliquons finalement l'opérateur "dérivation particulaire" à une grandeur intensive générale.

$$I = \iiint_D f \, d\tau$$

Il faut donc imaginer que la surface S délimitant le volume est entraînée avec le mouvement des particules. Formellement

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \frac{D}{Dt} (f \, d\tau) = \iiint_D \frac{Df}{Dt} \, d\tau + f \frac{D}{Dt} (d\tau)$$

Utilisant les formules (I.72) et (I.74)

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } f + f \text{ div } \vec{u} \right) d\tau \quad \text{ou}$$

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{u}) \right\} d\tau \quad (\text{I.79})$$

Finalement, par application de la formule d'Ostrogradski,

$$\frac{DI}{Dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau + \iint_S f (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (\text{I.80})$$

Ce dernier résultat peut d'ailleurs être établi par un raisonnement direct. Les grands théorèmes de la mécanique sont énoncés pour les systèmes fermés, c'est-à-dire constitués toujours des mêmes particules. Il n'est donc pas étonnant que pour leur expression dans un milieu fluide la dérivation particulaire joue un rôle primordial. La forme (I.79) est alors bien adaptée à la formulation locale de ces lois, c'est-à-dire à une formulation relative à l'unité de volume. Par contre la forme (I.80) est intéressante pour obtenir une formulation intégrale, particulièrement lorsque le champ des grandeurs en jeu est permanent. Les lois relatives aux systèmes "ouverts", qui échangent des particules avec l'environnement, peuvent s'obtenir en considérant la vitesse \vec{w} des points de la surface S qui définit à chaque instant la collection des particules qui font partie du système. Si I appartient à un système ouvert, sa dérivée temporelle sera

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_D \frac{\partial f}{\partial t} \, d\tau + \iint_S f (\vec{w} \cdot \vec{n}) \, dS$$

et la relation entre cette dérivée et la dérivée particulaire du système fermé coïncidant à cette époque avec le système ouvert est, par différence

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} + \iint_S f (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n} \, dS \quad (\text{I.81})$$

13. La formule de Lagrange pour l'accélération d'une particule.

Si le champ des vitesses est donné en représentation eulérienne l'expression de l'accélération

$$\vec{j} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (\text{I.82})$$

n'offre pas de difficultés en coordonnées cartésiennes. Chaque composante est justiciable de la formule (I.72)

$$j_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } u_1 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{I.83})$$

En coordonnées curvilignes l'opération

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$$

prête à confusion car l'opérateur gradient n'a reçu de définition intrinsèque que dans son application à un scalaire. Par contre la formule de Lagrange

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + \text{rot } \vec{u} \times \vec{u} \quad (\text{I.84})$$

où $v^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ (I.85)

dont l'identité en coordonnées cartésiennes avec les formules (I.83) est facile à vérifier, s'applique aussi sans ambiguïté en coordonnées curvilignes. En coordonnées sphériques par exemple

$$j_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial (r \sin \theta u_\psi)}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r} \left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)$$

$$j_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_r}{r} \left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \frac{u_\psi}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} \right)$$

$$j_\psi = \frac{\partial u_\psi}{\partial t} + \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} (u_r^2 + u_\theta^2 + u_\psi^2) + \frac{u_\theta}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta u_\psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \psi} \right) - \frac{u_r}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial (r \sin \theta u_\psi)}{\partial r} \right)$$

Soit, après simplification,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2 + u_z^2}{r} + \frac{u_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_z}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \\
 I_3 &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial (ru_\theta)}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta}{r} u_z^2 + \frac{u_z}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\
 I_4 &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{u_r}{r \sin \theta} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} u_\theta u_r + \frac{u_r}{r} \frac{\partial (ru_z)}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{1.86}$$

14. La circulation de l'accélération: formule de Beltrami.

Soit
$$C = \oint_c \vec{u} \cdot \vec{t} \, ds$$

La circulation de la vitesse sur un contour fermé c à une époque déterminée. Cherchons à évaluer la dérivée particulière de cette grandeur, ce qui suppose le contour lié aux particules et entraîné avec leur mouvement

$$\frac{DC}{Dt} = \oint_c \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \vec{t} \, ds + \vec{u} \cdot \frac{D}{Dt} (\vec{t} \, ds)$$

Soient \vec{r}_1 et \vec{r}_2 les vecteurs de position par rapport à un point fixe de deux points voisins P_1 et P_2 sur le contour, de sorte que

$$\vec{t} \, ds = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Alors
$$\frac{D}{Dt} (\vec{t} \, ds) = \frac{D\vec{r}_2}{Dt} - \frac{D\vec{r}_1}{Dt} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1 = d\vec{u}$$

l'accroissement de vitesse quand on passe de P_1 à P_2 .

$$\oint_c \vec{u} \cdot d\vec{t} = \oint_c d \frac{\vec{u} \cdot \vec{t}}{2} = \oint_c d \frac{V^2}{2}$$

et cette contribution est nulle si le contour ne traverse pas une nappe de discontinuité de la vitesse. On trouve la formule de Beltrami

$$\frac{DC}{Dt} = \oint_c \vec{f} \cdot \vec{t} \, ds \tag{1.87}$$

où le second membre représente la circulation de l'accélération.

Cette C est aussi l'intensité du tube tourbillon qui s'appuierait sur le contour c la formule est importante pour l'évaluation des changements d'intensité du tube. Les équations de la dynamique des fluides permettront plus tard de fixer les conditions dans lesquelles cette intensité demeure constante.

II. Lois de Conservation.

I. Conservation de la Masse.

Soit ρ la masse volumique, grandeur intensive définie en tout point du milieu continu. La masse d'une particule est alors donnée par le produit $\rho \delta \tau$. En représentation lagrangienne cette même masse sera $\rho(a_i, t) J da_1 da_2 da_3$ et la conservation de la masse pourra s'exprimer par la relation

$$\frac{d}{dt} [\rho(a_i, t) J] = 0 \quad (2.1)$$

En représentation eulérienne cette loi de conservation sera

$$\frac{D}{Dt} (\rho \delta \tau) = 0 \quad (2.2)$$

Soit, en développant et faisant usage de (I.74)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.3)$$

Ensuite, en développant la dérivée particulière selon (I.72)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.4)$$

Quand on peut négliger, comme on le fait en hydrodynamique, la compressibilité du fluide et considérer ρ comme une constante, la conservation de la masse se réduit à la conservation du volume :

$$\frac{\delta J}{\delta t} = 0 \quad (2.5)$$

pour la représentation lagrangienne

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

pour le cas de la représentation eulérienne.

Les formes précédentes exprimant la conservation de la masse sont du type local; pour certaines applications, particulièrement pour les champs de masse volumique permanents, la forme intégrale est plus intéressante. Appliquant la formule générale (I.66) à la conservation de la masse totale d'une collectivité enfermée à l'époque considérée dans un volume D limité par une surface S

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \delta \tau = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \tau + \iint_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (2.7)$$

Ainsi pour un écoulement permanent dans une conduite ou dans un tube de constant

$$\iint_S \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

Par définition $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$ sur la surface latérale du tube et il ne faut tenir compte des flux qu'à travers les sections terminales A_1 de normale extérieure $\vec{n} = -\vec{h}_1$ et A_2 de normale extérieure $\vec{n} = \vec{h}_2$, de sorte que

$$\iint_{A_1} \rho (\vec{u} \cdot \vec{h}_1) dS = \iint_{A_2} \rho (\vec{u} \cdot \vec{h}_2) dS \quad (2.8)$$



Fig. 2.I.

Ceci revient à évaluer les débits massiques dans un même sens de parcours à travers deux sections du tube. Pour un filet fluide dont les sections infinitésimales dA_1 et dA_2 sont perpendiculaires au vecteur vitesse local, cette loi de conservation en mouvement permanent devient

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2 \quad (2.9)$$

où v désigne le module du vecteur vitesse.

2. Conservation de la quantité de mouvement.

La quantité de mouvement d'une particule est le vecteur

$$d\vec{Q} = \rho \vec{u} d\tau$$

Le théorème fondamental de la mécanique, appliqué à une collectivité de particules, peut s'écrire

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{u} d\tau = \iint_S \vec{r}_n dS + \iiint_D \rho \vec{g} d\tau \quad (2.10)$$

Au second membre, le premier terme est la somme vectorielle des forces $\vec{r}_n dS$ exercées sur chaque élément de la surface, limitant la collectivité à l'époque considérée, par les particules extérieures. Le second terme est la somme vectorielle des forces de masse éventuellement exercées sur les particules de la collectivité. Le vecteur \vec{g} est homogène à une accélération; c'est généralement l'accélération d'un champ de gravitation.

Pour dériver de (2.10) une forme locale des équations du mouvement, il y a lieu de mettre tous les termes, comme le dernier, sous la forme d'un intégral de volume qui permettrait d'écrire le théorème pour l'unité de volume. La transformation du premier membre est directe, il suffit d'observer que

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \rho \, d\tau = \iiint_D \frac{D}{Dt} (\rho \, d\tau) = \iiint_D \frac{D\rho}{Dt} \, d\tau \quad (2.11)$$

puisque, en vertu du principe de conservation de la masse sous sa forme (2.2) la plus élémentaire, $\rho \, d\tau$ se comporte comme une constante vis-à-vis de la dérivée partielle. En vue de transformer le premier terme au second membre, exprimons la tension τ_{ij} sur l'élément de surface en fonction des tensions τ_{ij} sur des facettes parallèles à un trièdre de référence.

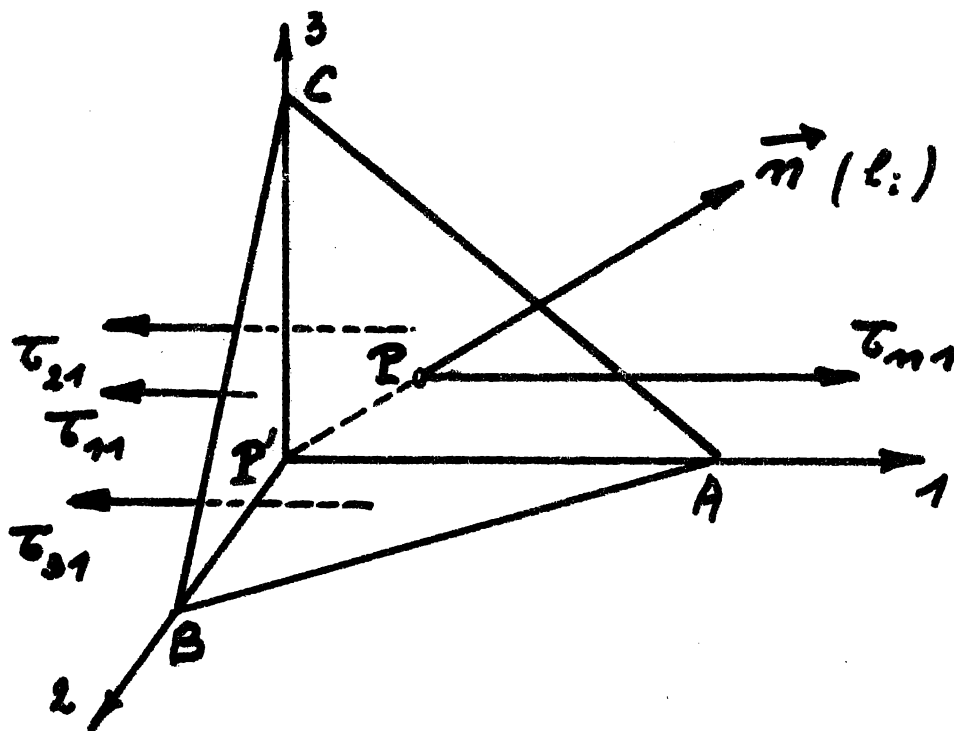


Fig. 2.2.

Il suffit pour cela d'exprimer en un point P de la surface S l'équilibre d'un tétraèdre élémentaire constitué d'un élément triangulaire dS de la surface et de trois facettes élémentaires dS_1, dS_2, dS_3 respectivement perpendiculaires aux directions de référence 1, 2 et 3. Si dh désigne la distance de P à la facette oblique et (A_j) les cosinus directeurs de la normale extérieure à celle-ci :

$$dS = \frac{1}{2} \frac{(dh)^2}{L_1 L_2 L_3}$$

$$dS_j = A_j dS \quad j = (1, 2, 3) \quad (2.12)$$

et le volume du tétraèdre

$$d\tau = \frac{1}{6} \frac{(dh)^3}{L_1 L_2 L_3}$$

Par conséquent les forces proportionnelles au volume du tétraèdre, comme les forces de gravitation et les forces d'élasticité, sont des infinimentes petites d'un ordre supérieur en Δ aux forces proportionnelles aux surfaces; on peut se contenter de l'équilibre statique de l'élément sous l'effet des tensions, déviées par τ_{ij} . Le déplacement selon la direction i de la tension τ_{ij} et par τ_{ji} dans une composante pour la tension τ_{ij} sur une facette de normale extérieure \mathbf{e}_j selon la direction i . L'équilibre statique implique

$$\tau_{ji} \mathbf{e}_j = \tau_{ij} \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2, 3$$

ou, en écriture (2.12)

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} \quad (2.13)$$

Les fonctions τ_{ij} sont aussi soumises aux conditions de continuité des tensions à l'interface de l'élément de volume avec ses voisins. Prenant simplement le cas le plus simple où l'élément est analysé en coordonnées rectangulaires; le trièdre de référence local est parallèle au trièdre de référence global. Le théorème (2.10) est équivalent aux trois relations scalaires

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\tau = \int_S \tau_{ij} \mathbf{e}_j dS = \int_V \mathbf{e}_i d\tau \quad (i = 1, 2, 3)$$

On a fait usage de (2.11), introduisons encore (2.13) au second membre et appliquons le théorème de Gauss-Green

$$\int_V \left(\tau_{ij} \mathbf{e}_j \right) dS = \int_V \left(\tau_{ij} \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_j} \right) d\tau$$

Tous les termes sont ramenés à des intégrales de volume. Le théorème de la quantité de mouvement pour l'unité de volume s'écrit

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} d\tau + \rho \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ (constantes)} \quad (2.14)$$

L'opérateur des tensions τ_{ij} forme un tenseur cartésien du second ordre

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad (2.15)$$

Une forme équivalente à (2.14) s'obtient en développant les dérivées particulières du premier membre

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

et en combinant ces formules avec les expressions déduites de la conservation de la masse selon (2.4)

$$0 = u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j)$$

Il vient ainsi par addition

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \quad (2.16)$$

et la forme équivalente du théorème local de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) = \rho g_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ (cartésiennes)} \quad (2.17)$$

Elle fait apparaître un nouveau tenseur cartésien du second ordre, le tenseur impulsion-énergie

$$Q = \begin{vmatrix} \rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

Il est visiblement symétrique et nous reconnaitrons bientôt la même qualité au tenseur des tensions. Son premier invariant est égal au double de l'énergie cinétique par unité de volume, second et troisième invariants sont nuls. La forme (2.17) apparaît immédiatement quand les composantes cartésiennes du premier membre de (2.11) sont transformées par la formule générale (1.80)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \rho u_i d\tau &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) d\tau + \iint_S \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS \\ &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) d\tau + \iint_S \left(\sum_j \rho_j u_i u_j \right) dS \end{aligned}$$

Il suffit de ramener le dernier terme à une intégrale de volume par le théorème de Gauss-Green. Si au contraire nous conservons les intégrales de surface pour ce terme et pour l'effet des tensions, nous obtenons la forme intégrale du théorème

$$\iiint_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) - \rho g_i \right) d\tau + \iint_S \tau_j^i (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) dS = 0$$

$$(i = 1, 2, 3) \text{ (cartésiennes)} \quad (2.19)$$

Elle est particulièrement intéressante quand le mouvement est permanent et les forces de masse négligeables car elle se réduit à un calcul de flux de quantité de mouvement et de somme vectorielle de tensions sur la surface limite. Dans ces conditions, appliquée à un tube de courant, elle donne

$$-F_i + \iint_{A_1+A_2} \tau_j^i (\rho u_i u_j - \tau_{ji}) dS = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Les F_i sont les composantes de la force totale exercées par les tensions sur la paroi latérale du tube, qui n'est pas traversée par un flux de quantité de mouvement; A_1 et A_2 sont les sections terminales (fig. 2.1.). Si le tube est matérialisé par une conduite on a ainsi le moyen de calculer la réaction ($-F_i$) exercée par l'écoulement permanent sur la conduite.

Pour un tube de courant élémentaire, dont les sections terminales sont perpendiculaires au vecteur vitesse, on trouve en assimilant le tenseur des tensions à une pression isotrope ($\tau_{ij} = -p$)

$$d\vec{F} = (p_2 + \rho_2 v_2^2) \vec{n}_2 dA_2 - (p_1 + \rho_1 v_1^2) \vec{n}_1 dA_1 \quad (2.20)$$

L'expression du théorème de la quantité de mouvement en coordonnées curvilignes orthogonales est rejetée en Appendice.

3. Conservation du moment de la quantité de mouvement.

Si \vec{r} est le vecteur de position d'une particule par rapport à une origine fixe, le théorème du moment de la quantité de mouvement appliqué à une collectivité s'écrit

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \vec{u} \times \vec{r} d\tau = \iint_S \vec{r}_n \times \vec{\tau} dS + \iiint_D \rho \vec{g} \times \vec{r} d\tau \quad (2.21)$$

En égard à (2.2) le premier membre se laisse transformer comme suit

$$\iiint_D \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \times \vec{r} d\tau = \iiint_D \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \times \vec{r} d\tau + \iiint_D \rho \vec{u} \times \frac{D\vec{r}}{Dt} d\tau$$

et le dernier terme est nul du fait que

$$\vec{u} \times \frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{u} \times \vec{u} = 0$$

On a donc pour la première composante cartésienne de (2.21)

$$\iiint_D \rho \left(x_3 \frac{Du_2}{Dt} - x_2 \frac{Du_3}{Dt} \right) d\tau = \iint_S (\tau_{n2} x_3 - \tau_{n3} x_2) dS + \iiint_D \rho (x_3 g_2 - x_2 g_3) d\tau$$

L'intégrale de surface se transforme à l'aide de (2.13) et du théorème de Gauss en

$$\iint_S \sum_j \tau_{j2} (x_3 - x_2 \tau_{j3}) dS = \iiint_D \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 \tau_{j2} - x_2 \tau_{j3}) d\tau$$

livrent une forme locale valable en coordonnées cartésiennes

$$\rho x_3 \left(\frac{Du_2}{Dt} - g_2 \right) - \rho x_2 \left(\frac{Du_3}{Dt} - g_3 \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_3 \tau_{j2} - x_2 \tau_{j3})$$

Si nous développons encore le dernier membre et regroupons les termes

$$\begin{aligned} x_3 \left(\rho \frac{Du_2}{Dt} - \rho g_2 - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j2} \right) - x_2 \left(\rho \frac{Du_3}{Dt} - \rho g_3 - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j3} \right) \\ = \tau_{32} - \tau_{23} \end{aligned}$$

Chaque parenthèse du premier membre est nulle en vertu du théorème de la quantité de mouvement, si bien que la forme locale du théorème du moment se ramène, compte tenu du calcul similaire pour les deux autres composantes, à l'expression

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.22)$$

de la symétrie du tenseur des tensions. Ce résultat s'obtiendrait bien entendu de façon plus directe en exprimant l'équilibre de rotation d'un parallélépipède élémentaire sous l'effet des couples dus aux tensions.

La forme intégrale du théorème est plus intéressante. Elle s'obtient en modifiant chaque composante du premier membre de (2.21) telle que

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho (u_2 x_3 - u_3 x_2) d\tau$$

à l'aide de la formule générale (1.80).

L'ensemble peut être mis sous une forme vectorielle facile à interpréter en coordonnées cartésiennes

$$\iiint_D \frac{1}{\rho} (\vec{F} \times \vec{\sigma}) d\tau + \iint_S \rho (\vec{F} \times \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS =$$

$$\iint_S \vec{F} \times \vec{r}_n dS + \iiint_D \rho \vec{F} \times \vec{g} d\tau \quad (2.23)$$

Dans le cas où les intégrales de volume disparaissent ce théorème peut être commode pour le calcul du moment des forces exercées par le fluide sur des parois.

4. Bilan énergétique déduit de la quantité de mouvement.

Preons le produit scalaire avec le vecteur vitesse des équations du mouvement (2.14), il vient

$$\rho \sum_i u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} = P_m + \rho \sum_i u_i g_i \quad (2.24)$$

$$\text{où} \quad P_m = \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.25)$$

C'est un bilan des puissances développées par les différentes forces. En particulier P_m est la puissance mécanique développée par les tensions sur l'unité de volume.

Quand on lui ajoute la puissance développée par les forces massiques on peut calculer le taux d'accroissement de l'énergie cinétique.

Si, comme c'est usuellement le cas, l'accélération \vec{g} dépend d'un potentiel Ω

$$\vec{g} = - \text{grad } \Omega \quad (2.26)$$

$$\sum_i u_i g_i = \vec{u} \cdot \vec{g} = - \vec{u} \cdot \text{grad } \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{D\Omega}{Dt}$$

et le bilan énergétique prend la forme

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} + \Omega \right) = P_m + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (2.27)$$

Le potentiel ne dépend généralement pas explicitement du temps. La puissance mécanique développée par les tensions sur l'unité de masse (P_m/ρ) est alors retrouvée sous forme d'un taux d'accroissement de l'énergie mécanique totale, cinétique et potentielle, de cette unité de masse.

5. Conservation de l'énergie.

P_m n'est qu'une partie de la puissance développée par les tensions sur l'unité de volume. La puissance totale développée peut être évaluée en examinant d'abord son expression P_S pour une collectivité contenue dans une surface fermée S :

$$P_S = \iint_S \sum_j \rho_j \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) dS \quad (2.28)$$

Appliquant le théorème de Green à cette expression valable en coordonnées cartésiennes :

$$P_S = \iiint_D \sum_j \rho_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) d\tau$$

on obtient pour l'unité de volume la puissance totale

$$P_t = \sum_j \rho_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i \tau_{ji} \right) \quad (2.29)$$

Elle se scinde en deux parties, l'une correspondant à la puissance mécanique comme si les vitesses restaient constantes (2.25), l'autre tenant compte de la variabilité du champ des vitesses et que nous appelons la puissance thermodynamique P_0 pour une raison qui apparaîtra par la suite

$$P_t = P_m + P_0 \quad (2.30)$$

$$P_0 = \sum_i \sum_j \rho_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tau_{ji} = \sum_i \sum_j \tau_{ji} \theta_{ji} \quad (2.31)$$

Dans sa dernière expression qui fait intervenir les éléments (I.21) il est clair que P_0 est associée à la vitesse de déformation des particules.

Le théorème de conservation de l'énergie exprime que le taux d'accroissement temporel de l'énergie cinétique d'une collectivité de particules est égal à la puissance développée par les forces intérieures et extérieures. Le taux d'accroissement de l'énergie cinétique peut s'écrire

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \frac{v^2}{2} d\tau$$

La puissance développée par les forces intérieures est, par définition, ramenée à un taux de décroissance d'une énergie interne. Si U désigne l'énergie interne par unité de masse, cette puissance sera

$$- \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U d\tau$$

La puissance développée par les forces extérieures comporte non seulement P_S , dont la valeur vient d'être exprimée en (2.28), mais aussi la puissance due aux forces massiques

$$\iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{e} \, d\tau$$

et enfin la quantité de chaleur pénétrant par unité de temps

$$- \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS$$

Le vecteur d'action calorifique \vec{q} a donc les dimensions d'un travail par unité de temps et de surface (ergs par cm²-sec par exemple), son flux est considéré comme positif si la chaleur est cédée par la collectivité vers l'extérieur. Le théorème de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \frac{V^2}{2} \, d\tau = - \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho U \, d\tau + P_S + \iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{e} \, d\tau - \iint_S (\vec{q} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (2.32)$$

Tenant compte par (2.2) de la conservation de la masse et ramenant tous les termes à des intégrales de volume, il vient la forme locale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) = P_c + \rho \sum_1 u_i g_i - \text{div } \vec{q}$$

Elle se simplifie notablement par soustraction du bilan mécanique (2.24); au égard à (2.30) il reste

$$\rho \frac{DQ}{Dt} = P_0 - \text{div } \vec{q} \quad (2.33)$$

C'est l'expression du premier principe de la thermodynamique pour une particule en mouvement.

6. Equilibre thermodynamique local. Taux d'accroissement d'entropie d'une particule.

Pour poursuivre l'étude nous admettons qu'à l'échelle microscopique, à tout endroit et à toute époque, l'équilibre thermodynamique est réalisé. Dans la fiction du milieu continu ce postulat signifie qu'en chaque point, à chaque époque, l'énergie interne spécifique U est une fonction d'état de deux autres grandeurs spécifiques (par unité de masse) : le volume spécifique, ou son inverse ρ , et l'entropie spécifique S . A partir de cette fonction d'état on peut alors définir au même point et à la même époque : une température absolue

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} (\rho, S) \quad (2.34)$$

et une pression thermodynamique

$$p = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} U(\rho, S) \quad (2.35)$$

Notons que si l'entropie spécifique est éliminée entre les deux fonctions $T(\rho, S)$ et $p(\rho, S)$ qui en résultent, on obtient l'équation d'état du fluide $f(p, \rho, T) = 0$.

Comme les grandeurs qui viennent d'être introduites peuvent être différentes d'un point à l'autre et d'une époque à l'autre, il n'y a pas d'équilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique. En fait le postulat permet une étude des phénomènes thermodynamiques irréversibles à cette échelle macroscopique. Nous ne considérons que des fluides homogènes, c'est-à-dire tels que la fonction d'état $U(\rho, S)$ soit identique pour chaque particule. Ceci élimine de nos considérations les phénomènes de diffusion mais permet, en vertu des définitions (2.34) et (2.35), d'écrire pour tout type d'accroissement des variables

$$dU = \frac{p}{\rho^2} d\rho + T dS \quad (2.36)$$

En particulier

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + T \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\text{grad } U = \frac{p}{\rho^2} \text{grad } \rho + T \text{grad } S$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + T \frac{DS}{Dt}$$

Cette dernière relation permet d'éliminer l'énergie interne dans le premier principe (2.32) qui prend la forme

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = P_0 - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \text{div } \vec{q}$$

On peut encore grouper les deux premiers termes au second membre en se servant de l'équation (2.3) de conservation de la masse et de (I.43)

$$P_0 - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = P_0 + p \text{div } \vec{u} = P_0 + p \sum_i \theta_{ii}$$

Ceci suggère en se rapportant à (2.31) de définir de nouvelles tensions

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + p \delta_{ij} \quad (2.37)$$

Ce sont les tensions de viscosité. Il vient alors pour la nouvelle forme de l'équation de l'énergie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 2P - \text{div } \vec{q} \quad (2.38)$$

$$\text{avec} \quad 2 F = \sum_i \sum_j c_{ij} \theta_{ij} \quad (2.38)$$

Par analogie avec le second terme, $2 F$ peut être considéré comme une quantité de chaleur produite par unité de volume et de temps par frottement interne.

7. Taux de production locale d'entropie. Loi de Fourier.

Transformons la formule (2.38) comme suit :

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \frac{2 F}{T} - \frac{\text{div } \vec{q}}{T} = \frac{2 F}{T} - \text{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) + \vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{T}$$

et intégrons sur une collectivité; il vient

$$\frac{D}{Dt} \iiint_D \rho S d\tau = - \iint_S \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS + \iiint_D r d\tau \quad (2.40)$$

$$\text{où} \quad r = \frac{2 F}{T} + \vec{q} \cdot \text{grad} \frac{1}{T} \quad (2.41)$$

Si r était nul, la formule (2.40) représenterait la variation d'entropie de la collectivité selon le calcul applicable à une succession d'états d'équilibre, où chaque quantité de chaleur est divisée par la température à laquelle elle est reçue. Le second terme de (2.40) représente par conséquent la variation d'entropie provenant du déséquilibre thermodynamique à l'échelle macroscopique. La grandeur r , définie par (2.41), est un taux de production locale d'entropie par unité de volume. Pour satisfaire au second principe de la thermodynamique il faut que $r \geq 0$, l'égalité à zéro ne pouvant avoir lieu que si l'équilibre global est réalisé soit : température uniforme ($\text{grad } T = 0$) et disparition des vitesses de déformation des particules (champ des vitesses correspondant à celui d'un corps rigide). La loi de Fourier

$$\vec{q} = -k \text{ grad } T \quad (2.42)$$

où k est le coefficient de conductibilité thermique (ergs par cm sec et degré) qui est généralement lui-même une fonction d'état, par exemple une fonction de la température et de la pression, nous donne déjà

$$r = \frac{2 F}{T} + \frac{k}{T^2} (\text{grad } T \cdot \text{grad } T)$$

et le second terme est positif et ne s'annule que par disparition du gradient de température.

Si le premier terme devient une forme définie positive dans les éléments du tenseur des vitesses de déformation, nulle quand et seulement quand ce tenseur s'annule, le second principe sera satisfait. L'hypothèse la plus simple à cet effet est celle du fluide Newtonien.

6. Relations entre tensions de viscosité et vitesses de déformation.
Fluide Newtonien

Des tensions de viscosité, fonctions linéaires et homogènes des vitesses de déformation, ont la propriété acquise par l'intuition de changer de sens avec les vitesses de déformation et de s'annuler avec elles. Il est possible cependant, qu'en postulant cette propriété de linéarité qui caractérise un fluide Newtonien, on obtienne seulement une approximation satisfaisante pour les vitesses de déformation faibles.

La fonction F devient alors quadratique homogène dans les éléments du tenseur θ . Pour un fluide dont les propriétés sont isotropes, la structure de F doit être indépendante de l'orientation particulière du repère local. F doit donc pouvoir s'exprimer à partir des invariants fondamentaux de θ . La fonction quadratique homogène (et entière) la plus générale qui réponde à ces préoccupations est

$$F = \frac{1}{2} \lambda \theta_1^2 - 2 \mu \hat{\theta}_2 \tag{2.43}$$

Si λ et μ sont positifs elle est bien définie positive puisque, selon (I.46), $\hat{\theta}_2$ a cette propriété. En vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes on peut alors écrire

$$2 F = \sum_i \theta_{11} \frac{\partial F}{\partial \theta_{11}} + \sum_{i,j} \theta_{ij} \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}}$$

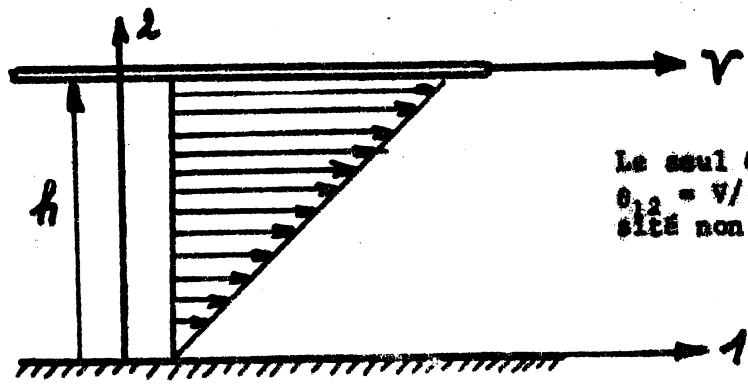
Cette expression utilise la symétrie du tenseur θ en vertu de laquelle la fonction F ne dépend en réalité que de six arguments. Son identification avec la forme (2.38) fournit alors pour les tensions de viscosité, les expressions

$$\sigma_{11} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{11}} \qquad 2 \sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \theta_{ij}} \tag{2.44}$$

Le calcul effectué à partir de (2.43), (I.40) et (I.46) donne finalement

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \theta_{ij} + (\lambda - \frac{2}{3} \mu) \theta_1 \delta_{ij} \tag{2.45}$$

Si le fluide est incompressible ($\theta_1 = 0$), le seul coefficient de viscosité qui se manifeste est le coefficient de viscosité tangentielle μ (gr par cm sec). Sa définition usuelle est introduite dans le cas particulier simple d'un écoulement en couches parallèles : $u_1 = V x_2/h$ $u_2 = u_3 = 0$.



Le seul élément non nul du tenseur θ est $\theta_{12} = V/(2h)$ et la seule tension de viscosité non nulle est alors $\sigma_{12} = \mu V/h$.

On peut imaginer cet écoulement réalisé entre une paroi plane inférieure fixe et une paroi supérieure en translation avec la vitesse V . Celle-ci subira par unité de surface une résistance à l'avancement σ_{12} proportionnelle au gradient transversal de vitesse, le coefficient de proportionnalité étant le coefficient de viscosité tangentielle. Il peut théoriquement dépendre de la pression et de la température. L'expérience montre qu'il est surtout sensible à la température; il augmente avec elle pour un gaz, diminue avec elle pour un liquide.

Le coefficient de viscosité en volume λ est une mesure de l'écart qui peut exister entre la pression thermodynamique et la pression hydrostatique

$$p_h = -\frac{1}{3} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \text{ quand la particule change de volume.}$$

En effet, par (2.37) et (2.45)

$$p - p_h = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \lambda \theta_1 = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \quad (2.46)$$

C'est un effet des forces de liaison intermoléculaires. L'hypothèse du fluide Newtonien est justifiée pour un gaz suffisamment éloigné de ses conditions de liquéfaction par la théorie cinétique. En toute première approximation, pour un modèle moléculaire idéalisé consistant en une sphère rigide-élastique de rayon r_0 et masse m , la théorie cinétique des gaz prévoit les valeurs

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{m}{r_0^2} \left(\frac{RT}{v} \right)^{1/2} \quad \lambda = 0 \quad k = \frac{15}{4} R \mu$$

où R est la constante de l'équation d'état $p = R \rho T$.

Pour les gaz polyatomiques la relation entre coefficient de conductibilité thermique et viscosité tangentielle est meilleure quand on y incorpore la correction de EUCKEN qui tient compte en première approximation de l'excitation des degrés de liberté de rotation et de vibration de la molécule :

$$k = \left(c_v + \frac{9}{4} R \right) \mu \quad c_v \text{ chaleur spécifique à volume constant} \quad (2.47)$$

Observons finalement que l'hypothèse (2.43) peut, après manipulations, être mise sous la forme

$$2P = \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \vec{u})^2 + \mu (\operatorname{div} \operatorname{grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - 2 \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}) \quad (2.48)$$

qui permet son calcul en coordonnées curvilignes orthogonales. Elle met bien en évidence que, même pour un écoulement irrotationnel de fluide incompressible, il subsiste une dissipation due au gradient de l'énergie cinétique spécifique.

9. Forme intégrale de la conservation de l'énergie.

La forme intégrale de l'équation d'énergie est intimement liée au transport de l'énergie totale spécifique, parfois aussi appelée l'enthalpie spécifique totale

$$E = I + \frac{1}{2} v^2 + \theta \quad (2.49)$$

où I désigne l'enthalpie spécifique thermodynamique

$$I = U + p/\rho \quad (2.50)$$

les forces massiques sont donc supposées dériver d'un potentiel Ω , selon (2.26) et le terme correspondant de (2.32) peut s'écrire

$$\iiint_D \rho \vec{u} \cdot \vec{g} \, d\tau = - \frac{D}{Dt} \iiint_D \rho \Omega \, d\tau + \iiint_D \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \, d\tau$$

Appliqués maintenant la formule générale (1.80), (2.32) se transforme en

$$\begin{aligned} \iiint_D \frac{d}{dt} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U + \rho \Omega \right) d\tau + \iint_S \left\{ \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U + \rho \Omega \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) + (\vec{q} \cdot \vec{n}) \right\} dS \\ = P_S + \iiint_D \rho \frac{\partial H}{\partial t} \, d\tau \end{aligned}$$

L'intégrale de surface donnée par (2.28) est encore transformée par (2.37) pour y faire apparaître les tensions de viscosité

$$P_S = P_\sigma - \iint_S p (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dS \quad (2.51)$$

avec

$$P_\sigma = \iint_S \sum_j \tau_j \left(\sum_i u_i \sigma_{ji} \right) \, dS$$

Substituons dans cette expression de la puissance totale développée par les tensions de viscosité, ces dernières par leurs expressions (2.45)

$$\begin{aligned} \sum_j \tau_j \left(\sum_i u_i \sigma_{ji} \right) &= \mu \sum_j \tau_j \left\{ \sum_i u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \\ &\quad + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta_1 \sum_j \sum_i \tau_j u_i \delta_{ij} \\ &= \mu \sum_j \tau_j \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_i u_i^2 \right) + \vec{u} \cdot \text{grad } u_j \right\} \\ &\quad + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \theta_1 (\vec{u} \cdot \vec{n}) \end{aligned}$$

Mais, par la formule de Lagrange pour l'accélération,

$$\vec{u} \cdot \text{grad } u_j = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} v^2 + (\text{rot } \vec{u} \times \vec{u})_j$$

et on trouve finalement, après ce calcul en coordonnées cartésiennes, une expression calculable plus généralement en coordonnées curvilignes

$$P_0 = \iint_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{avec}$$

$$\vec{\sigma} = \mu \text{ grad } v^2 + \mu \text{ rot } \vec{u} \times \vec{u} + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{u} \text{ div } \vec{u} \quad (2.52)$$

La substitution de (2.51), suivie d'un regroupement des termes, donne finalement la forme intégrale suivante pour la conservation de l'énergie

$$\iint_S (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} \, dS = - \iiint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} d\tau \quad (2.53)$$

Encore une fois, l'intégrale de volume au second membre disparaît dans le cas de champs stationnaires et la conservation de l'énergie se laisse contrôler uniquement par un flux à travers la surface instantanée limitant la collectivité. Le taux de fuite de l'enthalpie totale et de la chaleur est alors équilibré par la puissance totale développée par les tensions de viscosité. Dans le cas d'un fluide parfait, pour lequel on néglige la viscosité et la conductibilité thermique, on obtient alors un principe de conservation de l'enthalpie totale. Pour un tube de courant élémentaire en régime stationnaire, l'application de (2.53) entre deux sections droites fournit

$$\rho_2 H_2 V_2 \, dS_2 - \rho_1 H_1 V_1 \, dS_1 = \iint_S (\vec{\sigma} - \vec{q}) \cdot \vec{n} \, dS$$

et aux sections terminales

Les intégrales du second membre sont étendues à la paroi latérale du tube. Il peut arriver que, même pour un fluide visqueux et conducteur de la chaleur, les termes du second membre s'équilibrent ou s'annulent individuellement. Dans ce cas, en vertu de la relation

$$\rho_2 V_2 \, dS_2 = \rho_1 V_1 \, dS_1$$

de conservation de la masse, on obtient la conservation de l'enthalpie spécifique totale $H_2 = H_1$. Un cas d'application important sera rencontré à propos de la théorie des ondes de choc.

Remarquons enfin qu'en revenant par la formule de Green à des intégrales de volume, (2.53) livre une nouvelle forme locale du principe de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) + \Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) = 0 \quad (2.54)$$

Soit encore, si l'on désire faire apparaître l'enthalpie totale dans le terme non stationnaire

$$\frac{1}{\rho} (\rho H - p) - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \text{div} (\rho H \vec{u} + \vec{q} - \vec{\sigma}) = 0 \quad (2.55)$$

10. Equations de Navier-Stokes.

Tout comme les tensions de viscosité ont pu être éliminées dans l'équation d'énergie, on peut procéder à cette élimination dans les équations du mouvement. Celles-ci prennent alors la forme dite de Navier-Stokes. Dans le cas général elles sont compliquées du fait que les coefficients de viscosité, qui dépendent de la pression et de la température, sont essentiellement variables dans le champ.

Après substitution de (2,37) et (2,45) dans (2,14) on peut établir la forme générale

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = & \rho \vec{g} - \text{grad } p - \mu \text{ rot rot } \vec{u} \\ & + \text{grad} \left(\left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \text{div } \vec{u} \right) - (\text{div } \vec{u}) \text{grad } \mu \\ & + \text{grad} (\vec{u} \cdot \text{grad } \mu) + \text{rot} (\vec{u} \times \text{grad } \mu) - \vec{u} \text{ div grad } \mu \end{aligned} \quad (2.56)$$

On a vu en cinématique comment interpréter l'accélération en coordonnées curvilignes à l'aide de la formule de Lagrange. Tous les termes du second membre de (2.56) s'interprètent également par les opérateurs gradient, divergence et rotationnel.

Il se produit évidemment une simplification notable quand on peut négliger les variations des coefficients de viscosité

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad } p - \mu \text{ rot rot } \vec{u} + \left(\lambda + \frac{4}{3} \mu \right) \text{grad div } \vec{u}$$

Les équations originales données par Navier et Stokes étaient en outre basées sur l'hypothèse d'un fluide incompressible ce qui les réduit encore aux termes

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad } p - \mu \text{ rot rot } \vec{u}$$

On observera que si l'écoulement est irrotationnel, la viscosité ne contribue pas à l'accélération d'une particule sans que ceci entraîne nécessairement la disparition de la dissipation.

Il est d'usage en coordonnées cartésiennes de mettre ces équations sous la forme

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 u_i = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i$$

Ceci se justifie par la formule du laplacien vectoriel

$$\nabla^2 \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u}$$

facile à vérifier en coordonnées cartésiennes.

II. Élimination de l'entropie dans l'équation de l'énergie.

L'équation de conservation de la masse (2.2), les équations de Navier-Stokes et l'équation de conservation de l'énergie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = 2 F + \text{div} (k \text{ grad } T) \quad (2.58)$$

telle que découlant de (2.38) et (2.42) avec $2 F$ donné par (2.48), forment un système de cinq équations aux dérivées partielles pour les cinq inconnues (ρ, u_i, S) . La nature physique du fluide y est représentée par les coefficients de transport (λ, μ, k) et aussi par la structure de l'énergie interne $U(\rho, S)$ dont découlent par les définitions (2.34) et (2.35) les inconnues auxiliaires $p = p(\rho, S)$ et $T = T(\rho, S)$. Ces inconnues n'interviennent d'ailleurs que par leur gradient et on pourrait aussi bien les éliminer par les relations

$$\text{grad } p = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \text{ grad } S + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \text{ grad } \rho \quad (2.59)$$

$$\text{grad } T = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \text{ grad } S + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \text{ grad } \rho \quad (2.60)$$

Ce procédé introduit en fait trois nouvelles caractéristiques indépendantes du fluide

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$$

et

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial S} \quad (2.61)$$

La dernière relation, liant deux des caractéristiques introduites par (2.59) et (2.60), est une relation de réciprocity thermodynamique.

Un procédé plus direct consiste à éliminer complètement l'entropie en exprimant ses dérivées partielles en fonction de caractéristiques accessibles aux mesures.

Considérons par exemple l'énergie libre $F = U - T S$, dont la différentielle totale est, en vertu de (2.36)

$$dF = \frac{P}{\rho^2} d\rho - S dT \quad (2.62)$$

Éliminant F entre les relations

$$\frac{P}{\rho^2} = \frac{\partial F}{\partial \rho} \quad \text{et} \quad S = - \frac{\partial F}{\partial T}$$

il vient

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T = - \frac{1}{\rho^2} \beta \quad (2.63)$$

$$\text{où} \quad \beta = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (2.64)$$

est une caractéristique accessible aux mesures. Considérons ensuite le potentiel thermodynamique de Gibbs $G = I - T S$; sa différentielle totale est

$$dG = dI - T dS - S dT$$

où, en vertu de (2.59) et (2.36)

$$dI = T dS + \frac{1}{\rho} d\rho \quad (2.65)$$

Par conséquent

$$dG = \frac{1}{\rho} d\rho - S dT \quad (2.66)$$

et on trouve en éliminant G entre les relations

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial G}{\partial \rho} \quad \text{et} \quad -S = \frac{\partial G}{\partial T}$$

la dérivée partielle

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T = -\alpha \quad (2.67)$$

$$\text{où} \quad \alpha = \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T}\right)_p \quad (2.68)$$

est le coefficient de dilatation thermique du fluide.

Enfin, puisque $T dS$ est l'apport différentiel de chaleur dans les conditions d'équilibre, on a, par définition des chaleurs spécifiques à volume et à pression constantes :

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v = c_v \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = c_p \quad (2.69)$$

La dernière de ces définitions et (2.63) fournissent entre les différentielles de S , ρ et T la relation

$$dS = c_v \frac{dT}{T} - \frac{\beta}{\rho^2} d\rho \quad (2.70)$$

qui explicite en fait (2.60). La deuxième définition associée à (2.67) fournit

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - \alpha d\rho \quad (2.71)$$

L'élimination de dT entre (2.70) et (2.71) conduit à une forme explicite de (2.56)

$$(c_p - c_v) dS = - \frac{\beta c_p}{\rho^2} d\rho + \alpha c_v d\rho \quad (2.72)$$

Enfin, l'élimination de dS livre une forme différentielle explicite de l'équation d'état du fluide

$$\frac{c_p - c_v}{T} dT + \frac{\beta}{\rho^2} d\rho - \alpha d\rho = 0 \quad (2.73)$$

Les quatre caractéristiques physiques (c_p , c_v , α , β) sont liées par la relation de réciprocité (2.61) qui devient

$$c_p - c_v = \alpha \beta T \quad (2.74)$$

D'autres caractéristiques physiques, liées aux précédentes, jouent un rôle important dans le comportement qualitatif de l'écoulement. Ce sont en particulier les vitesses de propagation adiabatique a et isotherme b des faibles perturbations de pression.

La première est liée au module de compression adiabatique $(\partial \rho^{-1} / \partial p)_s$, son carré est défini par

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho^2} \frac{\beta c_p}{\alpha c_v} \quad (2.75)$$

La seconde est liée de la même manière au module de compression isotherme $(\partial \rho^{-1} / \partial p)_T$, son carré est défini par

$$b^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \quad (2.76)$$

Il existe donc entre les deux la relation simple

$$a^2/b^2 = c_p/c_v \quad (2.77)$$

Une des éliminations possibles de l'entropie consiste à transformer l'équation d'énergie (2.58) par (2.70) :

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = 2 \nu \Delta T + \text{div}(k \text{ grad } T) - p T \text{ div } \vec{u} \quad (2.78)$$

où la dérivée particulaire de la masse volumique a encore été éliminée par (2.2). Cette équation, associée à la conservation de la masse et aux équations de Navier-Stokes, constitue un système aux cinq inconnues (ρ , u_i , T) où la pression doit être considérée comme fournie par l'équation d'état. Alternativement on peut éliminer la pression dans les équations de Navier-Stokes par la relation

$$\text{grad } p = b^2 \text{ grad } \rho + \beta \text{ grad } T \quad (2.79)$$

évacuant de la forme différentielle de l'équation d'état. Les caractéristiques physiques du fluide sont maintenant en principe des fonctions connues de (ρ , T).

12. Cas d'un liquide.

Les liquides réels ont un comportement très proche du liquide idéal caractérisé par une énergie interne séparable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = 0 \quad \text{ou} \quad U = U_1(\rho) + U_2(S) \quad (2.80)$$

Par conséquent il existe une relation bijnivoque entre la pression et la masse volumique :

$$p = \rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} = \rho^2 U'_1(\rho) = p(\rho) \quad (2.81)$$

ainsi qu'une relation bijnivoque entre l'entropie et la température :

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} = U'_2(S) = T(S) \quad (2.82)$$

Les deux chaleurs spécifiques sont confondues $c_p = c_v = \beta$, les coefficients α et β sont nuls, les équations (2.70) et (2.71) se réduisent à

$$T d S = c d T$$

et l'équation d'énergie à

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = 2 F + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \quad (2.83)$$

Les deux vitesses de propagation des perturbations de pression sont égales ($b^2 = a^2$) et

$$\operatorname{grad} p = a^2 \operatorname{grad} \rho \quad (2.84)$$

Le seul couplage qui subsiste entre l'équation d'énergie qui gouverne le champ des températures et les équations de Navier-Stokes est dû à la dépendance des coefficients de viscosité par rapport à la température.

13. Cas d'un gaz parfait.

Un autre cas simple important est celui des gaz parfaits. Ils obéissent à l'équation d'état

$$p = R \rho T \quad (2.85)$$

résumant les lois de Boyle-Mariotte et Gay-Lussac. On en déduit immédiatement par leur définition, les caractéristiques

$$\alpha = \frac{R}{p} = \frac{1}{\rho T} \quad \beta = R \rho = \frac{p}{T} \quad (2.86)$$

et donc, d'après (2.74), (2.75) et (2.77)

$$c_p - c_v = R \quad (2.87)$$

$$b^2 = R T \quad a^2 = \frac{c_p}{c_v} R T \quad (2.88)$$

De plus

$$d U = T d S + \frac{p}{\rho^2} d \rho = T \left(d S + R \frac{d \rho}{\rho} \right) = T d C$$

avec

$$C = S - S_0 + R \ln \frac{\rho}{\rho_0}$$

L'énergie interne ne dépend donc que de la variable C et

$$T = \frac{dU}{dC}$$

montre qu'il existe entre C et T une relation biunivoque.
En définitive l'énergie interne ne dépend que de la température.
A volume constant

$$dC = dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT = c_v \frac{dT}{T}$$

et c_v comme dès lors c_p ne dépendent que de la température. D'ailleurs

$$dU = T dC = c_v dT \quad (2.89)$$

et

$$S - S_0 + R \ln \frac{p}{p_0} = \int_{T_0}^T c_v \frac{dT}{T} \quad (2.90)$$

Enfin

$$I = U + \frac{p}{\rho} = U + R T$$

ne dépend aussi que de la température et

$$dI = c_p dT \quad (2.91)$$

L'équation d'énergie peut s'écrire

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = 2F + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + p \operatorname{div} \vec{u} \quad (2.92)$$

et la pression est directement fournie par l'équation d'état.

14. Variables réduites, Nombres caractéristiques et Similitude.

Le choix de références : L pour les longueurs, W pour les vitesses, permet déjà d'exprimer toutes les grandeurs cinématiques en variables sans dimensions :

x_i/L pour les coordonnées

u_i/W pour les vitesses

tW/L pour le temps.

Au lieu d'utiliser des notations spéciales nous conviendrons de conserver les symboles (x_i, u_i, t) en spécifiant qu'il s'agit des variables réduites. Pour ramener les autres variables à une forme non-dimensionnelle, introduisons une température de référence \bar{T} et une masse volumique de référence $\bar{\rho}$.

De ce fait la pression reçoit une valeur de référence $\bar{\rho}W^2$ (dans certaines applications cette valeur est encore divisée par 2) et les caractéristiques du fluide des références notées

$$\bar{\mu} = \mu (\bar{T}, \bar{\rho}) \quad , \quad \bar{c}_v = c_v (\bar{T}, \bar{\rho}) \quad \text{etc ...}$$

Nous conviendrons alors de continuer à nous servir des symboles $T, \rho, \mu, c_v \dots$ etc. pour désigner les rapports des caractéristiques locales à leur référence.

Examinons maintenant la forme que prennent les équations de conservation en variables réduites. Celle de conservation de la masse (2.2) voit tous ses termes multipliés par la même grandeur dimensionnelle $\bar{\rho}W/L$. Après suppression de ce facteur commun, elle conserve donc sa forme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Les équations de Navier-Stokes (2.56) voient leurs termes affectés, dans l'ordre, par les grandeurs dimensionnelles suivantes :

$$\frac{\bar{\rho}W^2}{L} \quad , \quad \bar{\rho} \bar{g} \quad , \quad \frac{\bar{\rho}W^2}{L} \quad , \quad \frac{\bar{\lambda}W}{L^2} \quad , \quad \frac{\bar{\mu}W}{L^2}$$

En les divisant par la première, apparaissent des grandeurs de référence non-dimensionnelles : les nombre caractéristiques.

$$\frac{W^2}{gL} = Fr \quad \text{le nombre de Froude, où } \bar{g} \text{ est une valeur de référence de l'accélération du champ de gravitation}$$

$$\frac{\bar{\rho}WL}{\bar{\mu}} = Re \quad \text{le nombre de Reynolds}$$

$$\frac{\bar{\rho}WL}{\bar{\lambda}} = Le \quad \text{un nombre de Reynolds similaire associé à la viscosité en volume.}$$

En variables réduites, les équations de Navier-Stokes se présentent comme suit

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{Fr} \rho \bar{g} - \operatorname{grad} p + \frac{1}{Le} \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} \vec{u})$$

$$+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{4}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \vec{u}) - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - 2 \operatorname{div} \vec{u} \operatorname{grad} \mu \right.$$

$$\left. + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \vec{u} + 2(\operatorname{grad} \mu \operatorname{grad}) \vec{u} \right\}$$

Les grandeurs dimensionnelles affectant les termes de l'équation d'énergie (2.78) sont

$$\frac{\bar{\rho} \bar{c}_v \bar{W}}{L}, \quad \frac{\bar{\lambda} \bar{W}^2}{L^2}, \quad \frac{\bar{\mu} \bar{W}^2}{L^2}, \quad \frac{\bar{k} \bar{T}}{L^2}, \quad \frac{\bar{\beta} \bar{T} \bar{W}}{L}$$

En les divisant par la première on obtient de nouveaux nombres caractéristiques

$$\frac{W^2}{\bar{c}_v \bar{T}} = \bar{\zeta}^2$$

$$\frac{\bar{\mu} \bar{c}_p}{\bar{k}} = Pr \quad \text{le nombre de Prandtl}$$

$$\bar{c}_p / \bar{c}_v = \bar{\gamma} \quad \text{rapport de référence des chaleurs spécifiques}$$

$$\frac{\bar{\beta} \bar{T}}{\bar{\rho} \bar{c}_v} = \bar{\eta}$$

En variables réduites l'équation d'énergie s'écrit

$$\bar{\rho} \bar{c}_v \frac{DT}{Dt} = \frac{\bar{\zeta}^2}{Le} \lambda (\text{div } \vec{u})^2 + \frac{\bar{\zeta}^2}{Re} \mu \theta + \frac{\bar{\gamma}}{Pr \cdot Re} \text{div}(k \text{ grad } T) - \bar{\eta} \beta T \text{div } \vec{u}$$

avec

$$\theta = -\frac{2}{3} (\text{div } \vec{u})^2 + \text{div grad}(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2 \vec{u} \cdot \text{rot rot } \vec{u} \\ - \text{rot } \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{u} - 2 \vec{u} \cdot \text{grad div } \vec{u}$$

Enfin l'équation (2.79) prend la forme réduite

$$\text{grad } p = \frac{1}{\bar{\gamma} \bar{M}^2} \text{grad } \rho + \frac{\bar{\beta}}{\bar{\zeta}^2} \text{grad } T$$

où intervient le nombre caractéristique

$$\bar{M} = \frac{W}{a} \quad \text{le nombre de Mach de référence.}$$

Entre ces nombres caractéristiques existe en général une relation découlant de (2.74) et (2.75) par élimination de α

$$(\bar{\gamma}-1)\bar{\zeta}^2 = \bar{\gamma} \bar{\eta}^2 \bar{M}^2$$

Pour un liquide on a les simplifications

$$\bar{\eta} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} = 1$$

et les nombres $\bar{\zeta}$ et \bar{M} sont indépendants.

Pour un gaz parfait on a la simplification

$$\bar{\eta} = \bar{\gamma} - 1$$

et le nombre $\bar{\zeta}$ peut être éliminé au profit du nombre de Mach par la relation

$$\bar{\zeta} = \bar{M} \sqrt{\bar{\gamma}(\bar{\gamma} - 1)}$$

On observera que le rapport des chaleurs spécifiques, le nombre de Prandtl et $\bar{\eta}$ ne dépendent que de la nature du fluide et des références de température et de masse volumique. Le nombre de Mach et $\bar{\zeta}$ sont de plus associés à la référence de vitesse, les nombres de Reynolds et de Froude aux références de vitesse et de longueur.

Deux écoulements sont semblables si on peut assigner à chacun d'eux des références de longueur, vitesse, masse volumique et températures telles qu'en tous les points homologues (de mêmes coordonnées et temps réduits) il y ait identité des variables réduites et par conséquent aussi de leurs dérivées partielles réduites. Les équations de conservation sont alors vérifiées si les nombres caractéristiques des deux écoulements sont identiques. La similitude implique encore le respect des conditions aux limites pour les deux écoulements, ce qui, comme on verra plus loin, peut introduire des conditions d'identité entre nouveaux nombres caractéristiques.

Réciproquement, si la nature des fluides permet de respecter l'identité de tous les nombres caractéristiques par des choix de valeurs de référence appropriés, toute solution en variables réduites du premier problème d'écoulement est une solution du second.

Dans certains cas la notion de similitude peut être élargie en admettant une distorsion affine de l'espace. On en verra des exemples pour les écoulements subsoniques et supersoniques linéarisés.

Le choix des valeurs de référence pour un problème d'écoulement est généralement guidé par le souci d'avoir des variables réduites et des dérivées partielles de celles-ci de l'ordre de l'unité. Dans ce cas les nombres caractéristiques sont des mesures de l'importance relative des phénomènes en interférence.

Ainsi les nombres de Reynolds mesurent l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité. Le nombre de Froude, l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces de gravitation.

Pour l'équation d'énergie, les combinaisons de nombres caractéristiques qui figurent dans sa forme réduite sont d'interprétation plus difficile dans un contexte général. La signification des nombres de Mach, de Prandtl et de $\bar{\zeta}$ ressort plus clairement de l'étude des cas particuliers.

15. Conditions aux limites.

Soit $f(x_i, t) = 0$ l'équation d'une surface avec laquelle le fluide est en contact. Si l'on néglige la viscosité, les équations de Navier-Stokes perdent les termes contenant les dérivées partielles d'ordre le plus élevé dans les vitesses et l'on ne peut qu'imposer la condition de tangence :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \text{grad } f = 0 \quad \text{sur } f = 0 \quad (2.93)$$

expriment que la surface reste formée des mêmes particules fluides, celles-ci pouvant glisser sur celle-là.

Au contraire, si l'on tient compte de la viscosité, une condition nécessaire pour que la solution soit déterminée est que la vitesse relative d'une particule en contact avec la paroi soit nulle :

$$\vec{u} - \vec{w} = 0 \quad \text{où } \vec{w} \text{ est le champ des vitesses instantanées sur la paroi.}$$

En particulier si la paroi est fixe, le fluide visqueux y satisfait aux conditions $u_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$).

Vérifions en les conséquences sur le bilan global d'énergie (2.32) en supposant la collectivité enfermée dans une enceinte dont les parois sont non seulement fixes mais aussi athermanes ($\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$) et en supposant en outre le champ de forces massiques conservatif ($\vec{g} = -\text{grad } \Omega$ avec $\partial\Omega/\partial t = 0$). Dans ces conditions l'énergie totale

$$E = \iiint_D \rho \left(\frac{V^2}{2} + \Omega + U \right) d\tau$$

de la collectivité doit demeurer constante ce qui, selon (2.32), implique $P_S = 0$, condition respectée par $\vec{u} = 0$ sur S . Pour un fluide non visqueux P_S se réduit à

$$P_S = - \iint_S p(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$$

et son annulation est satisfaite en exigeant seulement $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$ sur S , cas particulier de (2.93).

Sur une surface libre séparant deux fluides, les tensions τ_{ni} doivent être réciproques, ce qui peut se traduire par la continuité des grandeurs

$$\left(\left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div } \vec{u} - p \right) \varepsilon_i + 2 \mu \varepsilon \varepsilon_j \theta_{ij} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.94)$$

quand on traverse la surface en un point de normale $\vec{n}(\varepsilon_i)$.

En particulier si les fluides ne sont pas visqueux, les conditions se ramènent à une seule : la continuité de la pression.

Le phénomène de tension superficielle vient éventuellement compliquer ces conditions de transition. En statique des fluides il est décrit par l'équation de Laplace

$$\Delta p = c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.95)$$

où c est un coefficient de tension superficielle (ergs/cm²) caractéristique des fluides en présence, R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de la surface de séparation. Si Δp dénote l'accroissement de pression observé en traversant la surface dans le sens indiqué par la normale \vec{n} choisie, un rayon de courbure est positif si le centre de courbure correspondant est du côté indiqué par la normale. Les conditions (2.94) peuvent alors être complétées par (2.95) sous la forme

$$\varepsilon_i \Delta p = \varepsilon_i \Delta \left\{ \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{u} \right\} + \Delta \left\{ 2 \mu \varepsilon_{ij} \theta_{ij} \right\} + \varepsilon_i c \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.96)$$

Dans plusieurs cas d'application, la surface de séparation est quasi-plane. Elle s'écarte peu par exemple de $x_3 = 0$ et peut être décrite par une équation de la forme $x_3 = f(x_1, x_2, t)$. Comme ses pentes sont, par hypothèses, très petites, les cosinus directeurs de la normale (ici orientée vers les x_3 croissants) sont en première approximation :

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad , \quad -\frac{\partial f}{\partial x_2} \quad , \quad 1$$

et

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Enfin la condition d'entraînement de la surface de séparation avec les particules fluides

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

se réduit à

$$\frac{dx_3}{dt} = u_3 = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.97)$$

Au même ordre d'approximation les conditions générales (2.96) deviennent

$$\Delta \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right\} = 0 \quad \Delta \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \right\} = 0 \quad (2.98)$$

$$\Delta p = \Delta \left\{ \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \vec{u} \right\} + \Delta \left\{ 2 \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right\} + \epsilon \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.99)$$

Finalement ces conditions, au lieu d'être appliquées sur la surface de séparation même, peuvent sans modifier l'ordre de l'approximation, être appliquées sur le plan $x_3 = 0$. On peut alors remplacer dans (2.98)

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial t} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial t} \quad (2.100)$$

On observera que, sous une forme non-dimensionnelle, les conditions (2.94) ne font intervenir que les nombres de Reynolds.

Quand on y ajoute les effets de tension superficielle il apparaît un nouveau nombre caractéristique

$$\frac{\bar{\rho} W^2 L}{\epsilon}$$

Dans les problèmes où interviennent de façon sensible les transferts d'énergie sous forme calorifique il y a lieu de compléter les conditions aux limites par celles de transfert de chaleur entre fluide et paroi. On admet l'existence d'une différence finie de température ΔT entre les deux milieux. Alors si ΔT mesuré en cheminant suivant la normale \vec{n}

$$(\vec{q} \cdot \vec{n}) = -h \Delta T$$

où h est le coefficient de transfert de chaleur (ergs par $\text{cm}^2 \text{sec}$ et $^\circ\text{C}$).

Combinant cette loi avec celle de Fourier

$$k (\text{grad } T \cdot \vec{n}) = h \Delta T \quad (2.101)$$

Cette équation s'applique en réalité aussi bien à la paroi qu'au fluide, chacun avec son coefficient de conductibilité propre.

En général on suppose la température de la paroi connue, et la relation est appliquée au fluide où elle lie la température du fluide à la paroi et la composante normale de son gradient dans le fluide.

La mise sous forme non-dimensionnelle de cette relation fait apparaître le nombre caractéristique

$$\frac{h L}{k} = \text{Nu} \quad \text{nombre de Nusselt}$$

Un autre nombre caractéristique fréquemment utilisé pour les transferts de chaleur à la paroi est

$$\frac{\bar{h}}{\rho c_p W} = \frac{Nu}{Pr \cdot Re} = St \quad \text{nombre de Stanton}$$

16. Conservation de la circulation.

On dira que dans une région du fluide, toujours composée des mêmes particules, la circulation de la vitesse est conservée si $DC/Dt = 0$ pour tout contour fermé tracé dans cette région.

Une condition suffisante pour cela est l'existence d'un potentiel $e(x,t)$ des accélérations qui reprenne la même valeur quand on revient au même point après avoir parcouru le contour. En effet, si

$$\vec{j} = - \text{grad } e \quad (2.102)$$

on a, selon la formule de Beltrami

$$\frac{DC}{Dt} = - \oint \text{grad } e \cdot \vec{t} \, ds = - \oint de \quad (2.103)$$

et la dernière intégrale est nulle si e peut être pris uniforme dans la région. La condition est aussi nécessaire car si Σ est une surface quelconque de la région bordée par un contour de la région, le théorème (1.58) de Stokes appliqué à la formule de Beltrami donne

$$\frac{DC}{Dt} = \iint_{\Sigma} \vec{h} \cdot \text{rot } \vec{j} \, dS \quad (2.104)$$

où \vec{h} est la normale unitaire à Σ . Par conséquent

$$\text{rot } \vec{j} = 0 \quad (2.105)$$

dans la région est une condition nécessaire de conservation de la circulation. On sait qu'elle entraîne l'existence d'un potentiel tel que défini par (2.102). Elle n'entraîne cependant automatiquement l'uniformité de ce potentiel que si la région est à connexion simple; dans ce cas pour tout contour fermé il existe une surface d'appui Σ appartenant à la région. Dans les régions multiplement connexes l'uniformité du potentiel est une condition supplémentaire qui reste nécessaire en vertu de (2.103).

Certaines conséquences de la conservation de la circulation sont faciles à établir par raisonnement direct. Traçons sur la paroi d'un tube tourbillon un petit contour fermé, réductible à un point par déformation continue sans quitter la paroi. Une portion de la paroi peut donc servir de surface d'appui Σ à ce contour et par définition le flux du rotationnel $2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u}$ est nul à travers Σ et la circulation du contour est nulle. On peut en conclure que, si la circulation est conservée, la surface Σ , considérée comme entraînée par le fluide, restera une portion de paroi de tube tourbillon. Les parois d'un tube tourbillon sont entraînées avec le fluide.

Appliquant un raisonnement similaire à un contour fermé entourant une fois un tube tourbillon on en déduit que l'intensité de celui-ci ne varie pas dans le temps. Conservation de la circulation et conservation de la vorticité de fluide sont donc liées.

Une autre façon d'exprimer cette liaison consiste à analyser la forme diff erentielle du th eor me (I.58) de Stokes.

Soient $d\vec{r}$ et $\delta\vec{r}$ deux éléments de déplacement issus du même point P dans le fluide.

$$d\vec{S} = d\vec{r} \times \delta\vec{r}$$

est alors l'élément de surface correspondant, orienté selon la normale.

$$\vec{b} \cdot d\vec{S}$$

est le flux du vecteur \vec{b} en P à travers cette surface élémentaire. Calculons en sa variation quand l'ensemble est entraîné avec le mouvement des particules

$$\frac{D}{Dt} (\vec{b} \cdot d\vec{S}) = \frac{D\vec{b}}{Dt} \cdot d\vec{S} + \vec{b} \cdot (d\vec{u} \times \delta\vec{r}) + \vec{b} \cdot (d\vec{r} \times \delta\vec{u})$$

Par un calcul facile à vérifier en coordonnées cartésiennes

$$(d\vec{u} \times \delta\vec{r}) + (d\vec{r} \times \delta\vec{u}) = \text{div } \vec{u} \, d\vec{S} + \text{rot } \vec{u} \times d\vec{S} - (d\vec{S} \cdot \text{grad})\vec{u}$$

et finalement

$$\frac{D}{Dt} (\vec{b} \cdot d\vec{S}) = \left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{b} \times \vec{u}) + (\text{div } \vec{b})\vec{u} \right) \cdot d\vec{S}$$

Nous dirons qu'un vecteur est équiflux dans une région si son flux est conservé à travers tout élément de surface entraîné avec le fluide. D'après le calcul précédent un vecteur équiflux obéit à l'équation

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{b} \times \vec{u}) + (\text{div } \vec{b})\vec{u} = 0 \quad (2.106)$$

Une autre façon d'établir les résultats obtenus au début de cette section consiste alors à vérifier que le vecteur tourbillon est équiflux si le rotationnel de l'accélération est nul. Or, calculant le rotationnel de l'accélération par la formule de Lagrange (en nous rappelant que $\text{rot grad} = 0$)

$$\text{rot } \vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{u} + \text{rot} (\text{rot } \vec{u} \times \vec{u}) \quad (2.107)$$

mais le second membre est nul si le tourbillon est équiflux comme le montre l'application de la formule (2.106) pour $\vec{b} = \text{rot } \vec{u}$ (en nous rappelant que $\text{div rot } \vec{u} = 0$).

Plus généralement nous avons le résultat

$$\frac{D}{Dt} (\text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{s}) = \text{rot } \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad (2.108)$$

équivalent par le théorème de Stokes à la formule de Beltrami.

17. Conditions pour la conservation de la circulation dans un fluide parfait.

Un fluide est dit "parfait" s'il est dépourvu de viscosité.

En pratique ceci veut dire que les nombres de Reynolds seraient suffisamment grands pour pouvoir négliger les forces de viscosité dans les équations de Navier-Stokes, l'équilibre se faisant uniquement entre gradients de pression, forces d'inertie et, éventuellement, forces de gravitation. Il n'est jamais possible d'envisager une telle situation comme réalisée en tous les points de l'écoulement. En particulier au voisinage des parois on a vu que la suppression des coefficients de viscosité obligerait à considérer une condition aux limites réduite, permettant un glissement relatif des particules le long de la paroi. Or, quelle que petite la viscosité tangentielle, un fluide réel suffisamment dense adhère aux parois. Il y a donc toujours au moins une région où les effets de viscosité ne peuvent être négligés.

Dans certains cas ils ont tendance à être confinés au voisinage immédiat des parois dans une "couche limite" où d'importants gradients de vitesse assurent une transition rapide entre la condition d'adhérence et la condition de glissement. Ceci permet dans un certain sens une séparation de l'analyse en deux parties. Dans l'une la masse de l'écoulement est étudiée sans tenir compte des effets de viscosité avec les conditions aux limites simplifiées et éventuellement légèrement modifiées pour tenir compte de l'épaisseur de déplacement de la couche limite. L'autre partie est l'étude de la couche limite proprement dite, où les conditions aux limites vers le fluide dépendent des résultats de l'analyse précédente.

Ce principe de séparation donne un sens à l'étude de l'écoulement des fluides parfaits. Pour ceux-ci les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\vec{f} = - \text{grad } \Omega - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2.109)$$

en supposant l'existence d'un potentiel des forces massiques.

Dans ce cas

$$\text{rot } \vec{f} = \text{grad } p \times \text{grad } \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (2.110)$$

et il y a conservation de la circulation dans l'un des cas suivants :

- 1) $\text{grad } p = 0$: l'écoulement est "isobare". La pression peut éventuellement être encore une fonction du temps. La fonction Ω est le potentiel des accélérations.
- 2) $\text{grad } \rho = 0$: l'écoulement est isostatique. La masse volumique ne peut plus dépendre que du temps. La fonction $\Omega + p/\rho$ est le potentiel des accélérations.

L'écoulement d'un fluide incompressible étant isostatique par définition, il y a conservation de la circulation si l'on néglige les effets de viscosité. En particulier si une région du fluide est à une certaine époque irrotationnelle, elle le demeure.

- 3) Plus généralement $\text{rot } \vec{j} = 0$ quand les surfaces $p = \text{constante}$ coïncident avec les surfaces $\rho = \text{constante}$. Il y a alors une relation $\rho = \rho(p, t)$ et l'écoulement est dit "barotrope".
Le potentiel des accélérations est

$$\Omega + \int \frac{dp}{\rho(p, t)}$$

Observons que, selon (2.65), on a

$$\text{grad } I = T \text{ grad } S + \frac{1}{\rho} \text{ grad } p$$

ce qui permet de donner aux équations (2.109) du mouvement d'un fluide parfait la forme équivalente

$$\vec{j} = - \text{grad } (\Omega + I) + T \text{ grad } S \quad (2.111)$$

et $\text{rot } \vec{j} = \text{grad } T \times \text{grad } S \quad (2.112)$

Il y a toujours conservation de la circulation si

- 4) $\text{grad } S = 0$: l'écoulement est isentropique. Le potentiel des accélérations est $\Omega + I$.
- 5) $\text{grad } T = 0$: l'écoulement est isotherme. Le potentiel des accélérations est $\Omega + I - TS$.
- 6) les surfaces $S = \text{constante}$ coïncident avec les surfaces $T = \text{constante}$. Il existe une relation $T = T(S, t)$ et le potentiel des accélérations est

$$\Omega + I - \int \frac{dS}{T(S, t)}$$

Ces trois derniers cas sont évidemment des cas de barothopie. Dans le premier, la relation qui lie pression, masse volumique et temps est $p = p(\rho, S(t))$. Dans le second on a par l'équation d'état $f(p, \rho, T(t)) = 0$. Le cas 6) est aussi général que 3) car si les surfaces $p = \text{constante}$ et $\rho = \text{constante}$ coïncident, il en est de même par $p = p(\rho, S)$ pour les surfaces $S = \text{constante}$ et par $f(p, \rho, T) = 0$ pour les surfaces $T = \text{constante}$.