

ADVANCED PROBLEMS AND METHODS FOR SPACE FLIGHT OPTIMIZATION

Proceedings of a Colloquium held at the University of Liège, Belgium

Edited by

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

*Laboratory for Aeronautical and Space Techniques,
University of Liège*

BIBLIOTHEQUE PERSONNELLE DE
B.M. FRAEIJIS DE VEUBEKE
LABORATOIRE D'AERONAUTIQUE



THE QUEEN'S AWARD
TO INDUSTRY 1966

PERGAMON PRESS

**OXFORD · LONDON · EDINBURGH · NEW YORK
TORONTO · SYDNEY · PARIS · BRAUNSCHWEIG**

Pergamon Press Ltd., Headington Hill Hall, Oxford
4 & 5 Fitzroy Square, London W.1
Pergamon Press (Scotland) Ltd., 2 & 3 Teviot Place, Edinburgh 1
Pergamon Press Inc., Maxwell House, Fairview Park, Elmsford, New York 10523
Pergamon of Canada Ltd., 207 Queen's Quay West, Toronto 1
Pergamon Press (Aust.) Pty. Ltd., 19a Boundary Street, Rushcutters Bay,
N.S.W. 2011, Australia
Pergamon Press S.A.R.L., 24 rue des Écoles, Paris 5^e
Vieweg & Sohn GmbH, Burgplatz 1, Braunschweig

Copyright © 1969
Pergamon Press Ltd.

First edition 1969

Library of Congress Catalog Card No. 68-28683

Printed in Hungary

08 013290 1

CONTENTS

FOREWORD	vii
T. N. EDELBAUM: Optimal guidance from hyperbolic to circular orbits	1
Y. GENIN: Polynomial approximations in perturbational navigation and guidance schemes	13
G. LEITMAN and G. MON: On a class of differential games	25
J. FAVE: Un nouveau procédé d'accélération de la méthode du gradient, appliqué aux trajectoires de rentrée d'un planeur orbital	47
J. L. SPEYER, R. K. MEHRA and A. E. BRYSON, Jr.: The separate computation of arcs for optimal flight paths with state variable inequality constraints	53
P. CONTENSOU: Quelques propriétés générales des domaines de manoeuvrabilité à frontière semi-linéaire. Application aux transferts d'orbite	69
C. MARCHAL: Synthèse des résultats analytiques sur les transferts optimaux entre orbites képlériennes (durée indifférente)	91
C. B. WINN: Minimum fuel transfers between arbitrary coaxial ellipses, both coplanar and noncoplanar	157
S. PINES and T. C. FANG: A uniform closed solution of the variational equations for optimal trajectories during coast	175
B. FRAEIJIS DE VEUBEKE: The second variation test with algebraic and differential constraints	189
J. GEERTS: Numerical integration of plane orbital transfers with multiple powered arcs	219
J.-P. MAREC: Rendez-vous impulsionsnels, optimaux, de longue durée, entre orbites quasi-circulaires, proches, coplanaires ou non	227
J. V. BREAKWELL: Minimum impulse transfer between a circular orbit and a nearby non-coplanar elliptic orbit	255
P. BECKERS: Coplanar impulsive transfers and the second variation test	277
P. HEMPEL: Regular and singular controls in multidimensional optimum transfer problems	287

FOREWORD

THE Colloquium on Optimization in Space Flight Mechanics, organized by the Aeronautics and Space Laboratory, as part of the celebrations of the 150th anniversary of the foundation of the University of Liège, was convened in the Congress Palace in Liège on 19 June 1967. It was attended by thirty invited specialists representing Universities or Research Organizations from U.S.A., U.S.S.R, France, German Federal Republic, Belgium and ELDO. Professor C. Massonnet, Dean of the Faculty of Applied Sciences, presided over the opening session and brought the greetings from the University.

During the four days of technical sessions twenty-one papers or reports were presented. They covered a wide range of subjects: general mathematical methods of optimization, optimal guidance, optimal transfer trajectories and optimization of design parameters. In particular reports were presented on the methods in use at the Computing Center of the Academy of Sciences in Moscow and at the Cybernetics Institute of the Academy of Sciences of Ukraine.

The Aeronautics and Space Laboratory appreciates the great amount of work the authors have put into the preparation of the papers collected in the present volume. They represent a significant contribution to optimization theory and its application to Space Flight. The financial assistance of the Administrative Council of the University and of the Ministry of National Education and Culture made the Colloquium possible; it is gratefully acknowledged. It is through such scientific meetings, where ample discussion can take place, that mutual understanding and international collaboration can best be developed.

B. FRAEJIS DE VEUBEKE
Professor of Aerospace Engineering

OPTIMAL GUIDANCE FROM HYPERBOLIC TO CIRCULAR ORBITS†

T. N. EDELBAUM

Analytical Mechanics Associates, Inc.,
Cambridge, Massachusetts

ABSTRACT

An approximate analytic solution is developed for minimum fuel guidance from an arbitrary point on a hyperbolic orbit into a specified circular orbit. The hyperbola must lie close to the plane of the circular orbit and its periapsis radius must be close to the radius of the circular orbit. Optimization of the midcourse impulse, the finite-thrust terminal burn, and of both maneuvers in combination is considered. The particular problem treated is intended as a simple example of a new, unified guidance technique.

NOMENCLATURE

c	Exhaust velocity
e	Eccentricity of nominal approach hyperbola
f	True anomaly
F	Thrust
m	Mass
M_1	First moment of acceleration during final burn
M_2	Second moment of acceleration during final burn
R	Radius
t	Time
u	Corrective velocity change
V_R	Relative velocity at nominal target interception
x	Circumferential component of position at nominal target
y	Radial component of position at nominal target
z	Out-of-plane component of position at nominal target
α	Thrust angle with local horizontal
β	Thrust angle out of orbit plane
μ	Gravitational constant of planet
ω	Rate of change of α
Ω	Rate of change of β

† This work was conducted under NASA contract NAS 12-114.

Subscripts

<i>c</i>	Critical
<i>cy</i>	Component of critical plane correction in orbit plane
<i>cz</i>	Component of critical plane correction out of orbit plane
<i>nc</i>	Noncritical
<i>p</i>	Periapsis
0	Beginning of terminal burn
1	Centroid of terminal burn
2	End of terminal burn

INTRODUCTION

In recent years, there has been increasing interest in the use of optimization theory for the guidance of space vehicles. Much of this work has been deterministic and is based upon the idea of flying a minimum fuel trajectory from the vehicle's current state to the desired final state. The early work in this field either linearized both the state and the control around the nominal trajectory (second variation guidance^(1, 2)) or else numerically fit the control to a pencil of optimal trajectories which achieved the desired final state (path adaptive guidance⁽³⁾). A more recent trend has been to use analytical solutions to optimal trajectories for various approximations to the full equations of motion.⁽⁴⁻⁶⁾ The latter technique is now widely used for booster guidance but space-craft guidance is still largely based upon various *ad hoc* approximations.^(7, 8) What is needed is a unified theory for the optimal guidance of space vehicles which can handle various missions and phases of flight. Such a theory might be developed by the onboard generation of nominal trajectories with the use of neighboring extremals for some segments of the trajectory and analytical solutions of approximations to the full problem for the other segments of the trajectory. While the concept of a neighboring extremal may be used (as in second variation guidance), it will not be permissible to linearize the control (as is done in second variation guidance) because many of the portions of the trajectory have no control.

The present study represents a first step in the development of a unified theory of optimal guidance of space vehicles. The theory is for minimum fuel deterministic guidance of high thrust vehicles such as an advanced kick stage. It treats both midcourse and terminal guidance in a unified fashion for variable time of arrival missions. The primary application would be to orbiter missions and to rendezvous missions.

The theory is developed by considering a particular example which is simple enough to allow explicit development of the equations but still reflects many of the difficulties to be encountered in more complicated exam-

ples. The particular example treated is guidance in a central gravitational field from a hyperbolic approach condition into a desired given terminal circular orbit. The time for this operation is open and the initial perturbations from the nominal approach hyperbola are taken to be small. The nominal approach hyperbola is tangent to, and in the plane of, the circular orbit. However, the perturbations around this nominal trajectory may occur in three dimensions.

The analysis is divided into three parts. First, a general solution is given for an optimal midcourse correction of a trajectory which has a finite terminal impulsive maneuver. The special case of the problem considered in this paper is treated in this section. The second part of the paper is concerned with the motion during a finite thrust terminal burn. On the basis of this analysis, due largely to Robbins,⁽⁹⁾ a guidance logic is proposed for guidance during the terminal phase. In the third part of the paper, the terminal maneuver and midcourse maneuver are considered together so that an overall optimization of the combined corrections may be carried out.

ANALYSIS

I. Optimum Midcourse Correction

Most existing theories of optimal midcourse guidance are for cases where all of the corrections are infinitesimal corrections in the neighborhood of an unpowered freefall trajectory.⁽¹⁰⁻¹³⁾ It is necessary to extend this theory to the case where the nominal trajectory may contain powered arcs of finite magnitude. This section will consider the simplest case of such a problem. For this case, the nominal trajectory has a single finite impulse at its end and represents an optimum variable-time-of-arrival rendezvous or orbit transfer. At some time, it is discovered that the actual trajectory has departed by a small amount from the nominal trajectory and a correction must be made in order to insure that the original objectives of the mission will be met. In many cases, only a single midcourse correction will be necessary. This will be true for the particular example treated in this paper and is the only case that will be considered herein. The three components of the midcourse velocity correction will produce changes in three components of the terminal position and in three components of the terminal velocity. A special coordinate system has been used for the analysis of variable-time-of-arrival position guidance which is also useful in the more general problem under consideration. This coordinate system makes use of a direction known as a non-critical direction.⁽¹⁰⁻¹¹⁾ A small velocity impulse in a non-critical direction will produce changes in the terminal position which are parallel to the relative velocity between the vehicle and its target at the nominal arrival time. In the case of an orbiter mission, this relative velocity

vector may be taken as the direction of the terminal impulse. At right angles to the non-critical direction is the critical plane in which the position deviations which are orthogonal to the terminal impulse are corrected.

The total velocity correction in addition to the nominal characteristic velocity of the nominal trajectory is given by eq. (1).

$$\Sigma \delta V = \sqrt{u_c^2 + u_{nc}^2} \frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} u_{nc} - \frac{\partial V_R}{\partial u_c} u_c \quad (1)$$

This is a first order expression and considers both the velocity change in the midcourse impulse and the corresponding changes in the terminal impulse. The first term is simply the Euclidean norm of the velocity changes in the critical and non-critical directions. The magnitude of the velocity change in the critical plane will be determined by the requirement that the position deviation normal to the direction of the terminal impulse must be reduced to zero. The component of velocity in the non-critical direction will be used to reduce the relative velocity and the magnitude of the terminal velocity impulse. The second term represents the change in the magnitude of the terminal impulse due to a small impulse in the non-critical direction, while the third term represents the reduction in magnitude of the terminal impulse due to a small impulse in the critical direction. As we are only considering first order terms, only the changes in velocity parallel to the finite terminal impulse need be considered. The optimum magnitude of the component of the midcourse impulse in the non-critical direction may be found by differentiating eq. (1) with respect to this velocity component and setting the derivative equal to zero. Equation (1) always possesses a single minimum if the nominal trajectory is optimal. The optimum magnitude of the component of velocity in the non-critical direction is given by eq. (2), while the corresponding minimum cost due to the trajectory correction is given by eq. (3).

$$u_{nc}^* = \frac{\frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} |u_c|}{\sqrt{1 - \left[\frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} \right]^2}} \quad (2)$$

$$\Sigma \delta V^* = \sqrt{1 - \left[\frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} \right]^2} |u_c| - \frac{\partial V_R}{\partial u_c} u_c \quad (3)$$

Equations (1) through (3) represent the general linear solution for the optimum magnitude and direction of a single midcourse impulse at a specified location when there will be a large terminal impulse and when the transfer time is open. For the deterministic case considered herein, such an impulse at the earliest possible time will normally provide an optimum correction. For example, this is always true for the transfer from a hyperbola to a nearly coplanar circle considered herein. For any particular case, the

optimality of a single correction may be checked by calculating the primer vector^(14, 15) along the unpowered trajectory. If the primer vector exceeds the magnitude of unity at any point other than the initial and terminal points, an additional impulse will be required for an optimum trajectory. Reference 15 suggests a method for calculating this multiple impulse correction.

It should be noted that this optimum midcourse correction depends only upon the position deviations normal to the direction of the final impulse. It does not depend upon any of the velocity deviations at the terminal point on the trajectory. The velocity deviations normal to the terminal impulse do not effect the fuel consumption to first order and are neglected while the deviation parallel to the final impulse is corrected by the final impulse and does contribute linearly to the total characteristic velocity.

For the particular example treated herein, the nominal trajectory is a hyperbola which is coplanar with and tangent to the terminal circular orbit. The deviations from the nominal position and velocity of the periapsis will be analyzed in a Cartesian inertial coordinate system whose x axis is aligned with the direction of the circumferential final impulse. The y axis will be radial and the z axis will point out of the orbit plane. The rates of change of the significant components of the periapsis position and velocity with respect to the magnitude of a midcourse impulse are given by eqs. (4) through (6).

$$\frac{dy_p}{du} = \sqrt{\frac{R_p^3}{\mu(e+1)}} \left[(1 - \cos f) \frac{2+e+e \cos f}{1+e \cos f} \cos \alpha - \sin f \sin \alpha \right] \cos \beta \quad (4)$$

$$\frac{dz_p}{du} = \sqrt{\frac{R_p^3(e+1)}{\mu}} \frac{\sin f}{1+e \cos f} \sin \beta \quad (5)$$

$$\frac{d\dot{x}_p}{du} = [(1+e \cos f) \cos \alpha + e \sin f \sin \alpha] \frac{\cos \beta}{e+1} \quad (6)$$

The non-critical direction is in the plane of the circular orbit and is given by eq. (7).

$$\tan \alpha_{nc} = \sqrt{\frac{1 - \cos f}{1 + \cos f}} \frac{2+e+e \cos f}{1+e \cos f} \quad (7)$$

This is the direction of thrust which will produce no change in the periapsis radius to first order. It is now convenient to reference angles in eq. (6) to the non-critical direction to yield eq. (8).

$$\frac{d\dot{x}_p}{du} = \frac{\sqrt{1 + \cos f} (e+1) \cos(\alpha - \alpha_{nc}) - 2 \sqrt{1 - \cos f} \frac{1+e \cos f}{e+1} \sin(\alpha - \alpha_{nc})}{\sqrt{(e+1)^2(1 - \cos f) + 2(1+e \cos f)(2+e - \cos f)}} \cos \beta \quad (8)$$

From eq. (8) the partial of the terminal impulse with respect to a midcourse impulse in the non-critical direction can be found as eq. (9).

$$\frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} = \frac{\partial \dot{x}_p}{\partial u_{nc}} = \frac{\sqrt{1 + \cos f} (e + 1)}{\sqrt{(e + 1)^2 (1 - \cos f) + 2(1 + e \cos f)(2 + e - \cos f)}} \quad (9)$$

Equation (9) varies monotonically with distance from the periapsis, between the two limits given by eq. (10).

$$\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \leq \frac{\partial V_R}{\partial u_{nc}} \leq 1 \quad (10)$$

The left-hand limit is the value at an infinite distance while the right-hand limit is the value at periapsis. The magnitude of this quantity is always less than unity as it must be if the single correction is to be optimum. By using eqs. (2), (4) and (5) the three components of the optimal midcourse correction may be found as eqs. (11), (12) and (13).

$$u_{cy} = -y_p \sqrt{\frac{\mu(e+1)}{R_p^3(1-\cos f)}} \times \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{(e+1)^2(1-\cos f) + 2(1+e \cos f)(2+e-\cos f)}} \quad (11)$$

$$u_{cz} = -z \sqrt{\frac{\mu}{R_p^3(e+1)}} \frac{1 + \cos f}{\sin f} \quad (12)$$

$$u_{nc} = \frac{\sqrt{1 + \cos f} (e + 1) \sqrt{u_{cy}^2 + u_{cz}^2}}{\sqrt{2(1 + e \cos f)(2 + e - \cos f) - 2(e + 1)^2 \cos f}} \quad (13)$$

Finally, the total additional cost of the midcourse impulse and the change in the magnitude of the terminal impulse, due to position deviations in the periapsis is given by eq. (14).

$$\Sigma \delta V = \sqrt{\frac{2(1 + e \cos f)(2 + e - \cos f) - 2(e + 1)^2 \cos f}{2(1 + e \cos f)(2 + e - \cos f) + (e + 1)^2(1 - \cos f)}} \sqrt{u_{cy}^2 + u_{cz}^2} + \frac{2\sqrt{1 - \cos f} \frac{1 + e \cos f}{e + 1} u_{cy}}{\sqrt{2(1 + e \cos f)(2 + e - \cos f) + (e + 1)^2(1 - \cos f)}} \quad (14)$$

It is interesting to compare the fuel consumption due to this optimum correction strategy with the fuel consumption of a technique which has been used previously, namely the minimization of the magnitude of only the midcourse impulse. Figure 1 illustrates the total magnitude of velocity corrections due to a midcourse correction impulse at the illustrated locations and in the illustrated directions. The magnitude of each arrow represents the total corrective velocity (eq. 14) necessary to correct a unit

displacement in periapsis altitude. The arrows above the hyperbola are the corrections necessary to raise the periapsis while those below the hyperbola are those necessary to depress the periapsis. At each point there are two arrows which are diametrically opposite. These arrows are in the critical direction which minimizes the magnitude of only the midcourse impulse. The arrows are not of the same length because the change in the magnitude of the terminal impulse due to raising or to lowering periapsis is of opposite sign. The two shorter arrows at each point represent the optimum corrections. The directions of these arrows are symmetric with

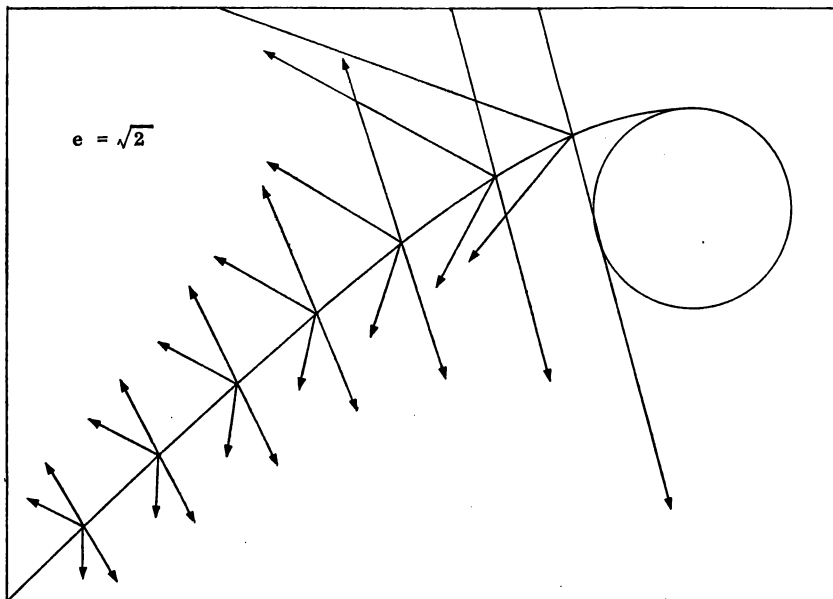


FIG. 1. Total required velocity corrections.

respect to the non-critical direction which is orthogonal to the critical direction. The figure shows that the optimum correction strategy always saves fuel relative to the other strategy and that the relative fuel saving becomes quite large as the vehicle gets closer and closer to periapsis.

II. Terminal Maneuver

The finite thrust terminal maneuver for injection into the circular orbit cannot be approximated as an impulse because of its relatively long duration. The guidance for this terminal maneuver is developed by utilizing an approximate solution of the equations of motion. This approximate solution is a direct application of a theory due to Robbins.⁽⁹⁾ It represents

a second order expansion of the impulsive solution for the optimal trajectory in terms of inverse powers of the average acceleration. Robbins' theory can theoretically treat any thrust acceleration schedule because it is based upon the moments of the acceleration about a centroid time. For the practically important case of constant thrust, the moments about the centroid of the finite thrust burn are given by eqs. (16)–(19), while the characteristic velocity of the maneuver is given by the standard rocket equation (15).

$$\Delta V \equiv \int_{t_0}^{t_2} \frac{F}{m} dt = c \ln \frac{m_0}{m_2} \quad (15)$$

$$M_1 \equiv \int_{t_0}^{t_2} \frac{F}{m} (t-t_1) dt = 0 \quad (16)$$

$$t_1 - t_0 = \frac{cm_0}{F} \left[1 - \frac{c}{\Delta V} \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right) \right] \quad (17)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{cm_0}{F} \left[\frac{c}{\Delta V} \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right) - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{t_0}^{t_2} \frac{F}{m} (t-t_1)^2 dt \\ &= \frac{(t_2-t_0)^2 \Delta V}{12} \left[1 - \frac{1}{60} \left(\frac{\Delta V}{c} \right)^2 + \frac{1}{1920} \left(\frac{\Delta V}{c} \right)^4 + \dots \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Robbins' analysis is carried out in an inertial Cartesian coordinate system whose origin is at the location of the nominal impulsive burn and whose x axis is aligned with the direction of the impulse. For the present problem, the impulse is circumferential and that will be the direction of the x axis. The y axis will be taken to be radial and the z axis will be taken to be normal to the first two axes. The analysis in this rectangular coordinate system is then developed by ignoring all powers of the inverse of the average acceleration higher than the second. Robbins shows that, for the time open case, this assumption implies that small angle formulas may be used, that the optimal thrust direction is a linear function of time, but that the gravity gradient in the nominal direction of the impulse must be considered in the analysis. With these assumptions, the equations of motion are given by eqs. (20)–(22).

$$t_1 \equiv 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{R^3} x = -\frac{F}{m} \left[1 - \frac{(\alpha_1 + \omega t)^2 + (\beta_1 + \Omega t)^2}{2} \right] \quad (20)$$

$$\ddot{y} + \frac{\mu}{R^2} = -\frac{F}{m} (\alpha_1 + \omega t) \quad (21)$$

$$\ddot{z} = -\frac{F}{m} (\beta_1 + \Omega t) \quad (22)$$

The terminal boundary conditions are such that the vehicle will end up on a circular orbit at the desired nominal radius. In this Cartesian coordinate system and with these approximate equations of motion, these boundary conditions are given by eqs. (23)–(27).

$$\dot{x}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R}} \left[1 - \frac{\mu}{R^3} \frac{t_2^2}{2} \right] \quad (23)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{\mu}{R^2} t_2 \quad (24)$$

$$y_2 = -\frac{\mu}{R^2} \frac{t_2^2}{2} \quad (25)$$

$$\dot{z}_2 = 0 \quad (26)$$

$$z_2 = 0 \quad (27)$$

The integration of the equations of motion may be carried out by standard techniques to yield eqs. (28)–(32).

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = \dot{x}_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^3} (t_2 - t_0)^2 \right] - x_0 \frac{\mu}{R^3} (t_2 - t_0) - \frac{\Delta V}{2} \left[2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \frac{\mu}{R^3} t_2^2 \right] \\ + \frac{M_2}{2} \left[\frac{\mu}{R^3} + \omega^2 + \Omega^2 \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_0 - \frac{\mu}{R^2} (t_2 - t_0) - \Delta V \alpha_1 \quad (29)$$

$$y_2 = y_0 + \dot{y}_0 (t_2 - t_0) - \frac{1}{2} \frac{\mu}{R^2} (t_2 - t_0)^2 - \Delta V \alpha_1 t_2 + M_2 \omega \quad (30)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{z}_0 - \Delta V \beta_1 \quad (31)$$

$$z_2 = z_0 + \dot{z}_0 (t_2 - t_0) - \Delta V \beta_1 t_2 + M_2 \Omega \quad (32)$$

There are five quantities that must be determined in order to meet the five desired terminal conditions. These quantities are the directions of the thrust at the centroid time as well as the rates of rotation during the burn and the total duration of the burn. To this order of approximation, these quantities are given explicitly by eqs. (33)–(37).

$$\alpha_1 = \frac{\dot{y}_0 + \frac{\mu}{R^2} t_0}{\Delta V} \quad (33)$$

$$\omega = -\frac{y_0 - \dot{y}_0 t_0 - \frac{\mu}{R^2} \frac{t_0^2}{2}}{M_2} \quad (34)$$

$$\beta_1 = \frac{\dot{z}_0}{\Delta V} \quad (35)$$

$$\Omega = -\frac{z_0 - \dot{z}_0 t_0}{M_2} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Delta V = & \left(\dot{x}_0 - \sqrt{\frac{\mu}{R}} \right) \left[1 + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} \right] + \frac{\dot{x}_0}{2} \frac{\mu}{R^3} (2t_2 t_0 - t_0^2) \\ & - x_0 \frac{\mu}{R^3} (t_2 - t_0) + \frac{M_2}{2} \left[\frac{\mu}{R^3} + \omega^2 + \Omega^2 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

This completes the development of the equations of motion during the terminal burn as well as the solution of the boundary value problem for control of the vehicle. It is still necessary to make a feedback control law out of these equations and to determine the times at which the thrust should be turned on and turned off. An accurate way to create a feedback control law is to continually redefine the position of the centroid on the basis of the estimated time-to-go to the completion of the burn. This will cause the Cartesian coordinate system to rotate and change its origin during the burn but will cause the solution to become progressively more accurate as the terminal time is approached. With this type of feedback control, the engine may be turned off whenever some measure of the terminal error becomes small enough.

The optimum time to turn the engine on may be determined by noting that Robbins' theory predicts that the centroid of the final burn should be at the periapsis of the hyperbola. The required length of the burn may then be determined by substituting the control eqs. (33)–(36) into eq. (37) and referring all quantities to the perigee of the unpowered hyperbola, yielding eq. (38). The last term in eq. (38) is of higher order than the other terms and may generally be neglected.

$$\Delta V = \dot{x}_p - \sqrt{\frac{\mu}{R}} + \frac{\mu}{R^3} \frac{M_2}{2} + \frac{y_p^2 + z_p^2}{2M_2} + \frac{z_p^2}{2\Delta V} \quad (38)$$

III. Optimization of the Combined Maneuver

The first section of the analysis considered the optimum midcourse correction if there was going to be an impulsive terminal burn. The second section then developed the equations of motion and the cost for a finite thrust terminal burn. This final section is intended to determine the minimum fuel consumption for the combined maneuver with a midcourse impulse and a finite thrust terminal burn. With a finite thrust terminal burn, it is possible to produce changes normal to the nominal thrust direction during the burn, so that part of the position correction may be done during the terminal burn and part may be done during the midcourse burn. The total additional cost, over and above the ΔV of the nominal

impulsive hyperbola, is given by eq. (39).

$$\begin{aligned} \Sigma \delta V = & \sqrt{1 - \left[\frac{\partial \dot{x}_p}{\partial u_{nc}} \right]^2} \cdot \sqrt{\frac{[y_{pi} - y_p]^2}{\left[\frac{\partial y_p}{\partial u_{cy}} \right]^2} + \frac{[z_{pi} - z_p]^2}{\left[\frac{\partial z_p}{\partial u_{cy}} \right]^2}} \\ & - \frac{\partial \dot{x}_p / \partial u_{cy}}{\partial y_p / \partial u_{cy}} (y_{pi} - y_p) + \frac{(y_p^2 + z_p^2)}{2M_2} + \frac{\partial \dot{x}_p}{\partial y_p} y_p + \frac{\mu}{R^3} \frac{M_2}{2} \quad (39) \end{aligned}$$

The only unknowns in eq. (39) are y_p and z_p which are the position displacements at perigee after the midcourse impulse. All the other terms in eq. (39) may be considered as constants and they have all been previously determined in this paper except for the one given by eq. (40).

$$\frac{\partial \dot{x}_p}{\partial y_p} = - \frac{\mu}{R_p^2 \sqrt{e+1}} \quad (40)$$

The optimum values of y_p and z_p may then be determined by differentiating eq. (39) with respect to these two quantities, and setting these derivatives equal to zero. This produces two simultaneous quadratic equations for y_p and z_p . These simultaneous equations may be solved by standard algebraic techniques, either analytically or by iteration. Once y_p and z_p have been determined, the components of the midcourse correction may be determined from the formulas in Section I by substituting the changes in these quantities for the total corrections considered in Section I. The terminal maneuver is then carried out according to the suggestions developed in Section II. Equation (39) may also be used to determine the relative cost of having a midcourse correction or of correcting all the position components during the terminal burn. These comparative costs may then be used to determine the desirability of performing a midcourse correction.

CONCLUSIONS

1. The optimum midcourse guidance correction for rendezvous or orbit transfer may be found by a simple modification of the standard calculations for position guidance.
2. An accurate near-optimal terminal guidance scheme can be developed explicitly using Robbins' theory of near-impulsive transfers.
3. A unified theory of minimum-fuel guidance can be developed for a large class of missions.

POSSIBLE EXTENSIONS OF THE ANALYSIS

1. This problem can be extended to nonlinear planar corrections by using the results of Horner.⁽¹⁸⁾ The adjoint solutions corresponding to small planar corrections are identical with Horner's.
2. It should be possible to generalize the analysis to arbitrary time-open maneuvers in the neighborhood of a given time-open minimum-impulse maneuver.

REFERENCES

1. H. J. KELLEY. Guidance Theory and Extremal Fields. *IRE Trans. on Automat. Control*, AC-7, 5, 75-82, 1962.
2. J. V. BREAKWELL, J. L. SPEYER and A. E. BRYSON. Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation. *J. SIAM Control*, 1, 193-223, 1963.
3. W. E. MINER, D. H. SCHMIEDER and N. J. BRAUD. The Path-Adaptive Mode for Guiding Space Flight Vehicles. *Progress in Astronautics and Rocketry* 8, *Guidance and Control*. Academic Press, New York, 1962.
4. F. M. PERKINS. Explicit Tangent-Steering Guidance for Multi-Stage Boosters. *Astronautica Acta*, 12, 212-223, 1966.
5. D. C. CHANDLER and I. E. SMITH. Development of the Iterative Guidance Mode with its Application to Various Vehicles and Missions. AIAA/JACC Guidance and Control Conference, August 15, 1966.
6. H. M. ROBBINS. Optimal Steering for Required Velocity Guidance. *Navigation*, 12, 355-363, 1965.
7. R. H. BATTIN. *Astronautical Guidance*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
8. G. W. CHERRY. A General, Explicit Optimizing Guidance Law for Rocket Propelled Spaceflight. AIAA Paper 64-638, 1964.
9. H. M. ROBBINS. Analytical Study of the Impulsive Approximation. *AIAA Journal*, 4, No. 8, 1417-1423, 1966.
10. A. R. M. NOTON, E. CUTTING and F. L. BARNES. Analysis of Radio-Command Midcourse Guidance. *JPL Technical Report* No. 32-28, Sept. 1960.
11. J. E. POTTER and R. E. STERN. Optimization of Midcourse Velocity Corrections. *Proc. IFAC Symposium on Automatic Control in Peaceful Uses of Space, Stavanger, Norway*, ed. J. A. Aseltine. Plenum Press, New York, June 1965.
12. L. W. NEUSTADT. Optimization, A Moment Problem and Nonlinear Programming. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Journal on Control*, 2, No. 1, 33-89, 1964.
13. A. K. PLATONOV. Investigation of the Properties of Correction Maneuvers in Interplanetary Flights. *Cosmic Research*, 4, 587-607, 1966.
14. D. F. LAWDEN. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Butterworths, London, 1963.
15. P. M. LION and M. HANDELSMAN. The Primer Vector on Fixed-Time Impulsive Trajectories. AIAA 5th Aerospace Science Mtg., New York Paper 67-54, Jan. 1967.
16. J. M. HORNER. Optimum Two-Impulse Transfer Between Arbitrary Coplanar Terminals. *ARS Journal*, 32, No. 1, 95-96, 1962.

POLYNOMIAL APPROXIMATIONS IN PERTURBATIONAL NAVIGATION AND GUIDANCE SCHEMES

Y. GENIN

M.B.L.E. Research Laboratory,
Brussels, Belgium

1. INTRODUCTION

In perturbational navigation and guidance schemes, a nominal trajectory and a sensitivity matrix must be stored in the computer on board. To save memory, these variables are generally expanded in polynomials in one variable, so that only the coefficients need to be stored.

To compute a polynomial expansion, one has to choose a norm and the kind of error controlled. Although the L_2 -norm (least squares) is of common use in most cases, the L_∞ -norm (Chebyshev norm) is more suited to the problem at hand, which demands that the maximum relative error be kept minimum.

The purpose of this paper is to discuss and compare five different methods: classical least squares approximation, a computationally more efficient least squares approximation by a Fourier expansion in Chebyshev polynomials, an approximate Chebyshev approximation on the absolute error by an extension of the preceding method, the true Chebyshev approximation on the absolute error and the Chebyshev approximation on the relative error.

The approximation with a Chebyshev norm on the relative error is the most adequate and yields the lowest degree polynomial. On the other hand, the approximation with a L_2 -norm on the absolute error is easier to compute.

2. CLASSICAL LEAST SQUARES APPROXIMATIONS

Let $f(\tau)$ be the function of τ to be approximated by a polynomial:

$$P(\tau) = \sum_{j=0}^k a_j \tau^j \quad (1)$$

on the interval (τ_0, τ_1) . Assume we know the value of $f(\tau)$ in N points τ_i . Our task is to find a set of coefficients a_j such that the mean quadratic error:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[f(\tau_i) - \sum_{j=0}^k a_j \tau_i^j \right]^2 \quad (2)$$

be a minimum. This imposes the condition $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$, i.e.:

$$\sum_{m=1}^{k+1} b_{lm} \bar{a}_m = d_l, \quad 1 \leq l \leq k+1 \quad (3)$$

with:

$$\bar{a}_m = a_{m-1}$$

$$b_{lm} = \sum_{i=1}^N \tau_i^{l+m-2}$$

$$d_l = \sum_{i=1}^N \tau_i^{l-1} f(\tau_i)$$

The "normal" equations (3) completely determine the parameters of the approximation. A closed form solution is obtained by inverting the normal system (3). This explains the almost universal use of the L_2 -norm for practical applications in approximation theory even in situations where the L_2 -norm is not the most desirable choice.

From a computational point of view, the above procedure is not advisable for the inversion of the $[b_{lm}]$ matrix is unstable numerically. This is due to the particular structure of the matrix, which is symmetric and recurrent:

$$b_{lm} = b_{ml}$$

$$b_{lm} = b_{l-1, m-1}$$

and to the spread of element values. It is therefore better to use a different method as outlined below.

3. LEAST SQUARES APPROXIMATIONS BY A FOURIER EXPANSION IN CHEBYSHEV POLYNOMIALS

Performing a change of variables defined by:

$$\cos \theta = \frac{2\tau}{\tau_1 - \tau_0} - \frac{\tau_1 + \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \quad (4)$$

in such a way that $\cos \theta$ ranges from -1 to $+1$, we are left with the expression:

$$g(\theta) = g \left[\arccos \left(\frac{2\tau}{\tau_1 - \tau_0} - \frac{\tau_1 + \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \right) \right] \quad (5)$$

which may be considered as an even periodic function given on the interval $0 \leq \theta \leq \pi$.

On the other hand, it is well known that a truncated Fourier series expansion is a least squares approximation. Developing the even function $g(\theta)$ in a Fourier cosines series and truncating after $k+1$ terms, we obtain:

$$\begin{aligned} g(\theta) &\approx \sum_{j=0}^k a_j \cos j \theta \\ f(\tau) &\approx \sum_{j=0}^k a_j \cos \left[j \arccos \left(\frac{2\tau}{\tau_1 - \tau_0} - \frac{\tau_1 + \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \right) \right] \\ &\approx \sum_{j=0}^k a_j T_j \left(\frac{2\tau}{\tau_1 - \tau_0} - \frac{\tau_1 + \tau_0}{\tau_1 - \tau_0} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

where the T_j 's are the Chebyshev polynomials of the first kind.

It can be shown^(1, 2) that if we choose $N+1$ points θ_i evenly distributed in the interval $(0, \pi)$ and give the corresponding values of the function, the coefficients a_j can be obtained explicitly by the equations:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N''} g(\theta_i) \\ a_j &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N''} g(\theta_i) \cos j \theta_i \end{aligned} \quad (7)$$

with $\theta_i = \frac{i\pi}{N}$. The double prime on the summation symbol indicates that the terms with suffixes $i = 0$ and $i = N$ are to be halved.

The great advantage of this method is the numerical stability inherent in the summation process, which produces least squares approximations of very high degree unattainable by the first method.

On the other hand, the choice of equally distributed abscissae on the θ interval has important theoretical advantages; in particular, it can be shown⁽¹⁾ that the convergence of the approximation to the original function is ascertained when increasing the degree of the polynomial approximation. This is not necessarily the case when using equally distributed abscissae on the τ interval, in view of the so-called Runge phenomenon.

As a consequence of reflecting $g(\theta)$ as an even function for negative θ ($-\pi \leq \theta \leq 0$), $g(\theta)$ is made continuous at the boundaries $\theta = 0$ and $\theta = \pi$. Then, if $f(\tau)$ is itself continuous in the interval (τ_0, τ_1) , the coefficients a_j can be proved⁽¹⁾ to converge to zero asymptotically with a speed of convergence of order k^{-2} at least.

4. APPROXIMATE CHEBYSHEV APPROXIMATIONS ON THE ABSOLUTE ERROR

Let $f(x)$ be the function to be approximated on the interval $(-1, +1)$. The polynomial of degree n passing through $(n+1)$ given points $[f(x_i), x_i]$ is the Lagrange polynomial:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n (x-x_s)}{\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n (x_i-x_s)} \quad (8)$$

If the function $f(x)$ has derivatives up to order n , the interpolation error can be shown to be:⁽⁵⁾

$$r(x) = f(x) - p(x) = \prod_{i=0}^n (x-x_i) \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \quad (9)$$

with η a point between x_0 and x_n . Except if $f(x)$ is just a polynomial of degree $n+1$, $f^{(n+1)}(\eta)$ has not a constant value on the interval $(-1, +1)$; in most cases, however, the function $f(x)$ is sufficiently smooth to allow this approximation. The error $r(x)$ becomes:

$$r(x) \simeq C(x-x_i) \quad (10)$$

with C constant.

Now, the Chebyshev polynomial of order $n+1$ is known as the unique polynomial alternating $n+2$ times on the interval $(-1, +1)$ and having the smallest maxima for the absolute value of its amplitude, all the maxima being equal. Therefore, if the roots of $T_{n+1}(x)$ are chosen as the abscissae of the interpolation, the error $r(x)$ will exhibit all the properties defining a Chebyshev approximation uniquely. Thus as far as the $(n+1)$ th derivative of $f(x)$ may be approximated by a constant, an approximate solution to the Chebyshev approximation problem may be found by computing the interpolating polynomial having the $n+1$ roots of the Chebyshev polynomial of order $n+1$ and the corresponding values of $f(x)$ as points of interpolation.

The quality of this approximate Chebyshev approximation can be easily tested by selecting the upper bound r_u and the lower bound r_l of the maxima of the interpolation absolute error; it can be proved⁽³⁾ that the maximum absolute error r_m of the true Chebyshev approximation is bounded by

$$r_l \leq r_m \leq r_u \quad (11)$$

Practically, rather than using the Lagrange interpolation formula, it is numerically better to proceed as follows. Let $\hat{p}(x)$ be the approximate Chebyshev approximation; $\hat{p}(x)$ may be expanded in Chebyshev poly-

mials:

$$\hat{p}(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(x)$$

The function $f(x)$ is:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^n c_j T_j(x) + r(x) \\ &\simeq \sum_{j=0}^n c_j T_j(x) + C \prod_{i=0}^n (x - x_i) \end{aligned} \quad (12)$$

When choosing the x_i 's as the roots of $T_{n+1}(x)$:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$

eq. (12) becomes:

$$f(x) \simeq \sum_{j=0}^n c_j T_j(x) + C_1 T_{n+1}(x)$$

with C_1 constant.

As $T_{n+1}(x_i)$ cancels and in view of the orthogonality of the Chebyshev polynomials, it turns out:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) \\ c_j &= \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i) T_j(x_i) \end{aligned} \quad (13)$$

The method provides an approximate Chebyshev approximation, which in most cases is very close to the true solution and requires considerably less computational effort.

5. CHEBYSHEV APPROXIMATIONS ON THE ABSOLUTE ERROR

With the L_∞ -norm on the absolute error, the problem is now to find the coefficients a_j of the approximation polynomial:

$$p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$$

so that the maximum of the absolute error modulus:

$$|e(x)| = |f(x) - p(x)|$$

be a minimum on the interval (x_0, x_1) .

Let $P(x)$ be the Lagrange polynomial passing through $k+1$ points $[x_i, f(x_i)]$ and $[x_v]$ a set of $k+2$ distinct abscissae belonging to the interval (x_0, x_1) ; such a set $[x_v]$ is called a reference. The corresponding values of the Lagrange polynomial $P(x_v)$ are necessarily related by a linear relation (the characteristic relation):⁽³⁾

$$\sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v P(x_v) = 0 \quad (14)$$

where the λ_v 's are given by:

$$\lambda_v = \frac{1}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq v}}^{k+2} (x_v - x_s)} \quad (15)$$

The polynomial $P(x)$ is called a reference polynomial with respect to the reference set $[x_v]$ if the errors $e(x_v)$ alternate at these points, i.e.:

$$\text{sgn} [\lambda_v \cdot e(x_v)] = C' \quad (16)$$

It will be assumed throughout this section that $P(x)$ verifies this requirement.

Consider all the reference polynomials corresponding to the reference set $[x_v]$. For any such a polynomial, the errors $e(x_v)$ verify the following relation:

$$\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v| |e(x_v)| = \pm \sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v f(x_v) \quad (17)$$

The proof is a consequence of (14) and (16); in fact, we have:

$$\sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v P(x_v) = \sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v [f(x_v) + e(x_v)] = 0$$

which in turn gives the equation:

$$- \sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v f(x_v) = \sum_{v=1}^{k+2} \lambda_v e(x_v)$$

and finally proves the relation (17).

For the reference set $[x_v]$, the levelled reference polynomial $\bar{P}(x)$ is defined as the reference polynomial of which all the errors $e(x_v)$ have the same absolute value $|\bar{e}| = |\bar{e}(x_v)|$ which is called the reference deviation.

Putting $\bar{e}(x_v) = \bar{e} \text{sgn} \lambda_v$, one gets from relation (17):

$$|\bar{e}| = \frac{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v f(x_v)|}{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v|} = \frac{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v| |e(x_v)|}{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v|} \quad (18)$$

which provides the following inequality valid for any reference function:

$$\text{Min. } |e(x_v)| \leq |e| \leq \text{Max. } |e(x_v)|$$

Finally, the two following theorems can be proved:

1. $|\bar{e}| = \text{Max. } |e(x_v)|$ if and only if the given reference polynomial coincides with the corresponding levelled reference polynomial.
2. If $|e| = \text{Max. } |e(x)|$ for any x belonging to the interval (x_0, x_1) , the corresponding levelled reference polynomial is the polynomial of best Chebyshev approximation. This is equivalent to the property: the polynomial of best Chebyshev approximation is the reference polynomial of maximal reference deviation.

For a proof of these two theorems, see refs. 3 and 4.

The practical implementation of a Chebyshev approximation may be made by various methods. One of the computationally most efficient ways is to use the Remez algorithm:

1. Start with any reference polynomial P_i corresponding to an arbitrary reference set $[x_i]$.
2. Compute the corresponding reference deviation \bar{e}_i and the corresponding levelled reference polynomial \bar{P}_i .
3. Determine a new reference set $[x_{i+1}]$ such that the x_{i+1} 's are the abscissae of the extrema of the error $f(x) - \bar{P}_i(x)$; adopt $P_{i+1} = \bar{P}_i$ as reference polynomial for the reference set $[x_{i+1}]$.
4. Return to step 2 with $i = i + 1$ until $P_i = \bar{P}_i$.
5. The final P_i is the polynomial of Chebyshev best approximation.

Referring back to the preceding section, one sees that the convergence of the Remez algorithm will be very fast if the so-called Chebyshev abscissae are used as the initial reference set $[x_i]$, i.e. the abscissae of the extrema of the Chebyshev polynomial of order $k + 1$.

6. CHEBYSHEV APPROXIMATIONS ON THE RELATIVE ERROR

For polynomial approximation problems occurring in perturbational navigation and guidance schemes, an upper bound to the relative error is most generally imposed by the required accuracy and determines the minimal degree of the polynomial expansion. Therefore, these polynomial expansions should be obtained by using a L_∞ -norm on the relative error and this would lead to minimal polynomials.

With a L_∞ -norm on the relative error, the problem is formulated as follows: find the coefficients a_j of the approximation polynomial:

$$p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$$

so that the maximum of the relative error modulus:

$$|e_r(x)| = \left| \frac{f(x) - p(x)}{f(x)} \right| \quad (19)$$

be a minimum on the interval (x_0, x_1) .

In cases where the function approaches zero, however, such a criterion has no meaning. To avoid that, we replace the relative error by a modified relative error:

$$e'_r(x) = \frac{f(x) - p(x)}{g(x)} \quad (20)$$

where $g(x)$ is a function, defined as follows: let D be the set of points on the interval (x_0, x_1) such that $|f(x)| < \delta$ with $\delta > 0$, then:

$$\begin{aligned} g(x) &= \delta \text{ for } x \in D \\ g(x) &= |f(x)| \text{ elsewhere.} \end{aligned}$$

The parameter δ has to be chosen in each case according to the maximum absolute error modulus tolerated for $x \in D$; note that the set D may be empty.

With the adopted definition of $e'_r(x)$, the modified relative error has the same sign as the absolute error, which allows us to extend the theorems of the preceding section to the present case, with appropriate modifications.

In particular, it can be proved⁽⁶⁾ that the reference relative deviation for a reference set $[x_v]$ is now written:

$$|\bar{e}'_r| = \frac{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v g(x_v)| |e'_r(x)|}{\sum_{v=1}^{k+2} |\lambda_v g(x_v)|} \quad (21)$$

which in turn ensures:

$$\text{Min. } |e'_r(x_v)| \leq |\bar{e}'_r| \leq \text{Max. } |e'_r(x_v)|$$

On the other hand, the two following theorems can be established:⁽⁶⁾

1. $|\bar{e}'_r| = \text{Max. } |e'_r(x_v)|$ if and only if the given reference polynomial coincides with the corresponding levelled reference function.
2. The polynomial of best Chebyshev approximation on the modified relative error is the reference polynomial of maximum reference relative deviation.

The Remez algorithm can be used for this case in just the same way as in the Chebyshev approximation problem for the absolute error.

7. EXAMPLE

Consider the function $f(\tau)$ of Fig. 1 which exhibits the typical behavior of the elements of a perturbational guidance matrix, as computed from the second variation theory (τ being the time to go). Although that function has a pole of the second order at the origin as is apparent from theoretical reasons, let us for the sake of illustration try to approach $f(\tau)$ by a polynomial of non-negative powers of τ only.

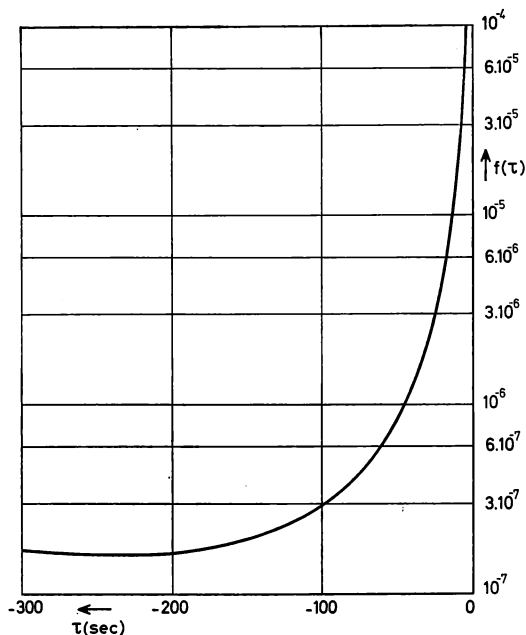


FIG. 1. Function $f(\tau)$ to be approximated versus τ .

By applying the classical least squares approximation method, numerical instability makes it impossible to obtain the correct coefficients of the approximation for a degree exceeding ten in a single length computation.

When using the Fourier expansion in Chebyshev polynomials, polynomials of degree running up to 100 are easily derived; Fig. 2 shows the envelope of the 65 first harmonics of the expansion (coefficients a_j of eq. (6)). The maximum relative error for the 65th degree polynomial is still 5 per cent which is not surprising in view of Fig. 2 and the value of the lower bound of $f(\tau)$.

The Chebyshev approximation on the absolute error leads to polynomials of almost the same degree. In fact, in view of the range of $f(\tau)$, any approximation relying upon an absolute error criterion will necessarily give

polynomials of high degree because insuring sufficient accuracy for small values of $f(\tau)$ requires extreme accuracy for the large values.

The Chebyshev approximation on the relative error gives much better results. Figure 3 shows the behavior of the maximum relative error as a

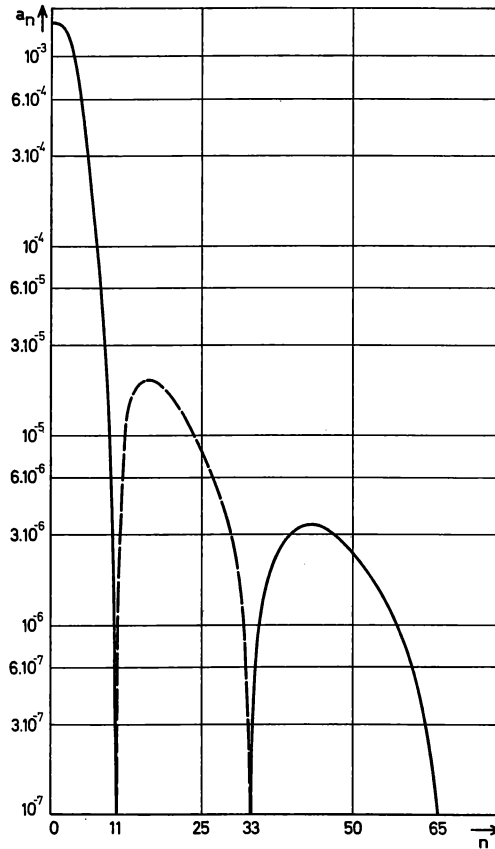


FIG. 2. Envelope of the 65 first harmonics of the polynomial expansion in Chebyshev polynomials.

function of the polynomial degree. For equivalent accuracy in relative error, the degree of the resulting polynomial expansion is cut down by a factor three with respect to the other methods. Moreover, the polynomial obtained is certain to be the minimal polynomial for an admissible given relative error.

Of course, if negative powers of the argument τ were allowed in the polynomial approximation, the expansions would be much shorter. In practice, such polynomials would be obtained by multiplying $f(\tau)$ by τ^m with $m > 0$ and approximating the result in non-negative powers of τ only.

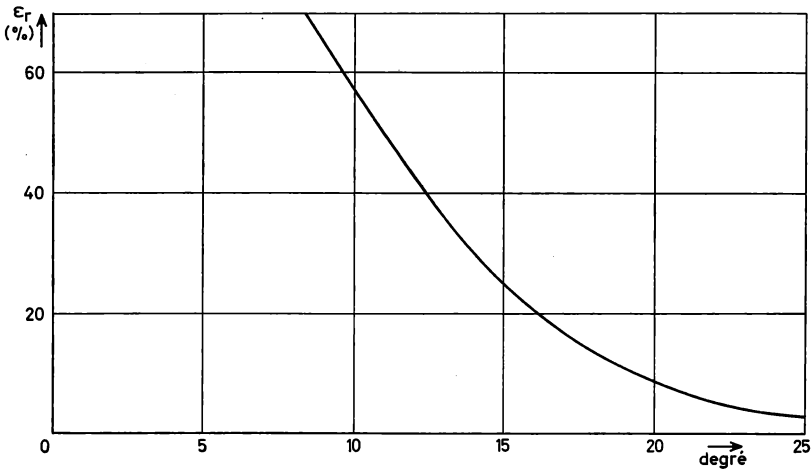


FIG. 3. Maximum relative error versus polynomial degree in Chebyshev approximations on the relative error.

8. CONCLUSION

The choice of a correct error norm is very important and may have a substantial influence on the degree of a polynomial expansion.

The polynomial Chebyshev approximation on the relative error has been shown to be the most adequate in approximation problems occurring in perturbational navigation and guidance schemes, where the quality of the approximation is controlled by the maximum relative error value; such polynomials are the shortest for a given admissible relative error.

In practice, the required computations for approximations of Chebyshev type are more important than with other methods. Approximations of least squares type on the absolute error are often used as an easier tool. The degree of such approximations will deviate from the minimal degree of the Chebyshev approximation on the relative error to an extent which will essentially depend on the shape of the function. The larger the range of $f(\tau)$, the more important will be the increase in polynomial degree.

In any case, classical least squares approximations should be avoided because of their inherent numerical instability.

REFERENCES

1. C. LANCZOS. *Applied Analysis*. Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 1956.
2. C. W. CLENSHAW. *Mathematical Tables*, vol. 5. *Chebyshev Series for Mathematical Functions*. National Physical Laboratory, London, 1962.

3. E. L. STIEFEL. Numerical Methods of Tchebycheff Approximations. From *On numerical Approximation*, ed. by R. E. Langer. University of Wisconsin Press, 1959.
4. J. R. RICE. *The Approximation of Functions*. Addison-Wesley, 1964.
5. A. ANGOT. *Compléments de Mathématiques*. Editions de la revue d'optique. Paris, 1961.
6. Y. GENIN. Principes du guidage perturbatif suboptimal et méthodes d'approximation des matrices de guidage. *Revue M.B.L.E.* 9, No. 2, 1966.

ON A CLASS OF DIFFERENTIAL GAMES

G. LEITMANN[†] and G. MON[‡]

University of California, Berkeley

1. INTRODUCTION

In this paper we shall discuss a class of two-player, zero-sum games. In particular we shall treat a play whose state is determined by a given set of ordinary differential equations; hence the name differential games.

The differential equations defining the evolution of a play involve parameters some of which are under the control of one player, P , while the others are under the control of the opposing player, E . A play terminates the first time the state of the play reaches a prescribed set. The payoff for a play is a scalar-valued functional, that is, a quantity whose value depends on the evolution of the play. Player P seeks to minimize the payoff, whereas player E seeks to maximize it. In this sense each player attempts to play optimally.

The study of differential games was initiated by Isaacs and his extensive investigations may be found in his book of the same title.⁽¹⁾ Utilizing a principle of optimality he arrives at a partial differential equation whose solution is the value of the play, that is, the payoff under optimal play, as a function of the initial state of the play. Isaacs' approach is partly analytic, partly geometric. His theory is subject to *a priori* assumptions on the value of the game.

Berkovitz⁽²⁻³⁾ bases this theory of differential games on the calculus of variations. However, in order to lend greater rigor to the theory he restricts the class of games treated to one smaller than that considered by Isaacs.

In an earlier paper⁽⁴⁾ we presented the beginnings of a geometric theory of differential games for a restricted class of such games. Here we shall attempt to give a theory applicable to a wider class of differential games. The analysis will be based on geometric properties in state space and as such constitutes an extension of this approach applied earlier to optimal control problems.⁽⁵⁻⁸⁾

[†] Professor of Engineering Science, currently in the Miller Institute for Basic Science.

[‡] Research Assistant, Division of Applied Mechanics.

2. NOTATION AND TERMINOLOGY

Unless otherwise indicated mathematical symbols will be those in common use. The following notation and terminology will be used throughout. Additional terminology will be introduced as needed.

A q -tuple of numbers will be considered a vector in q -dimensional Euclidean space E^q with orthonormal basis. A vector will be denoted by a lower case letter, and its components will be denoted by subscripts. Specific values of vectors and scalars will be denoted by superscripts. All vectors will be written as row vectors; however, a vector may be either a row or a column vector. In particular it will be understood that a vector is a row vector if it premultiplies a matrix and a column vector if it postmultiplies a matrix. The inner product of two vectors will be indicated by dot notation; e.g. $a \cdot b = \sum_{i=1}^q a_i b_i$. A matrix will be denoted by a capital letter or by an appropriate partial derivative symbol.

The term region will mean an open connected set of the appropriate space. A scalar-valued function defined on a region will be said to be of class C^k if the function and its first k partial derivatives are continuous on the region. Similarly, a vector-valued function will be said to be of class C^k if each of its components is of class C^k .

3. FORMULATION OF THE GAME

3.1. *State and Strategic Variables*

Let t denote time and let $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ denote the position or state of the play, where $x_n \equiv t$. The state $x(t)$ at time t is determined by

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v) \quad (1)$$

where $f(x, u, v) = (f_1(x, u, v), \dots, f_{n-1}(x, u, v), 1)$

and where

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_s)$$

are control or strategic variables chosen at each instant of time by players P and E , respectively.

Let G , U and V be bounded regions of E^n , E^r and E^s , respectively. We shall assume that function f is of class C^2 on $G \times U \times V$.

If u and v are defined for all $t \in [t_1, t_2]$ and if there exists a solution $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, of eq. (1) for given initial state $x(t_1) = x^1$, then $x(t)$ defines a path p from $x(t_1) = x^1$ to $x(t_2)$. This path is the image of $[t_1, t_2]$ under the graph $\{(t, x) : x = x(t)\}$.

3.2. Strategies

We shall assume that the choices of strategic variables u and v are governed by functions of x , the strategies π and ε , respectively, which the players select at the outset of the play from a prescribed set of admissible strategy pairs. Thus at time t the values of u and v are

$$\begin{aligned} u(t) &= \pi(x(t)) \\ v(t) &= \varepsilon(x(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

Before defining admissible strategy pairs let us consider the concept of a decomposition of a fixed region $X \subset G$. We shall say that $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ constitutes a decomposition of X if

- (i) X_i , $i = 1, 2, \dots, n < \infty$ is a region of E^n with piecewise smooth boundary;
- (ii) $X_k \cap X_l = \phi$, $k \neq l$;
- (iii) $X_i \subseteq X$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- (iv) $X \subset \bigcup_{i=1}^n \bar{X}_i$.

We are now ready to define admissible strategy pairs. We shall say that a strategy pair π, ε is admissible on a fixed region X if

- (i) there exists a decomposition $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ of X such that functions π, ε agree on each X_i with functions π^i, ε^i of class C^2 on a region $R^i \supset \bar{X}_i$, and on each nonempty $M^{kl} \triangleq \bar{X}_k \cap \bar{X}_l$, $k \neq l$, with functions $\pi^{kl}, \varepsilon^{kl}$ of class C^2 on a region $R^{kl} \supset M^{kl}$;
- (ii) $\pi(x) \in K_\pi \subseteq U$
 $\varepsilon(x) \in K_\varepsilon \subseteq V \quad \forall x \in X$

where K_π and K_ε are given sets in E^r and E^s , respectively.

It follows from basic existence and uniqueness theorems that given a point x^0 in the interior of a subregion X_k there exists a unique solution $x(t)$ of eq. (1) with $u = \pi^k(x)$, $v = \varepsilon^k(x)$ and $x(t_0) = x^0$, and that $x(t)$ is defined on some interval containing t_0 . If x^0 belongs to the boundary of a subregion X_k , say to M^{kl} , solutions of eq. (1) may be generated by considering $u = \pi^k(x)$, $v = \varepsilon^k(x)$ or $u = \pi^l(x)$, $v = \varepsilon^l(x)$ or $u = \pi^{kl}(x)$, $v = \varepsilon^{kl}(x)$. If the corresponding solutions belong to X_k or X_l or M^{kl} , respectively, then they are also solutions of eq. (1) with $u = \pi(x)$, $v = \varepsilon(x)$; thus, for initial states belonging to M^{kl} solutions of eq. (1) with an admissible strategy pair need not be unique.

3.3. Termination of Play and Playable Strategy Pairs

A play starting from initial state x^0 at time t_0 terminates at the smallest value of time, $t_f \geq t_0$, for which the corresponding solution $x(t)$ belongs to a prescribed set θ^f in E^n . We shall assume that the terminal state set θ^f

is an $(n-1)$ -dimensional surface contained in the boundary of X and that it can be represented parametrically by $x = \mathcal{R}^f(s)$ where $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ ranges over a closed cube \mathcal{K}^f in E^{n-1} , function \mathcal{R}^f is of class C^2 and matrix

$$\frac{\partial \mathcal{R}^f}{\partial s} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}_i^f}{\partial s_j} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n-1 \end{array}$$

has a maximum rank on a region containing \mathcal{K}^f . These assumptions imply that θ^f can be defined by a single equation

$$m^f(x) = 0$$

where function m^f is of class C^2 and $\text{grad } m^f(x) \neq 0$ on a region containing θ^f .

A strategy pair π, ε will be said to be playable if

- (i) it is admissible;
- (ii) it generates a terminating play, i.e., $x(t_f) \in \theta^f$, for all initial states $x^0 \in X$;
- (iii) all states except the terminal one belong to the interior of X , i.e., $x(t) \in X \quad \forall t \in [t_0, t_f)$.

3.4. Payoff, Optimality and Value

Associated with a terminating play there is a payoff, namely, the quantity that player P seeks to minimize and player E seeks to maximize. We shall consider a payoff in integral form

$$V(x^0, \theta^f; \pi, \varepsilon) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), v(t)) dt$$

where $u(t)$ and $v(t)$ are given by (2), and the corresponding strategy pair π, ε is playable. The prescribed function f_0 is assumed to be of class C^2 on $G \times U \times V$.

We shall say that a playable strategy pair π^*, ε^* is optimal if it satisfies the saddle point condition

$$V(x^0, \theta^f; \pi^*, \varepsilon) \leq V(x^0, \theta^f; \pi^*, \varepsilon^*) \leq V(x^0, \theta^f; \pi, \varepsilon^*) \quad (3)$$

for all $x^0 \in X$ and for all playable strategy pairs π^*, ε and π, ε^* , and if $V(x^0, \theta^f; \pi^*, \varepsilon^*)$ is defined for all $x^0 \in X$. To emphasize the latter condition we write

$$V^*(x^0) \triangleq V(x^0, \theta^f; \pi^*, \varepsilon^*)$$

and call $V^*(x^0)$ the value of the game.

The path generated by solution $x^*(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f^*$, corresponding to initial state x^0 and optimal strategy pair π^*, ε^* , will be called an optimal path and denoted by p^* . The path generated by solution $x^P(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f^P$,

$[x^E(t), t_0 \leq t \leq t_f^E]$ corresponding to initial state x^0 and playable strategy pair π^*, ε $[\pi, \varepsilon^*]$ will be called P -optimal [E -optimal] and denoted by p^P [p^E].

4. A FUNDAMENTAL THEOREM

4.1. Trajectories

Let us now consider points

$$\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x) \in E^{n+1}$$

and let us define a trajectory $\Gamma(C)$ in $E \cup \Theta^f$, where $E \triangleq x_0 \times X$ and $\Theta^f \triangleq x_0 \times \Theta^f$, by

$$\Gamma(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 + V(x, \theta^f; \pi, \varepsilon) = C, x \in p\}$$

where π, ε is the playable strategy pair generating path p and C is a constant. Similarly we define optimal trajectory

$$\Gamma^*(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 + V(x, \theta^f; \pi^*, \varepsilon^*) = C, x \in p^*\}$$

P -optimal trajectory

$$\Gamma^P(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 + V(x, \theta^f; \pi^*, \varepsilon) = C, x \in p^P\}$$

and E -optimal trajectory

$$\Gamma^E(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 + V(x, \theta^f; \pi, \varepsilon^*) = C, x \in p^E\}$$

As parameter C is varied we obtain one parameter families of trajectories $\{\Gamma(C)\}$, $\{\Gamma^*(C)\}$, $\{\Gamma^P(C)\}$ and $\{\Gamma^E(C)\}$. These belong to x_0 -cylindrical surfaces whose intersection with X are paths p, p^*, p^P and p^E , respectively. Since trajectories correspond to playable strategy pairs, their terminal points belong to the x_0 -cylindrical surface Θ^f .

We have

$$V(x(t), \theta^f; \pi, \varepsilon) = \int_t^{t_f} f_0(x(\tau), u(\tau), v(\tau)) dt$$

so that trajectories are determined by

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}, u, v) \quad (4)$$

with[†] $u = \pi(\tilde{x})$, $v = \varepsilon(\tilde{x})$ and

$$\tilde{f}(\tilde{x}, u, v) = (f_0(x, u, v), \dots, f_{n-1}(x, u, v), 1)$$

[†] Note that $\pi(\tilde{x}) = \pi(x)$, $\varepsilon(\tilde{x}) = \varepsilon(x)$.

Now consider optimal, P -optimal and E -optimal trajectories starting at the same point \tilde{x}^0 at time t_0 . Let

$$\tilde{x}^*(t), t_0 \leq t \leq t_f^*$$

$$\tilde{x}^P(t), t_0 \leq t \leq t_f^P$$

$$\tilde{x}^E(t), t_0 \leq t \leq t_f^E$$

denote the corresponding solutions of eq. (4). Saddle point condition (3) can now be written

$$x_0^P(t_f^P) \leq x_0^*(t_f^*) \leq x_0^E(t_f^E) \tag{5}$$

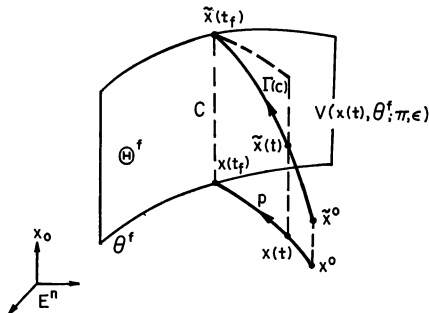


FIG. 1. Trajectory.

4.2. Game and Isovalue Surfaces

Since $V^*(x)$ is defined for all x in $X \cup \theta^f$, we can define game surface $\Sigma(C)$ by

$$\Sigma(C) \triangleq \{\tilde{x} : \Phi(\tilde{x}) \triangleq x_0 + V^*(x) = C\} \tag{6}$$

where C is a constant.

The intersection of $\Sigma(C)$ with $X \cup \theta^f$ will be called an isovalue surface

$$S(C) \triangleq \{x : V^*(x) = C\}$$

Such a surface is the locus of all initial states for which the game has the same value, namely, C .

As in the case of trajectories, varying parameter C results in one-parameter families $\{\Sigma(C)\}$ and $\{S(C)\}$. In view of definition (6), the members of $\{\Sigma(C)\}$ are ordered by parameter C and can be deduced from one another by translation along the x_0 -axis. Hence there passes one and only game surface through every point of $E \cup \theta^f$.

A given game surface $\Sigma(C)$ separates $E \cup \theta^f$ into two disjoint sets

$$A/\Sigma(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 > C - V^*(x)\}$$

$$B/\Sigma(C) \triangleq \{\tilde{x} : x_0 < C - V^*(x)\}$$

If $\tilde{x} \in A/\Sigma(C)$ it will be termed an A -point relative to $\Sigma(C)$;

if $\tilde{x} \in B/\Sigma(C)$ it will be called a B -point relative to $\Sigma(C)$.

The following fundamental theorem can be established.⁽⁴⁾

THEOREM. *A P-optimal trajectory whose initial point belongs to game surface $\Sigma(C)$ has no A-point relative to $\Sigma(C)$, whereas an E-optimal trajectory whose initial point belongs to $\Sigma(C)$ has no B-point relative to $\Sigma(C)$. An optimal trajectory with initial point on $\Sigma(C)$ lies entirely in $\Sigma(C)$.*

The fundamental theorem states that a given game surface $\Sigma(C)$ is not only the locus of all optimal trajectories whose initial points belong to it, but it is also a separating surface for P and E-optimal trajectories which emanate from it (see Fig. 2).

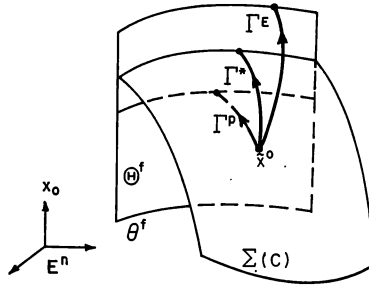


FIG. 2. Game surface and trajectories.

5. PROPERTIES OF OPTIMAL SOLUTIONS

5.1. Assumptions

Let $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}$ denote the decomposition of X corresponding to optimal strategy pair π^*, ε^* . Thus functions π^*, ε^* agree on each subregion X_i^* with functions π^i, ε^i of class C^2 on a region $R^i \supset \bar{X}_i^*$ and on each non-empty $M^{kl} \triangleq \bar{X}_k^* \cap \bar{X}_l^*$ with functions $\pi^{kl}, \varepsilon^{kl}$ of class C^2 on a region $R^{kl} \supset M^{kl}$. Let

$$\begin{aligned} g_j^k(x) &\triangleq f_j(x, \pi^k(x), \varepsilon^k(x)) & j = 0, 1, \dots, n \\ g_j^{kl}(x) &\triangleq f_j(x, \pi^{kl}(x), \varepsilon^{kl}(x)) \end{aligned}$$

We shall assume that π^*, ε^* is such that the following conditions are satisfied:

(i) A nonempty M^{kl} is an $(n-1)$ -dimensional surface that can be represented parametrically by $x = \mathcal{X}^{kl}(s)$ where $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$ ranges over a closed cube \mathcal{K}^{kl} in E^{n-1} , function \mathcal{X}^{kl} is of class C^2 and matrix

$$\frac{\partial \mathcal{X}^{kl}}{\partial s} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{X}_i^k}{\partial s_j} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n-1 \end{array}$$

has maximum rank on a region containing \mathcal{X}^{kl} . Thus surface M^{kl} can be represented by a single equation $m^{kl}(x) = 0$, where function m^{kl} is of class C^2 and $\text{grad } m^{kl}(x) \neq 0$ on a region containing M^{kl} . This, in turn, implies that M^{kl} possesses an analytic extension. Whenever we speak of an interior point of M^{kl} , we shall mean interior with respect to the topology induced on the analytic extension of M^{kl} . The interior of M^{kl} will be denoted by $\overset{\circ}{M}^{kl}$.

(ii) A path generated by π^* , ε^* neither enters nor leaves M^{kl} tangentially; e.g., if

$$\begin{aligned} x^*(t) &\in X_k^* \quad \forall t \in [t_1, t'], \quad t_1 < t' \\ x^*(t') &= x' \in M^{kl} \end{aligned}$$

then $\text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') \neq 0$

(iii) $\text{grad } m^f(x) \cdot g^i(x) > 0$ for $x \in \theta^f$ if $\text{grad } m^f(x)$ points[†] into $\text{comp } \bar{X}$ (and conversely), where $g^i = g^k$ or g^{kl} .

(iv) $\text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') \neq 0$, $x' \in M^{kl}$ implies that $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) \neq 0$ $\forall x \in M^{kl}$ and similarly for $g^l(x)$.

(v) $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^{kl}(x) \neq 0 \quad \forall x \in M^{kl}$ if

(a) $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) > 0$ and
 $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) > 0$

(or conversely) for all $x \in M^{kl}$; or

(b) $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) < 0$ and
 $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) \geq 0$

for all $x \in M^{kl}$, where $\text{grad } m^{kl}(x)$, $x \in \overset{\circ}{M}^{kl}$, points into X_l^* (and conversely).

(vi) If $x^*(t_j^*) \in M^{kl} \cap \theta^f$ and $x^*(t) \in X_k^* \quad \forall t \in [t', t_j^*]$, $t' < t_j^*$, then for all $x \in M^{kl} \cap \theta^f$

$$g_0^k(x) = g_0^{kl}(x)$$

$$\text{grad } g_0^k(x) = \text{grad } g_0^{kl}(x)$$

$$\text{grad } m^f(x) \cdot g^k(x) = \text{grad } m^f(x) \cdot g^{kl}(x)$$

$$\text{grad } (\text{grad } m^f(x) \cdot g^k(x)) = \text{grad } (\text{grad } m^f(x) \cdot g^{kl}(x)).$$

(vii) $M^{kl} \cap \theta^f = \phi$ if

$\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) > 0$ and

$\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) > 0$

(or conversely) for all $x \in M^{kl}$.

(viii) $M^{ij} \cap M^{kl} = \phi$ for $ij \neq kl \neq ji$.

5.2. Behavior of Paths near M^{kl}

In this section we shall investigate the behavior of paths generated by an optimal strategy pair π^* , ε^* . In particular we shall discuss the "piecing together" of paths capable of reaching an M^{kl} surface and the behavior

[†] That is, $\exists \alpha > 0$ such that $\forall \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \alpha$, $x + \varepsilon \text{grad } m^f(x) \in \text{comp } \bar{X}$.

of paths in the neighborhood of M^{kl} . The latter consideration will permit us to classify various types of M^{kl} surfaces.

Let x' be an interior[†] point of M^{kl} , and consider eq. (1) with $u = \pi^k(x)$, $v = \varepsilon^k(x)$, where π^k, ε^k is the strategy pair with which π^*, ε^* agrees on X_k^* . Let

$$x = q^k(t; x', t'), \quad x' = q^k(t'; x', t')$$

denote a solution of eq. (1) with $u = \pi^k(x)$, $v = \varepsilon^k(x)$. It follows from standard theorems (existence, uniqueness, implicit function) that there exist open balls B' and B'' in E^n with center at x' and open intervals I' and I'' containing t' , such that

- (a) function q^k is defined and continuous on $B' \times I' \times I'$;
- (b) the path corresponding to $q^k(t; x^0, t_0)$, $x^0 \in B''$, $t_0 \in I''$ intersects M^{kl} at a point $x = x'' \in B'$ and a time $t = t'' \in I'$ (see Fig. 3).

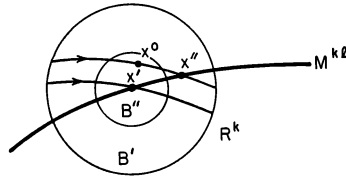


FIG. 3. Paths generated by π^k, ε^k .

Suppose that $\text{grad } m^{kl}(x')$ points into region X_k^* . Then it follows also that

- (c) $q^k(t; x', t')$ is a solution of eq. (1) with $u = \pi^*(x)$, $v = \varepsilon^*(x)$, for

$$t \in (t_1, t') \quad \text{if} \quad \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') > 0$$

$$t \in (t', t_2) \quad \text{if} \quad \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') < 0$$

where $(t_1, t_2) = I'$.



FIG. 4. Paths generated by π^*, ε^* .

Of course analogous results apply to solutions of eq. (1) with $u = \pi^l(x)$, $v = \varepsilon^l(x)$. Thus we can piece together paths capable of reaching M^{kl} . For instance, if

$$\text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') > 0$$

$$\text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^l(x') > 0$$

[†] The ensuing analysis applies also for boundary points of M^{kl} provided the analytic extension of M^{kl} is employed.

we have a path generated by optimal strategy pair π^* , ε^* ; this path crosses from X_k^* to X_l^* at $x' \in M^{kl}$.

Provided $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x)$ is nonzero at one point of M^{kl} , it follows from condition (iv) on optimal strategy pairs and from the continuity of $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x)$ that the behavior of paths near M^{kl} is uniform. For instance, if a path reaches $x' \in M^{kl}$ from X_k^* , then one does so for all $x \in M^{kl}$.

$$\text{If } \text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) = 0, \quad x \in B' \cap X_k^*$$

then it follows from nontangency condition (ii) that the corresponding path does not reach M^{kl} . Since the behavior of paths near M^{kl} is uniform if $\text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') \neq 0$, $x' \in M^{kl}$, it must also be uniform in the present case.

We are now ready to list the types of M^{kl} surfaces that may arise:

Transition surface M^T

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') > 0 \\ \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^l(x') > 0 \end{array} \quad \text{or} \quad \begin{array}{l} < 0 \\ < 0 \end{array}$$

Repulsive surface M^R

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') < 0 \\ \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^l(x') > 0 \end{array}$$

Attractive surface M^A

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') > 0 \\ \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^l(x') < 0 \end{array}$$

Semi-attractive surface M^{SA}

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') > 0 \\ \text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) = 0 \quad x \in B' \cap X_l^* \end{array}$$

Semi-repulsive surface M^{SR}

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x') \cdot g^k(x') < 0 \\ \text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) = 0 \quad x \in B' \cap X_l^* \end{array}$$

Neutral surface M^N

$$\begin{array}{l} \text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) = 0 \quad x \in B' \cap X_k^* \\ \text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^l(x) = 0 \quad x \in B' \cap X_l^* \end{array}$$

The six possible kinds of M^{kl} surfaces are shown schematically in Fig. 5. Arrows indicate the direction of increasing time along paths.

It is worth noting that an optimal strategy pair π^* , ε^* must be such that $\text{grad } m^{kl}(x) \cdot g^k(x) = 0 \quad \forall x \in M^{kl}$ if $M^{kl} = M^A$, M^{SA} or M^N . This follows from the behavior of paths near such surfaces together with the requirement that π^* , ε^* generate a terminating play from *all* initial states in X .

Furthermore, in view of condition (v), no point of an optimal path, except its initial one, can belong to an M^{kl} surface of type M^{SR} or M^R . It should also be noted that M^{kl} surfaces of type M^A , M^{SA} and M^N must intersect θ^f since optimal paths originating on such surfaces cannot leave them.

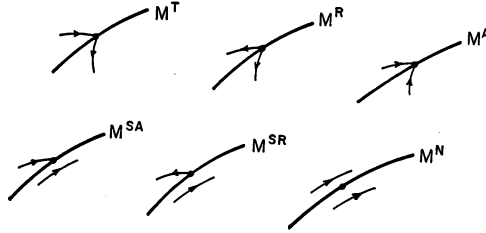


FIG. 5. Possible M^{kl} surfaces.

It is readily seen now that an optimal strategy pair generates a *unique* terminating path from an interior point of a subregion X_i^* . Indeed, such is the case for every initial state in X with the exception of those belonging to a repulsive M^{kl} surface.

Finally it follows from the standard theorems that an optimal path possesses "neighboring" optimal paths. More precisely stated we mean the following. Suppose x^0 is an interior point of a subregion X_i^* and B^0 is an open ball in E^n with radius ϱ and center x^0 . Let $\tau = t - t_0$ denote relative time, and let $x_\tau^*(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \tau_f^*$, and $\bar{x}_\tau^*(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}_f^*$, denote the solutions of eq. (1) with optimal strategy pair π^* , ε^* , and initial conditions $x_\tau^*(0) = x^0$ and $\bar{x}_\tau^*(0) = \bar{x}^0 \in B^0$, respectively. Then there exists a $\varrho > 0$ such that

$$\|\bar{x}_\tau^*(\tau) - x_\tau^*(\tau)\| = k(\tau)\varrho + o(\varrho, \tau)$$

where $k(\tau)$ is bounded and $\frac{o(\varrho, \tau)}{\varrho} \rightarrow 0$ uniformly for all $\tau \in [0, \tau_f^*]^\dagger$ as $\varrho \rightarrow 0$, and

$$|\bar{\tau}_f^* - \tau_f^*| = l\varrho + o(\varrho)$$

where l is bounded and $\lim_{\varrho \rightarrow 0} o(\varrho)/\varrho = 0$. An analogous result holds if x^0 is an interior point of an M^{kl} surface of type M^A , M^{SA} or M^N , and $\bar{x}^0 \in B^0 \cap M^{kl}$.

[†] Provided $\tau_f^* \leq \bar{\tau}_f^*$; otherwise $\tau \in [0, \bar{\tau}_f^*]$.

6. NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR OPTIMALITY

6.1. Interior Points of Subregions

Let $\{X_1^*, X_2^*, \dots, X_{n^*}^*\}$ be the decomposition of X corresponding to optimal strategy pair π^*, ε^* . Utilizing the fact that an optimal path originating at an interior point of X_i^* possesses neighboring optimal paths, it can be shown that V^* is twice differentiable on X_i^* , $i = 1, 2, \dots, n^*$, and hence so is Φ on $E_i^* \triangleq x_0 \times X_i^*$. In particular

$$\text{grad } \Phi = \left(1, \frac{\partial V^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V^*}{\partial x_n} \right)$$

is defined and continuous on E_i^* .

Now consider point $\tilde{x} = \tilde{x}^*(t) \in E_i^*$, $t \in [t_0, t_f^*]$, of optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ generated by π^*, ε^* and lying on $\Sigma(C)$. Consider also P - and E -optimal trajectories generated by π^*, ε and π, ε^* respectively, and passing through point \tilde{x} . Since

$$\Phi(\tilde{x} + \Delta\tilde{x}) - \Phi(\tilde{x}) = \text{grad } \Phi(\tilde{x}) \cdot \Delta\tilde{x} + o(\|\Delta\tilde{x}\|)$$

it follows at once from the fundamental theorem that

$$\text{grad } \Phi(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x})) \leq 0 \quad (7)$$

$$\text{grad } \Phi(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) \geq 0 \quad (8)$$

$$\text{grad } \Phi(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) = 0 \quad (9)$$

Of course, conditions (7) and (8) must hold for all P - and E -optimal trajectories passing through \tilde{x} .

Next we shall derive an equation for the transfer of $\text{grad } \Phi(\tilde{x})$ along the portion of optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ lying in E_i^* . We note that condition (9) is an identity in \tilde{x} on E_i^* . Hence

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) + \text{grad } \Phi(\tilde{x}) \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \right] = 0 \quad (10)$$

where

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \triangleq \left[\frac{\partial^2 \Phi(\tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}, u, v)}{\partial x_j} \right] & i, j = 0, 1, \dots, n \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}, u, v)}{\partial u_j} \right] & i = 0, 1, \dots, n \\ & & j = 1, 2, \dots, r \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i(\bar{x}, u, v)}{\partial v_j} \right] & i = 0, 1, \dots, n \\ & & j = 1, 2, \dots, s\end{aligned}$$

evaluated at $u = \pi^*(\bar{x})$, $v = \varepsilon^*(\bar{x})$, and

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi^*}{\partial x} &\triangleq \left[\frac{\partial \pi_i^*(\bar{x})}{\partial x_j} \right] & i = 1, 2, \dots, r \\ & & j = 0, 1, \dots, n \\ \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} &\triangleq \left[\frac{\partial \varepsilon_i^*(\bar{x})}{\partial x_j} \right] & i = 1, 2, \dots, s \\ & & j = 0, 1, \dots, n\end{aligned}$$

However, for $\bar{x} = \bar{x}^*(t)$ we have

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \Phi(\bar{x}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \bar{f}(\bar{x}, \pi^*(\bar{x}), \varepsilon^*(\bar{x}))$$

so that eq. (10) becomes

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \Phi(\bar{x}) = -\text{grad } \Phi(\bar{x}) \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \right] \quad (11)$$

for

$$\bar{x} = \bar{x}^*(t) \in E_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, \kappa^*.$$

Letting

$$\lambda_i(t) \triangleq \left. \frac{\partial V^*(x)}{\partial x_i} \right|_{x=x^*(t)} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{\lambda}(t) \triangleq (1, \lambda(t)), \quad \lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$$

and

$$\mathcal{H}(\lambda, x, u, v) \triangleq f_0(x, u, v) + \lambda \cdot f(x, u, v)$$

we may write conditions (7)–(9) as

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon(x^*(t))) \leq 0 \quad (7)'$$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) \geq 0 \quad (8)'$$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) = 0 \quad (9)'$$

for all playable π^* , ε and π , ε^* . Equation (11) becomes

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = -\bar{\lambda} \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \right] \quad (11)'$$

Conditions (7)'–(9)' and eq. (11)' may be derived also by a different method requiring somewhat weaker assumptions.⁽⁴⁾

Now consider the following class playable strategy pairs:

- (a) Given π^* , $v \in K_\varepsilon$ and $x \in X$, there exists ε such that $\varepsilon(x) = v$ and π^* , ε is playable.
 (b) Given ε^* , $u \in K_\pi$ and $x \in X$, there exists π such that $\pi(x) = u$ and π , ε^* is playable.

In that case conditions (7)' – (9)' may be replaced by

$$\text{Max}_{v \in K_\varepsilon} \mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), v) = 0 \quad (7)''$$

$$\text{Min}_{u \in K_\pi} \mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), u, \varepsilon^*(x^*(t))) = 0 \quad (8)''$$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) = 0 \quad (9)''$$

Suppose now that constraint sets K_π and K_ε , respectively, are given by

$$\varphi_i(x, u) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\psi_i(x, v) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, l$$

where

- (i) functions φ_i and ψ_i are of class C^1 on $G \times U$ and $G \times V$, respectively;
 (ii) if $k > r$ and $l > s$, then at most r of the $\varphi_i(x, u)$ and at most s of the $\psi_i(x, v)$ can vanish at any point of $G \times U$ and $G \times V$, respectively;
 (iii) the matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, k' \leq r \\ j = 1, 2, \dots, r \end{matrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial v_j} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, l' \leq s \\ j = 1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

formed from the vanishing $\varphi_i(x, u)$ and $\psi_i(x, v)$, respectively, have maximum rank.

Then, if conditions (7)'' – (9)'' are applicable, it can be shown⁽⁴⁾ that eq. (11)' may be written

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (11)''$$

where μ and ν are undetermined multipliers of dimensions k and l , respectively, and

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i(x, u)}{\partial x_j} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, k \\ j = 0, 1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i(x, v)}{\partial x_j} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, l \\ j = 0, 1, \dots, n \end{matrix}$$

evaluated at $x = x^*(t)$, $u = \pi^*(x)$, $v = \varepsilon^*(x)$.

Thus, if K_π and K_ε are independent of state x , eq. (11)'' reduces to

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

6.2. Jump Condition at Transition Surface

Consider an M^{kl} surface of type M^T and suppose that an optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ crosses $\mathcal{M}^{kl} \triangleq x_0 \times M^{kl}$ at $\tilde{x}' = \tilde{x}^*(t')$, $t_0 < t' < t_f^*$.

Using conditions (ii), (vi) and (vii) on π^* , ε^* one can show that[†] V^* is continuous on $X_k^* \cup \overset{\circ}{M}^{kl} \cup X_l^*$ and that $\text{grad } V^*$ is continuous on $X_k^* \cup \overset{\circ}{M}^{kl}$ and $X^* \cup \overset{\circ}{M}^{kl}$. Let

$$\text{grad } V^*(x')_- \triangleq \lim_{\substack{t \rightarrow t' \\ t < t'}} \text{grad } V^*(x^*(t))$$

$$\text{grad } V^*(x')_+ \triangleq \lim_{\substack{t \rightarrow t' \\ t > t'}} \text{grad } V^*(x^*(t))$$

so that

$$\tilde{\lambda}(t'-0) = (1, \text{grad } V^*(x')_-)$$

$$\tilde{\lambda}(t'+0) = (1, \text{grad } V^*(x')_+)$$

Since $\text{grad } \Phi(\tilde{x})$ possesses well-defined left and right limits at \tilde{x}' , so does the tangent plane $T_{\Sigma}(\tilde{x})$ of $\Sigma(C)$; denote these by $T_{\Sigma}^-(\tilde{x}')$ and $T_{\Sigma}^+(\tilde{x}')$, respectively. Also let $T_{\Sigma}^{kl}(\tilde{x}')$ denote the tangent plane of $\Sigma(C) \cap \mathcal{M}^{kl}$ at \tilde{x}' . Now note that $\tilde{\lambda}(t'-0)$, $\tilde{\lambda}(t'+0)$ and $\text{grad } m^{kl}(\tilde{x}')^\ddagger$ are normal to the $(n-1)$ -dimensional plane $T_{\Sigma}^{kl}(\tilde{x}')$. Hence these vectors are linearly dependent; that is,

$$c_1 \tilde{\lambda}(t'-0) + c_2 \tilde{\lambda}(t'+0) + c_3 \text{grad } m^{kl}(\tilde{x}') = 0$$

where not all constants c_i , $i = 1, 2, 3$, are zero. Since the zeroth components of $\tilde{\lambda}(t'-0)$ and $\tilde{\lambda}(t'+0)$ are equal and that of $\text{grad } m^{kl}(\tilde{x}')$ is zero, it follows that $c_1 = -c_2$. Furthermore, $\text{grad } m^{kl}(\tilde{x}') \neq 0$ so that $c_1 = -c_2 \neq 0$. Thus we can write

$$\lambda(t'-0) - \lambda(t'+0) + \frac{c_3}{c_1} \text{grad } m^{kl}(x') = 0 \quad (12)$$

The constant c_3/c_1 in this jump condition can be evaluated by invoking condition (9)' as $t \rightarrow t'$ from below and above. Letting

$$\tilde{f}^- = (f_0^-, f^-) \triangleq \lim_{\substack{t \rightarrow t' \\ t < t'}} \tilde{f}(\tilde{x}^*(t), \pi^*(\tilde{x}^*(t)), \varepsilon^*(\tilde{x}^*(t)))$$

$$\tilde{f}^+ = (f_0^+, f^+) \triangleq \lim_{\substack{t \rightarrow t' \\ t > t'}} \tilde{f}(\tilde{x}^*(t), \pi^*(\tilde{x}^*(t)), \varepsilon^*(\tilde{x}^*(t)))$$

we obtain

$$\frac{c_3}{c_1} = -\frac{f_0^+ + \lambda(t'-0) \cdot f^+}{\text{grad } m^{kl}(x') \cdot f^+} = \frac{f_0^- + \lambda(t'+0) \cdot f^-}{\text{grad } m^{kl}(x') \cdot f^-}$$

[†] This can be done by direct evaluation; however, it is also evident from the fact that an optimal trajectory crosses \mathcal{M}^{kl} at every point.

[‡] Of course, $m^{kl}(\tilde{x}) = m^{kl}(x)$.

6.3. Interior Points of M^{SA} and M^A

Next we shall turn to a consideration of interior points of M^{kl} surfaces of type M^{SA} and M^A . We shall suppose that optimal trajectories reach surface $\mathcal{M}^{kl} = \bar{E}_k^* \cap \bar{E}_l^*$ from subregion E_k^* .†

Again invoking conditions (ii) and (vi) on π^* , ε^* , it can be shown that Φ and $\text{grad } \Phi$ are continuous and $\partial^2\Phi/\partial x^2$ is defined on $E_k^* \cup \overset{\circ}{\mathcal{M}}^{kl}$. Thus, function Φ agrees on $E_k^* \cup \overset{\circ}{\mathcal{M}}^{kl}$ with a function Φ^k whose second partial derivatives are defined on a region containing $E_k^* \cup \overset{\circ}{\mathcal{M}}^{kl}$.

Consider now optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ with point $\tilde{x} = \tilde{x}^*(t) \in \mathcal{M}^{kl}$. Since

$$\Phi^k(\tilde{x} + \Delta\tilde{x}) - \Phi^k(\tilde{x}) = \text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) \cdot \Delta\tilde{x} + o(\|\Delta\tilde{x}\|)$$

it follows from the fundamental theorem that

$$\text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x})) \leq 0 \quad (13)$$

$$\text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) \geq 0 \quad (14)$$

$$\text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) = 0 \quad (15)$$

for all P - and E -optimal trajectories passing through \tilde{x} , and such that

$$\text{grad } m^{kl}(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x})) = 0 \quad (16)$$

$$\text{grad } m^{kl}(\tilde{x}) \cdot \tilde{f}(\tilde{x}, \pi(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x})) = 0 \quad (17)$$

Next we shall derive an equation for the transfer of $\text{grad } \Phi^k(\tilde{x})$ along the portion of $\Gamma^*(C)$ lying in $\Sigma(C) \cap \mathcal{M}^{kl}$. We note that condition (15) is an identity in \tilde{x} for all $\tilde{x} \in \mathcal{M}^{kl}$. Hence

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon(\tilde{x})) + \text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \right] \\ + \alpha \text{grad } m^{kl}(\tilde{x}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

where α is an undetermined scalar multiplier and

$$\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \triangleq \left[\frac{\partial^2 \Phi^k(\tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Moreover, for $\tilde{x} = \tilde{x}^*(t)$, we have

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \Phi^k(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \tilde{f}(\tilde{x}, \pi^*(\tilde{x}), \varepsilon^*(\tilde{x}))$$

and letting

$$\tilde{\lambda}(t) = (1, \lambda(t)) \triangleq \text{grad } \Phi^k(\tilde{x})$$

† Of course, if $M^{kl} = M^A$, surface \mathcal{M}^{kl} is reached from both subregions.

we can write conditions (13)–(15) as

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon(x^*(t))) \leq 0 \quad (13)'$$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) \geq 0 \quad (14)'$$

$$\mathcal{H}(\lambda(t), x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) = 0 \quad (15)'$$

for all playable π^* , ε and π , ε^* satisfying

$$\text{grad } m^{kl}(x^*(t)) \cdot f(x^*(t), \pi^*(x^*(t)), \varepsilon(x^*(t))) = 0 \quad (16)'$$

$$\text{grad } m^{kl}(x^*(t)) \cdot f(x^*(t), \pi(x^*(t)), \varepsilon^*(x^*(t))) = 0 \quad (17)'$$

Furthermore, eq. (18) becomes

$$\frac{d\tilde{\lambda}}{dt} = -\tilde{\lambda} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \frac{\partial \pi^*}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} \right] - \alpha \text{ grad } m^{kl}(\tilde{x}) \quad (18)$$

where α is a function defined for all t for which $\tilde{x}^*(t) \in \mathcal{M}^{kl}$.

Conditions (13)'–(15)' are analogous to (7)'–(9)' applicable at an interior point of \mathcal{E}_i^* ; however, conditions (13)'–(15)' apply for a restricted class of P - and E -optimal strategy pairs. Since $\text{grad } \Phi(\tilde{x})$ approaches $\text{grad } \Phi^k(\tilde{x}')$, $\tilde{x}' \in \mathcal{M}^{kl}$, continuously, there is no jump in $\tilde{\lambda}(t)$ when $\Gamma^*(C)$ enters \mathcal{M}^{kl} . However, eq. (18)' differs from eq. (11)' by one added term.

6.4. Interior Points of M^N

Finally we turn to a discussion of interior points of a neutral M^{kl} surface. Terminating paths neither enter nor leave an M^{kl} surface of type M^N ; however, if the initial state belongs to M^N , the entire path lies in M^N .

We recall that an M^{kl} surface may be represented parametrically by

$$x = \mathcal{X}^{kl}(s), \quad s \in \mathcal{K}^{kl} \subset E^{n-1}$$

The development of necessary conditions at an interior point of \mathcal{M}^{kl} follows closely that carried out for interior points of a subregion \mathcal{E}_i^* . The main difference arises due to the diminution of the dimension of the space by one.

Since an optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ now lies entirely in $\Sigma(C) \cap \mathcal{M}^{kl}$, we need to represent this $(n-1)$ -dimensional surface in terms of $\sigma = (x_0, s)$; namely, letting

$$V^N(s) \triangleq V^*(\mathcal{X}^{kl}(s))$$

we have

$$\Phi^N(\sigma) \triangleq x_0 + V^N(s) = C$$

One can show that V^N is twice differentiable on \mathcal{X}^{kl} , so that

$$\text{grad } \Phi^N(\sigma) = \left(1, \frac{\partial V^N(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial V^N(s)}{\partial s_{n-1}} \right)$$

is continuous and

$$\frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} \triangleq \left[\frac{\partial^2 \Phi^N(\sigma)}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \right] \quad i, j = 0, 1, \dots, n-1$$

is defined on $x_0 \times \mathcal{X}^{kl}$.

For $x = x(t) \in M^{kl}$, we have

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{X}^{kl}}{\partial s} \frac{ds}{dt} = f(x, \pi(x), \varepsilon(x))$$

where matrix $\partial \mathcal{X}^{kl} / \partial s$ has rank $n-1$. Thus

$$\frac{ds}{dt} = f^N(s, \pi^N(s), \varepsilon^N(s))$$

with $f^N \triangleq Q^{-1} \hat{f}$, where Q is a nonsingular minor of $\partial \mathcal{X}^{kl} / \partial s$ and \hat{f} is the corresponding part of f , and

$$\pi^N(s) \triangleq \pi(\mathcal{X}^{kl}(s)), \quad \varepsilon^N(s) \triangleq \varepsilon(\mathcal{X}^{kl}(s))$$

Let

$$\begin{aligned} \tilde{f}^N &\triangleq (f_0^N, f^N), \quad f_0^N(s, u, v) \triangleq f_0(\mathcal{X}^{kl}(s), u, v) \\ \pi^{N*}(s) &\triangleq \pi^*(\mathcal{X}^{kl}(s)), \quad \varepsilon^{N*}(s) \triangleq \varepsilon^*(\mathcal{X}^{kl}(s)) \end{aligned}$$

Then invoking again the fundamental theorem, we obtain

$$\text{grad } \Phi^N(\sigma) \cdot \tilde{f}^N(\sigma, \pi^{N*}(\sigma), \varepsilon^{N*}(\sigma)) \leq 0 \quad (19)$$

$$\text{grad } \Phi^N(\sigma) \cdot \tilde{f}^N(\sigma, \pi^N(\sigma), \varepsilon^{N*}(\sigma)) \geq 0 \quad (20)$$

$$\text{grad } \Phi(\sigma) \cdot \tilde{f}^N(\sigma, \pi^{N*}(\sigma), \varepsilon^{N*}(\sigma)) = 0 \quad (21)$$

for all playable strategy pairs π^{N*} , ε^{N*} and π^N , ε^{N*} , and for $\sigma \in x_0 \times \mathcal{X}^{kl}$.

Again using the fact that condition (21) is an identity in $\sigma \in x_0 \times \mathcal{X}^{kl}$, we have

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} \tilde{f}^N(\sigma, \pi^{N*}(\sigma), \varepsilon^{N*}(\sigma)) \\ &+ \text{grad } \Phi^N(\sigma) \left[\frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial u} \frac{\partial \pi^{N*}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^{N*}}{\partial \sigma} \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial \sigma} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial \sigma_j} \right] & i, j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial u} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial u_j} \right] & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ & & j = 1, 2, \dots, r \\ \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial v} &\triangleq \left[\frac{\partial f_i^N(\sigma, u, v)}{\partial v_j} \right] & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ & & j = 1, 2, \dots, s \end{aligned}$$

evaluated at $u = \pi^{N*}(\sigma)$, $v = \varepsilon^{N*}(\sigma)$, and

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^{N*}}{\partial \sigma} &\triangleq \left[\frac{\partial \pi_i^{N*}(\sigma)}{\partial \sigma_j} \right] & i = 1, 2, \dots, r \\ & & j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \frac{\partial \varepsilon^{N*}}{\partial \sigma} &\triangleq \left[\frac{\partial \varepsilon_i^{N*}(\sigma)}{\partial \sigma_j} \right] & i = 1, 2, \dots, s \\ & & j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Moreover, along $\Gamma^*(C)$, that is, $\sigma = \sigma^*(t)$, $t_0 \leq t < t_f^*$, we have

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \Phi^N(\sigma) = \frac{\partial^2 \Phi^N}{\partial \sigma^2} \tilde{f}^N(\sigma, \pi^N(\sigma), \varepsilon^{N*}(\sigma))$$

Now letting

$$\tilde{\lambda}^N(t) = (1, \lambda^N(t)) \triangleq \text{grad } \Phi^N(\sigma)$$

and

$$\mathcal{H}^N(\lambda^N, s, u, v) \triangleq f_0^N(s, u, v) + \lambda^N \cdot f^N(s, u, v)$$

we can write conditions (19)–(21) as

$$\mathcal{H}^N(\lambda^N(t), s^*(t), \pi^{N*}(s^*(t)), \varepsilon^{N*}(s^*(t))) \leq 0 \quad (19)$$

$$\mathcal{H}^N(\lambda^N(t), s^*(t), \pi^N(s^*(t)), \varepsilon^{N*}(s^*(t))) \geq 0 \quad (20)$$

$$\mathcal{H}^N(\lambda^N(t), s^*(t), \pi^{N*}(s^*(t)), \varepsilon^{N*}(s^*(t))) = 0 \quad (21)$$

for all playable strategy pairs π^{N*} , ε^N and π^N , ε^{N*} . Equation (22) becomes

$$\frac{d\tilde{\lambda}^N}{dt} = -\tilde{\lambda}^N \left[\frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial u} \frac{\partial \pi^{N*}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \tilde{f}^N}{\partial v} \frac{\partial \varepsilon^{N*}}{\partial \sigma} \right] \quad (22)$$

6.5. Transversality Condition

We shall investigate now the condition that must hold at the terminal point of an optimal trajectory $\Gamma^*(C)$. Let us consider first the case of an optimal path p^* reaching terminal surface θ^f from the interior of a sub-region X_k^* ; that is, $x^*(t_f^*) \in \theta^f$ but $x^*(t) \notin M^{kl}$, $t' \leq t < t_f^*$.

The terminal point $\tilde{x}^*(t_f^*)$ of $\Gamma^*(C)$ belongs to $\Sigma(C) \cap \theta^f$. Since the terminal surface θ^f is the projection of $\Sigma(C) \cap \theta^f$ on E^n , and since the tangent plane $T_f(x)$ of θ^f is defined for all $x \in \theta^f$, the tangent plane $T_F(\tilde{x})$ of $\Sigma(C) \cap \theta^f$ is defined at $\tilde{x} = \tilde{x}^*(t_f^*)$; it is the set of points (C, x) where x belongs to $T_f(x^*(t_f^*))$. Also one can show that $\text{grad } \Phi$ is continuous on $\bar{E}_k^* \cup (\bar{E}_k^* \cap \theta^f)$; hence $\Sigma(C)$ possesses a well-defined tangent plane $T_E(\tilde{x})$ at $\tilde{x} = \tilde{x}^*(t_f^*)$. Clearly, $T_F(\tilde{x}) \subset T_E(\tilde{x})$. Since $\tilde{\lambda}(t_f^*)$ is normal to $T_E(\tilde{x})$, it is normal to every vector $\eta = (0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ in $T_F(\tilde{x})$. Thus we arrive at the transversality condition

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t_f^*) \eta_i = 0 \quad (23)$$

where

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial m^f(x)}{\partial x_i} \eta_i = 0$$

Upon solving for one component of η and substitution in eq. (23), the vanishing of the coefficients of the remaining $n-1$ arbitrary components renders $n-1$ conditions. Combined with the equation for θ^f , we have n conditions at the terminal point of p^* .

If the terminal portion of p^* belongs to an M^{kl} surface of type M^{SA} or M^A , and p^* enters M^{kl} from X_k^* , the same transversality condition applies. Of course, in that case

$$\tilde{\lambda}(t) = \text{grad } \Phi^k(\tilde{x}^*(t)).$$

Next we shall consider the case of an optimal path belonging to an M^{kl} surface of type M^N . In that event the terminal point of a corresponding optimal trajectory $\Gamma^*(C)$ belongs to

$$[\Sigma(C) \cap M^{kl}] \cap [\Theta^f \cap M^{kl}]$$

The equation of $\Sigma(C) \cap M^{kl}$ was given before as

$$\Phi^N(\sigma) \triangleq x_0 + V^N(s) = C$$

Since $\text{grad } \Phi^N(\sigma)$ is defined at $\sigma = \sigma^*(t_f^*)$, so is the tangent plane $T_{\Sigma}^{kl}(\sigma)$ of $\Sigma(C) \cap M^{kl}$. Also, since $\theta^f \cap M^{kl}$ is the projection on E^n of

$$[\Sigma(C) \cap M^{kl}] \cap [\Theta^f \cap M^{kl}]$$

the latter is defined by

$$x_0 = C, \quad m^N(s) \triangleq m^f(\mathcal{X}^{kl}(s)) = 0$$

Furthermore, its tangent plane $T_F^{kl}(\sigma)$ is defined at $\sigma = \sigma^*(t_f^*)$, since $\text{grad } m^N(\sigma)$ is defined in a neighborhood of that point.

As before we note that $T_F^{kl}(\sigma) \subset T_{\Sigma}^{kl}(\sigma)$, and that $\tilde{\lambda}^N(t_f^*)$ is normal to $T_{\Sigma}^{kl}(\sigma)$ and hence to every vector $\eta = (0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$ in $T_F^{kl}(\sigma)$. Thus we arrive at the transversality condition

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^N(t_f^*) \eta_i = 0 \tag{24}$$

where

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial m^N(s)}{\partial s_i} \eta_i = 0$$

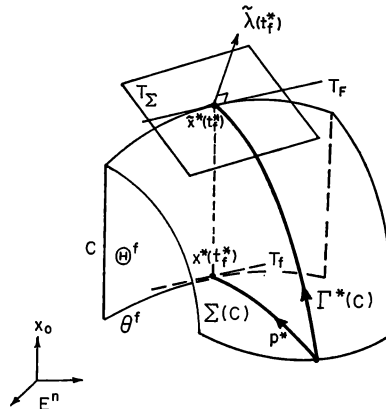


FIG. 6. Transversality condition.

6.6. Sufficiency Conditions

Finally we shall present a simple proof of sufficiency conditions for optimality. That is, we shall give conditions which assure that a playable strategy pair satisfies saddle point condition (3).

Suppose that π^e, ε^e is a playable strategy pair such that

$$(i) f_0(x, \pi^e(x), \varepsilon^e(x)) + \text{grad } V^e \cdot f(x, \pi^e(x), \varepsilon^e(x)) = 0 \quad (25)$$

possesses a solution $V^e = V^e(x)$, $V^e(x) = 0$ for all $x \in \theta^f$, of class C^1 on $X \cup \theta^f$; and

$$(ii) f_0(x, \pi^e(x), \varepsilon(x)) + \text{grad } V^e(x) \cdot f(x, \pi^e(x), \varepsilon(x)) \leq 0 \quad (26)$$

$$f_0(x, \pi(x), \varepsilon^e(x)) + \text{grad } V^e(x) \cdot f(x, \pi(x), \varepsilon^e(x)) \geq 0 \quad (27)$$

for all playable strategy pairs π^e, ε and π, ε^e , and for all $x \in X$.

Let us consider first any connected curve l from $x^0 \in X$, lying entirely in X except for its terminal point which belongs to θ^f . Next form the line integral

$$I(x^0) \triangleq \int_l \text{grad } V^e(x) \cdot dx$$

Since $V^e(x) = 0$ for $x \in \theta^f$, the value of this integral is independent of the choice of curve l ; namely,

$$I(x^0) = -V^e(x^0) \quad (28)$$

Furthermore, by eq. (25) of condition (i)

$$\int_{t_0}^{t_j} f_0(x^e(t), \pi^e(x^e(t)), \varepsilon^e(x(t))) dt = V^e(x^0) \quad (29)$$

where $x^e(t)$, $t_0 \leq t \leq t_j^e$, denotes the solution of state equation (1) with $u = \pi^e(x)$, $v = \varepsilon^e(x)$, and $x^e(t_0) = x^0$.

Now let $x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_j$, denote the solution of eq. (1) with $u = \pi^e(x)$, $v = \varepsilon(x)$, and $x(t_0) = x^0$. Form the difference in payoff

$$\Delta \triangleq \int_{t_0}^{t_j} f_0(x(t), \pi^e(x(t)), \varepsilon(x(t))) dt - \int_{t_0}^{t_j^e} f_0(x^e(t), \pi^e(x^e(t)), \varepsilon^e(x^e(t))) dt$$

Since integral $I(x^0)$ is invariant with choice of curve l , let us add

$$\int_p \text{grad } V^e(x) \cdot dx + V^e(x^0) = 0$$

to Δ , where p denotes the path from x^0 generated by π^e, ε .

Noting that

$$\int_p \text{grad } V^e(x) \cdot dx = \int_{t_0}^{t_j} \text{grad } V^e(x(t)) \cdot f(x(t), \pi^e(x(t)), \varepsilon(x(t))) dt$$

and invoking condition (26) lead at once to $\Delta \leq 0$. Thus, the left inequality

of saddle point condition (3) is satisfied by π^ε , ε^ε . In similar fashion, using π , ε^ε with condition (27), we can show that π^ε , ε^ε satisfies the right inequality in (3). Furthermore, the function V^ε is defined for all x on X . Consequently π^ε , ε^ε is an optimal strategy pair.

ACKNOWLEDGEMENTS

This paper is based on research supported in part by ONR under contract Nonr-3656(31) and by NASA under contract NAS 12-114.

REFERENCES

1. R. ISAACS, *Differential Games*. Wiley, N.Y., 1965.
2. L. D. BERKOVITZ, and W. H. FLEMING. On Differential Games with Integral Payoff. In *Contributions to the Theory of Games III*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
3. L. D. BERKOVITZ. A Variational Approach to Differential Games. In *Advances in Game Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1964.
4. G. LEITMANN and G. MON. Some Geometric Aspects of Differential Games. *J. Astronautical Sci.*, 14, No. 2, 1967.
5. G. LEITMANN. Some Geometrical Aspects of Optimal Processes. *J. SIAM on Control*, Ser. A, 3, No. 1, 53f, 1965.
6. A. BLAQUIERE. Further Investigation into the Geometry of Optimal Processes. *J. SIAM on Control*, Ser. A, 3, No. 2, 19f, 1965.
7. G. LEITMANN. *An Introduction to Optimal Control*. McGraw-Hill, N.Y., 1966.
8. A. BLAQUIERE, and G. LEITMANN. On the Geometry of Optimal Processes. In *Topics in Optimization*. Academic Press, N.Y., 1967.

UN NOUVEAU PROCÉDÉ D'ACCÉLÉRATION DE LA MÉTHODE DU GRADIENT, APPLIQUÉ AUX TRAJECTOIRES DE RENTÉE D'UN PLANEUR ORBITAL

JEAN FAVE

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales,
29 Avenue de la Division Leclerc, 92 Châtillon, France

RÉSUMÉ

La méthode du gradient permet généralement une amélioration rapide de l'indice de performance dans les premières itérations, mais conduit à une convergence finale très lente. Deux procédés sont proposés pour son amélioration; ils sont caractérisés par une nouvelle loi de modification de commande: une loi simple mais efficace est une modification en "tout-ou-rien" suivant le signe de la fonction de sensibilité; un procédé plus souple et plus précis est une modification suivant la méthode du "cosinus" (particulièrement avec pas variables) dérivant d'une analyse locale de la fonction de sensibilité.

Un exemple d'application est fourni par les trajectoires optimales de planeurs de rentrée.

ABSTRACT

It is well known that the steepest-ascent method offers a rapid increase of the performance index in the first iterations, but presents a very slow final convergence. Two techniques are proposed for its improvement, that differ by a new choice of the control-variable change from the classical one: a roughly but efficient change is a "bang-bang" change, according to the sign of the influence function; a smoother and more precise way is the "cosine" change (particularly with variable steps), obtained by a local analysis of the influence function.

Lifting re-entry trajectories optimization is indicated as an illustration.

1. INTRODUCTION

Le calcul des variations est la méthode classique de résolution des problèmes de commande optimale, mais il conduit à un système d'équations différentielles du premier ordre ayant des conditions aux limites en deux points. Ce système étant généralement très instable, sa résolution est très délicate.

La méthode du gradient est une méthode itérative qui découple les équations instables. Les équations du mouvement sont d'abord intégrées à

partir des conditions initiales et avec une loi nominale choisie a priori, puis les équations adjointes sont intégrées à rebours, fournissant la fonction de sensibilité de l'indice de performance à des variations de la loi de commande. Grâce à cette fonction de sensibilité, la loi de commande est modifiée de façon à obtenir le plus grand accroissement possible de l'indice de performance au voisinage de la trajectoire. Une nouvelle trajectoire est ainsi obtenue et le processus se poursuit.

Cette méthode offre une rapide amélioration de l'indice de performance, puis une convergence excessivement lente au voisinage de l'optimum. De plus, la loi de commande reste mal précisée le long des arcs peu sensibles.

Plusieurs méthodes ont pour objet de remédier à cette insuffisance :

- une première voie consiste à faire une théorie complète des variations du 2ème ordre, mais cela conduit à un système différentiel comprenant un très grand nombre d'équations,
- une autre voie est celle indiquée par Davidon dans la recherche du maximum d'une fonction de plusieurs variables. Mais il semble que cela conduit, dans le problème plus général de la détermination d'une loi de commande continue, à un grand nombre d'itérations.

La méthode suivante est une version améliorée de la méthode classique du premier ordre, permettant à la fois une convergence plus rapide et une meilleure approximation de la loi de commande optimale.

2. FORMULATION

Selon la formulation classique, l'évolution d'un système physique peut être représentée par le système différentiel :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

où x est un vecteur à n composants, connu à l'instant initial t_0 ;

u est la loi de commande dont on peut choisir la valeur à chaque instant, de manière que :

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}$$

L'indice de performance est une fonction $J(x)$ des variables d'état à l'instant final déterminé par une condition d'arrêt $\Omega(x) = 0$.

Le système adjoint est :

$$\bar{p} = -\bar{p} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{avec} \quad p(t_f) = \left(\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{J}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_f \quad (2)$$

La fonction de sensibilité de J à des variations δu de la commande est :

$$P(t) = \bar{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

Dans la méthode classique, la répartition $\delta u(t)$ qui fournit le plus grand accroissement δJ est:

$$\delta u(t) = k \cdot P(t)$$

si le voisinage de la trajectoire étudiée est défini par une valeur donnée de

$$\int_{t_0}^{t_f} \delta u^2 \cdot dt.$$

Cette définition résultant d'un choix arbitraire, d'autres solutions peuvent être recherchées.

3. MÉTHODE DU "TOUT-OU-RIEN"

$$\delta u(t) = \delta u_{\max} \cdot \frac{P(t)}{|P(t)|}$$

δu_{\max} est une grandeur physique dont il est facile de choisir un ordre de grandeur. Avec cette procédure, on peut espérer obtenir une loi de commande plus précise le long des arcs peu sensibles.

De plus, la convergence doit être plus rapide, puisque le voisinage des trajectoires peut être étendu dans ces régions peu sensibles, sans être limité dans les zones très sensibles.

4. MÉTHODE DU "COSINUS"

Cette méthode repose sur une analyse de la sensibilité $P(t)$. Elle vise à mettre en évidence dans la valeur de $P(t)$, la part due à la différence entre la valeur actuelle de la commande et sa valeur optimale.

À chaque instant, la fonction $P(t)$ est le produit scalaire des vecteurs p et

$$\frac{\partial f}{\partial u} :$$

$$P(t) = \bar{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial u} = |p| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \cdot \cos \alpha$$

Ces trois termes représentent trois effets différents:

—dans $|p|$ on retrouve les modes divergents du système adjoint, c'est-à-dire le fait qu'une même perturbation δu a plus d'influence sur J si elle est appliquée au début de la trajectoire plutôt qu'à la fin,

—dans $\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|$ on retrouve l'influence des variables d'état, car il y a généralement des régions de l'espace plus propices que d'autres à de fortes sensibilités,

—le terme $\cos \alpha$ semble bien caractériser la part due à l'éloignement de la valeur actuelle de la commande vis-à-vis de sa valeur optimale. En particulier, pour la trajectoire optimale, la fonction $P(t)$ est identiquement nulle, et ces deux vecteurs sont constamment orthogonaux, sans être nuls ni l'un ni l'autre.

On conçoit le rôle d'amplificateur que jouent ces deux modules qu'il est souhaitable d'éliminer en prenant :

$$\delta u(t) = \delta u_{\text{ref}} \cdot \cos \alpha(t) = \delta u_{\text{ref}} \cdot \frac{P(t)}{|p| \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|}$$

Cas du temps final

La commande u n'intervenant pas toujours dans toutes les équations, le vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}$ à r composantes ($r \leq n$). Il arrive souvent que les composantes correspondantes du vecteur p soient nulles à l'instant final. Par suite, la sensibilité P est nulle, mais cela ne signifie pas que la commande ait sa valeur optimale à cet instant. En particulier, le vecteur p (à r composantes) qui est nul à l'instant t_f , prend la valeur $-\dot{p} \cdot dt$ à un instant antérieur, ce qui permet de calculer la valeur limite de l'angle α à l'instant final. Cette indication est précieuse et constitue une nette amélioration de la méthode classique, particulièrement dans le cas où le temps final des trajectoires successives est en augmentation.

Choix de δu_{ref}

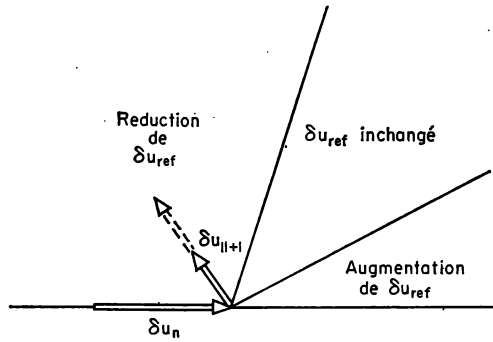
Le coefficient δu_{ref} peut être maintenu constant dans la suite des itérations. Son évaluation est plus délicate que celle de δu_{max} (tout-ou-rien), parce qu'on ne connaît pas toujours l'ordre de grandeur de $\cos \alpha$.

Adaptation de δu_{ref} : méthode du "cosinus à pas variables"

À la première itération, on peut ajuster δu_{ref} de manière à obtenir le même accroissement δJ que par la méthode "tout-ou-rien" avec un δu_{max} donné.

Pour les itérations suivantes, on peut ajuster δu_{ref} de façon que les variations $\delta u(t)$ relatives à deux trajectoires consécutives n'aient pas tendance à s'opposer.

À chaque loi $\delta u(t)$ correspond un vecteur $\vec{\delta u}$ ayant un nombre de dimensions égal au nombre de pas. On peut donc convenir de réduire δu_{ref} si l'angle de deux vecteurs $\vec{\delta u}$ consécutifs est supérieur à une certaine valeur, et, de façon à ne pas ralentir le processus, à augmenter δu_{ref} si cet angle est inférieur à une autre valeur.



5. APPLICATION: PLANEUR ORBITAL DE RENTRÉE

Ces différentes méthodes ont été confrontées dans la recherche des trajectoires optimales de rentrée d'un planeur orbital, en vue de la détermination de son domaine accessible à la surface du sol.

Le planeur dispose de deux commandes :

incidence $0 \leq i(t) \leq 40^\circ$

roulis $-90^\circ \leq \mu(t) \leq +90^\circ$

Les figures 1, 2, 3 montrent clairement l'influence des paramètres $\left| \frac{\partial f}{\partial i} \right|$ et $|p|$. Le planeur (à l'incidence de finesse maximum) ricoche un grand nombre de fois sur l'atmosphère, la sensibilité accusant une pointe à chaque rebond, et devenant très faible à chaque arc balistique. Le paramètre $\left| \frac{\partial f}{\partial i} \right|$ rend très bien compte de cet effet des variables d'état, qui caractérise seulement certaines régions de l'espace favorables à de fortes sensibilités, sans relation avec la valeur de la commande. De même, $|p|$ indique la présence d'un mode divergent dans le système (2). La figure 3 permet de comparer la sensibilité réelle à la "sensibilité intrinsèque" θ : en particulier, le long des arcs balistiques, on constate une sensibilité θ qui n'apparaissait pas dans la fonction P ; de même, l'importance du point final est particulièrement bien mise en évidence.

La figure 4 indique la progression comparée de l'indice de performance (écart latéral; cas d'un planeur de finesse 1 entrant sous une faible pente : $-1,2^\circ$). Les procédés du "tout-ou-rien" et du "cosinus" (avec δu_{ref} maintenu constant dans la suite des itérations) permettent d'atteindre en dix itérations une valeur qui n'est pas atteinte par la méthode classique après soixante-douze itérations.

Les figures 5, 6 et 7 sont relatives à un planeur de finesse 1 entrant dans l'atmosphère avec une pente de $-2,2^\circ$. Malgré une chute de la portée latérale (fig. 5), la méthode du "cosinus à pas variables" (δu_{ref} éventuellement adapté à chaque itération) permet une rapide amélioration de la trajectoire nominale pourtant choisie assez proche de l'optimum.

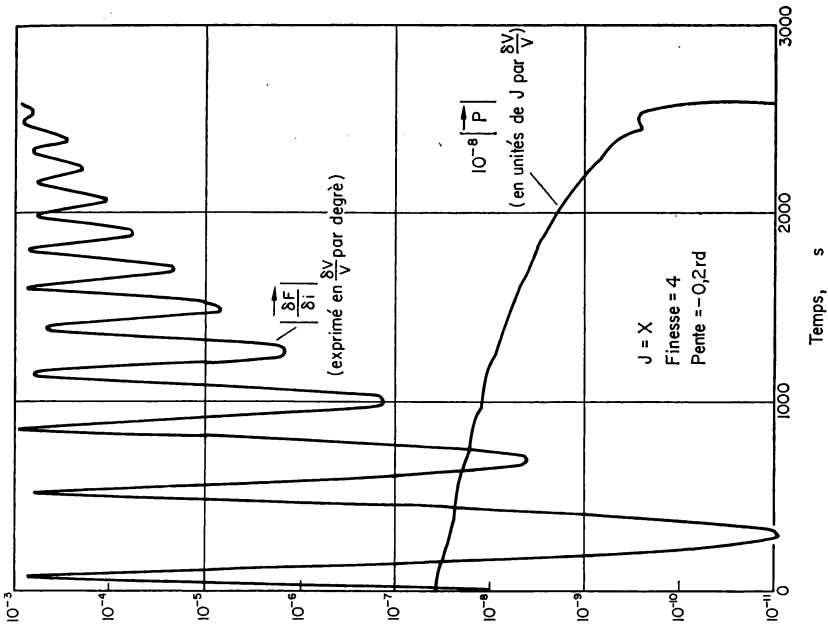
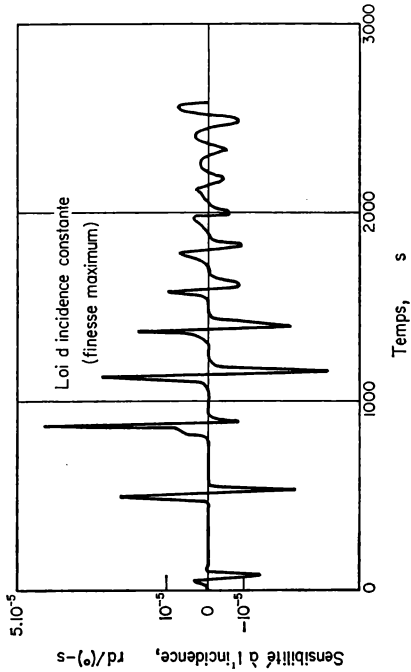
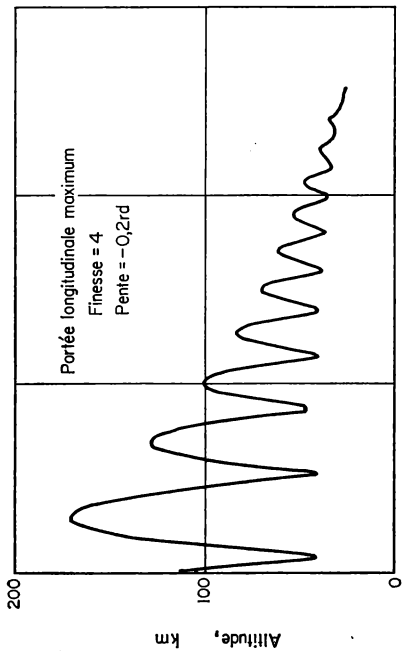
Les figures 6 et 7 montrent la loi d'incidence obtenue et la valeur finale de l'angle $\theta(t)$: dans la dernière partie de la trajectoire, l'incidence varie très vite et il y aurait lieu de réduire l'amplitude des pas d'intégration, pour diminuer θ .

Les figures 8, 9 et 10 montrent le comportement de la méthode du "cosinus" avec des pas variables, dans la recherche de la portée longitudinale maximum (planeur de finesse maximum égale à 1, entrant dans l'atmosphère sous une pente de $-2,2^\circ$) en présence d'une contrainte sur les variables d'état (flux de chaleur maximum admissible).

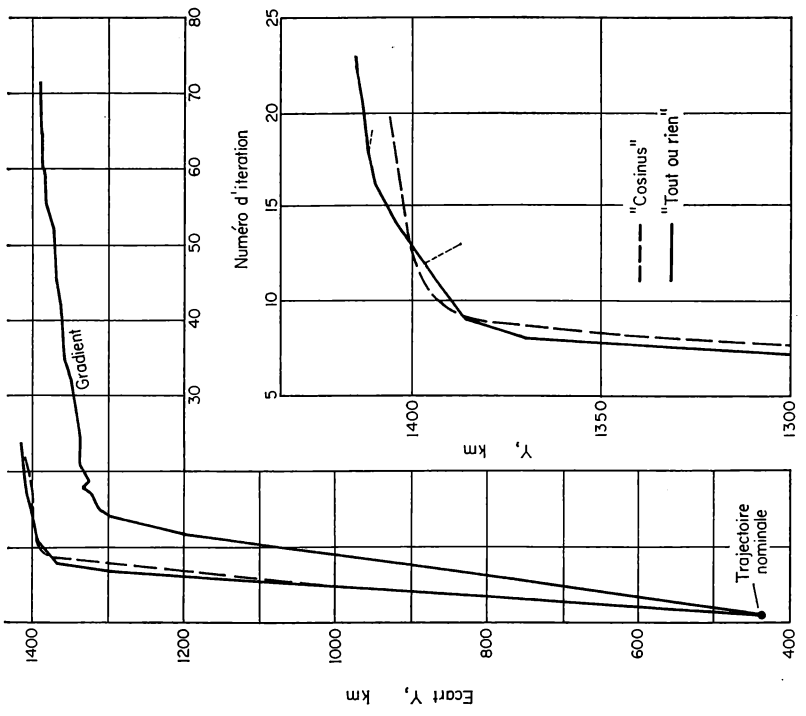
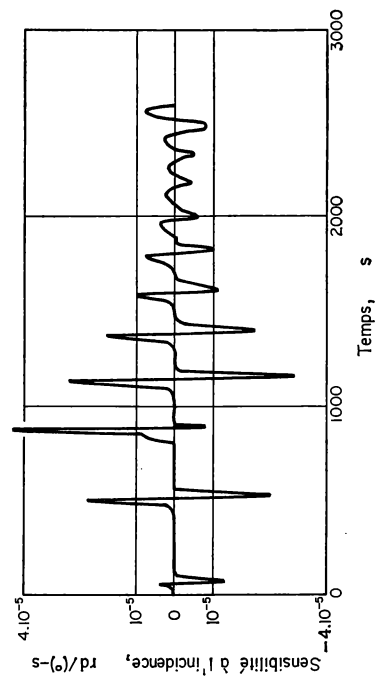
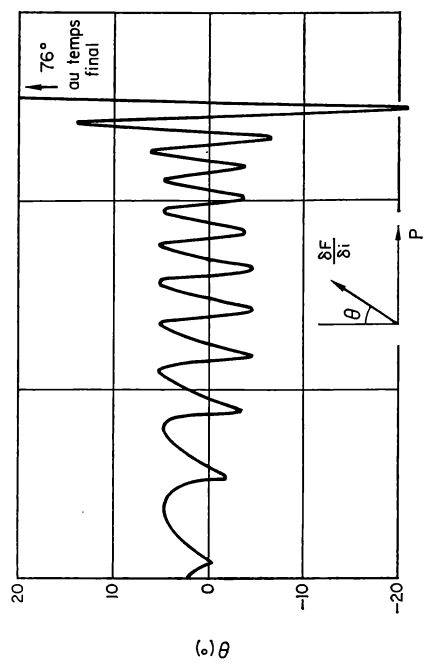
Après 20 itérations, la convergence n'est pas terminée, mais cette méthode a permis une progression notable de l'indice de performance J (pénalisé de la violation de la contrainte) après que la contrainte de flux ait été satisfaite pour la première fois (fig. 9). Cette progression, en dents de scie, est rendue possible en acceptant des diminutions intermédiaires de J . De plus, la loi d'incidence (fig. 10) est largement modifiée, même dans les intervalles où la sensibilité est faible, en particulier après les deux pointes de flux.

6. CONCLUSION

La simple modification de la méthode classique du premier ordre par le choix d'une nouvelle répartition $\delta u(t)$, déterminée par la loi du "cosinus" associé à la fonction de sensibilité, et par l'adaptation du coefficient δu_{ref} a permis, à la fois, une croissance plus rapide de l'indice de performance et une approximation bien meilleure des lois de commande, dans un cas sans contrainte, et dans un cas avec une contrainte sur les variables d'état.



Figs. 1 and 2



Figs. 3 and 4

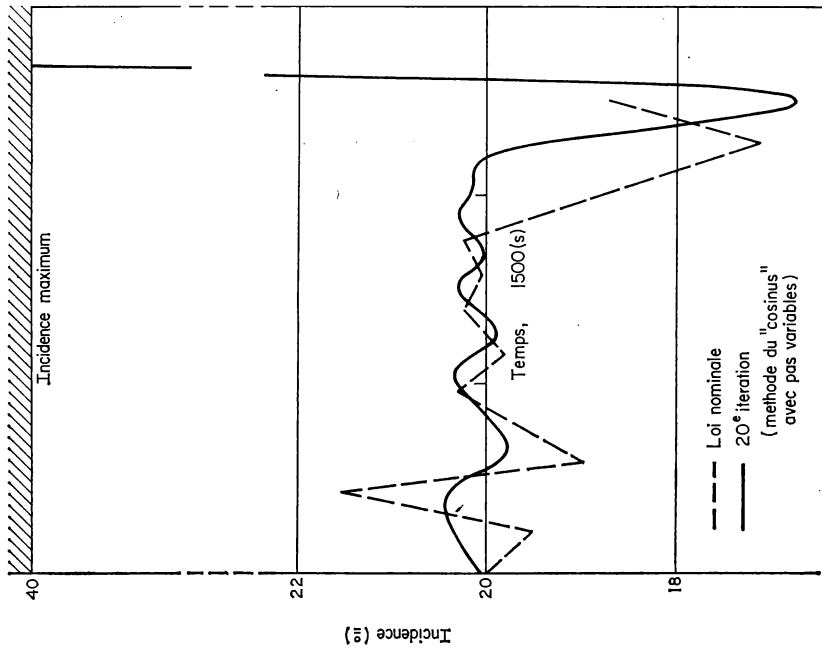


FIG. 6

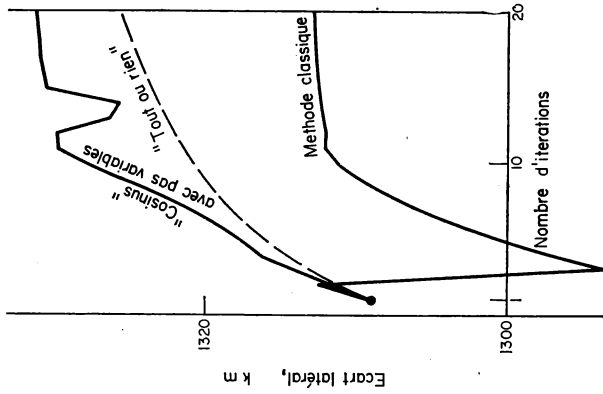
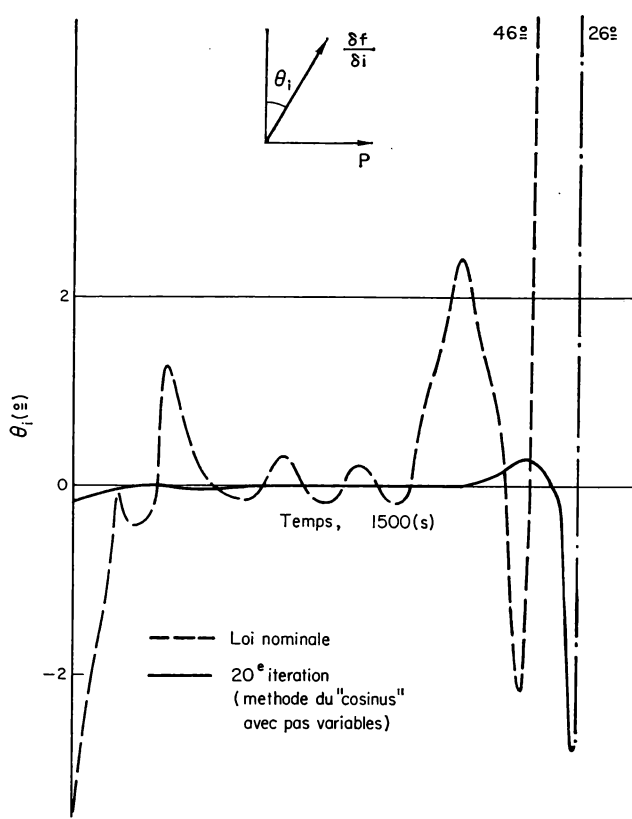
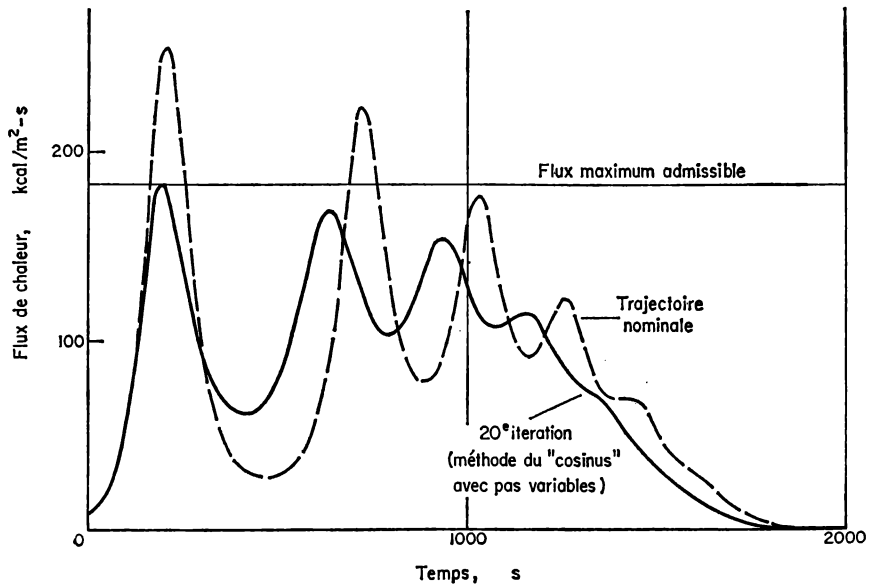


FIG. 5



FIGS. 7 and 8



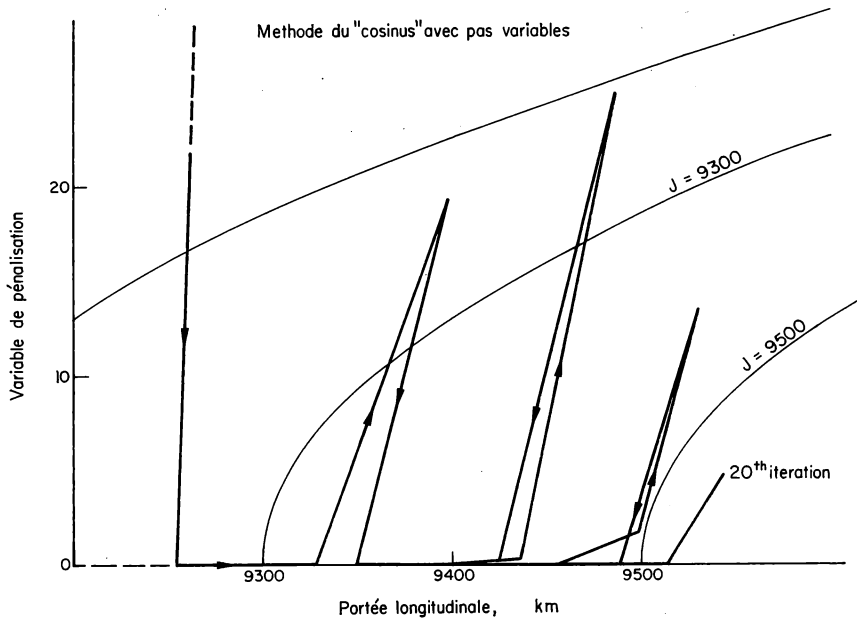


FIG. 9

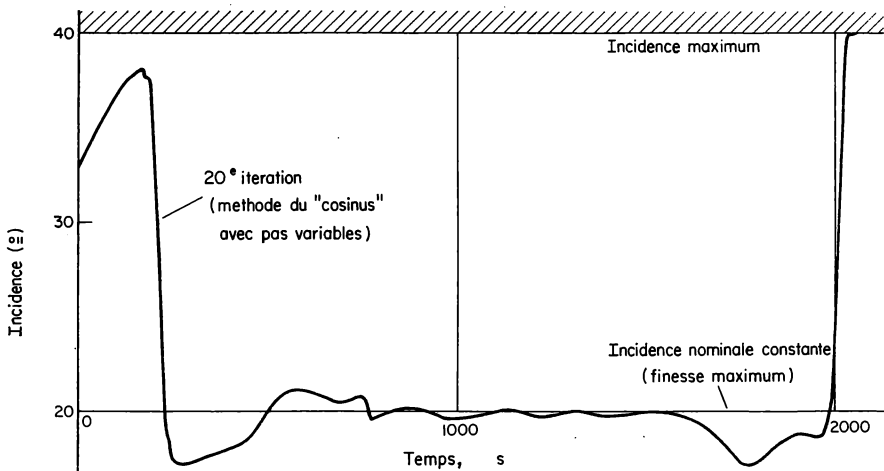


FIG. 10

THE SEPARATE COMPUTATION OF ARCS FOR OPTIMAL FLIGHT PATHS WITH STATE VARIABLE INEQUALITY CONSTRAINTS†

JASON L. SPEYER, RAMAN K. MEHRA, and ARTHUR E. BRYSON, Jr.

Division of Engineering and Applied Physics,
Harvard University, Cambridge, Massachusetts

ABSTRACT

Separate computation of arcs is possible for a large class of optimization problems with state variable inequality constraints. Surprisingly, this class (to the best of the authors' knowledge) includes all physical problems which have been solved analytically or numerically to date. Typically these problems have only one constrained arc. Even in more complex problems, separation of arcs can be used to search for additional constrained arcs.

As an important example, a maximum range trajectory for a glider entering the Earth's atmosphere at a supercircular velocity is determined, subject to a maximum altitude constraint after initial pull-up. It is shown that the optimal path can be divided into three arcs, which may be determined separately with no approximations. The three arcs are (1) the initial arc, beginning at specified initial condition and ending at the entry point onto the altitude constraint; (2) the arc lying on the altitude constraint; and (3) the terminal arc, beginning at the exit point of the altitude constraint and ending at some specified terminal altitude.

The conjugate gradient method,⁽⁴⁾ a first order optimization scheme, is shown to converge very rapidly to the individual unconstrained optimal arcs. Using this optimization scheme and taking advantage of the separation of arcs an investigation revealed that *two locally optimum* paths exist. The range of one exceeds the range of the other by about 250 nautical miles (about 6 per cent) for the re-entry vehicle used here (maximum lift-to-drag ratio is 0.9).

1. INTRODUCTION

In the past few years techniques for solving optimal programming problems with a state variable inequality constraint (SVIC) have been developed. Necessary conditions for a stationary solution were given by Gamkrelidze,⁽¹⁾ and Bryson, Denham, and Dreyfus.⁽²⁾ One numerical technique

† This work was supported by Nonr 1866 (16) and NASA Grant NGR 22-007-068 extended to Harvard University and by the Raytheon Company.

for solving such problems uses a "penalty function" which requires the introduction of an auxiliary state variable.^(3, 4) An improvement over the "penalty function" method, in both speed and accuracy, is the direct approach,⁽⁵⁾ where the SVIC is satisfied without using an extra state variable. In both techniques, the equations of motion and the Euler-Lagrange equations must be integrated over the entire path for each iteration.

The present paper shows that for certain problems with a SVIC, the computation of the state and Euler-Lagrange variables need only be done on the unconstrained arcs. Numerical computation of shorter unconstrained paths allows more rapid convergence and increased numerical accuracy. Also, if the constrained arc forms a large part of the entire path, this greatly reduces the amount of computation required. This separation of arcs occurs, for example, in the problem of finding the maximum range of a glider entering the Earth's atmosphere at parabolic velocities subject to a maximum altitude constraint after initial pull-up (sketch of possible trajectory in altitude-range space is shown in Fig. 1). This problem was solved

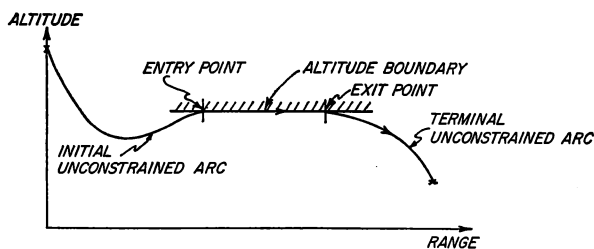


FIG. 1. Sketch of the glider's trajectory in altitude-range space.

by the direct method of ref. 5 and by the penalty function method in ref. 11. The independence of the unconstrained arcs can be seen by observing that on the constant altitude constraint two of the three state variables are fixed (altitude and flight path angle); the velocity decreases due to the drag force. Velocity vs. range is a universal curve on this arc; only the velocity at the beginning and the end of this arc need be determined. A maximum range path, starting at any velocity on the constraint boundary that is higher than the velocity at the end of the constrained arc, has the *same* unconstrained path from the exit point of the altitude constraint to the terminal altitude. Similarly, a maximum range path, ending at *any* velocity on the constraint boundary that is lower than the velocity at the beginning of the constrained arc, has the *same* unconstrained path from the initial point to the entry point onto the constraint boundary. The unconstrained arcs can be found separately, determining the velocities at the beginning and the end of the constrained arc in the process. Having these velocities, the

range on the altitude constraint can be easily evaluated. The three arcs put together form the maximizing path, without any approximations.

Such separation of arcs is possible if the number of variables on which the motion and constraints depend *explicitly* is larger by one than the order of the SVIC. The order of a SVIC is defined as the number of differentiations of the SVIC function needed for the control variable to appear explicitly (cf. ref. 2).

2. PROBLEM FORMULATION

The general problem considered here is to determine a control program $u(t)$ in the interval $t_0 \leq t \leq t_f$ so as to maximize

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt \quad (1)$$

subject to the constraints

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2)$$

$$M = M[x(t_f), t_f] \quad (3)$$

$$S(x, t) \leq 0 \quad (4)$$

$$t_0 \text{ and } x(t_0) \text{ given} \quad (5)$$

where t (time) is the independent variable; $(\dot{})$ is $d()/dt$; $u(t)$ is a scalar control variable; $x(t)$ is an n -vector of state variables; f is an n -vector of known functions of $x(t)$, $u(t)$, and t , and is assumed everywhere differentiable with respect to x and u ; M is a q -vector of known functions of $x(t_f)$ and t_f , $q \leq n$; S is a scalar function of $x(t)$ and t .

For those intervals of time that an extremal solution lies on a p th order SVIC boundary ($S(x, t) = 0$) it is necessary that S and all its time derivatives that do not contain the control be zero:

$$[S, \dot{S}, \dots, S^{(p-1)}]^T = 0 \quad (6)$$

The control program which keeps (6) satisfied along the constrained path is obtained from the p th derivative of S :

$$S^{(p)}(x, u, t) = 0 \quad (7)$$

It is assumed that the control on the constraint boundary can be found as a function of (x, t) from the implicit equation (7) in the form

$$u = A(x, t) \quad (8)$$

3. SUFFICIENT CONDITIONS FOR SEPARATE COMPUTATION OF ARCS

Separation of arcs is possible if the contribution of the constrained arc to the performance index depends only on the entry and exit values of one variable (t or some element of x). Suppose the contribution of the constrained arc to the performance index, $J(t_1, t_2)$, is

$$J[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} g(x, u, t) dt \quad (9)$$

where t_1 is the entry point time and t_2 is the exit point time. If $p = n$ then (6) can be used to solve for all the variables in terms of one, say x_1 . Let the remaining $n-1$ state variables be denoted by the vector y . Then from (6)

$$\begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} = r(x_1) \quad (10)$$

All the variables in (9) can be eliminated except x_1 if (y, t, u) are eliminated using (10) and (8) and the variable of integration is changed from t to x_1 by the differential element of x_1 in (2) as

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, y, t, u) \quad (11)$$

Thus (9) becomes

$$\begin{aligned} J[t_1, t_2] &= \int_{x_1(t_1)}^{x_1(t_2)} \frac{g\{x_1, r[x_1], A[x_1, r(x_1)]\}}{f_1\{x_1, r(x_1), A[x_1, r(x_1)]\}} dx_1 \\ &= \int_{x_1(t_1)}^{x_1(t_2)} G(x_1) dx_1 = K[x_1(t_2)] - K[x_1(t_1)] \end{aligned} \quad (12)$$

It is tacitly assumed that starting from any value of $x_1(t_1)$ on the constrained arc, the value of $x_1(t_2)$ will eventually be reached.

If (12) is possible then the optimization problem can be separated into two smaller optimization problems. They are: find $u(t)$ to maximize

$$J_1 = J[t_0, t_1] - K[x_1(t_1)] \quad (13)$$

subject to (2), (5) and the entry point conditions of (6); and find $u(t)$ to maximize

$$J_2 = J[t_2, t_f] + K[x_1(t_2)] \quad (14)$$

subject to (2), (3) and the initial conditions of (6). The sum of (13) and (14) will give the maximum value of (1).

If the equations of motion and boundary conditions do not explicitly depend upon clock time but only on time elapsed from the initial time, then the arcs will separate for $n-1 = p$.

4. MAXIMUM RANGE OF A HYPERSONIC GLIDER WITH AN ALTITUDE CONSTRAINT

The ideas of the previous section are applied here to the problem of maximizing the range of a glider (entering the Earth's atmosphere† at parabolic speeds) with an inflight constraint on the maximum altitude after pull-up. This problem, originally thought to be a complicated problem with a SVIC,⁽⁵⁾ falls into the special class of separable problems.

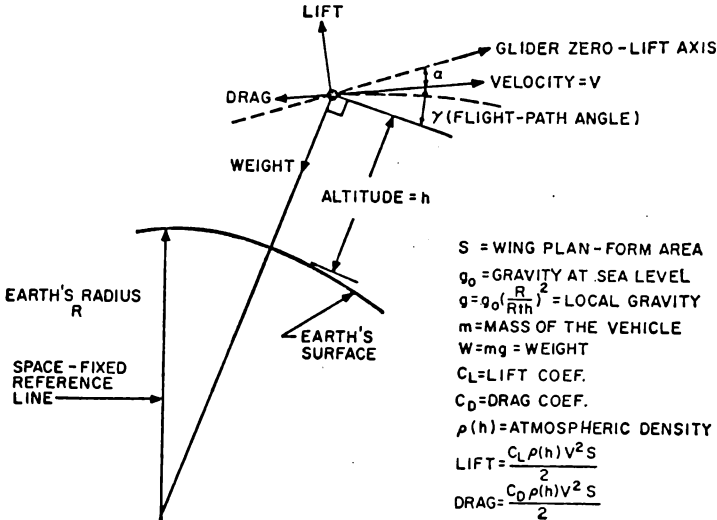


FIG. 2. Geometry and nomenclature of atmospheric re-entry example problem.

The nomenclature for this problem is given in Fig. 2. The aerodynamic forces, lift and drag, are varied through the control variable $\alpha(t)$ = angle-of-attack. The lift-drag characteristics of the glider are shown in Fig. 3. The wing loading of the glider mg/S , was taken as 61.3 lb ft^{-2} . The 1956 ARDC standard atmosphere model was used. The glider is approximated as a point mass moving about a spherical nonrotating Earth. The equations of motion are:

$$\dot{V} = \frac{-C_D \rho V^3 S}{2m} - g \sin \gamma \quad (15)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{C_L \rho V S}{2m} + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \quad (16)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (17)$$

† Actually the problem is started in the Earth's atmosphere partly to save computer time and partly because the control force is negligible compared to the centrifugal force during most of the omitted path.

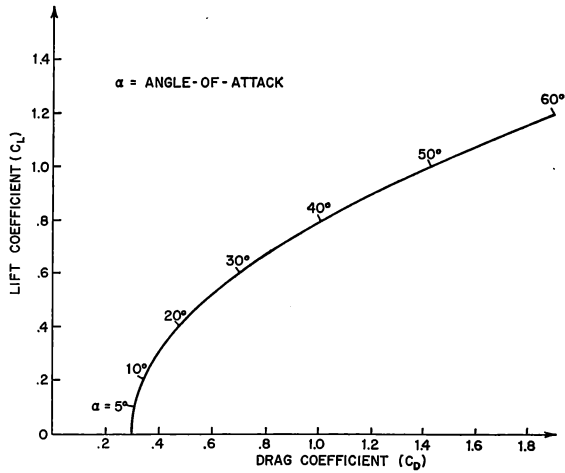


FIG. 3. Lift-drag polar for re-entry vehicle.

The problem is to find the control program, $\alpha(t)$, which maximizes the range

$$R_A = \int_{t_0}^{t_f} \frac{V}{1+h/R} \cos \gamma dt \quad (18)$$

subject to (15), (16), and (17), with initial conditions on V , γ , and h , a terminal condition on altitude and the inflight inequality constraint

$$h(t) \leq h_M \quad (19)$$

where h_M is the given value of the maximum allowable altitude.

5. SEPARATION OF ARCS FOR THE MAXIMUM RANGE PROBLEM

Starting from the initial conditions, a maximum range path eventually enters onto the constraint boundary at time t_1 . At this point

$$h - h_M = 0 \quad (20)$$

$$\dot{h} = V \sin \gamma = 0 \quad (21)$$

must be satisfied as well as all along the constraint boundary. The control used to keep (20) and (21) satisfied on the constraint boundary is found from $\dot{h} = 0$ which implies

$$C_L = \frac{2m}{\rho_M V S} \left[\frac{g_M}{V} - \frac{V}{R+h_M} \right] \quad (22)$$

where ρ_M and g_M are the values of ρ and g on the constraint boundary.

Since h and γ are fixed on the constraint boundary, only the velocity is free. The horizontal range travelled on the constraint boundary can be found as a function of the arc-entry and arc-exit velocities. The independent variable t is eliminated by (15) so that

$$R_A[t_1, t_2] = \int_{V(t_2)}^{V(t_1)} \frac{2mdV}{(1+h_M/R)C_{DQ}VS} = F[V(t_1)] - F[V(t_2)] \quad (23)$$

where C_D is a function only of velocity through (22) and Fig. 2. Conceptually $R_A(t_1, t_2)$ depends only on the values of the exit and entry velocities although in general an analytic expression cannot be found.

Thus the problem can be reduced to two smaller problems in which the unconstrained arcs are found separately. The initial unconstrained arc from the initial conditions to the entry point onto the constraint boundary is found by obtaining an $\alpha(t)$ which maximizes:

$$R_I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{V \cos \gamma}{1+h/R} dt + F[V(t_1)] \quad (24)$$

The terminal unconstrained arc from the exit point of the constrained arc to the terminal boundary is found by evaluating an $\alpha(t)$ which maximizes:

$$R_F = \int_{t_2}^{t_f} \frac{V \cos \gamma}{1+h/R} dt - F[V(t_2)] \quad (25)$$

The sum of R_I and R_F is the total range R_A . One of the results of this optimization technique is to find the velocities at the two ends of the constrained arc.

If it is found that $V(t_1) \leq V(t_2)$ then no path of finite length lies on the constraint boundary although the optimal path may coincide with the constraint boundary at a point. In this case there is no separation. However, for a given set of constraint levels an intermediate point constraint must be imposed,⁽²⁾ defined as $S(x, t_1) = 0$. The Lagrange multiplier associated with the intermediate constraint must be positive (for maximization); if it is not, an unconstrained path which lies below the constraint boundary will be better. In other words $\partial R_A / \partial h_M > 0$.

Necessary conditions for the two unconstrained arcs can be stated after first augmenting the performance indices as

$$\bar{R}_I = \Phi_I + \int_{t_0}^{t_1} [H - \lambda_v \dot{V} - \lambda_\gamma \dot{\gamma} - \lambda_h \dot{h}] dt \quad (a) \quad (26)$$

$$\bar{R}_F = \Phi_F + \int_{t_2}^{t_f} [H - \lambda_v \dot{V} - \lambda_\gamma \dot{\gamma} - \lambda_h \dot{h}] dt \quad (b)$$

where

$$\Phi_I = F[V(t_1)] + v_h[h(t_1) - h_M] + v_\gamma \gamma(t_1) \quad (a) \quad (27)$$

$$\Phi_F = -F[V(t_2)] + \bar{v}_h[h(t_f) - h_f] \quad (b)$$

and the variational Hamiltonian is

$$H = \frac{V \cos \gamma}{1+h/R} - \lambda_v \left[\frac{C_{DQ} V^2 S}{2m} + g \sin \gamma \right] + \lambda_\gamma \left[\frac{C_{LQ} V S}{2m} + \left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V} \right) \cos \gamma \right] + \lambda_h V \sin \gamma \quad (28)$$

Here λ_v , λ_γ , λ_h , \bar{v}_h , v_γ , v_h are Lagrange multipliers. The Euler-Lagrange equations are defined from (28) as

$$\dot{\lambda}_v = -H_v, \dot{\lambda}_\gamma = -H_\gamma, \dot{\lambda}_h = -H_h \quad (29)$$

The boundary conditions for the initial unconstrained problem at t_1 are

$$\lambda_v(t_1) = \Phi_{v(t_1)} = \frac{2m}{\left(1 + \frac{h_M}{R}\right) C_{DQ} V S} \Bigg|_{t=t_1}, \quad \lambda_v(t_1) = \Phi_{v(t_1)} = v_\gamma, \quad \lambda_h(t_1) = \Phi_{h(t_1)} = v_h \quad (30)$$

The boundary conditions for the terminal unconstrained problem at t_f are

$$\lambda_v(t_f) = \Phi_{v(t_f)} = 0, \quad \lambda_\gamma(t_f) = \Phi_{\gamma(t_f)} = 0, \quad \lambda_h(t_f) = \Phi_{h(t_f)} = \bar{v}_h \quad (31)$$

while at the exit corner

$$\lambda_v(t_2) = \Phi_{v(t_2)} = \frac{2m}{\left(1 + \frac{h_M}{R}\right) (C_{DQ} V S)} \Bigg|_{t=t_2} \quad (32)$$

The original problem has been reduced to two, two-point boundary-value problems. For the initial arc the form of h , γ , and λ_v are known at the entry point and the initial conditions are given. For the terminal arc h , γ , and λ_v ($V(t_2)$) are known at the exit point whereas at the terminal boundary the values of λ_v , λ_γ , and h are known. Note that the problem is time-independent. This implies that $H = 0$ all along the optimum path.

In this example there are three state variables and a second order SVIC. Since the problem is time-independent $n-1 = p = 2$ ensures separability.

6. CALCULATION OF THE PERFORMANCE INDEX ON THE CONSTRAINED ARC

An analytic expression cannot in general be found for the range when on the constraint boundary (23). However, when a successive improvement optimization scheme is used, some indication as to the improvement of the performance index is necessary. It is suggested that a table be made of range as a function of velocity starting at the largest expected value of

$V(t_1)$ and ending at the lowest expected value of $V(t_2)$. The performance indices of (24) and (25) are written as $R_I - F(V_B)$ and $R_F + F(V_L)$ where V_B and V_L are chosen values in which on every iteration $V(t_1) > V_B$ and $V_L > V(t_2)$. Evaluating $F(V(t_1)) - F(V_B)$ and $F(V_L) - F(V(t_2))$ on the computer is reduced to a table look-up.

However, one important case where an analytic expression can be found for (23) is for the lift-drag polar defined as

$$C_L = C_{L_0}\alpha \quad (33)$$

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_1}\alpha^2 \quad (34)$$

For values of the constants of $C_{L_0} = 0.020$, $C_{D_0} = 0.297$, $C_{D_1} = 0.451 \times 10^{-3}$ the lift-drag polar of Fig. 2 is obtained from (33) and (34). $\alpha(t)$ on the constraint boundary is now simply obtained from (33) and (22) as

$$\alpha = \frac{2m}{C_{L_0}\rho_M S} \left(\frac{g_M}{V^2} - \frac{1}{R+h_M} \right) \quad (35)$$

The drag coefficient of (34) is a function of velocity on the constraint

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_1} \left[\frac{2m}{C_{L_0}\rho_M S} \right]^2 \left[\frac{g_M^2}{V^4} - \frac{2g_M}{(R+h_M)V^2} + \frac{1}{(R+h)^2} \right] \quad (36)$$

The analytic expression for the range on the constraint boundary solved by integrating (23) analytically is

$$\begin{aligned} R_A[t_1, t_2] &= F[V(t_1)] - F[V(t_2)] \\ &= \frac{RQ_1}{2} \left[\frac{1}{2Q_2} \log(Q_2V^4 + Q_4V^2 + Q_5) - \frac{Q_4}{Q_3Q_6} \tan^{-1} \frac{2Q_2V^2 + Q_4}{Q_6} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{2m}{(R+h_M)\rho_M S}, \quad Q_2 = C_{D_0} + \frac{C_{D_1}}{C_{L_0}^2} Q_1^2, \quad Q_3 = \frac{C_D g_M (R+h_M)}{C_{L_0}} \\ Q_4 &= -\frac{2Q_3 Q_1^2}{C_{L_0}}, \quad Q_5 = \frac{[Q_3 Q_1]^2}{C_{D_1}}, \quad Q_6 = \left(\frac{4C_{D_0}}{C_{D_1}} \right)^{1/2} Q_3 Q_1 \end{aligned}$$

7. RE-ENTRY WITH G-LIMITING AND TOTAL HEATING CONSTRAINT

For practical reasons, the re-entry problem may be complicated further by additional constraints. One such constraint is a limit on the resultant aerodynamic force. The ratio of the resulting aerodynamic force to the sea level weight is defined here as the number of g 's,

$$N_g \equiv \frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{mg_0} \quad (38)$$

If N_g is required to be less than some given number, this imposes a control variable inequality constraint on the trajectory. This constraint can be handled by the techniques of ref. 2. It presents no obstacle to the separation of arcs as long as g -limit is always satisfied along the constraint boundary.

Another practical constraint is a limit on the total heat absorbed by the heat shield. If the total heating is constrained the arcs cannot be separated in the maximum range problem with an altitude constraint. The amount of heat absorbed on one arc determines the amount of heat that can be absorbed on the other arc. The arcs are now dependent upon each other and the more complicated technique of ref. 5 can be used. However, an alternative approach is to perform a parameter search on an equivalent problem that does separate. The heating rate may be approximated by

$$\dot{q} = C_q q^{1/2} V^3 \quad (39)$$

where q is the heat and C_q is a known constant. A composite performance index can be formed using (39) and (18) as

$$R_q = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{V \cos \gamma}{1 + h/R} - K C_q q^{1/2} V^3 \right] dt \quad (40)$$

The procedure for finding optimal paths with a heating constraint is as follows: Choose a value for K . Since the problem is separable, the optimal arcs can easily be found and the total heat evaluated. If the value of total heating is greater than the desired value, K is increased; if less than the desired value, K is decreased. For a new value of K the optimal arcs and the total heating are again evaluated. This search for the proper value of K is continued until the desired value of total heating is attained.

In general, *integral constraints* (the heating constraint above is an example) may be handled by this procedure.

8. NUMERICAL DETERMINATION OF MAXIMUM RANGE TRAJECTORIES

Numerical methods. The "Conjugate Gradient Method" of ref. 4 was used to determine the two unconstrained arcs of the re-entry problem.

To check the results of the Conjugate Gradient Method a second order optimization program, the "successive sweep method" of ref. 6 and 8 was used. This latter algorithm generates a sequence of improving paths by maximizing a quadratic approximation to the performance index.

Initial arc. The initial conditions for this arc were taken as: $V = 33,961$ ft/sec, $\gamma = -1.57$ deg, and $h = 189,890$ ft. The terminal conditions at the entry point ($t = t_1$) onto the constraint boundary are $h = 220,000$ ft and $\gamma = 0$ (V and t_1 are unspecified). The equations of motion were integrated forward from the given initial conditions until γ becomes zero for the

second time. In the conjugate gradient method the altitude constraint at the end of the arc was met using a quadratic penalty function. At that point λ_p was determined by setting the Hamiltonian equal to zero. Convergence was achieved in seven iterations using less than 15 sec per iteration on the IBM 7094 computer. Figure 4 shows, in altitude-range space, the starting nominal and some of the following iterations.

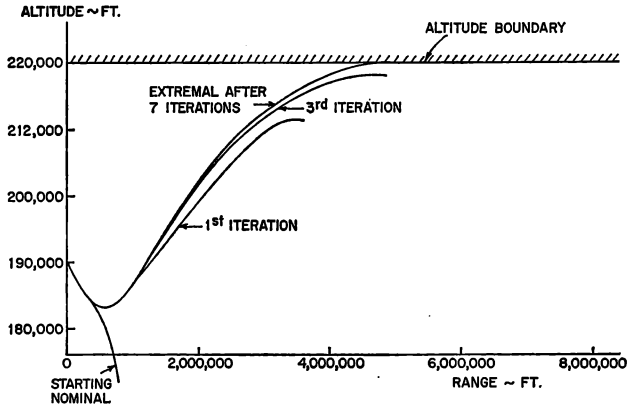


FIG. 4. Locally optimum maximum range trajectory for initial phase of re-entry. Seven iterations of conjugate gradient method used to converge to the extremal path.

However, the trajectory of Fig. 4 is *not* the optimum path; it is only a local optimum. Figure 5 shows this path with another locally optimum path that gives 30 per cent more range for the initial arc down to a velocity of 26,494 ft/sec (from this velocity on, the maximum range paths are the

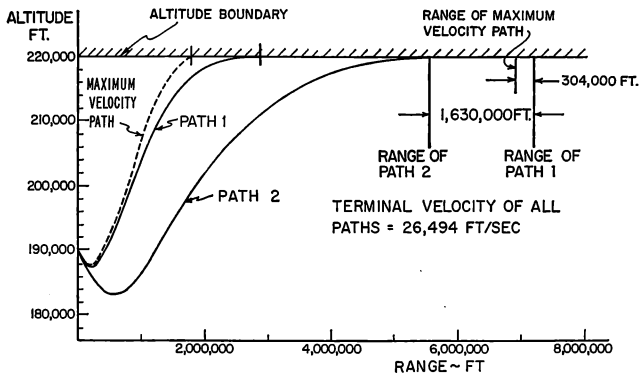


FIG. 5. Two locally maximum range trajectories for the initial phase of re-entry in altitude-range space.

same). The increase in range over the entire flight is 6 per cent. The existence of two locally optimal paths was not detected in either ref. 11 or 5.

These two paths arise from widely different control strategies (see Fig. 7). Path 2 in Figs. 5, 6, and 7 uses low angles-of-attack to keep the drag small and consequently penetrates deeply into the atmosphere where air density is high. Path 1 uses larger values of angle-of-attack to keep the vehicle at higher altitudes where air density and drag are lower. Path 1 seems to concentrate on maximizing $F[V(t_1)]$ in eq. (24) whereas path 2 seems to concentrate on maximizing the integral (the range) in eq. (24). Paths 1 and 2 are shown in Fig. 6 in altitude-velocity space.

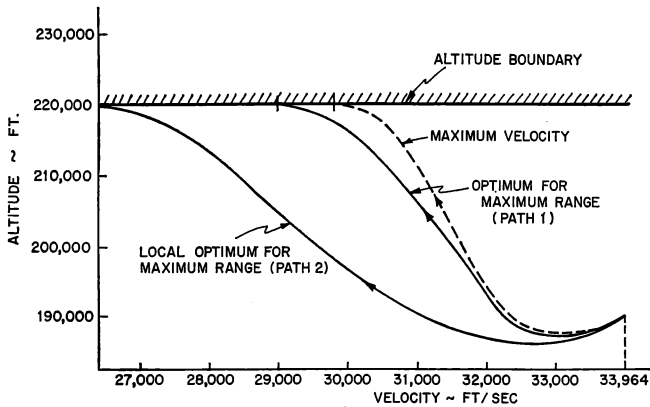


FIG. 6. Two locally maximum range trajectories for the initial phase of re-entry in altitude-velocity space.

Continuity of the α -program. Results obtained in ref. 5 show a discontinuity in the α -program at the entry point onto the constrained arc. The control should be continuous since the variational Hamiltonian is regular.⁽¹⁰⁾ The performance index is not very sensitive to this discontinuity so first order methods have great difficulty in obtaining continuous α -programs. The second order scheme demonstrates clearly that α is continuous across the entry point for path 1.

Maximum velocity path. The trade off between entry point velocity and range in the performance index suggests that the maximum velocity path may be a good approximation to the maximum range path. The maximum velocity path is shown by a dashed path in Figs. 5, 6, and 7. The maximum velocity path (Fig. 5) plus the constrained path down to 26,494 ft/sec gives only 5.5 per cent less range than path 1 and 24.5 per cent more range than path 2. Initially, the angle-of-attack program for maximum velocity resembles that of path 1 (Fig. 7), however, as the paths near the entry point α for path 1 bends over. The difference in velocity at the entry point between the maximum velocity path and path 1 is 520 ft/sec as seen in Fig. 6.

Conjugate point. First-order computing methods try to improve performance index on each iteration, without concern for the change in the size of the gradient. They will *not* converge to an extremal path that contains a conjugate point, since such a path is not an optimal path.

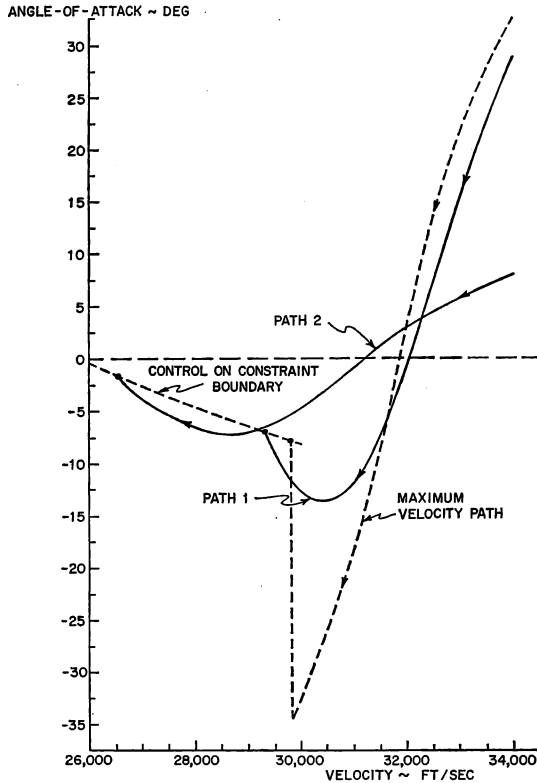


FIG. 7. Angle-of-attack vs. velocity for two locally maximum range paths.

An attempt was made, using the second-order sweep method, to check the results obtained for path 2 of Fig. 5 by the first-order conjugate gradient method. However, all attempts at solution of the matrix Riccati equation (which governs the second partial derivatives of the optimal return function with respect to the state variables) resulted in overflow of the computer (10^{38}). This led us to suspect the presence of conjugate points in the vicinity of the extremal field for the following reasons:

(a) Using the conjugate gradient method to solve the maximum range problem, both the performance index and the norm of the gradient increased for some iterations. This behavior indicates that a conjugate point might exist.

(b) The sweep method tries to decrease the magnitude of the gradient on each iteration, without concern for the change in the performance index. Hence, the method may very well move toward an extremal path containing a conjugate point; however, convergence to such a path will *not* be obtained, because solutions to the Riccati equation, as mentioned above, will overflow the computer first.

(c) A necessary (but *not* sufficient) condition for the existence of a conjugate point on an extremal path in a maximization problem is for the matrix

$$B \triangleq H_{xx} - H_{x\alpha} H_{\alpha\alpha}^{-1} H_{\alpha x} \quad (41)$$

to have some positive eigenvalues over all or part of the path (cf. refs. 7 and 9). If B is negative-definite over the whole path there can be no conjugate points. For both paths 1 and 2 in Fig. 5 we found that B did indeed have some positive eigenvalues.

Terminal arc. At neither end of the terminal arc are all the state variables specified. In the conjugate gradient method the missing initial conditions are treated as control parameters chosen to maximize the objective function. At the initial point of the terminal arc h and γ are known but V is to be determined. From (25) and (32)

$$\left. \frac{\partial R_F}{\partial V} \right|_{t=t_2} = \lambda_v(t_2) - \frac{1}{\left(1 + \frac{h_M}{R}\right) \left(\frac{C_{DQM} V S}{2m}\right)} \quad (42)$$

The optimization process drives $\frac{\partial R_F}{\partial V}$ to zero making $\lambda_v(t_2)$ equal to the required value.

The optimal path obtained is shown in Fig. 8 in the altitude-range space. The α -program corresponds very closely to the α for maximum L/D (lift over-drag ratio) except near the terminal point where high values of angle-of-attack are used in the flare-out maneuver. Figure 9 shows the α history as a function of range. The exit velocity determined by a parameter search is 19,010 ft/sec.

9. CONCLUSIONS

A sufficient condition for separate computation of arcs for certain optimization problems with state variable inequality constraints was formally presented. This concept was applied to the problem of maximizing the range of a glider entering the Earth's atmosphere at parabolic speeds subject to a maximum altitude constraint after the initial pull up. In numerically determining the unconstrained arcs, the conjugate gradient method converged extremely rapidly. This allowed a detailed investigation of maximum range trajectories.

For the initial phase of re-entry *two* locally maximum range arcs were found. This appears to be a consequence of the lift-drag characteristics of the vehicle and the decrease in air density with altitude. Both first and second order methods indicate a conjugate point behavior in the initial phase of the extremal field.

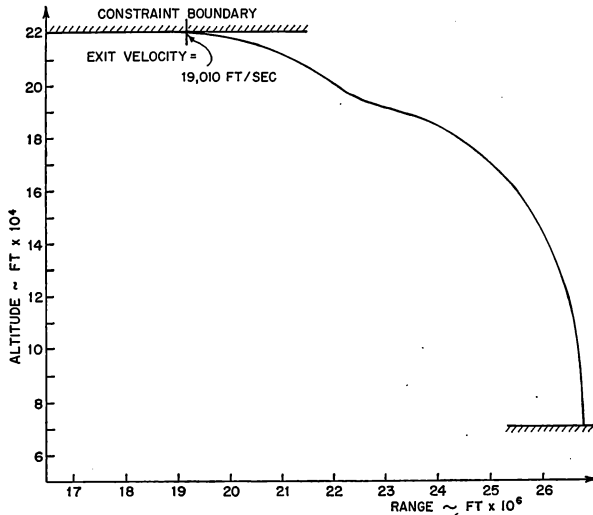


FIG. 8. Altitude vs. range for the terminal phase of re-entry problem.

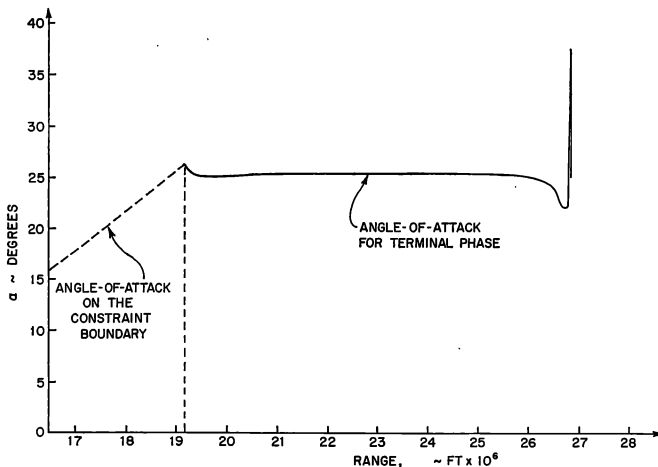


FIG. 9. Angle-of-attack program for the terminal phase of the re-entry problem.

REFERENCES

1. R. V. GAMKRELIDZE, Optimal Processes with Bounded Phase Coordinates. *Izv. Akad. Nauk. USSR, Sec. Mat.*, **24**, 315-356, 1960.
2. A. E. BRYSON Jr., W. F. DENHAM and S. E. DREYFUS, Optimal Programming Problems with Inequality Constraints. I: Necessary Conditions for Extremal Solutions. *AIAA Journal*, **1**, No. 11, Nov. 1963.
3. H. J. KELLEY, Method of Gradients. Ch. 6 of *Optimization Techniques*, ed. by G. Leitmann. Academic Press, New York, N.Y., 1962.
4. L. S. LASDON, S. K. MITTER and A.D. WARREN, The Method of Conjugate Gradient for Optimal Control Problems, *Proc. IEEE*, p. 904, June 1966.
5. W. F. DENHAM and A. E. BRYSON Jr., Optimal Programming Problems with Inequality Constraints. II: Solution by Steepest-Ascent. *AIAA Journal*, **2**, No. 1, Jan. 1964.
6. S. McREYNOLDS and A. E. BRYSON Jr., A Successive Sweep Method for Solving Optimal Programming Problems. Sixth Joint Automatic Control Conference. Troy, New York, June 1965.
7. J. V. BREAKWELL and Y. C. Ho, On the Conjugate Point Condition for the Control Problem. *Int. Journal of Engineering*, **2**, 565-579, 1965.
8. S. K. MITTER, Successive Approximation Methods for the Solution of Optimal Control Problems. *Automatica*, **3**, 135-149, 1966.
9. A. E. BRYSON Jr. and Y. C. Ho, Optimization, Estimation, and Control. Lecture Notes, Harvard University, 1966-1967.
10. B. PAIEWONSKY, On Optimal Control with Bounded State Variables. Aeronautical Research Associates of Princeton, Inc. Report No. 60, July 1964.
11. LASDON, WARREN and RICE, An Interior Penalty Function Method for Inequality Constrained Optimal Control Problem. Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, Nov. 1966.

QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DOMAINES DE MANŒUVRABILITÉ À FRONTIÈRE SEMI-LINÉAIRE. APPLICATION AUX TRANSFERTS D'ORBITE

P. CONTENSOU

ONERA, Châtillon-sous-Bagneux (Hauts de Seine), France

RÉSUMÉ

Le domaine de manœuvrabilité qui définit un problème d'optimisation doit être enveloppé d'un habillage assurant sa convexité.

Cette convexité peut être stricte (si en tout point l'hyperplan tangent au domaine n'a qu'un point commun avec lui). On peut alors montrer que la condition du maximum de Pontryagin, condition nécessaire de l'optimalité, est aussi une condition suffisante pour des transferts d'amplitude suffisamment réduite.

Le domaine de manœuvrabilité peut également présenter des régions (et c'est un cas pratiquement très fréquent) où il a en commun avec son plan tangent une variété linéaire à un certain nombre de dimensions. (Dans l'espace à trois dimensions il est alors limité par une facette plane ou une surface réglée.)

Dans l'étude présente on s'efforce de rechercher une formulation générale du problème de l'optimisation dans ce cas. On recherche en particulier si des conditions complémentaires à celles de Pontryagin peuvent être définies pour aboutir à un ensemble de relations suffisantes pour assurer l'optimalité.

Une application au cas des transferts d'orbite est esquissée.

1. INTRODUCTION

Le présent travail a particulièrement en vue le traitement des problèmes d'optimisation dans lequel les équations du système sont linéaires par rapport à une ou plusieurs commandes. Nous dirons dans le langage géométrique que nous avons utilisé dans nos publications antérieures⁽¹⁻³⁾ qu'une certaine portion de la frontière du domaine de manœuvrabilité est *semilinéaire*. Nous reprendrons à cette occasion quelques points de la théorie générale de l'optimisation du même point de vue géométrique.

Les résultats présentés dans cette étude n'auront pas toujours un caractère d'absolue rigueur. Souvent évidents dans l'espace géométrique ordinaire, ils demanderaient parfois pour leur extension à l'espace à n dimensions

des raisonnements plus stricts que ceux qui seront exposés. L'auteur s'excuse de cette lacune due au manque de temps et aussi à une insuffisante familiarité avec la géométrie affine à n dimensions. Il s'efforcera de la combler par la suite et souhaite qu'elle le soit aussi par des travaux d'autres chercheurs que pourraient inspirer le présent aperçu.

2. RAPPEL DE NOTIONS FONDAMENTALES

2.1. Le domaine de manœuvrabilité

Un système est supposé défini par un vecteur d'état \vec{x} à n dimensions, de composantes x_i . Ce système est doué de *manœuvrabilité* si un pilote peut exercer une influence quelconque sur son évolution. La manœuvrabilité est dite *canonique* si cette influence consiste dans le libre choix à tout instant du vecteur vitesse

$$\vec{V} = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

dans un domaine de l'espace hodographe (ou espace vitesse), domaine défini a priori en fonction de l'état et du temps. En pratique, nous associerons toujours, comme espaces représentatifs de l'état du système ou de ses vitesses, les espaces géométriques affines obtenus en portant les vecteurs des espaces précédents à partir d'une origine arbitraire.

L'existence d'un domaine de manœuvrabilité résulte en pratique du fait que le forces agissant sur un système dépendent de certains paramètres ou *commandes* (tels que: débits d'injection de combustible, braquages de gouverne) dont on admet qu'ils peuvent être des fonctions arbitraires du temps entre certaines limites. On écrira alors:

$$\dot{x}_i = f(x_1 x_2 \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2; \lambda_p, t) \quad (1)$$

les λ_i étant des paramètres arbitraires, peut-être soumis cependant à des restrictions telles que

$$F_i(\lambda_1 \dots \lambda_p) \geq 0 \quad (2)$$

qui définissent un domaine permis au vecteur $\vec{\lambda}$.

La théorie de l'optimisation par Pontryagin et ses continuateurs⁽⁴⁾ part d'une telle conception. Le domaine de manœuvrabilité résulte de l'application dans l'espace hodographe, par les formules (1) du domaine permis au vecteur $\vec{\lambda}$. Insistons sur l'intérêt, dès cette étape du problème, de rechercher la définition du domaine de manœuvrabilité lui-même: il suffit à définir toutes les possibilités du système. Les formules (1) et (2) n'en constituent qu'une représentation parmi d'autres, et certaines autres pourraient se révéler plus avantageuses. Tout en conservant pour la description du do-

maine de manœuvrabilité des formules telles que (1) et (2), et en gardant aux paramètres λ_i le nom de commandes, nous ne nous astreindrons aucunement, à ce que les λ_i coïncident avec les paramètres libres du système, telle que son étude mécanique les introduit.

Si \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont deux vecteurs du domaine de manœuvrabilité, l'utilisation du vecteur \vec{V}_1 pendant le temps $k dt$ et du vecteur \vec{V}_2 pendant le temps $(1-k) dt$ donne exactement la même trajectoire pour dt tendant vers zéro, que l'utilisation pendant le temps dt du vecteur $k\vec{V}_1 + (1-k)\vec{V}_2$ (avec $0 \leq k \leq 1$). Ceci entraîne comme conséquence qu'un domaine de manœuvrabilité doit être complété de l'ensemble des segments joignant ses points deux à deux. En langage géométrique, nous devons dire que le domaine de manœuvrabilité doit être remplacé par son "enveloppe convexe".

2.2. Le domaine accessible

Donnons-nous un état initial x_0 au temps t_0 , et un temps ultérieur t_1 dit échéance. Nous appelons *domaine accessible* au temps t_1 l'ensemble des états qui peuvent être obtenus à cet instant par une trajectoire permise (c'est-à-dire une trajectoire utilisant des vecteurs vitesses appartenant à tout instant au domaine de manœuvrabilité).

La connaissance du domaine accessible en fonction de x_0 , t_0 , t_1 étant supposée acquise répond à toutes les questions qu'on peut se poser à propos de l'optimisation du système, en les ramenant à des problèmes de résolution d'équations ordinaires ou à des recherches de maxima de fonctions. Elle ramène le problème de l'optimisation fonctionnelle à celui de l'optimisation paramétrique.

La recherche du domaine accessible nous paraît constituer la meilleure définition du but à atteindre par la théorie de l'optimisation. On énonce en général ce but dans des termes différents, non strictement équivalents. La recherche au temps t_1 de la valeur maxima d'une forme linéaire du vecteur \vec{x} (maximisation de $c_i x_i$) que nous appellerons pour la distinguer "problème de Pontryagin" laisse échapper, s'il s'agit de maximum absolu les parties concaves du domaine accessible dont l'intérêt pratique est pourtant certain. La recherche du maximum d'une fonction arbitraire de x_i n'encourt pas le même reproche, mais complique inutilement les choses.

La partie la plus intéressante du domaine accessible est sa *frontière*, c'est-à-dire l'ensemble de ses points infiniment voisins de points inaccessibles. À côté de cette frontière au sens strict nous introduisons une *frontière au sens large*: un point P appartient à la frontière au sens large s'il est infiniment voisin de points inaccessibles par des trajectoires infiniment voisines de la trajectoire (ou de l'une au moins des trajectoires) conduisant à P . La frontière au sens large inclut évidemment la frontière au sens strict.

2.3. La détermination du domaine accessible

Cherchons la condition pour qu'une trajectoire conduise en un point de la frontière au sens large. Soient :

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, \vec{\lambda}, t) \quad (3)$$

les équations de la frontière du domaine de manœuvrabilité. Le vecteur $\vec{\lambda}$ est à p composantes avec $p \leq n - 1$. On peut toujours choisir une représentation telle que les composantes de $\vec{\lambda}$ ne soient soumises à aucune limitation, au voisinage de la trajectoire étudiée.

Introduisons un vecteur $\vec{\xi}$ de l'espace dual de x satisfaisant aux équations :

$$\dot{\xi}_i = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \xi_j \quad (4)$$

Soit $\delta\vec{x}$ la variation de \vec{x} résultant d'une variation $\delta\vec{\lambda}(t)$ appliquée depuis $t = t_0$.

On montre facilement que

$$(\xi_i \delta x_i)_{t=t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_k} \delta \lambda_k dt \quad (5)$$

(avec sommation par rapport à i et k)
et les p conditions

$$\xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (5)$$

apparaissent comme nécessaires et suffisantes pour que le point d'aboutissement de la trajectoire appartienne à la frontière au sens large. Le vecteur $\vec{\xi}$ représente la normale commune au domaine accessible à tout instant et au domaine de manœuvrabilité au point utilisé à ce même instant.

Introduisons avec Pontryagin la notion d'*Hamiltonien* définie par

$$H(\vec{x}, \vec{\xi}, \vec{\lambda}) \equiv f_i \xi_i$$

L'ensemble des équations (3), (4) et (5) peut se mettre sous la forme simple :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \\ \dot{\xi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} &= 0 \quad \forall K \end{aligned} \quad (6)$$

La dernière équation (6) exprime le *principe du maximum de Pontryagin*.⁽⁶⁾
La nullité de $\frac{\partial H}{\partial \lambda_k}$ entraîne bien que pour le vecteur choisi H présente un

maximum, si on a pris soin, ce qui est toujours possible, de choisir le sens du vecteur $\vec{\xi}$ de manière qu'il soit orienté vers l'extérieur du domaine de manœuvrabilité. Ce domaine étant convexe, l'Hamiltonien ne peut avoir qu'un seul maximum qui est donc un maximum absolu, conformément à l'énoncé habituel du principe.

Les $2n+p$ équations (6) conviennent donc à la détermination des $2n+p$ grandeurs scalaires inconnues, composantes de $\vec{\alpha}$, $\vec{\xi}$, et $\vec{\lambda}$.

Les deux premières équations (6) se présentent sous la même forme que les équations de la Mécanique Analytique. Cette identité n'est cependant qu'apparante, car H contient non seulement les variables x_i et ξ_i , mais aussi d'autres variables λ_i .

Le passage de la frontière au sens large à la frontière au sens strict peut nécessiter l'élimination d'une partie de la première. Sans donner à ce sujet, pour le moment, de règle générale, nous pouvons noter la propriété suivante :

La frontière au sens large étant orientée par le vecteur $\vec{\xi}$ de la façon définie plus haut (ξ dirigé vers l'extérieur du domaine de manœuvrabilité), les points de l'espace infiniment voisins de la frontière du côté intérieur sont toujours accessibles.

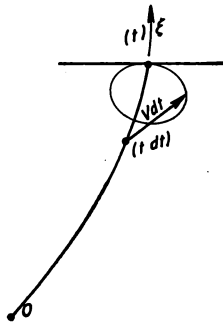


FIG. 1.

De tels points peuvent en effet être atteints en utilisant, au temps $t_1 - dt$ au lieu du vecteur \vec{V} fourni par la théorie de l'optimisation, tout autre vecteur \vec{V}' du domaine de manœuvrabilité.

2.4. Relations d'inclusion entre domaines

Nous aurons à utiliser les propositions évidentes suivantes :

Si pour toute valeur de x et de t ($t_0 < t < t_1$), le domaine de manœuvrabilité \mathcal{M}_1 d'un système S_1 inclut le domaine de manœuvrabilité \mathcal{M}_2 d'un système S_2 défini sur le même espace vectoriel, le domaine accessible $\mathcal{A}_2(t_1)$ inclut le domaine accessible $\mathcal{A}_1(t_1)$.

Une trajectoire permise et optimale pour le système S_2 et permise pour S_1 est optimale pour S_1 .

3. SYSTÈMES À DOMAINE DE MANŒUVRABILITÉ STRICTEMENT CONVEXES

3.1. Classement des domaines de manœuvrabilité

La convexisation du domaine de manœuvrabilité peut s'obtenir, à partir de la définition de la convexité, par l'adjonction au domaine naturel de tous les segments définis par ses points pris deux à deux.

Une autre méthode peut se décrire comme suit :

considérons l'hyperplan d'équation $\vec{\xi} \cdot \vec{x} = d$, $\vec{\xi}$ étant un vecteur de l'espace dual, défini à une homothétie près, et d une constante scalaire. Si, quelque grand que soit d cet hyperplan coupe le domaine de manœuvrabilité, nous dirons que ce domaine s'étend à l'infini dans la direction $\vec{\xi}$. Dans le cas contraire, il existe une valeur maxima de d , soit H , pour laquelle le domaine et l'hyperplan ont une partie commune. L'ensemble des vecteurs $\vec{\xi}$ pour lesquels le domaine s'étend à l'infini définit un cône asymptotique. Pour tout $\vec{\xi}$ extérieur à cet ensemble, il existe une fonction bien définie $H = H(\vec{\xi})$ qui peut être considérée comme l'équation tangentielle du domaine de manœuvrabilité convexisé. Elle est évidemment homogène et du premier degré. Nous laisserons de côté dans la suite de l'exposé les domaines s'étendant à l'infini.

Si pour tout vecteur $\vec{\xi}$ l'hyperplan $\vec{\xi} \cdot \vec{x} = H$ n'a en commun qu'un seul point avec le domaine de manœuvrabilité, la frontière du domaine convexisé est constituée de l'ensemble de ces points. Nous dirons que le domaine est strictement convexe. Il peut arriver au contraire que l'hyperplan et le domaine aient en commun tout une région de l'hyperplan, région qui sera elle-même convexe (ou devra être convexisée par itération, dans cet hyperplan, du processus précédent). Si ce domaine est strictement convexe, il est constitué d'une portion de variété linéaire à $n-1$ dimensions. S'il n'est pas strictement convexe, il présentera lui-même des frontières portions de variété linéaire à $n-2$ dimensions. En continuant l'opération, on trouve évidemment qu'un domaine de manœuvrabilité non strictement convexe peut comprendre dans sa frontière des facettes qui soient des portions de variétés linéaires d'un nombre quelconque de dimensions, entre 1 et $n-1$.

On se représentera plus facilement les choses dans le cas particulier d'un espace à 3 dimensions et on imaginera ce qui se passe lorsqu'on approche d'une table plane, dans une orientation définie, un solide quelconque. La convexisation se ramène à convexiser le polygone d'appui sur la table, chaque fois qu'il ne se réduit pas à un point. Un solide convexe mais non strictement convexe, peut présenter comme faces des portions de plans et des portions de surface réglées développables. Un solide, strictement convexe, s'il est limité par une surface de classe 2, se caractérise par le fait que tous ses points sont elliptiques. Mais cette circonstance n'est absolument

pas indispensable. Un solide strictement convexe peut présenter des points coniques, des arêtes et tous les accidents qui en sont le prolongement dans l'espace à n dimensions.

Remarques

(a) Un domaine convexe d'un espace à n dimensions E ne peut appartenir à une variété à p dimensions (avec $p < n$) plongée dans cet espace que si cette variété est linéaire et constitue un sous-espace de E . Il n'est jamais alors, évidemment, strictement convexe. Dans l'espace à trois dimensions, un domaine de manœuvrabilité ne peut se réduire à une surface que si cette surface est un élément de plan, à une ligne que si cette ligne est un segment de droite.

(b) *L'enveloppe convexe d'un domaine naturellement non convexe n'est jamais strictement convexe.*

Cette circonstance évidente rend particulièrement importante et nécessaire l'étude des domaines de manœuvrabilité non strictement convexes.

3.2. Propriétés des systèmes à domaine de manœuvrabilité strictement convexes

Dans un pareil système, à tout vecteur $\vec{\xi}$ définissant une direction d'hyperplan correspond un point \vec{x} bien déterminé, commun au domaine et à l'hyperplan $\vec{\xi}\vec{x} = H$.

Les composantes de ce vecteur peuvent donc tenir lieu de paramètres λ (il y a en fait n composantes mais elles n'interviennent que par leurs rapports à l'une d'elles).

Les relations exprimant le maximum de l'Hamiltonien

$$\xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j} = 0$$

seront vérifiées pour $\xi_i = \lambda_i$, soit parce que $\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j} = 0$ si pour λ_j variant seul, la courbe correspondante tracée sur l'hypersurface du domaine présente un point anguleux, soit si elle est continue parce qu'elle est normale au vecteur $\vec{\xi}$.

Les dérivées partielles de H par rapport à x_i et ξ_i étant les mêmes pour λ_i constant ou $\lambda_i = \xi_i$, les paramètres λ_i disparaissent et les équations de l'optimisation s'écrivent simplement

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \\ \dot{\xi}_i &= - \frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}$$

H étant maintenant une fonction bien définie de $\vec{\xi}$ et \vec{x} , et on est ramené à un système d'équations de Hamilton.

Choisissons un état initial \vec{x}_0 et une valeur initiale $\vec{\xi}_0$ du vecteur ξ . Moyennant des conditions de régularité classique pour les fonctions $\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$ et $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ (conditions de Lipschitz), la trajectoire optimale correspondant à ces conditions initiales sera parfaitement définie. Faisant varier $\vec{\xi}_0$ pour \vec{x}_0 donné, nous décrivons pour un instant t_1 donné le domaine accessible au temps t_1 . Pour $t_1 - t_0 = \Delta t$ petit, le domaine accessible se déduit au second ordre près du domaine de manœuvrabilité par l'homothétie Δt . La continuité de son évolution en fonction de t permet d'affirmer :

- que pour t_1 inférieur à une valeur donnée t'_1 strictement supérieure à t_0 , la frontière au sens large du domaine accessible restera convexe,
- que pour t_1 inférieur à une autre valeur t''_1 strictement supérieure à t'_1 , elle restera dépourvue de points multiples.

Il est bien évident que pour $t_1 < t''_1$, la frontière au sens large est topologiquement assimilable à une hypersphère. Elle sépare l'espace en deux régions sans partie commune, celle qui est située du côté négatif de la normale constituant, d'après le critère mentionné plus haut, le domaine accessible lui-même. La frontière au sens strict s'identifie à la frontière au sens large et les conditions d'optimalité de Pontryagin, qui sont toujours nécessaires, deviennent des conditions suffisantes. Pour $t_1 > t''_1$, la frontière présente

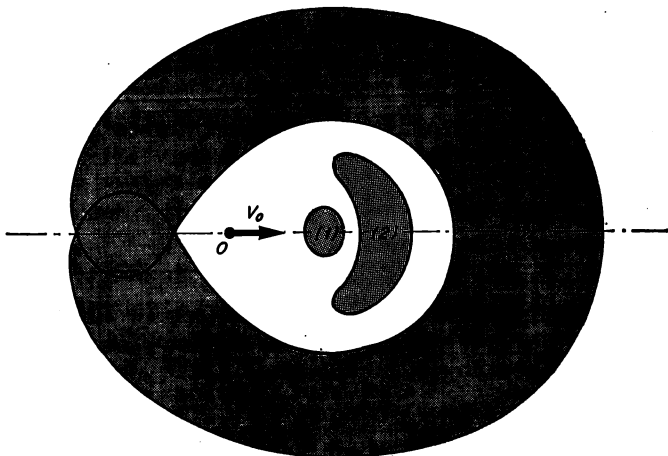


FIG. 2.

des points multiples et certaines régions sont à éliminer pour passer de la frontière au sens large à la frontière au sens strict. Les conditions de Pontryagin cessent d'être suffisantes.

Un exemple particulièrement simple de cette évolution du domaine de manœuvrabilité est fournie par un véhicule à mouvement plan (voiture, navire) qui peut à la fois freiner et accélérer, et exécuter des virages de rayon limité.

À partir d'une position initiale 0 et d'une vitesse initiale V_0 l'évolution du domaine est indiquée par la figure. L'échéance correspondant au domaine (2) est postérieure à t'_1 , celle correspondant au domaine (3) est postérieure à t''_1 . Dans ce dernier cas, les régions accessibles par un virage à droite et par un virage à gauche se recourent.

En conclusion, nous retiendrons que *dans le cas du domaine de manœuvrabilité strictement convexe les conditions d'optimalité de Pontryagin sont nécessaires et suffisantes pour une échéance suffisamment courte*, sous réserve de conditions de régularité des fonctions f_i dont la définition mathématique serait à préciser, mais qui sont sûrement peu restrictives.

4. DOMAINE DE MANŒUVRABILITÉ À FRONTIÈRES SEMI-LINÉAIRES

4.1. Représentation du domaine de manœuvrabilité

La représentation du domaine de manœuvrabilité en fonction du vecteur normal n'est plus admissible dans le cas d'une frontière non strictement convexe puisque ce vecteur ne détermine pas de façon univoque un point de la frontière. Considérons une facette qui contient une variété linéaire de dimension m . Nous la représenterons par des formules telles que :

$$\dot{x}_i = a_i^k \lambda_k + b_i \quad (7)$$

avec sommation de 1 à m sur l'indice k , a_i^k et b_i étant des fonctions du vecteur état x , d'un paramètre vectoriel μ à $(n-m-1)$ dimensions et du temps. Ces fonctions ne peuvent cependant pas être quelconques. D'après la façon même dont nous avons introduit la frontière semi-linéaire nous devons exprimer que l'hyperplan tangent est indépendant des λ_k . Or le vecteur normal est défini par le système

$$\begin{aligned} \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_k} &= \xi_i a_i^k = 0 \quad \forall k \text{ de } 1 \text{ à } m \\ \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \mu_p} &= \xi_i \lambda_k \frac{\partial a_i^k}{\partial \mu_p} + \xi_i \frac{\partial b_i}{\partial \mu_p} = 0 \quad \forall p \text{ de } 1 \text{ à } n-m-1 \end{aligned}$$

L'indépendance de la solution de ce système vis-à-vis des valeurs de λ_k s'exprime par le fait que les équations en ξ_i

$$\xi_i a_i^k = 0 \quad (8.1)$$

$$\xi_i \frac{\partial a_i^k}{\partial \mu_p} = 0 \quad (8.2)$$

$$\xi_i \frac{\partial b_i}{\partial \mu_p} = 0 \quad (8.3)$$

doivent être compatibles. Autrement dit (8.2) est une conséquence de (8.1) et (8.3) qui suffisent à définir $\vec{\xi}$.

Restreinte à l'espace à trois dimensions, la condition ci-dessus s'exprime par le fait que la frontière semi-linéaire n'est pas une surface réglée quelconque, mais une surface réglée développable.

Si la facette considérée ne s'étend pas à l'infini, la validité des formules (7) est limitée à un certain domaine de variation du vecteur $\vec{\lambda}$. La facette étant convexe, ce domaine sera lui-même convexe.

4.2. Recherche des trajectoires optimales utilisant une région semi-linéaire de la frontière

Une trajectoire optimale utilisant de façon permanente, pendant un intervalle de temps fini, un point intérieur à la frontière considérée devra satisfaire aux conditions (6) qui s'écrivent ici:

$$\dot{x}_i = a_i^k \lambda_k + b_i \quad (9.1)$$

$$\dot{\xi}_i = -[a_{i,j}^k \lambda_k + b_{j,i}] \xi_j \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_k} = \xi_i a_i^k = 0 \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_p} = \xi_i [a_i^{k,p} \lambda_k + b_i'^p] = 0 \quad (9.4)$$

Nous notons pour simplifier

$$a_{i,j}^k \text{ pour } \frac{\partial a_i^k}{\partial x_j}$$

et

$$a_i^{k,p} \text{ pour } \frac{\partial a_i^k}{\partial \mu_p}$$

Les conditions de compatibilité (8) montrent que les relations (9.4) se réduisent à la suivante:

$$\xi_i b_i'^p = 0 \quad (9.5)$$

Pour un état initial x_0 arbitraire, la condition (9.3) définit l'ensemble des valeurs du vecteur $\vec{\xi}$ qui peuvent donner naissance à une trajectoire intermédiaire.

À tout vecteur de cet ensemble, la condition (9.4) associe une valeur du vecteur $\vec{\mu}$. Mais la valeur à imposer au vecteur $\vec{\lambda}$ reste indéterminée. Pour essayer de la définir, nous devons évidemment dériver totalement par rapport au temps la relation (9.3)

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} = \xi_i [(a_{i,j}^k a_j^l - a_{i,j}^l a_j^k) \lambda_l + (a_{i,j}^k b_j - a_j^k b_{i,j})] \quad (10)$$

Ces relations ne comportent pas de termes en $\dot{\mu}_p$, ceux-ci disparaissant en vertu de (9.4). Elles constituent un système de m équations linéaires à m inconnues qui, en principe, définissent le vecteur $\vec{\lambda}$ en fonction de \vec{x} et

$\vec{\xi}$ (satisfaisant à $\xi_i a_i^k = 0$). S'il en est bien ainsi, les variables auxiliaires $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$ qui interviennent dans le système (9) sont entièrement calculables en fonction des variables principales \vec{x} et $\vec{\xi}$ et on est ramené à l'intégration d'un système d'équations différentielles en x_i et ξ_i dans les conditions de Cauchy.

Il existe cependant des cas d'exception très généraux. Le déterminant du système (10) est antisymétrique. Il est donc nul pour m impair, et en particulier dans le cas très important en pratique où $m = 1$. La détermination de $\vec{\lambda}$ devient alors impossible, sauf si certaines relations supplémentaires entre \vec{x} et ξ sont respectées. S'il en est ainsi, le vecteur $\vec{\lambda}$ reste plus ou moins largement indéterminé et de nouvelles dérivations des relations entre \vec{x} et $\vec{\xi}$ sont nécessaires pour préciser sa définition. (Dans ces dérivations interviennent des $\dot{\mu}_p$ qu'on tire de la dérivation des relations (9.5).) Suivant les cas, et après itérations éventuelles, l'aboutissement du processus peut-être l'un des suivants :

(a) On aboutit finalement à une détermination complète du vecteur $\vec{\lambda}$, les conditions d'existence de la solution ayant été restreintes par un nombre plus ou moins élevé de relations du type $\xi_i g_i(\vec{x}) = 0$. Si ces relations sont assez nombreuses par rapport à la dimension de l'espace, elles peuvent entraîner des restrictions sur le vecteur x lui-même après élimination des ξ_i . Il ne passe alors de trajectoires intermédiaires que par des points privilégiés de l'espace état.

(b) Les conditions d'existence précédentes deviennent trop nombreuses pour être compatibles : les trajectoires intermédiaires n'existent pas.

(c) Les dérivations successives, quel que soit leur ordre, laissent subsister certaines indéterminations. Il existe alors sur la frontière, à tout instant, une sous-variété linéaire sur laquelle le vecteur vitesse peut-être choisi indifféremment.

À propos des trajectoires ainsi déterminées, nous devons faire les remarques suivantes :

(a) Les trajectoires n'existent que si la valeur déterminée pour le vecteur $\vec{\lambda}$ tombe à l'intérieur du domaine permis pour le vecteur.

(b) Une trajectoire du type précédent n'est pas la seule qui corresponde à des conditions initiales $\vec{x}_0 \vec{\xi}_0^0$ donnés avec $a_i^k \xi_i^0 = 0$. À partir de telles conditions initiales, on peut amorcer une trajectoire utilisant à l'instant initial un vecteur vitesse correspondant au bord de la frontière semi-linéaire, et en sortant immédiatement. On utilise alors pour $t > t_0$ une face du domaine de manœuvrabilité pour laquelle la représentation (7) n'est pas valable.

Sans pousser plus avant l'étude du cas général où la frontière contient une variété linéaire à m dimensions, examinons le cas particulier où $m = 1$. Les coefficients a_i sont alors dépourvus d'indice supérieur. La dérivation de

$$\xi_i a_i = 0$$

donne

$$\xi_i(a_{i,j}b_j - a_j b_{i,j}) = 0 \quad (11)$$

relation indépendante de λ . En dérivant une fois de plus, on obtiendra une relation de la forme

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = \xi_i(A_i \lambda + B_i) = 0 \quad (12)$$

(où A_i et B_i sont des fonctions de l'état).

Cette relation détermine généralement λ . Mais il arrivera fréquemment qu'on trouve $\xi_i A_i$ identiquement nul, ce qui impose la nouvelle relation restrictive $\xi_i B_i = 0$. Nous appellerons donc r le rang de la première dérivée de $\xi_i a_i$ qui dépend effectivement de λ . Elle en est évidemment une fonction linéaire que nous écrirons

$$\frac{d^r}{dt^r} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = \xi_i(A_i^r \lambda + B_i^r) \quad (13)$$

C'est cette expression égalée à 0 qui définira effectivement λ .

4.3. Conditions suffisantes d'optimalité—Étude d'un exemple

Les trajectoires définies au paragraphe précédent satisfont aux conditions d'optimalité de Pontryagin. Mais ces conditions n'étant que nécessaires, rien ne permet d'affirmer que ces trajectoires sont effectivement optimales. Contrairement à ce qui se passe pour un domaine de manœuvrabilité strictement convexe, on peut montrer que les *conditions de Pontryagin ne sont pas suffisantes*, même pour une échéance infiniment courte. Étant donné son caractère négatif, cette proposition peut être établie sur un exemple.

Soit un état à deux dimensions xy dont la manœuvrabilité est définie par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\lambda y + f(y) \\ \dot{y} &= \lambda \end{aligned} \quad (14)$$

La frontière ainsi définie est une droite D . Nous supposons:

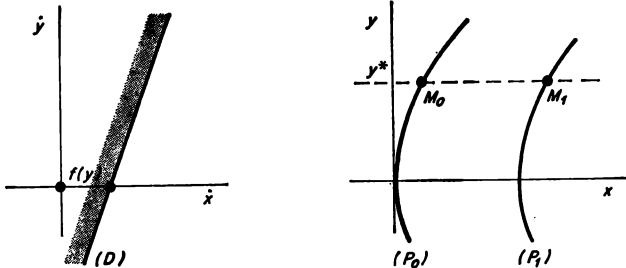


FIG. 3.

que l'intérieur du domaine est la région située du côté des \dot{x} négatifs.

Supposons d'abord λ illimitée (la frontière rectiligne s'étend à l'infini). La recherche du domaine accessible est alors évidente. Les dérivées \dot{x} et \dot{y} peuvent être prises simultanément infinies pourvu qu'elles soient liées par

$$\frac{dx}{dy} = ay$$

Ceci signifie que tous les points d'une parabole (P) de la famille

$$x - \frac{ay^2}{2} = C^{te} \quad (15)$$

sont instantanément accessibles à partir de l'un quelconque d'entre eux. Partons de $x = 0$ $y = 0$ pour $t = 0$.

Soit y^* la valeur de y correspondant au maximum absolu de $f(y)$, qui est supposé exister. La manœuvre qui permet d'obtenir le domaine accessible au temps t consiste à gagner instantanément le point de la parabole (P_0) passant par l'origine qui a pour ordonnée y^* , à parcourir de 0 à t le segment M_0M_1 de la droite $y = y^*$ (avec $\lambda = 0$). Le domaine accessible est la parabole (P_1) passant par M_1 . La seule trajectoire intermédiaire possible est $y = y^*$.

Particularisons le système en posant $f(y) = by^2 + c$, de sorte que les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\lambda y + by^2 + c \\ \dot{y} &= \lambda \end{aligned} \quad (16)$$

La seule trajectoire intermédiaire possible est $y = 0$ et son optimalité exige $b < 0$. Reprenons le problème par la méthode générale en supposant maintenant λ limité au segment $\pm A$.

Soit ξ, η le vecteur adjoint, H le Hamiltonien

$$H = \xi(a\lambda y + by^2 + c) + \eta\lambda$$

On doit avoir

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0 \\ \dot{\eta} &= -(a\lambda + 2by)\xi \end{aligned} \quad (17)$$

La condition d'optimalité d'une trajectoire intermédiaire $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$ s'écrit ici

$$\xi ay + \eta = 0 \quad (18)$$

Sa dérivée première égale à zéro :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -2by\xi = 0 \quad (19)$$

ne définit pas λ mais entraîne la restriction $y = 0$ et par (18) $\eta = 0$ ($\xi = 0$ entraînerait aussi $\eta = 0$ et est donc exclu).

La seconde dérivation

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -2b\xi\lambda$$

donne enfin $\lambda = 0$.

La seule trajectoire intermédiaire possible correspond donc aux conditions $y = 0$, $\eta = 0$, $\lambda = 0$.

Partant du point $x = 0$ $y = 0$, essayons de construire le domaine accessible au temps t .

Si le segment de frontière rectiligne présente à ses extrémités ($\lambda = \pm A$) des points anguleux, les trajectoires $\lambda = +A$ et $\lambda = -A$ satisfont au principe du maximum pour un vecteur assez proche de la normale à la droite. Nous pourrions donc essayer d'obtenir le domaine accessible au temps t par deux méthodes :

$$\begin{aligned} \lambda = 0 & \quad \text{de } 0 \text{ à } \tau \text{ et } \lambda = \pm A \text{ de } \tau \text{ à } t \\ \lambda = \pm A & \quad \text{de } 0 \text{ à } \tau \text{ et } \lambda = \mp A \text{ de } \tau \text{ à } t \end{aligned}$$

(il n'est pas question de prendre $\lambda = 0$ après $\lambda = \pm A$ puisqu'à ce moment la condition $y = 0$ n'est plus respectée). Un calcul élémentaire montre que la première méthode donne

$$\begin{aligned} x &= ct + a \frac{A^2}{q} (t-\tau)^2 + b \frac{A^2}{3} (t-\tau)^3 \\ y &= \pm A(t-\tau) \end{aligned}$$

d'où l'équation de la frontière du domaine accessible

$$x = ct + \frac{ay^2}{2} + \frac{b|y|^3}{3A} \quad (20)$$

La deuxième méthode donne

$$x = ct + \frac{ay^2}{2} + \frac{b|y|^3}{3A} + \frac{bA^2}{3} \tau^3$$

Elle surclasse donc la première pour $b > 0$.

L'optimalité de la trajectoire intermédiaire exige donc que b soit négatif, autrement dit que $f(y)$ soit maximum pour $y = 0$. La limitation de λ n'a donc pas modifié la conclusion.

Pour b négatif, le domaine accessible au temps t s'obtient bien par l'utilisation en premier lieu de la trajectoire intermédiaire $\lambda = 0$, suivie d'une trajectoire d'extrémité $\lambda = \pm A$. La limitation de λ se traduit par le terme soustractif $\frac{b|y|^3}{3A}$ dans l'expression de x . La concavité du domaine dépend seulement de a . Le domaine accessible (dont l'intérieur est évidemment à gauche de sa frontière) est convexe pour $a < 0$ et concave pour $a > 0$, quel que soit t .

Revenant au cas où $f(y)$ est quelconque et présente plusieurs maxima relatifs, nous pouvons noter la circonstance suivante: pour λ illimité, seul le plus élevé de ces maxima fournira une trajectoire intermédiaire. Pour λ limité au contraire, chacun en fournira une, valable pour une échéance assez courte.

Pour une telle échéance en effet, il ne sera pas avantageux, ni-même peut-être possible d'emprunter la trajectoire correspondant au maximum absolu de $f(y)$, en traversant des valeurs de y pour lesquelles $f(y)$ présentera un minimum plus ou moins accentué.

Arrivé à ce point de nos réflexions, nous pouvons donc conclure que dans le cas de domaines de manœuvrabilité à frontières semi-linéaires, il existe des trajectoires intermédiaires c'est-à-dire utilisant de façon continue des points intérieurs de ces frontières et satisfaisant aux conditions d'optimalité de Pontryagin. Mais on n'est jamais assuré, si courte que soit l'échéance de l'optimalité effective de ces trajectoires. Celle-ci exige des conditions supplémentaires (ici $b < 0$). On n'est jamais assuré non plus, si courte que soit l'échéance de la convexité du domaine accessible. Celle-ci exige des conditions supplémentaires (ici $a < 0$) complètement indépendantes des conditions d'optimalité.

4.4. Recherche d'une condition suffisante d'optimalité. Frontière à une dimension linéaire

Bornons-nous pour l'instant à une frontière contenant une variété linéaire à une seule dimension, c'est-à-dire constituée d'une famille de droites D , la dimension de l'espace "état" n'étant pas limitée.

Nous supposons que la portion permise de la droite D comprend le segment AB , les points A et B ayant respectivement pour paramètre $-A$ et $+A$. Nous supposons qu'à partir d'un état initial \bar{x}_0 il existe un faisceau de trajectoires intermédiaires possibles, pour un ensemble de vecteurs $\bar{\xi}$ qui satisfont donc à l'instant initial les conditions

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \xi_i a_i &= 0 \\ \frac{d^k}{dt^k} (\xi_i a_i) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

pour k variant de 1 à $r-1$.

Nous choisissons une de ces trajectoires C^* correspondant à un vecteur particulier ξ^* et nous supposons qu'elle correspond à $\lambda = 0$ de sorte que l'on a

$$\frac{d^r}{dt^r} (\xi_i a_i) = (\xi_i A_i) \lambda$$

Nous verrons que ces restrictions ne diminuent pas la généralité du résultat.

Nous supposons aussi que le domaine de manœuvrabilité présente en A et B une arête vive, c'est-à-dire qu'il est limité au delà de la facette semi-affine par un élément d'hyperplan non infiniment voisin de l'hyperplan tangent au même point à cette facette. Nous nous réservons de choisir à volonté la direction de cet hyperplan parmi les valeurs possibles $\vec{\xi}'$, qui excluent d'une part celles qui contiennent la droite D , d'autre part les directions des hyperplans tangent à la face semi-linéaire. Nous pouvons ainsi faire en sorte que le principe du maximum soit vérifié par un vecteur vitesse d'extrémité A ou B pour toute valeur de ξ de la forme

$$\vec{\xi}^* + \Delta \vec{\xi} = (1-k)\vec{\xi}^* + k\vec{\xi}' \quad (\text{avec } 0 \leq k \leq 1) \quad (22)$$

la convenance du point A ou du point B étant évidemment commandée par le signe du produit scalaire $\xi_i a_i$ avec la règle

$$\lambda = -\mathcal{A} \quad (\text{point } A) \quad \text{si} \quad \xi_i a_i < 0$$

$$\lambda = +\mathcal{A} \quad (\text{point } B) \quad \text{si} \quad \xi_i a_i > 0$$

Pour $\xi_i a_i = 0$ on peut choisir soit A ou B , soit une valeur intermédiaire dont nous savons que la seule valeur $\lambda = 0$ convient.

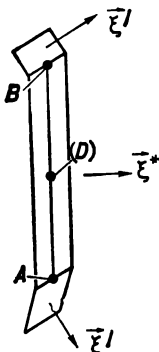


FIG. 4.

Examinons s'il est possible qu'une trajectoire intermédiaire soit suivie d'une trajectoire d'extrémité. Quand nous quittons $\lambda=0$ pour prendre par exemple $\lambda = +\mathcal{A}$, $\xi_i a_i$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $r-1$ sont nuls. Le signe que va prendre $\xi_i a_i$ immédiatement après est celui de sa dérivée d'ordre r , c'est-à-dire celui de $\xi_i^* A_i^r$. Il est nécessaire et suffisant pour que la trajectoire obtenue satisfasse aux conditions d'optimalité que $\xi_i^* A_i^r$ soit positif.

Le signe de $\xi_i^* A_i$ (coefficient de λ dans $\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial \lambda}$) gouverne donc la possibilité pour la trajectoire intermédiaire de donner naissance par bifurcation à des trajectoires d'extrémité. La condition de possibilité est $\xi_i^* A_i > 0$.

Considérons maintenant une trajectoire d'extrémité correspondant à un vecteur adjoint $\vec{\xi}^* + \Delta \vec{\xi}$ voisin de ξ^* de la forme (22).

À l'instant initial, supposons par exemple $a_i \xi_i = a_i \Delta \xi_i$ positif, imposant le choix $\lambda = \Delta$. Le signe de $A_i \xi_i$ (le même que celui de $A_i \xi_i^*$ pour $\Delta \xi_i$ assez petit) commandera celui de $\frac{d^2}{dt^2} (a_i \xi_i)$. Mais les dérivées d'ordre moindre auraient une valeur initiale quelconque. Sur un intervalle de temps assez court pour qu'on puisse considérer $\frac{d^2}{dt^2} (a_i \xi_i)$ comme constant, la fonction $\xi_i a_i = f(t)$ sera assimilable à un polynôme dont le terme de plus haut degré sera du signe de λ ou du signe contraire suivant le signe de $A_i \xi_i^*$.

Supposons d'abord $A_i \xi_i^* < 0$. Le produit scalaire d'abord négatif changera de signe au bout d'un temps qu'on peut réduire autant que l'on veut en réduisant le module de $\Delta \vec{\xi}$. La fonction $\xi_i a_i$ comportera une suite d'arches alternativement positives et négatives, avec une période qu'on peut choisir arbitrairement petite. Il existe donc toute une famille de trajectoires localement optimales, comprenant des commutations arbitrairement rapprochées dont la limite est évidemment la trajectoire intermédiaire elle-même.

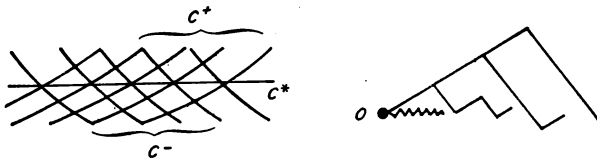


FIG. 5.

Ces trajectoires, dans leur région voisine de C^* , sont sensiblement tracées sur la bande bi-dimensionnelle définie par C^* et la direction D , et empruntent alternativement des tronçons des réseaux de trajectoires C^+ et C^- correspondant à $\lambda = \pm \Delta$; le vecteur $\vec{\mu}$ variant selon la même loi que pour C^* .

L'amplitude des écarts par rapport à C^* variant comme la période entre commutations, la frontière du domaine accessible au temps t (suffisamment petit pour que nos approximations soient valables) se présente sous la forme (1) ou (2), le point limite correspondant à la trajectoire intermédiaire. Mais la configuration (1) est certainement exclue car elle laisse à son extérieur des points évidemment accessibles (points voisins des points doubles par exemple). La seule configuration possible est la configuration (2). Elle montre que la trajectoire intermédiaire n'est pas optimale et que l'on a

intérêt à espacer au maximum les commutations (dans la limite où nos approximations restent valables).

Nous pouvons donc conclure que $A_i \xi_i^* > 0$ est une condition nécessaire d'optimalité pour la trajectoire intermédiaire.

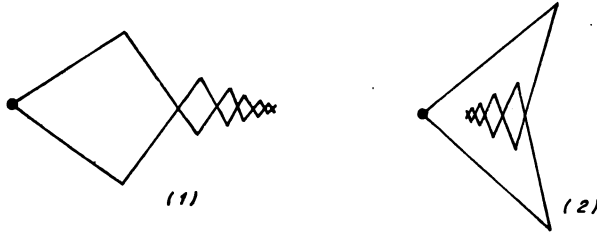


FIG. 6.

Recherchons si cette condition est suffisante. Supposons donc $A_i \xi_i^* > 0$ et supposons en outre qu'il existe au moins un vecteur $\Delta \xi$ tel que :

- (1) $a_i \xi_i$ et ses dérivées indépendantes de λ soient du même signe pour $\xi = \Delta \xi$ (par exemple positifs);
- (2) $\xi^* + \Delta \xi$ et $\xi^* - \Delta \xi$ soient deux vecteurs de la famille des vecteurs ξ' , c'est-à-dire puissent servir à orienter les éléments de frontière joints en A et B à la frontière semi-linéaire.

Une trajectoire utilisant le point B avec pour valeur initiale de $\vec{\xi} : \vec{\xi} = \vec{\xi}^* + k \Delta \vec{\xi}$ ($0 < k < 1$) continuera à utiliser le point B , puisque $a_i \xi_i$ ne pourra que croître. Une trajectoire utilisant le point A avec la valeur initiale $\vec{\xi} = \vec{\xi}^* - k \Delta \vec{\xi}$ continuera de même à utiliser le point A . Dans ce cas aucune commutation ne se produit. L'espace compris entre les deux trajectoires C^+ et C^- issues du point initial x_0 ne peut donc être comblé pour une échéance

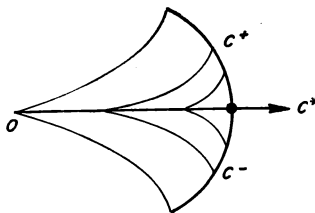


FIG. 7.

assez courte que par la trajectoire intermédiaire C^* elle-même complétée des tronçons de trajectoire C^+ et C^- qui peuvent lui faire suite. Nous sommes précisément dans le cas où la chose est possible. La trajectoire intermédiaire, lorsqu'elle est optimale, se présente comme un tronçon commun à des trajectoires qui peuvent ensuite se séparer pour aller atteindre des points différents de la frontière du domaine accessible.

Nous connaissons donc un cas assez général où $\xi_i A_i > 0$ assure l'optimalité de la trajectoire, pour une échéance assez courte. En dehors de ce cas, l'optimalité de la trajectoire reste douteuse.

Remarque

Les résultats précédents ont été démontrés avec des hypothèses très particulières sur les frontières de la face semi-linéaire étudiée. La généralité des résultats peut être affirmée grâce au principe suivant. Étant donné un type de domaine de manœuvrabilité spécial S utilisé pour une démonstration et un domaine de manœuvrabilité donné et fini \mathcal{M} nous pouvons toujours définir deux systèmes S^+ et S^- définis par les conditions suivantes :

- ils sont tous les deux du type S ,
- la frontière semi-linéaire indéfinie (λ illimité) est la même pour \mathcal{M} , S^+ , S^- ,
- S^+ inclut \mathcal{M} et \mathcal{M} inclut S^- .

Cette possibilité est évidemment liée du fait que la dimension A d'un système S n'est pas définie.

Les trajectoires intermédiaires sont les mêmes pour les 3 systèmes. Toute trajectoire intermédiaire optimale pour S^+ est évidemment optimale pour \mathcal{M} . Toute trajectoire non optimale pour S^- est non optimale pour \mathcal{M} .

4.5. Comparaison avec des résultats connus et extensions possibles

H. J. Kelley a donné⁽⁶⁾ une condition nécessaire d'optimalité dans le cas que nous venons de traiter (variété linéaire monodimensionnelle, espace de dimension quelconque) qui revient avec nos notations à la condition

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) \right] \geq 0$$

C'est bien la condition que nous avons trouvée particularisée au cas où $r = 2$ (en réalité Kelley écrit la relation avec le sens inverse pour l'inégalité, la manière dont il pose le problème revenant à orienter le vecteur $\vec{\xi}$ vers l'intérieur du domaine accessible). Il est intéressant de noter que Kelley démontre rigoureusement le caractère nécessaire de cette relation, trouvée sous une forme développée, et qu'il signale devoir à Arthur E. Bryson la suggestion que cette forme développée était équivalente à la forme concentrée ci-dessous. Dans notre analyse, le critère d'optimalité de Kelley-Bryson apparaît directement sous sa forme concentrée. Il s'étend à la dérivée d'ordre r de $\frac{\partial H}{\partial \lambda}$ lorsque la dérivée d'ordre 2 est indépendante de λ .

En outre nous pensons pouvoir affirmer le caractère suffisant de ce critère quand certaines conditions supplémentaires sont remplies.

L'extension au cas d'une frontière à m dimensions linéaires serait évidemment du plus grand intérêt. On peut pressentir que le critère d'optimalité doit être lié aux propriétés de la matrice coefficient du vecteur dans l'équation linéaire qui définit ce vecteur.

5. APPLICATION À L'OPTIMISATION DES TRAJECTOIRES SPATIALES

Soit x_i ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées d'un point matériel dans un espace où règne le champ gravitationnel quelconque de composantes X_i , u_i les composantes de sa vitesse, λ l'accélération due à la poussée d'un propulseur orientée par un vecteur unitaire de composantes μ_i (avec $\mu_i\mu_i = 1$). Nous appellerons V la vitesse latente consommée au temps t et nous noterons ξ_i , η_i , ζ les composantes du vecteur adjoint associées respectivement à x_i , u_i et V .

Les équations du problème s'écrivent, les dérivées étant prises par rapport au temps

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_i \\ \dot{u}_i &= X_i + \lambda\mu_i \\ \dot{V} &= \lambda \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{formules linéaires par rapport à} \\ \text{l'accélération de poussée} \end{array} \quad (23)$$

Le système adjoint s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= -X_{j,i} \eta_j \\ \dot{\eta}_i &= -\xi_i \\ \dot{\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

La constante ζ sera essentiellement négative puisqu'on recherche une consommation minima.

Pour toute trajectoire à poussée intermédiaire, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \mu_i \eta_i + \zeta = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \mu_i} + K\mu_i &= 0 \quad (\text{compte tenu de } \mu_i\mu_i = 1) \end{aligned}$$

On en tire $\mu_i = -\frac{\eta_i}{\zeta}$ d'où $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\zeta} [\eta_i\eta_i - \zeta^2]$ d'où une première

$$\text{condition} \quad \eta_i\eta_i = \zeta^2 \quad (25)$$

Prenons les dérivées successives par rapport au temps, en omettant la constante positive $(-\zeta)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = -\eta_i \xi_i \quad \text{donne la deuxième condition}$$

$$\eta_i \xi_i = 0 \tag{26}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = \xi_i \xi_i + X_{i,j} \eta_j \eta_j \quad \text{donne} \quad \xi_i \xi_i + X_{i,j} \eta_j \eta_j = 0 \tag{27}$$

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = -4X_{i,j} \xi_i \eta_j + X_{i,jk} \eta_j \eta_k$$

donne $4X_{i,j} \xi_i \eta_j - X_{i,jk} \eta_j \eta_k = 0$ (28)

enfin

$$\frac{d^4}{dt^4} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) = -\frac{\lambda}{\zeta} X_{i,jk} \eta_j \eta_k + B$$

avec

$$B = -6X_{i,jk} \xi_i \eta_j \eta_k + \eta_i \eta_j (4X_{j,k} X_{i,k} + X_{k,i} X_{i,jk}) + 4X_{i,j} \xi_i \xi_j + X_{i,jk} \eta_j \eta_k u_k u_l$$

Compte tenu de $\zeta < 0$ l'optimalité de la trajectoire intermédiaire exige l'inégalité

$$X_{i,jk} \eta_j \eta_k > 0 \tag{29}$$

Comme λ est essentiellement positif, il faut encore écrire

$$B < 0 \tag{30}$$

pour que la trajectoire intermédiaire soit réalisable.

Si on élimine le cas de trajectoires économiques à temps fixé et qu'on recherche la minimisation du temps en même temps que celle de la consommation, il faut écrire une relation du type $\vec{\xi} \cdot \vec{x} > 0$ qui se réduit ici à

$$\xi_i u_i + \eta_i X_i > 0 \tag{31}$$

C'est l'ensemble des équations (25), (26), (27), (28) complétées des inégalités (29), (30) et éventuellement (31) qui constitue les conditions nécessaires d'optimalité d'une trajectoire intermédiaire, sans que nous soyons en mesure d'affirmer leur caractère suffisant.

Il serait intéressant d'appliquer cette méthode au cas d'un centre unique $\left(X_i = \frac{-x_i}{r^3} \right)$. On devrait ainsi retrouver les résultats relatifs aux spirales de Lawden⁽⁷⁾ dont Marchal⁽⁸⁾ a discuté l'optimalité en les étendant au cas tridimensionnel.

6. CONCLUSION

Si la structure des solutions au problème de l'optimisation dans le cas des domaines strictement convexes présente le caractère d'une grande simplicité, l'étude de ces solutions dans le cas de frontières semi-linéaires apparaît au contraire comme singulièrement complexe.

La présente étude ne dépasse guère le niveau d'une ébauche. Si l'auteur s'est permis de la présenter sous une forme aussi inachevée c'est surtout pour appeler l'attention sur l'intérêt d'un traitement intrinsèque des problèmes d'optimisation, dans le cadre que nous offrons les développements modernes de la géométrie affine, et dans l'espoir de susciter des travaux plus rigoureux et plus élaborés.

RÉFÉRENCES

1. P. CONTENSOU. Note sur la cinématique générale du mobile dirigé. Communication à l'Association Technique Maritime et Aéronautique, Juin 1946, vol. 45, No. 836.
2. P. CONTENSOU. Application des méthodes de la mécanique du mobile dirigé à la théorie du vol plané. Communication à l'Association Technique Maritime et Aéronautique, Session 1950, vol. 49, No. 958.
3. P. CONTENSOU. Étude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. *Astronautica Acta*, **8**, 134-150, 1962. Symposium de l'Académie 1961.
4. L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. F. MISHCHENKO. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc. New-York, 1962.
5. L. I. ROZONOER. Principe du Maximum de L. S. Pontryagin dans la théorie des systèmes optimaux. *Automatismes et Télémécanique*, **20**, No. 10-12 (1959).
6. H. J. KELLEY. A Second Variation Test for Singular Extremals. *AIAA Journal*, **2**, No. 8.
7. D. F. LAW DEN. Optimal Intermediate-Thrust Arc in a Gravitational Field. — *Astronautica Acta*, **8**, 106, 1962.
8. C. MARCHAL. Généralisation tridimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de Lawden. *La Recherche Aérospatiale*, No. 123 (mars-avril 1968).

SYNTHÈSE DES RÉSULTATS ANALYTIQUES SUR LES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES KÉPLÉRIENNES (Durée indifférente)

CHRISTIAN MARCHAL

ONERA, Châtillon-sous-Bagneux (Hauts de Seine), France

RÉSUMÉ

L'étude des transferts économiques entre orbites képlériennes a fait de très gros progrès ces dernières années, surtout dans le cas qui est celui exposé ici où la durée du transfert est indifférente.

Il convient de distinguer essentiellement trois types d'orbites: (1°) les orbites hyperboliques, (2°) les orbites elliptiques extérieures à la planète attirante, (3°) les orbites elliptiques sécantes à la planète attirante (orbites de lancement).

Quel que soit le propulseur utilisé, l'étude de l'optimisation (minimisation de la dépense de propulsif) conduit à se servir toujours de la vitesse d'éjection maximale à l'exception du cas où la poussée est faible et la vitesse hyperbolique (cas très complexe et qui ne sera pas examiné). Le paramètre de prix d'un transfert est alors toujours la vitesse caractéristique, somme arithmétique de tous les changements artificiels de vitesse. Il faut toutefois remarquer que pour des orbites elliptiques extérieures, si la poussée est faible, la décomposition des impulsions théoriques en un grand nombre d'arcs de poussée effectués à un tour d'intervalle peut conduire à des durées très longues de transfert (mais à la limite, la vitesse caractéristique nécessaire est évidemment identique).

Dans le cas des orbites hyperboliques et dans celui des orbites sécantes à la planète attirante, les seules conditions limites envisagées seront celles à distance infinie ou au niveau même du sol (ou tout au moins de la limite supérieure de la partie aérodynamiquement non négligeable de l'atmosphère), nous n'étudierons pas le problème de la traversée optimale de l'atmosphère.

Dans ces conditions, tous les transferts optimaux parabole → orbite quelconque et orbite quelconque → parabole s'obtiennent aisément (que l'on utilise ou non des freinages atmosphériques), on en déduit sans difficulté les transferts optimaux hyperbole → ellipse et ellipse → hyperbole.

Les transferts optimaux entre conditions limites à l'infini (donc hyperboliques) sont connus, ils sont impulsionnels et n'ont jamais plus de 4 impulsions finies.

Les montées optimales en orbite (transfert ellipse sécante → ellipse extérieure) ont été assez peu étudiées analytiquement, les solutions optimales obtenues jusqu'à présent sont toujours impulsionnelles: au maximum trois impulsions dans le cas où l'orientation est indifférente, au maximum cinq impulsions dans le cas général.

Les transferts optimaux entre orbites elliptiques extérieures ont fait l'objet de nombreux travaux, ils sont toujours impulsionnels et jusqu'à présent seuls des cas mono,

bi- ou tri-impulsionnels ainsi que des cas "bi-paraboliques" ou "par l'infini" (avec deux impulsions finies et deux infiniment petites) ont été rencontrés, il est très probable qu'ils sont les seuls.

L'étude s'achève par l'exposé de quelques propriétés géométriques des orbites képlériennes, par l'examen du point de vue pratique et par celui des perspectives probables de développement futur des problèmes de transfert.

ABSTRACT

The study of economical transfers between Keplerian orbits has made considerable progress these last years especially in the time-free case, which is exposed here.

We must consider essentially three types of orbits: (1) hyperbolas, (2) ellipses exterior to the attractive planet, (3) ellipses intersecting the attractive planet (launching orbits).

Whatever the propulsion system utilized is, the study of the optimization (minimization of the expense of propellant) always leads to use the maximum exhaust velocity, except in the case where the thrust is too weak and the osculating orbit is hyperbolic (this very complicated case will not be studied). Then, for a given rocket, the cost of a transfer is only an increasing function of its characteristic velocity, i.e. the arithmetical integral of all artificial changes of velocity. We must however notice that for exterior elliptical orbits, when the thrust is weak, the decomposition of a theoretical impulse into many thrust arcs executed at every revolution gives transfers of a very long duration (but of course at the limit the characteristic velocity is the same).

In the hyperbolic case and in the intersecting ellipse case we shall consider only boundary conditions at infinity or at the limit of the dense atmosphere, we shall not consider the problem of the optimization of the atmospheric phase of the flight.

Then it is very easy to obtain the optimal transfers of the following types: parabola \rightarrow arbitrary orbit, arbitrary orbit \rightarrow parabola, hyperbola \rightarrow ellipse or ellipse \rightarrow hyperbola (even in the case where we can use atmospheric braking).

Optimal transfers between boundary conditions at infinity (i.e. for hyperbolic orbits) are known. They are impulsional and have never more than 4 finite impulses.

Optimal ascending trajectories to an orbit (i.e. intersecting ellipse \rightarrow exterior ellipse are little studied analytically). Today's known optimal solutions are always impulsional: at most three impulses in the orientation free case, at most five impulses in the general case.

Optimal transfers between ellipses exterior to the attractive planet are the subject of many papers. They are always impulsional and until now only one, two or three impulse transfers and "biparabolic" or "by (or through) infinity" transfers (with two finite impulses and two infinitesimal impulses) are obtained. There is probably no four-finite-impulses optimal solutions.

The end of the paper deals with the following points: practical point of view, some geometrical properties of the Keplerian orbits and further investigations.

INTRODUCTION

L'optimisation des transferts entre orbites est l'un des problèmes essentiels de l'exploration spatiale.

Ce problème est très complexe même pour des orbites képlériennes soustraites à toute influence perturbatrice (donc dans le champ newtonien

central d'un corps unique de symétrie sphérique), la plupart des études de ce sujet portent sur l'un des deux cas plus simples suivants :

- (1°) transfert sur une orbite infiniment proche de l'orbite de départ en un temps limité fixé;
- (2°) transfert sur une orbite quelconque sans limitation de durée.

C'est ce dernier cas qui est exposé ici, l'économie de masse des engins spatiaux y correspond presque toujours à l'emploi des transferts de vitesse caractéristique minimale (la vitesse caractéristique étant la somme arithmétique de tous les changements artificiels de vitesse).

De nombreuses études analytiques ou analytico-numériques⁽¹⁻⁷⁹⁾ ont été effectuées sur les divers aspects du problème, il y a aussi bien entendu un grand nombre d'études numériques (par exemple réfs. 80 à 101).

1. PREMIÈRE PARTIE

1.1. Exposé du problème théorique

Il y a une seule planète attirante de rayon R et de masse M (fig. 1), on doit normalement mesurer R en tenant compte de la partie dense de l'atmosphère (40 à 70 km dans le cas de la terre).

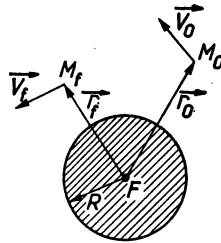


FIG. 1. Conditions initiales et finales.

Au temps initial t_0 un mobile M placé à l'extrémité M_0 du rayon vecteur \vec{r}_0 est animé de la vitesse \vec{V}_0 , l'objet du problème est de déterminer la manœuvre la plus économique (du point de vue de la consommation de masse du propulsif) conduisant aux conditions finales définies par \vec{r}_f et \vec{V}_f au temps t_f (ce dernier étant indifférent, fini ou infini, mais bien entendu postérieur à t_0).

Nous supposons que le mobile M ne se détériore pas au cours du temps et que ses performances à un instant donné, du point de vue de la propulsion, ne dépendent que de sa masse restante (fusée à étages); d'autre part nous supposons que nous sommes toujours entièrement maître de la

direction de poussée des propulseurs (des études très intéressantes^(77, 78) examinent des cas particuliers où l'on se restreint à n'utiliser que certaines directions de poussée).

Remarque: Le problème que nous envisageons est entendu dans son sens strict, nous recherchons le minimum absolu de la consommation C_f en fonction de t_f et non un minimum relatif (fig. 2) bien que ceux-ci puissent être obtenus dans les études analytiques "à temps final indifférent"; toutefois ces minimums relatifs peuvent dans certains cas présenter un intérêt pratique important (cf. § 3.5.3.7).

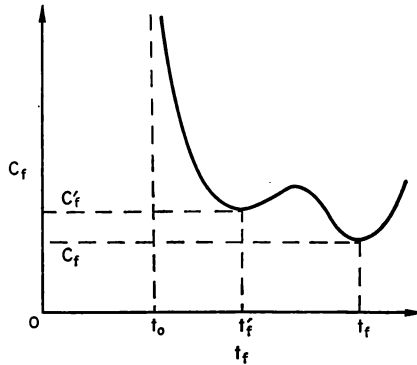


FIG. 2. Minimum relatif et absolu.

1.2. Notations

À côté des rayons vecteurs \vec{r} et des vecteurs vitesses \vec{V} nous ferons un large usage des éléments orbitaux correspondants désignés selon les appellations habituelles (fig. 3).

L'indice 0 sera relatif aux conditions initiales et celui f aux conditions finales, les indices $1, 2, 3 \dots$ seront relatifs aux orbites intermédiaires successives $O_1, O_2, O_3 \dots$ rencontrées lorsque l'on utilise des impulsions (cas évidemment théorique, en réalité seules des poussées continues sont utilisables) enfin les lettres non indicées seront réservées à l'orbite "actuelle" (ou "osculatrice" ou "instantanée").

Nous utiliserons pour plan de référence le plan (\vec{r}_0, \vec{V}_0) de l'orbite initiale (orienté dans le sens du mouvement) et pour direction de référence dans ce plan la direction \vec{FP}_0 du périée de l'orbite initiale (sauf exception dûment précisée).

L'orbite initiale O_0 est donc entièrement définie par son demi-grand axe a_0 et son excentricité e_0 , une orbite quelconque l'est par $a e i \Omega \bar{\omega}$ avec (voir fig. 3):

- i = inclinaison du plan de l'orbite ($0^\circ \leq i \leq 180^\circ$),
- Ω = longitude du nœud ascendant de l'orbite,

$\bar{\omega} = \Omega + \omega =$ longitude du périée de l'orbite.

Nous nous servirons aussi de:

$$b = a\sqrt{1-e^2} = ak = \text{demi-petit axe,}$$

$$k = \sqrt{1-e^2} = \frac{b}{a} = \text{coefficient d'affinité,}$$

$$p = a(1-e^2) = ak^2 = \text{paramètre,}$$

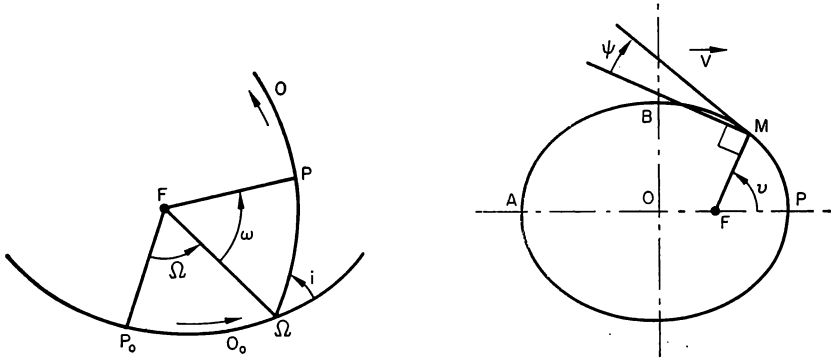


FIG. 3. Notations: $\bar{\omega} = \Omega + \omega$.

$$OA = OP = FB = a; OB = b; FP = P; FA = A; \vec{FM} = \vec{r}.$$

$$P = a(1-e) = \frac{p}{1+e} = \text{distance du périée,}$$

$$A = a(1+e) = \frac{p}{1-e} = \text{distance de l'apogée,}$$

$\omega = \bar{\omega} - \Omega =$ argument du périée = angle du nœud ascendant au périée dans le sens du mouvement,

$v =$ anomalie vraie,

$u = \omega + v =$ élongation angulaire nodale,

$E =$ anomalie excentrique,

$n =$ moyen mouvement angulaire,

$\mu = n^2 a^3 =$ constante gravitationnelle = \mathcal{M} multiplié par la constante de la loi de Newton,

$\vec{r} =$ rayon vecteur,

$$r = \text{longueur du rayon vecteur} = \frac{P}{1+e \cos v} = a(1-e \cos E),$$

$\vec{V} =$ vecteur vitesse,

$$V = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \text{longueur du vecteur vitesse,}$$

ainsi par exemple :

\vec{V}_{M_2} = vecteur vitesse au point M sur l'orbite O_2 ,

$V_{P_{1,1}}$ = V_{P_1} = vitesse au périhélie de l'orbite O_1 ,

$V_{P_{1,2}}$ = vitesse le long de l'orbite O_2 au périhélie de l'orbite O_1

(cette notation n'est évidemment utilisée que si l'orbite O_2 passe en P_1)

\vec{H} = $\vec{r} \wedge \vec{V}$ = vecteur moment cinétique,

H = nab = longueur du vecteur moment cinétique,

$\vec{\gamma}$ = vecteur accélération de poussée des propulseurs,

S, T, W = composantes de $\vec{\gamma}$ (fig. 4),

S = composante radiale (positive vers le haut),

T = composante horizontale dans le plan d'orbite (positive vers l'avant),

W = cosinus normale au plan d'orbite (positive dans le sens d.m.e)

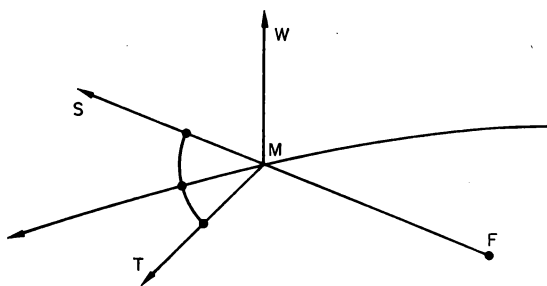


FIG. 4. Trièdre trirectangle \overrightarrow{MSTW} .

I_1, I_2, I_3 : points où, dans les cas impulsions, ont lieu les impulsions successives.

\vec{I}_n : impulsion nécessaire pour passer en \vec{I}_n de l'orbite O_{n-1} à l'orbite O_n [donc $\vec{I}_n = \vec{V}_{In,n} - \vec{V}_{In,n-1} = \vec{V}_{In} - \vec{V}_{In,n-1}$]

$C(t) = \int_{t_0}^t |\vec{\gamma}| dt + \sum_{t_0}^t |\vec{I}_n|$ = vitesse caractéristique de transfert jusqu'à l'instant t .

$C_1 = C(t_1); C_2 = C(t_2); \dots; C_f = C(t_f)$

C_f sera toujours, dans cette étude, la quantité à minimiser.

S', T', W' = cosinus directeurs de $\vec{\gamma}$ ($\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{W}{W'} = |\vec{\gamma}|$) ou d'une impulsion \vec{I}_n (S' est fixe au cours d'une impulsion mais T' et W' varient en général).

Ψ = angle, positif vers le haut, de \vec{V} et de l'horizontale avant, (fig. 3): $\text{tg } \Psi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{e \sin E}{k}; -90^\circ \leq \Psi \leq +90^\circ$,

$$\psi = \arctg \frac{S'}{T'} \quad (\text{avec } \text{sgn} \sin \psi = \text{sgn} S'; \text{sgn} \cos \psi = \text{sgn} T',$$

$$L = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \text{vitesse de libération au sol ou au niveau de la}$$

“sortie de l’atmosphère” (vers 40 à 70 km d’altitude dans
le cas de la terre: $L = 11,13 \text{ km/s}$).

2. DEUXIÈME PARTIE

2.1. Classification des orbites

Nous classerons les orbites selon leur forme et la distance de leur périégée au centre de la planète attirante.

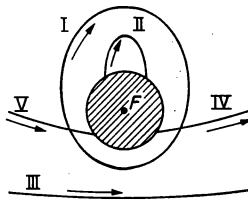


FIG. 5. Classification des orbites.

On distingue ainsi (fig. 5):

- (I) Les ellipses extérieures.
- (II) Les ellipses sécantes.
- (III) Les hyperboles extérieures.
- (IV) Les hyperboles “montantes”.
- (V) Les hyperboles “descendantes”.

Les cas limites s’obtiennent bien entendu pour les paraboles, les cercles et les orbites rasantes.

2.2. Classification des conditions initiales et finales

Considérons une ellipse extérieure, étant donné la périodicité du mouvement orbital sur cette ellipse et le fait que la durée du transfert est indifférente, les conditions cinématiques correspondant aux divers points de cette ellipse sont évidemment équivalentes. Il n’en est pas de même pour les ellipses sécantes et les hyperboles et des conditions initiales sont d’autant plus favorables qu’elles correspondent à un instant plus reculé dans le temps (et inversement pour les conditions finales).

Nous appellerons conditions initiales originelles celles correspondant au temps $(-\infty)$ pour les hyperboles extérieures ou "descendantes" et celles correspondant au lancement au niveau $r = R$ pour les ellipses sécantes et les hyperboles "montantes". De même, nous appellerons conditions ultimes celles correspondant au temps $(+\infty)$ ou à la chute sur le sol pour les hyperboles et les ellipses sécantes.

Enfin nous appellerons conditions semi-originelles (ou semi-ultimes) des conditions dans lesquelles le mobile M est encore (ou déjà) à une très grande distance de l'astre attirant mais a déjà (ou encore) une vitesse oblique par rapport à celui-ci (fig. 6).

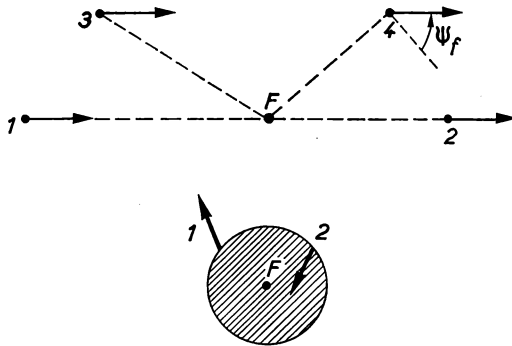


FIG. 6. Conditions aux limites: 1. Conditions initiales originelles. 2. Conditions ultimes. 3. Conditions semi-originelles, $\Psi_0 > -90^\circ$. 4. Conditions semi-ultimes, $\Psi_f < +90^\circ$.

Sur une ellipse extérieure, toutes les conditions initiales peuvent être considérées comme originelles et toutes les conditions finales comme ultimes.

2.3. Conditions d'utilisation optimale d'une fusée

Dans la zone de l'espace des phases correspondant aux ellipses extérieures la minimisation de la consommation de propulsif d'une fusée quelconque conduit toujours à l'emploi de la vitesse d'éjection maximale⁽⁴⁹⁾ et à l'emploi des transferts de vitesse caractéristique minimale, ces transferts sont toujours composés uniquement d'impulsions,⁽⁶⁸⁾ impulsions toujours décomposables en petits arcs de poussée effectués à un tour d'intervalle si les propulseurs ne donnent qu'une poussée faible (on peut ainsi s'approcher aussi près que l'on veut de l'optimum mais en un temps infiniment long).

Dans la zone des ellipses sécantes et dans celle des hyperboles, la vitesse caractéristique sert aussi de paramètre de prix pour tous les engins à poussée forte (propulseurs chimiques, fusées nucléaires, etc.). Dans le cas

où l'optimum est composé d'impulsions, la perte due à la limitation de la poussée reste faible: si cette limitation varie peu, la perte relative, en vitesse caractéristique, reste toujours inférieure à

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \left(\frac{\delta t}{T}\right)^2 \cdot (1 - 3S'^2);$$

δt étant la durée de l'arc de poussée (disposé optimalement) remplaçant l'impulsion et T étant la durée de révolution circulaire à l'altitude de l'impulsion (dont les cosinus directeurs sont S' , T' et W') [§ 4.1 et réfs. 49 et 73]; toutefois pour les impulsions non-horizontales au niveau $r = R$ la perte relative est d'ordre $\frac{\delta t}{T}$ et non $\frac{\delta t^2}{T^2}$. (56)

Pour les engins à poussée faible (propulseurs électriques, nucléo-électriques, etc.) la zone des ellipses sécantes constitue une zone interdite car les modifications trop lentes de l'orbite ne peuvent empêcher la chute sur le sol; la zone des hyperboles conduit à des études très compliquées que nous laisseront de côté.

Nous rechercherons donc toujours le transfert de vitesse caractéristique minimale en supposant le propulseur capable d'effectuer au besoin des impulsions, la vitesse caractéristique sera toujours notre paramètre de prix.

Nous supposerons d'autre part que les conditions initiales sont toujours des conditions originelles ou semi-originelles et les conditions finales des conditions ultimes ou semi-ultimes, ce qui est ordinairement le cas.

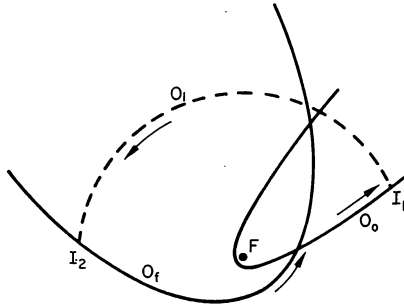
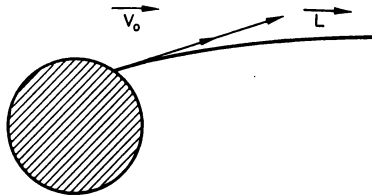
Nous examinerons d'abord le cas où l'on ne peut effectuer de freinages ou de manœuvres atmosphériques dans l'atmosphère de la planète puis celui où on le peut (dans ce dernier cas nous supposerons généralement négligeable la vitesse équatoriale de rotation de la planète).

3. TROISIÈME PARTIE: RÉSULTATS

3.1. Séparation des études dans la zone des vitesses elliptiques de celles dans la zone des vitesses hyperboliques

3.1.1. *Transferts optimaux parabole → parabole.* Les transferts entre orbites paraboliques (conditions originelles → conditions ultimes) sont d'un coût infiniment petit (en vitesse caractéristique), il suffit en effet de reculer suffisamment loin les points I_1 et I_2 (fig. 7) pour obtenir C_f aussi faible qu'on le veut.

3.1.2. *Transferts optimaux ellipse sécante → parabole.* Une impulsion tangentielle immédiate de coût $C_1 = C_f = L - V_0$ donne la vitesse parabolique (fig. 8) puis l'on utilise le transfert ci-dessus entre paraboles.

FIG. 7. Transfert optimal entre paraboles. $C_f = 0$.FIG. 8. Transfert optimal d'ellipse séquente à parabole. $C_f = L - V_0$.

3.1.3. Transferts optimaux parabole \rightarrow ellipse sécante. Ce transfert est celui retour inverse du précédent, son coût peut être annulé si l'on utilise un freinage atmosphérique à l'instant final.

3.1.4. Transferts optimaux ellipse extérieure \rightarrow parabole. Une impulsion tangentielle au périhélie de coût:

$$C_1 = C_f = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} - \sqrt{\frac{\mu}{P_0}(1+e_0)} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} - V_{P_0}$$

donne la vitesse parabolique (fig. 9) puis l'on utilise le transfert entre paraboles.

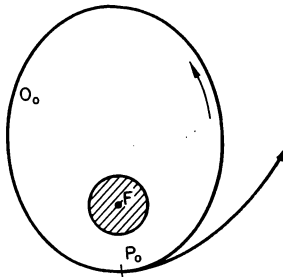


FIG. 9. Transfert optimal d'ellipse extérieure à parabole.

3.1.5. *Transferts optimaux parabole → ellipse extérieure*. Si l'on ne peut utiliser de freinage atmosphérique ou bien si $P_f \geq 4R \left[1 + \frac{R}{A_f} \right]$ le transfert optimal est le transfert retour inverse de celui ci-dessus.

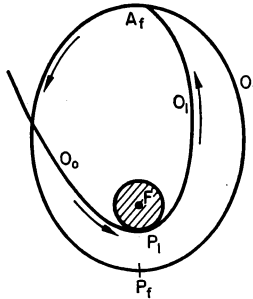


FIG. 10. Transfert optimal de parabole à ellipse extérieure dans le cas :

$$P_f < 4R \left(1 + \frac{R}{A_f} \right)$$

et utilisant un freinage atmosphérique en P_1 .

Si $P_f < 4R \left[1 + \frac{R}{A_f} \right]$ et si l'on peut utiliser des freinages atmosphériques, le transfert optimal est dessiné sur la figure 10 avec un freinage atmosphérique en P_1 sous P_f et une impulsion tangentielle en A_f , on obtient :

$$C_f = V_{A_f} - V_{A_1} = \sqrt{\frac{\mu}{A_f} (1 - e_f)} - \sqrt{\frac{2\mu R}{A_f(R + A_f)}}$$

3.1.6. *Transferts optimaux parabole → hyperbole "descendante"*. Après avoir utilisé un transfert entre paraboles approprié, une impulsion tangentielle de coût $C_f = V_f - L$ à l'instant final achève optimalement le transfert (fig. 11).

3.1.7. *Transferts optimaux hyperbole "montante" → parabole*. Ce transfert est celui retour inverse du précédent, son coût peut être annulé si l'on utilise un freinage atmosphérique à l'instant initial.

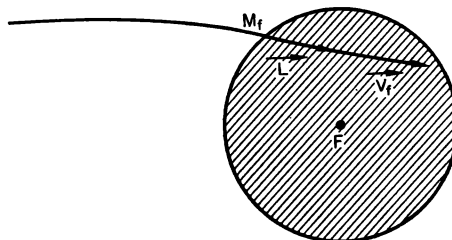


FIG. 11. Transfert optimal de parabole à hyperbole "descendante" $C_f = V - L$.

3.1.8. Transferts optimaux hyperbole "descendante" ou extérieure → parabole. Si $\Psi_0 \geq 0^\circ$ le transfert commence par une annulation de la vitesse locale puis s'achève par un transfert entre paraboles: $C_f = V_0$.

Si $\Psi_0 < 0^\circ$ le transfert optimal (fig. 12) commence par une abattée finie si $\Psi_0 > -90^\circ$ (conditions semi-originelles) ou infiniment petite si $\Psi_0 = -90^\circ$ (conditions originelles) transformant l'hyperbole d'arrivée en hyperbole O_1 rasante, puis en P_1 un freinage atmosphérique ou, si ce n'est pas possible, une impulsion tangentielle freinante donne la vitesse parabolique et l'on achève la manœuvre par un transfert entre paraboles.

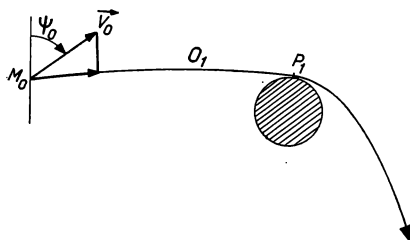


FIG. 12. Transfert optimal d'une hyperbole extérieure ou "descendante" à une parabole dans le cas $\Psi_0 < 0$; $C_f = V_0 \cos \Psi_0$ si on utilise le freinage atmosphérique en P_1 . Si ceci n'est pas possible on a la formule

$$C_f = \sqrt{L^2 + V_0^2 + 2V_0L \cos \Psi_0} - L$$

On obtient: $C_f = V_0 \cos \Psi_0$ si on peut utiliser un freinage atmosphérique et sinon:

$$C_f = \sqrt{L^2 + V_0^2 + 2V_0L \cos \Psi_0} - L$$

la première impulsion coûte alors

$$C_1 = (C_f + L) \frac{V_0 \cos \Psi_0}{L + V_0 \cos \Psi_0}$$

et l'autre

$$C_f - C_1.$$

3.1.9. Transferts optimaux parabole → hyperbole extérieure ou "montante". Ce transfert est celui retour inverse du précédent dans le cas où l'on ne peut utiliser de freinage atmosphérique.

3.1.10. Transferts optimaux ellipse → hyperbole ou hyperbole → ellipse. Ces transferts s'obtiennent simplement en composant ceux des cas 3.1.1 à 3.1.9 ci-dessus et les études dans la zone des vitesses elliptiques sont complètement séparées de celles dans la zone des vitesses hyperboliques.

Il reste donc à étudier les transferts hyperbole → hyperbole et ceux ellipse → ellipse.

3.2. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques (dans le cas où l'on n'utilise pas de freinage ni de manœuvre atmosphérique)

L'étude de ces transferts se rencontre assez rarement, aucune étude analytique n'a porté sur le cas où l'une des conditions limites était au niveau du sol ou à distance finie à l'exception des travaux 65, 67, 68 et 69 sur les arcs "à poussée intermédiaire", ces arcs, qui ne se présentent que dans des cas exceptionnels, sont assez rarement optimaux (il faut en particulier qu'ils soient suffisamment courts et que la composante S de $\vec{\gamma}$ soit négative tout au long de l'arc).

Les études analytiques générales^(12, 57, 58) n'ont porté que sur des cas où les conditions initiales sont originelles à l'infini et les conditions finales sont ultimes à l'infini; nous allons élargir un peu l'analyse en englobant le cas des conditions semi-originelles et semi-ultimes.

On obtient ainsi: entre conditions limites à l'infini les transferts de vitesse caractéristique minimale ne comportent jamais d'arcs "à poussée intermédiaire", ils sont donc toujours impulsionnels et sont de l'un ou l'autre des types suivants:

- 1° Le type "par le niveau parabolique" (PNP) (fig. 13) utilisant optimalement la suite hyperbole \rightarrow parabole \rightarrow parabole \rightarrow hyperbole, suite aisée à déterminer avec les résultats des §§ 3.1.1, 3.1.8 et 3.1.9 et appelée "six impulse transfer" en ref. 12 et "four impulse transfer" en ref. 57.

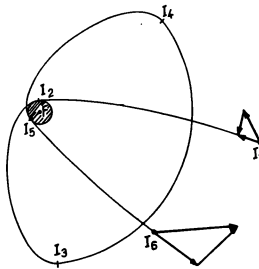


FIG. 13. Transfert "par le niveau parabolique" (PNP)

Il y a au plus 6 impulsions dont 4 au plus sont finies et 2 sont à distance finie de F (ces deux là sont rasantes et tangentielles).

- 2° Le type "transfert lointain". Le mobile M ne passe jamais à distance finie de F (fig. 14), la planète n'agit pas sur M et l'étude est aisée, il y a deux impulsions l'une en M_0 et l'autre en M_f .

Si l'on appelle α_0 et α_f les angles saillants $(\vec{V}_0, \overrightarrow{M_0M_f})$ et $(\vec{V}_f, \overrightarrow{M_0M_f})$ le coût du transfert est:

$$\text{Si } \alpha_0 + \alpha_f \geq 180^\circ : C_f = V_0 + V_f$$

$$\text{Si } \alpha_0 + \alpha_f \leq 180^\circ : C_f = \sqrt{V_0^2 + V_f^2 - 2V_0V_f \cos(\alpha_0 + \alpha_f)}$$

Remarque: Si $\alpha_0 + \alpha_f < 180^\circ$ et si \vec{V}_0 et \vec{V}_f sont dans un même plan de part et d'autre de $\overrightarrow{M_0M_f}$ de nombreuses solutions pluri-impulsionnelles sont équivalentes au transfert bi-impulsionnel (dégénérescence de la solution).

3° Les types "transferts proches". Le mobile M passe à distance finie de F (fig. 15) aussi y a-t-il optimalement une première impulsion en M_0 de composante horizontale $V_0 \cos \Psi_0$ et une dernière impulsion en M

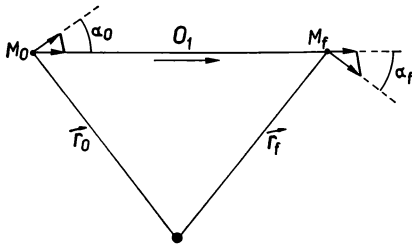


FIG. 14. "Transfert lointain".

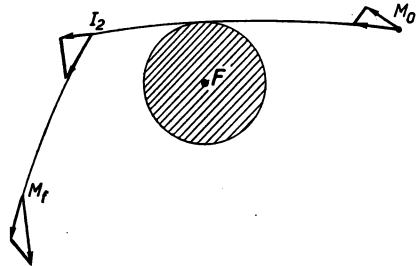


FIG. 15. Exemple d'un "transfert proche".

de composante horizontale $V_f \cos \Psi_f$; ces deux impulsions transforment les conditions semi-originelles et semi-ultimes en conditions originelles et ultimes et le problème se ramène à celui de l'optimisation des transferts entre conditions originelles et ultimes augmentés des deux impulsions en M_0 et M_f .

Les transferts optimaux entre conditions originelles et ultimes ne sont jamais du type "transfert lointain", ils peuvent être du type PNP déjà rencontré (fig. 13) sinon ils sont de l'un ou l'autre des 9 types de "transferts proches" possibles⁽⁵⁸⁾ tous plans (dans le plan FM_0M_f) et n'ayant jamais plus de deux impulsions finies dont une au plus est à distance finie de F , une étude détaillée paraîtra à leur sujet.⁽⁶⁰⁾

3.3. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques

Cas où l'on peut utiliser des freinages et des manœuvres atmosphériques.

Nous n'étudierons qu'un cas très favorable: celui où la finesse aérodynamique de la fusée utilisée est infinie, la planète étant supposée sans rotation. Ce cas est toujours plus favorable que ceux où la finesse de la fusée utilisée est inférieure à $\varrho = \sqrt{\frac{L^2}{Eq^2} - 1}$, Eq étant la vitesse équatoriale de rotation (soit $\varrho = 24$ dans le cas de la terre) on obtient ainsi une limite supérieure des possibilités.

Entre conditions originelles et ultimes à l'infini, le résultat est particulièrement simple, on obtient: $C_f = \max [0; \sqrt{L^2 + V_f^2} - \sqrt{L^2 + V_0^2}]$, en effet la finesse infinie permet de sortir de l'atmosphère n'importe où dans n'importe quelle direction pour un prix nul si la vitesse d'entrée est supérieure à celle de sortie, pour un prix égal à la différence des deux vitesses sinon.

Entre conditions semi-originelles et semi-ultimes, la discussion est encore assez simple, l'optimum est soit le transfert "lointain" (§ 3.2), soit un transfert "proche" composé de deux impulsions en M_0 et M_f et du transfert entre les conditions originelles et ultimes obtenu grâce à ces deux impulsions.

D'où ainsi:

$$1^{er} \text{ cas} \quad \max [0; -V_0 \sin \Psi_0] \geq V_f \sin \Psi_f$$

$$C_f = \min [C_{\text{lointain}}; V_0 \cos [\min (0^\circ; \Psi_0)] + V_f \cos [\max (0^\circ; \Psi_f)]]$$

$$2^{e} \text{ cas} \quad \max [0; -V_0 \sin \Psi_0] < V_f \sin \Psi_f$$

On obtient alors aisément trois types possibles de transferts "proches" à comparer entre eux et au transfert "lointain".

3.4. Transferts optimaux entre orbites elliptiques dont l'une au moins est sécante à la planète

Ce cas n'a fait l'objet que de fort peu d'études analytiques, on doit signaler toutefois les études 65, 67, 68 et 69 sur les arcs "à poussée intermédiaire", ces arcs, qui ne se présentent que dans des cas exceptionnels, ne sont jamais optimaux dans le cas plan ni dans le cas des ellipses extérieures, ils ne sont optimaux que pour des conditions correspondant à des ellipses sécantes et que si la composante S de $\vec{\gamma}$ est négative tout au long de l'arc.

D'autre part l'étude analytique⁽⁵⁶⁾ porte sur le cas où l'une des conditions limites correspond à une orbite elliptique sécante et l'autre à une orbite elliptique extérieure (montée optimale en orbite, descente optimale d'une orbite). Étant donné la difficulté de l'étude seuls les cas suivants ont été envisagés: 1° Cas où l'orbite elliptique extérieure visée est d'orientation indifférente; 2° Cas où la vitesse initiale de lancement \vec{V}_0 est nulle (dans les axes tournant avec la planète).

Les solutions trouvées sont toutes impulsionsnelles (au maximum 3 impulsions dans le premier cas et 5 dans le second) mais la seconde étude n'est pas entièrement achevée.

3.5. Transferts optimaux entre orbites elliptiques extérieures à la planète attirante (dans le cas où l'on utilise pas de freinages ou de manœuvres atmosphériques)

Ce cas constitue l'un des problèmes favoris des astrodynamiciens et les études qui lui ont été consacrées sont très nombreuses. ^(13-49, 83-89)

Étant donné la séparation des études dans la zone des vitesses hyperboliques de celles dans la zone des vitesses elliptiques (entre conditions originales ou semi-originelles et ultimes ou semi-ultimes, ce qui est toujours le cas pour les ellipses extérieures) nous ne rencontrerons aucune orbite intermédiaire hyperbolique. Par contre, il se pourrait que l'une des orbites intermédiaires du transfert soit une ellipse sécante, les méthodes habituelles d'étude tombent alors en défaut, cependant étant donné la rareté de ce cas (qui ne se rencontre que pour des orbites initiales et finales non coplanaires et de périégée très proche du sol) nous le supposons exclu.

Les cas analytiquement résolus actuellement sont les suivants :

1° Transferts optimaux entre orbites coplanaires.

2° Transferts optimaux entre orbites circulaires.

3° Transferts optimaux entre orbites coaxiales.

(C'est-à-dire ayant même direction de grand axe)

4° Transferts optimaux entre orbites très écartées (par exemple si l'angle i_f des plans d'orbite est supérieur à 60° , 1850).

5° Transferts optimaux entre orbites quasi-circulaires proches.

6° Transferts optimaux entre orbites dont l'une est d'excentricité voisine de 1.

7° Transferts optimaux entre orbites bisécantes égales et proches (rotation infinitésimale du plan d'orbite) ce cas, très simple, ⁽³⁹⁾ conduit à des solutions mono-ou bi-impulsionnelles.

Les trois derniers cas ne sont résolus qu'au second ordre près.

Un certain nombre de résultats globaux sont connus également.

- (I) L'étude au second ordre près des transferts optimaux entre orbites elliptiques infiniment proches conduit à des solutions toujours mono, bi ou tri-impulsionnelles. ⁽⁴³⁾
- (II) Les transferts optimaux entre orbites elliptiques extérieures n'utilisent jamais d'arcs "à poussée intermédiaire" analogues à la "spirale de Lawden"; ⁽⁶¹⁾ la démonstration de ce point ⁽⁶⁶⁾ suppose toutefois que la notion "durée indifférente" soit entendue dans le sens strict défini dans la remarque du chapitre 1.1 (recherche du minimum absolu de la consommation).

Remarque: la démonstration donnée en ref. 63 est erronée même si dans le cas présent le résultat est juste.

(III) Les directions optimales de poussée sont toujours à l'intérieur d'un "angle spatial utile" dépendant seulement des paramètres e et v (ou e et E) dont certaines limites ont pu être précisées; ainsi par exemple les cosinus directeurs S' T' W' d'une direction optimale de poussée satisfont toujours à:

$$\begin{aligned} T'^2(1 - e \cos v)^2 &\geq 4W'^2 e \cos v \\ \text{et à: } W'^2 + 2S'T' \operatorname{tg} \Psi' &\geq S'^2(3 + \operatorname{tg}^2 \Psi') \\ \left(\text{avec: } \operatorname{tg} \Psi' = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{e \sin E}{k} \right) \end{aligned}$$

ce qui entraîne en particulier $|S'| \leq \frac{1}{2}$: les directions optimales de poussée sont donc toujours à moins de 30° du plan horizontal local.

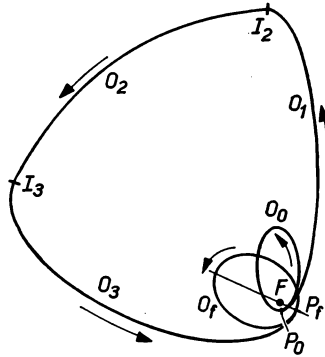


FIG. 16. Transfert bi-parabolique (ou transfert par l'infini).

Toutes les études effectuées jusqu'à présent (analytiquement ou numériquement) conduisent à des solutions mono, bi ou tri-impulsionnelles ou bien à des solutions "bi-paraboliques" (ou "par l'infini") utilisant optimalement la suite ellipse → parabole → parabole → ellipse, suite que l'on déduit aisément des §§ 3.1.1 à 3.1.5 et qui comporte deux impulsions finies tangentielles (en P_0 et P_1) et deux impulsions infiniment petites à grande distance (fig. 16).

(En pratique on utilisera plutôt des ellipses très allongées.)

Ce résultat "expérimental" combiné avec les résultats globaux I et II ci-dessus permet de répondre avec une quasi-certitude à la question "How many impulses?" posée par T. N. Edelbaum:⁽¹²⁾ entre orbites elliptiques (non sécantes à la planète attirante), lorsque la durée du transfert est indifférente, les solutions optimales sont ou bien mono, bi ou tri-impulsionnelles ou bien du type "bi-parabolique", en tout cas si jamais il y a des cas dont la solution optimale comporte quatre impulsions distinctes finies ils ne doivent se présenter que très rarement.

Nous allons maintenant exposer successivement les divers cas actuellement résolus.

3.5.1. Transferts optimaux entre orbites quasi-circulaires proches. Ce cas est évidemment d'une très grande importance pratique dans les applications spatiales, il a été étudié en particulier en refs. 30, 40, 41 et 42.

Soient $a_0, e_0, a_f, e_f, i_f, \Omega_f$ et $\bar{\omega}_f$ les éléments des orbites initiale et finale (avec évidemment dans le cas présent $a_f \simeq a_0, e_0 \simeq 0, e_f \simeq 0, i_f \simeq 0$). Nous utiliserons les notations de Marec:⁽⁴¹⁾

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_f - a_0 \\ \left. \begin{aligned} \Delta e_{\parallel} &= e_f \cos \omega_f - e_0 \cos \Omega_f \\ \Delta e_{\perp} &= e_f \sin \omega_f + e_0 \sin \Omega_f \end{aligned} \right\} \omega_f = \bar{\omega}_f - \Omega_f \\ \Delta j &= i_f \end{aligned}$$

Au second ordre près (l'infiniment petit principal étant $\varepsilon = \max \left(\frac{|\Delta a|}{a_0}; e_0; e_f; i_f \right)$) l'étude ne dépend que de $\frac{\Delta a}{a_0}, \Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}$ et Δj .

Remarque: Si nous appelons \vec{e} le vecteur de longueur e dirigé de F vers le périhélie $P \left(\vec{e} = e \frac{\vec{FP}}{FP} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{H}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right)$.

Δe_{\parallel} est la variation de \vec{e} parallèlement à la ligne des nœuds et Δe_{\perp} est celle dans le sens perpendiculaire, ce qui explique ces deux rotations.

Les transferts optimaux sont de trois types:

Type I (appelé type II en ref. 40): il y a deux impulsions bien déterminées; ce type dégénère dans le cas coplanaire ($i_f = 0$).

Type II (appelé type I en ref 40): il y a deux impulsions bien déterminées appliquées aux nœuds.

Type III: l'étude au second ordre près ne suffit pas à déterminer le transfert optimal, il y a de nombreuses solutions équivalentes à l'ordre conservé, elles vérifient toutes $3S'^2 = W'^2$ pour chacune de leurs impulsions (on peut même, au même ordre près, utiliser des arcs de poussée continue).

La solution optimale est de type I (bi-impulsionnel) si et seulement si:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \left| \frac{\Delta a}{a_0} \right| \geq |\Delta e_{\parallel}| \\ 2^\circ \quad & \left(\frac{\Delta a}{a_0} \right)^2 \geq (\Delta e_{\parallel})^2 + (\Delta e_{\perp})^2 - (\Delta j)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} |\Delta e_{\perp} \cdot \Delta j| \end{aligned}$$

Les deux impulsions présentent alors la symétrie:

$$\begin{aligned} S'_2 &= -S'_1 \\ T'_2 &= T'_1 & \text{sgn } T'_1 &= \text{sgn } \Delta a \\ W'_2 &= -W'_1 \end{aligned}$$

Les positions des points I_1 et I_2 sont données par une équation du second degré.

La vitesse caractéristique C_f du transfert est donnée, au second ordre près, par :

$$1^\circ \quad \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2 + (\Delta j)^2 \leq \left(\frac{C_f}{n_0 a_0}\right)^2 \leq \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2 + (\Delta j)^2 + (\Delta e_\perp)^2$$

$$2^\circ \quad (\Delta e_\perp)^2 \left[\left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 - (\Delta e_{//})^2 \right] = \left[\left(\frac{C_f}{n_0 a_0}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 - (\Delta e_{//})^2 \right]$$

$$\left[(\Delta e_\perp)^2 + (\Delta j)^2 + \left(\frac{\Delta a}{2a_0}\right)^2 - \left(\frac{C_f}{n_0 a_0}\right)^2 \right]$$

La solution optimale est de type II (bi-impulsionnel nodal) si et seulement si :

$$1^\circ \quad |\Delta e_{//}| \geq \left| \frac{\Delta a}{a_0} \right|$$

$$2^\circ \quad |\Delta j| \geq |\Delta e_\perp| \cdot \sqrt{3}$$

Les deux impulsions présentent alors la symétrie :

$$\left. \begin{array}{l} S'_2 = -S'_1 \\ T'_2 = -T'_1 \\ W'_2 = -W'_1 \end{array} \right\} \text{ avec : } \frac{W'_1}{\Delta j} = \frac{2T'_1}{\Delta e_{//}} = -\frac{S'_1}{\Delta e_\perp}$$

Les points I_1 et I_2 sont diamétralement opposés sur la ligne des nœuds.

Enfin : C_f vaut :

$$C_f = n_0 a_0 \left[\sqrt{\frac{(\Delta e_{//})^2}{4} + (\Delta e_\perp)^2 + (\Delta j)^2} + (\text{ordre } \varepsilon^2) \right]$$

La solution optimale est de type III si et seulement si :

$$1^\circ \quad |\Delta j| \leq |\Delta e_\perp| \cdot \sqrt{3}$$

$$2^\circ \quad \left(\frac{\Delta a}{a_0}\right)^2 \leq (\Delta e_{//})^2 + (\Delta e_\perp)^2 - (\Delta j)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} |\Delta e_\perp \cdot \Delta j|$$

La vitesse caractéristique C_f des diverses solutions équivalentes (au second ordre près) est :

$$C_f = \frac{n_0 a_0}{2} \left[\sqrt{(\Delta e_{//})^2 + [|\Delta e_\perp| + |\Delta j| \sqrt{3}]^2} + (\text{ordre } \varepsilon^2) \right]$$

Rappelons que pour ce type III on a toujours : $3S'^2 = W'^2$ alors que pour les deux autres : $3S'^2 \leq W'^2$.

Les études signalées en référence donnent tous les renseignements nécessaires.

Des études plus poussées de ces problèmes :

1° Étude au 3ème ordre près.⁽⁴²⁾

2° Étude au second ordre près lorsque les orbites O_0 et O_f sont voisines et d'excentricité faible mais non nulle,⁽⁴¹⁾

permettent de lever le doute dans les cas singuliers rencontrés ci-dessus, les solutions optimales sont alors toujours à 1, 2 ou 3 impulsions et l'étude, prometteuse mais encore incomplète, au 3ème ordre près, permet de déterminer le sens optimal de succession des impulsions.

3.5.2. *Transferts optimaux entre orbites elliptiques coaxiales* (c'est-à-dire ayant même direction de grand axe)

Ce cas contient tous les transferts entre cercles, il a été étudié en particulier dans les références 33 à 38 et 44 à 49.

Nous dirons que les orbites sont coaxiales directes si les périées sont d'un même côté du centre attractif ($\widehat{P_0FP_f} = 0^\circ$: $\bar{\omega}_f = 0^\circ$, $\Omega_f = 0^\circ$ ou 180°) et inverses dans le cas contraire ($\widehat{P_0FP_f} = 180^\circ$: $\bar{\omega}_f = 180^\circ$, $\Omega_f = 0^\circ$ ou 180°).

Entre orbites coaxiales directes les transferts optimaux sont de trois types possibles (démonstration en 49):

- (I) Le transfert de "Hohmann généralisé" (fig. 16 bis) par une ellipse intermédiaire d'apogée, l'apogée le plus élevé, et de périée, le périée de l'autre orbite, il y a deux impulsions une en chacun de ces deux points.

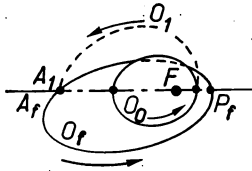


FIG. 16 bis. Transfert du type "Hohmann généralisé" (ellipses coaxiales directes).

- (II) Le transfert "bi-parabolique" ou "par l'infini" que nous avons déjà souvent rencontré. Dans le cas particulier des orbites coaxiales directes (fig. 17) ce transfert peut être rendu tri-impulsionnel (une seule impulsion infiniment petite à l'infini).

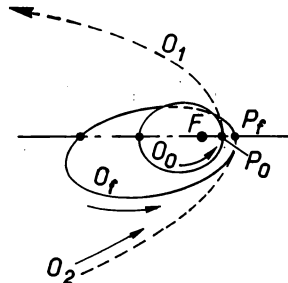


FIG. 17. Transfert bi-parabolique (ellipses coaxiales directes).

(III) Le transfert “à trois impulsions” (fig. 18) utilisant deux ellipses intermédiaires d’apogée commun plus élevé que les deux apogées données et de périégée respectivement ceux des orbites données. Les trois impulsions ont évidemment lieu en $P_0 (\equiv P_1)$, $A_1 (\equiv A_2)$ et $P_2 (\equiv P_f)$;

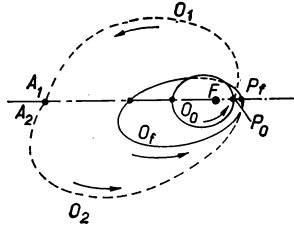


FIG. 18. Transfert à 3 impulsions (ellipses coaxiales directes).

$$A_1 > \max(A_0; A_f); \quad \frac{i_2 - i_1}{i_f} > \frac{4 + \sqrt{7}}{9}.$$

la plus grande partie du changement d’orientation du plan d’orbite a lieu en A_1 :

$$0 < i_1 < i_2 < i_f \quad \text{et} \quad \frac{i_2 - i_1}{i_f} > \frac{4 + \sqrt{7}}{9} = 0.738$$

Entre orbites coaxiales inverses les solutions optimales sont analogues :

(I) Au transfert “de Hohmann généralisé” correspondent les transferts “par les apogées” et “par les périégées” (fig. 19). Ce dernier ne peut être optimal que si :

$$\min [A_0; A_f] \leq \max [P_0; P_f]$$

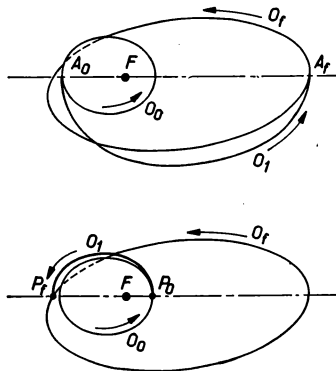


FIG. 19. Transferts “par les apogées” et “par les périégées” (ellipses coaxiales inverses).

- (II) Le transfert “bi-parabolique” (fig. 20) ne peut cette fois-ci être rendu tri-impulsionnel.

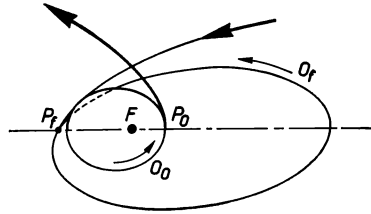


FIG. 20. Transfert bi-parabolique (ellipses coaxiales inverses).

- (III) Dans le mode “à trois impulsions” (fig. 21) le point I_2 commun aux orbites intermédiaires O_1 et O_2 n'est pas forcément leur apogée, il peut être le périhélie de l'une d'entre elles, il est toujours extérieur au segment $A_0 A_f$ soit d'un côté soit de l'autre (les trois impulsions sont donc soit en P_0 puis A_1 puis A_f , soit en A_0 puis A_2 puis P_f).

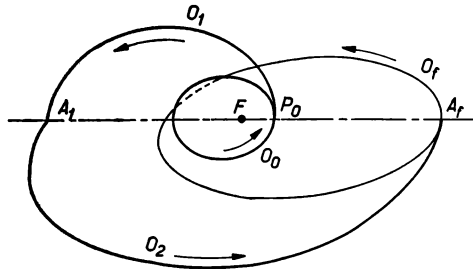


FIG. 21. Transfert à 3 impulsions (ellipses coaxiales inverses). Les 3 impulsions sont soit en P_0, A_1, A_f avec $A_1 > A_0$ ou en A_0, A_2, P_f avec $A_2 > A_f$

Il n'y a pas d'autres solutions optimales pour les transferts entre orbites coaxiales, toutes les orbites intermédiaires sont coaxiales aux orbites données, toutes les impulsions sont dans le plan horizontal local ($S' \equiv 0$) en l'une ou l'autre des extrémités du grand axe.

Bien entendu dans un cas particulier donné il convient de rechercher le mode optimal de transfert et d'optimiser l'orientation du ou des plans des orbites intermédiaires ainsi que, dans le cas des transferts “à trois impulsions”, la position de la seconde impulsion. Nous allons indiquer l'une des méthodes que l'on peut suivre et les résultats que l'on obtient.

Dans le cas où le mode optimal de transfert est “bi-parabolique” l'optimum est déjà connu : les paraboles ou quasi-paraboles intermédiaires ont même plan et périhélie respectivement que les orbites O_0 et O_f et la vitesse caractéristique du transfert est :

$$C_f = C_{f\infty} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_f}} - V_{P_0} - V_{P_f}$$

Dans les autres cas, nous ferons l'analyse pour un transfert de type "à trois impulsions", les transferts de "Hohmann généralisé", "par les apogées" et "par les périées" en étant des cas particuliers limites.

Pour conserver une unité de notation, nous supposons :

- 1° que la première impulsion a lieu en P_0 (en utilisant au besoin la réversibilité)
- 2° que tous les sommets du grand axe situés du côté de P_0 sont baptisés P' et ceux situés de l'autre côté sont baptisés A' , ainsi si O_0 et O_n sont coaxiales directes: $P'_n \equiv P_n$ et $A'_n \equiv A_n$ et sinon $P'_n \equiv A_n$ et $A'_n \equiv P_n$

Avec ces conventions le transfert "à trois impulsions" examiné se présente comme l'indique la figure 22, les orbites O_0 et O_1 sont coaxiales directes et $A_1 \equiv A_0$.

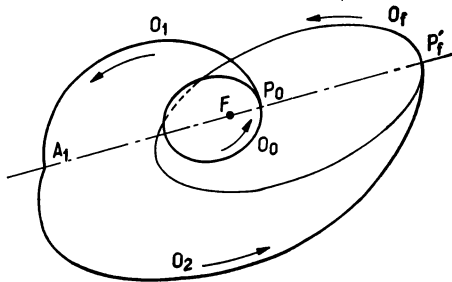


FIG. 22. Analyse d'un transfert à 3 impulsions.

Les trois impulsions nécessaires, en P_0 , A_1 et P'_f peuvent être représentées sur la figure 23 (projection sur le plan perpendiculaire au grand axe commun) avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB_1} &= \overrightarrow{V_{P_0}}; & \overrightarrow{OB_2} &= \overrightarrow{V_{P'_f}}; & \overrightarrow{B_1B_2} &= \vec{I}_1 \\ \overrightarrow{OB_3} &= \overrightarrow{V_{A_1}}; & \overrightarrow{OB_4} &= \overrightarrow{V_{A'_2}}; & \overrightarrow{B_3B_4} &= \vec{I}_2 \\ \overrightarrow{OB_5} &= \overrightarrow{V_{P'_2}}; & \overrightarrow{OB_6} &= \overrightarrow{V_{P'_f}}; & \overrightarrow{B_5B_6} &= \vec{I}_3 \end{aligned}$$

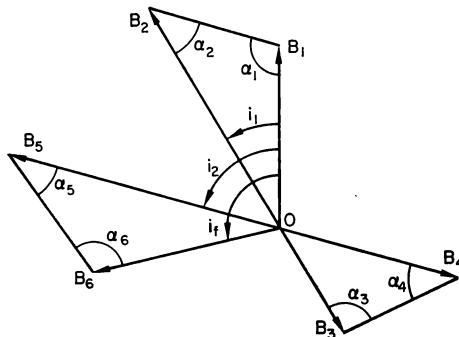


FIG. 23. Analyse des 3 impulsions.

L'optimisation à A_1 fixé de $C_f = |\bar{I}_1| + |\bar{I}_2| + |\bar{I}_3|$ en fonction de i_1 et i_2 conduit à résoudre le système:

$$\begin{aligned} V_{P_0} \sin \alpha_1 &= V_{P_1} \sin \alpha_2 = V_{A_1} \sin \alpha_3 = V_{A'_2} \sin \alpha_4 = V_{P'_2} \sin \alpha_5 = V_{P'_f} \sin \alpha_6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 180^\circ - i_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 360^\circ - i_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 &= 540^\circ - i_f \end{aligned}$$

compte tenu des conditions suivantes:

- 1° Les angles α_i sont saillants ($0^\circ \leq \alpha_i \leq 180^\circ$)
- 2° L'angle α_i qui a le plus grand sinus, donc celui qui correspond à la plus petite des 6 vitesses V_{P_0} à $V_{P'_f}$, est aigu ou obtus (ou droit), les autres ont un cosinus de signe bien déterminé: 2 sont obtus et 3 sont aigus, en particulier α_1 est obtus et α_2 aigu, de plus si les orbites O_0 et O_f sont coaxiales directes α_6 est obtus et α_5 aigu (la plus petite des 6 vitesses étant alors V_{A_1} ou $V_{A'_2}$).

Le système obtenu a (sauf exception dans le cas où la plus petite des 6 vitesses V_{P_0} à $V_{P'_f}$ est égale à l'une des 5 autres) toujours une solution et une seule en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ donc en i_1 et i_2 (avec bien entendu $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_f$).

i_1 et i_2 étant ainsi optimisés pour A_1 fixé, il reste à déterminer la valeur optimale de A_1 (compte tenu de $A_1 \geq \max(A_0, A_f)$ si O_0 et O_f sont coaxiales directes et de seulement $A_1 \geq A_0$ sinon).

Pour cela on peut utiliser:

$$\frac{dC_f}{dA_1} = \frac{V_{P_0} \sin \alpha_1}{2A_1} \left[\operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} - \cot \alpha_3 + \operatorname{tg} \frac{\alpha_4 - \alpha_5}{2} - \cot \alpha_4 \right]$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 ayant bien entendu les valeurs optimales calculées ci-dessus.

L'étude complète est assez malaisée si O_0 et O_f sont coaxiales inverses, nous indiquerons seulement quelques résultats.

Par contre, entre orbites coaxiales directes la quantité $A_1^2 \frac{dC_f}{dA_1}$ s'annule au plus deux fois sur la demi-droite à étudier ($A_1 \geq \max[A_0; A_f]$), quand c'est le cas, elle est positive entre les zéros et négative à l'extérieur, on obtient donc beaucoup de renseignements sur le mode optimal de transfert en étudiant le signe de $A_1^2 \cdot \frac{dC_f}{dA_1}$ pour

$A_1 = \max[A_0; A_f]$ et $A_1 = +\infty$ (dans ce dernier cas):

$$\operatorname{sgn} A_1^2 \frac{dC_f}{dA_1} = \operatorname{sgn} \left[\cos i_f + \frac{1}{4} - \frac{3P_0 + 3P_f}{8\sqrt{P_0 P_f}} \right]$$

Grâce à ces résultats, on peut tracer les figures 24 et 25 permettant de déterminer immédiatement le mode optimal de transfert dans la plupart des cas.

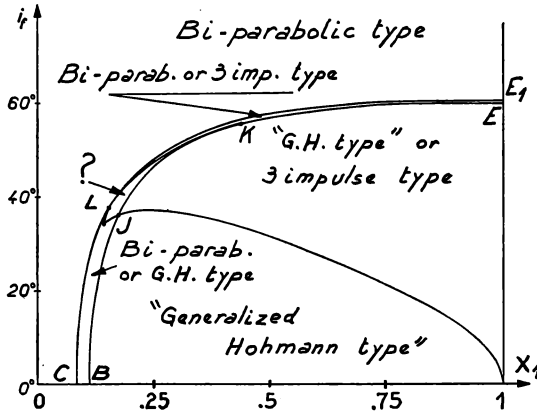


FIG. 24. Détermination du type de transfert optimal entre ellipses coaxiales directes par rapport à $x_1 = \frac{\min(P_0; P_f)}{\max(P_0; P_f)}$ et i_f .

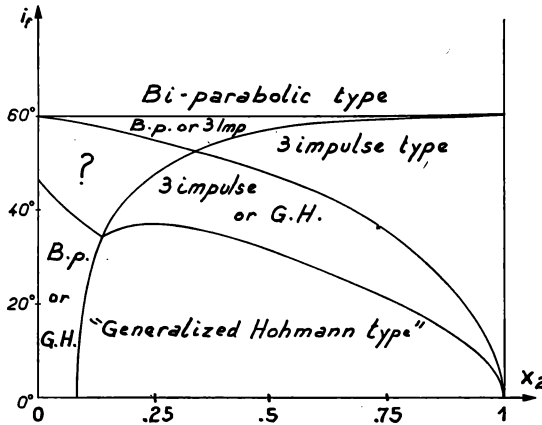


FIG. 25. Détermination du type de transfert optimal entre ellipses coaxiales directes par rapport à $x_2 = \frac{\min(P_0; P_f)}{\max(P_0; P_f)}$ et i_f .

Les éléments de ces deux figures sont donnés avec précision dans ref. 49 ainsi que la résolution complète dans le cas $P_0 = P_f$.

Remarque: Si

$$[-9P_0 + 30\sqrt{P_0P_f} - 9P_f] \left[\sqrt{\frac{2P_0}{1+e_0}} + \sqrt{\frac{2P_f}{1+e_f}} \right] \leq [\sqrt{P_0} + \sqrt{P_f}] [-17P_0 + 50\sqrt{P_0P_f} - 17P_f]$$

ce qui est le cas par exemple si $\frac{4}{9} \leq \frac{P_0}{P_f} \leq \frac{9}{4}$ et $e_0 + e_f \geq 1 - 1.6 \min[e_0; e_f]$, l'angle limite des cas "bi-paraboliques" est obtenu rigoureusement pour $\cos i_f = \frac{3P_0 + 3P_f}{8\sqrt{P_0 P_f}} - \frac{1}{4}$ (courbe *EKJB* — figure 24) et la limite est une limite "bi-parabolique" — "trois impulsions" (il y a alors continuité des solutions optimales). Sinon la limite correspond à un angle plus élevé et il n'y a pas continuité des solutions optimales.

Voici maintenant quelques résultats concernant les orbites coaxiales inverses:

— Le transfert optimal est du type "bi-parabolique" s'il l'est entre orbites coaxiales directes de mêmes éléments a_0, e_0, a_f, e_f et i_f .

— Le transfert optimal est du type "bi-parabolique" s'il l'est entre orbites coplanaires ($i_f = 0$) coaxiales inverses ($\bar{\omega}_f = 180^\circ$) de même éléments a_0, e_0, a_f et e_f (voir § 3.5.3.5) en particulier $e_0 + e_f \geq 1.07066$ est une condition suffisante d'optimalité de type "bi-parabolique".

— Le transfert optimal n'est pas du type "bi-parabolique" si en posant

$$\varrho = \frac{\max(A_0; A_f)}{\min(P_0; P_f)} ; \quad (\varrho \geq 1)$$

on a

$$\cos \frac{i_f}{2} \geq \varrho \sqrt{2\varrho} - \left(\varrho - \frac{3}{4} \right) \sqrt{2\varrho + 2}$$

ainsi par exemple si $\varrho \leq 2,5$ et si $i_f \leq 32^\circ, 47$ le transfert optimal n'est pas du type "bi-parabolique".

Lorsque $\varrho \simeq 1$ la valeur limite de i_f , entre les cas "à 2 impulsions" ("par les périgées" ou "par les apogées"), cas qui correspondent à $i_f \leq i_{\text{limite}}$, et les cas "à 3 impulsions" (au-delà de i_{limite}), est telle que:

$$\sqrt{\frac{\varrho - 1}{2\sqrt{15}}} + \text{ordre}(\varrho - 1) \leq i_{\text{limite}} \leq \sqrt{2(\varrho - 1)} + \text{ordre}(\varrho - 1)$$

Enfin, il est assez aisé de comparer les transferts "par les périgées" et "par les apogées":

$$\text{Si } \min [A_0; A_f] > \max [P_0; P_f]$$

le transfert "par les apogées" est le meilleur des deux.

Sinon nous supposons, en utilisant au besoin la réversibilité, que $A_0 \leq P_f$, la figure 26 aide alors à effectuer la comparaison lorsque $\varrho \simeq 1$ en fonction de

$$x = \frac{i_f^2}{\log \frac{P_f}{P_0}}$$

et de

$$y = \frac{e_0}{e_f} + \text{ordre } [\varrho - 1]$$

La courbe limite supérieure dont les équations sont $x = \frac{y-1}{y+1}$ entre A et B, $x = \frac{7-y-4\sqrt{3-y}}{y+1}$ entre B et C et $y = 3$ au-delà de C correspond au cas limite $A_0 = P_f$, elle est aisément généralisable dans le cas $\varrho \gg 1$.

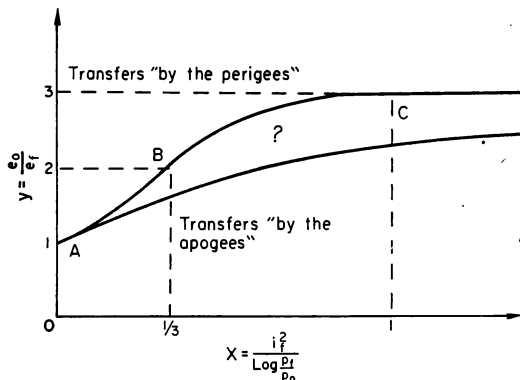


FIG. 26. Comparaison entre les transferts "par les périgées" et "par les apogées" dans le cas coaxial inverse quand $A_0 \leq P_f$ et $\frac{A_f}{P_0} = \varrho \approx 1$.

La courbe inférieure a pour équations:

$$x = \frac{(z+1)(\sqrt{\Delta}-6z)}{2z(z-1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{1-z^2+\sqrt{\Delta}}{6} \quad \text{avec} \quad \Delta = z^4+34z^2+1$$

elle correspond au cas limite où $\frac{e_0}{\varrho-1}$ et $\frac{e_f}{\varrho-1}$ sont voisins de zéro.

3.5.2.1. Cas particuliers

(I) *Transferts entre cercles.* L'étude complète conduit aux résultats indiqués sur la figure 27. La courbe E_1LC est celle de la figure 24. Le point E_1 correspond au transfert optimal le plus ouvert qui ne soit pas de type "bi-parabolique", on y obtient $i_f = 60^\circ,1850$; au-delà de cette valeur tous les transferts optimaux, même entre orbites non coaxiales, sont "bi-paraboliques".

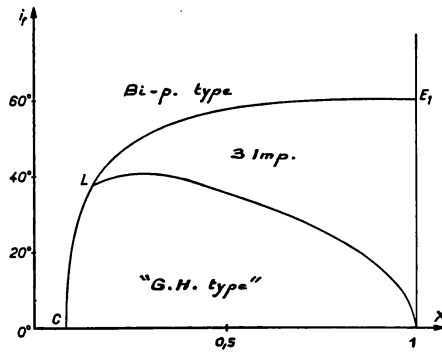


FIG. 27. Transferts optimaux entre cercles

$$x = \min \left(\frac{a_0}{a_f}; \frac{a_f}{a_0} \right)$$

(II) *Transferts entre orbites coaxiales directes proches.* Dans ce cas $i_f \simeq 0^\circ$ et $\frac{P_0}{P_f} \simeq 1$ le transfert optimal est donc (cf. figure 24) presque toujours du type “de Hohmann généralisé”, il peut toutefois être “à trois impulsions”: si les orbites données sont de quasi-cercles et si (en supposant $A_0 \leq A_f$ au besoin grâce à la réversibilité):

$$i_f > i_{\text{limite}} = \frac{5A_f - 3P_0 - 2P_f - \sqrt{(3A_f - 2P_0 - P_f)^2 - (A_f - A_0)(2A_f - P_0 - P_f)}}{\sqrt{2A_f(2A_f - P_0 - P_f)}} \\ + \text{ordre} \left(\frac{2A_f - P_0 - P_f}{2A_f} \right)$$

3.5.3. Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires

3.5.3.1. Transferts optimaux entre orbites coplanaires et coaxiales directes

La première étude d'un transfert optimal entre orbites est celle de Hohmann en 1925⁽¹³⁾ sur les transferts bi-impulsionnels entre cercles coplanaires, cette étude se généralise sans difficulté⁽¹⁴⁻³⁰⁾ au cas des transferts bi-ou multi-impulsionnels optimaux entre ellipses coplanaires et coaxiales directes, ce qui est un cas particulier du § 3.5.2 précédent. On obtient des transferts “de Hohmann généralisé” (ou tout simplement “de Hohmann”) et “bi-parabolique” (fig. 28).

L'ellipse de transfert de Hohmann est bi-tangente “en l'apogée le plus élevé et au périégée de l'autre orbite”.

La discussion entre les deux modes de transfert est donnée sur la figure 29 en fonction de

$$x = \frac{\max[P_0; P_f]}{\min[P_0; P_f]}$$

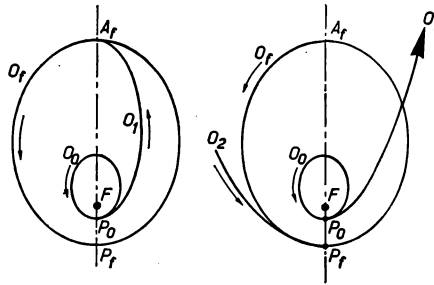


FIG. 28. "Transfert de Hohmann" ($A_1 = \max(A_0; A_f)$) et transfert bi-parabolique (ellipses coplanaires et coaxiales directes).

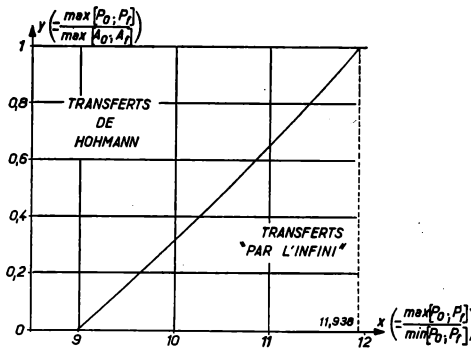


FIG. 29. Discussion du transfert optimal entre ellipses coplanaires et coaxiales directes.

et de

$$y = \frac{\max[P_0; P_f]}{\max[A_0; A_f]}$$

3.5.3.2. Généralités sur les transferts optimaux entre ellipses coplanaires

Les transferts optimaux entre ellipses coplanaires sont de huit modes possibles tous plans et impulsions; pour les caractériser, nous conviendrons d'indiquer par une lettre A les impulsions accélératrices ($\vec{\gamma} \cdot \vec{V} > 0$) et par une lettre D les impulsions décélératrices ($\vec{\gamma} \cdot \vec{V} < 0$).

Les huit modes sont alors:

- 1° Modes à une impulsion: A ou D , l'impulsion a toujours lieu au point d'intersection le plus bas des deux orbites. Ces modes sont rarement optimaux.
- 2° Modes à deux impulsions: AA ou AD ou DD . Ces trois modes sont très fréquents, le premier se rencontre surtout lorsque l'orbite finale entoure

l'orbite initiale, le second lorsque ces deux orbites sont sécantes et le troisième lorsque l'orbite finale est intérieure à l'orbite initiale.

- 3° Modes à trois impulsions: AAD ou ADD , ces deux modes sont très rarement optimaux: ils ne se rencontrent que si $e_0 + e_f > 1.712$ et $|\bar{\omega}_f| < 22^\circ$.
- 4° Mode "bi-parabolique" bien connu utilisant optimalement la suite ellipse \rightarrow parabole \rightarrow parabole \rightarrow ellipse avec donc deux impulsions finies tangentielles, l'une en P_0 et l'autre en P_f et deux impulsions infiniment petites intermédiaires à grande distance. Ce mode est assez fréquemment optimal mais nous verrons que, contrairement au cas des orbites dont l'angle des plans est élevé, il a, dans le cas coplanaire, peu d'intérêt pratique (voir §§ 3.5.3.7 et 4.1).

3.5.3.3. Angles utiles et commutations

L'étude analytique des transferts optimaux entre orbites coplanaires non coaxiales commence habituellement, après démonstration de la planéité des solutions optimales, par l'examen du domaine de manœuvrabilité propre à chaque orbite elliptique,^(28-30, 49) domaine qui, aux questions d'échelle près, ne dépend que de l'excentricité de l'orbite.

L'intérêt de la notion de domaine de manœuvrabilité a été mis en évidence par M. Contensou.⁽⁷⁾

L'analyse de ces domaines permet de dégager les notions "d'angle utile" et de "commutation" (cette dernière notion s'obtient aussi commodément en utilisant la théorie de Pontryagin⁽⁸⁾).

Étude des angles utiles

"L'angle utile" est l'angle en dehors duquel toute direction de poussée est obligatoirement non optimale et dans lequel une direction de poussée peut être optimale pour un transfert approprié.

À cause des symétries du problème l'angle utile est toujours composé de deux angles opposés par le sommet (fig. 30), l'angle avant correspond aux impulsions accélératrices (A) et l'autre aux impulsions décélératrices (D).

Nous repèrerons par ψ_i et ψ_s les directions des bords de l'angle utile, ces deux angles ne dépendent que de l'excentricité e de l'orbite étudiée et de l'anomalie vraie v de la position étudiée.

On a toujours:

$$0 \leq \psi_i \leq \psi_s \leq \Psi \leq 90^\circ \quad \text{si } \sin v \geq 0$$

$$0 \geq \psi_i \geq \psi_s \geq \Psi \geq -90^\circ \quad \text{si } \sin v \leq 0$$

$$|\psi_s| < 26^\circ.2 \quad \text{--- --- --- réf. 30}$$

$$|\psi_s - \psi_i| \leq 12^\circ.5$$

$$\frac{\psi_s - \psi_i}{\Psi} < 0.2$$

Les expressions analytiques les plus précises de ψ_i et ψ_s sont actuellement:

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{e \sin v}{3 + e \cos v} + \frac{18e^3 \sin^3 v}{(3 + e \cos v)^5} + \frac{2e^5 \sin^5 v}{81} + \text{ordre}(e^6 \sin^5 v)$$

Si $e \leq 0.5$ cette expression donne sur ψ_i une erreur inférieure à $6^\circ \cdot e^6 \cdot \sin^4 v \cdot \min[1; 2 \sin v]$ soit au maximum $0^\circ.1$ pour $e = 0.5$ et $0^\circ.005$ pour $e = 0.3$.

$$\operatorname{tg} \psi_s = \frac{e \sin v(2 - e \cos v)}{4 + e \cos v - e^2 \cos^2 v} - \frac{2e^3 \sin^3 v(6 - e^2 \cos^2 v)^2}{(3 + e \cos v)(4 + e \cos v - e^2 \cos^2 v)^4} - \frac{13e^5 \sin^5 v}{1536} + \text{ordre}(e^6 \sin^5 v)$$

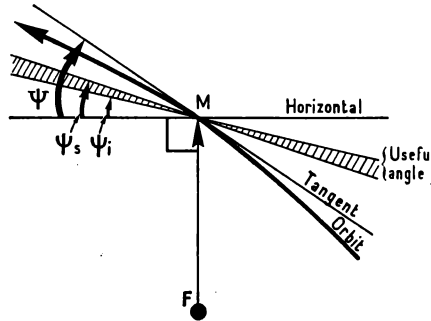


FIG. 30. "L'angle utile" et les angles ψ_i et ψ_s .

Si $e \leq 0.7$ cette expression donne sur ψ_s une erreur inférieure à $0^\circ.6 e^6 \cdot \sin^4 v \cdot \min[1; 2 \sin v]$ soit au maximum $0^\circ.07$ pour $e = 0.7$ et $0^\circ.01$ pour $e = 0.5$.

Rappelons en comparaison que:

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{e \sin E}{k}$$

Remarque: pour $0.9250 < e < 1$ le domaine de manœuvrabilité subit un changement qualitatif important,^(28, 29, 49) deux arcs obligatoirement balistiques sans aucune direction utile apparaissent, ces arcs sont symétriques l'un de l'autre par rapport au grand axe de l'orbite et sont toujours compris entre le périhélie et les sommets du petit axe.

On peut, pour ces excentricités voisines de 1, étudier l'angle utile en effectuant des développements limités en fonction de $k(= \sqrt{1 - e^2})$.

On obtient alors:

1° Au voisinage du péricée ($v \approx 0$)

$$\psi_i = \frac{v}{4} + \frac{v^3}{512} - \frac{3vk^2}{32} + (\text{ordre } k^5)$$

$$\psi_s = \frac{v}{4} - \frac{v^3}{512} - \frac{vk^2}{32} + (\text{ordre } k^5)$$

L'arc balistique commence à l'endroit où $\psi_i = \psi_s$, ce qui correspond à :

$$|v| = 4k + \frac{19}{6} k^3 + (\text{ordre } k^5)$$

2° Dans la partie haute de l'orbite ($v \approx 180^\circ$)

$$\text{tg } \psi_s = \frac{3}{2} \sin v - \frac{47}{16} \sin^3 v - \frac{17}{8} k^2 \sin v + (\text{ordre } k^5)$$

$$\text{tg } \psi_i = \sin v \cdot \max \left[\frac{1}{2} - \frac{3k^2}{8} + \frac{7}{16} \sin^2 v; -1 + \sqrt{3 + \frac{\cos E}{k^2}} \right].$$

Nous poserons plutôt:

$$\text{tg } \psi_i = \frac{\sin v}{2} + \frac{7}{16} \sin^3 v - \frac{3}{8} k^2 \sin v + (\text{ordre } k^5)$$

$$\text{et } \text{tg } \psi'_i = \sin v \left[-1 + \sqrt{3 + \frac{\cos E}{k^2}} \right] + (\text{ordre } k^3)$$

d'où: pour $\cos E < -\frac{3}{4} k^2 + (\text{ordre } k^4)$, l'angle utile va de ψ_i à ψ_s .

$$\text{pour } -\frac{3}{4} k^2 + (\text{ordre } k^4) < \cos E < \frac{13}{4} k^2 + (\text{ordre } k^4),$$

l'angle utile va de ψ'_i à ψ_s .

$$\text{pour } \cos E > \frac{13}{4} k^2 + (\text{ordre } k^4):$$

il n'y a plus d'angle utile.

Ainsi l'un des arcs obligatoirement balistiques s'étend de $v = 4k + \frac{19}{6} k^3 + (\text{ordre } k^5)$ à $E = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{4} k^2 + (\text{ordre } k^4)$ [soit $v = \pi - k - \frac{41}{12} k^3 + (\text{ordre } k^5)$] et l'autre est symétrique par rapport au grand axe.

Ces arcs balistiques disparaissent pour $e \approx 0.9250$, les points ultimes ($v = \pm 122^\circ.31$) et les directions ψ_s correspondantes ($\psi_s = \psi_i = \pm 26^\circ.04$) font partie des conditions rencontrées au cours de la description de la spirale de Lawden.⁽⁶¹⁾

Les études analytico-numériques^(30, 32) indiquent graphiquement les valeurs de ψ_i et ψ_s pour les excentricités multiples de 0.1.

Étude des commutations

Les angles utiles jouent un rôle très important dans les commutations, c'est-à-dire lors du passage d'une impulsion à la suivante.

Considérons une orbite intermédiaire, par exemple l'orbite O_1 , le mobile M arrive sur O_1 en I_1 (point où a lieu la première impulsion) et quitte O_1 en I_2 , les points I_1 et I_2 sont liés par une relation "de commutation" propre à l'orbite O_1 et les directions d'impulsions en ces points sont au bord des angles utiles locaux relatifs à l'orbite O_1 .

Les commutations sont de trois types :

1° Commutations relatives aux angles ψ_s

La relation "de commutation" liant les anomalies vraies v_1 et v_2 (sur l'orbite O_1) des points I_1 et I_2 est :

$$\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} = \frac{3+e_1}{3-e_1} \cdot \frac{4+e_1-e_1^2}{4-e_1-e_1^2} + \text{ordre}(e_1^3 \sin^2 v_1)$$

(Une expression plus précise est donnée en ref. 28), et l'on obtient pour ψ_1 et ψ_2 :

$$\psi_1 - \psi_{s_1} = \psi_2 - \psi_{s_2} = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \cos v_1 > \cos v_2 \\ 180^\circ & \text{si } \cos v_1 < \cos v_2 \end{cases}$$

ψ_{s_1} et ψ_{s_2} désignant bien entendu les valeurs de ψ_s aux points I_1 et I_2 sur l'orbite O_1 .

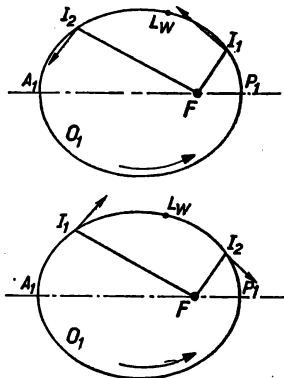


FIG. 31. Commutations relatives aux angles ψ_s (type AA ou DD).

On voit ainsi que les commutations relatives aux angles ψ_s (fig. 31) sont de type AA (si $\cos v_1 > \cos v_2$) ou DD (si $\cos v_1 < \cos v_2$), le cas limite, $\cos v_1 = \cos v_2$ (donc $v_1 = v_2$), est obtenu lors de la description de la spirale de Lawden. (61)

Rappelons que les résultats concernant la spirale de Lawden peuvent être exprimés exactement en fonction de $\sin \psi_s = s$, on y obtient :

$$e_1 \sin v_1 = e_1 \sin v_2 = \frac{6s(1-2s^2)(3-4s^2)\sqrt{1-s^2}}{(3-5s^2)^2}$$

$$e_1 \cos v_1 = e_1 \cos v_2 = \frac{3s^2(-7+21s^2-16s^4)}{(3-5s^2)^2}$$

mais la spirale de Lawden n'est qu'une solution limite non optimale du problème du transfert entre orbites.

2° Commutations relatives aux angles ψ_i

On obtient de même :

$$\operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} = - \left(\frac{3+e_1}{3-e_1} \right)^2 + \text{ordre } (e_1^3 \sin^2 v_1)$$

(une expression plus précise est donnée en ref. 28) et : $\psi_1 = \psi_{i_1}$

$$\psi_2 = \psi_{i_2} + 180^\circ$$

les commutations relatives aux angles ψ_i sont donc de type *AD* (fig. 32).

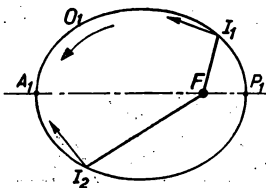


FIG. 32. Commutations relatives à l'angle ψ_i (type *AD*).

Remarque: le cas $v_1 = -v_2$ est simple (voir § 3.5.3.5).

3° Commutations relatives aux angles ψ'_i (donc pour $e_1 > 0.9250$).

L'expression analytique la plus précise de cette commutation est actuellement :

$$y = \text{paramètre auxiliaire}; \quad -\frac{k_1}{2} \leq y \leq +\frac{k_1}{2}; \quad (k_1 = \sqrt{1-e_1^2})$$

$\varepsilon = 2^{\text{ème}} \text{ paramètre auxiliaire} = \pm 1$

$$\operatorname{tg} \psi'_{i_1} = \varepsilon \left[k_1 - \frac{3}{2} k_1^3 + y + \frac{k_1^2}{8} y + 5k_1 y^2 + \text{ordre } k_1^5 \right]$$

$$\operatorname{tg} \psi'_{i_2} = \varepsilon \left[-k_1 + \frac{3}{2} k_1^3 + y + \frac{k_1^2}{8} y - 5k_1 y^2 + \text{ordre } k_1^5 \right]$$

$$E_1 = \varepsilon \left[\frac{\pi}{2} - k_1^2 - y^2 - 4k_1 y - \frac{k_1^4}{2} + \text{ordre}(k_1^6, k_1^3 y) \right]$$

$$E_2 = -\varepsilon \left[\frac{\pi}{2} - k_1^2 - y^2 + 4k_1 y - \frac{k_1^4}{2} + \text{ordre}(k_1^6, k_1^3 y) \right]$$

$$\psi_1 = \psi'_{i_1}; \quad \psi_2 = \psi'_{i_2} + 180^\circ$$

Les commutations relatives aux angles ψ'_i sont donc aussi de type *AD*.

Bien entendu il est immédiat de déduire les commutations relatives à une orbite intermédiaire O_n quelconque de ces commutations relatives à l'orbite O_1 .

3.5.3.4. Détermination du mode optimal de transfert entre ellipses coplanaires

Grâce aux résultats du paragraphe précédent, il est aisé de construire des exemples de transferts bi-impulsionnels optimaux: il suffit de choisir une orbite intermédiaire O_1 (fig. 32 bis) puis une commutation optimale \bar{I}_1, \bar{I}_2

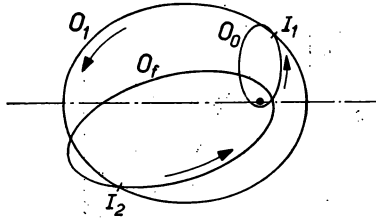


FIG. 32 bis. Exemple d'un transfert optimal à 2 impulsions.

sur cette orbite, \bar{I}_1 et \bar{I}_2 conduisent aux orbites O_0 et O_f et le transfert de O_0 à O_f par O_1 est optimal sous réserve que $|\bar{I}_1|$ et $|\bar{I}_2|$ satisfassent à une condition de la forme $|\bar{I}_2| \leq f |\bar{I}_1|$, f étant une certaine fonction non décroissante de $|\bar{I}_1|$.

Par contre le problème inverse, qui est le problème ordinaire: trouver O_1 (et éventuellement O_2) quand on connaît O_0 et O_f est beaucoup plus compliqué et n'est résolu que par approximations successives (§ 3.5.3.6), il faut tout d'abord déterminer le mode optimal de transfert entre O_0 et O_f .

L'étude des transferts optimaux entre orbites dont l'une est d'excentricité proche de un d'une part et la remarquable étude analytico-numérique de H. G. Moyer d'autre part⁽²⁹⁾ permettent de délimiter de manière assez précise les cas de transferts à 3 impulsions (*AAD* ou *ADD*).

L'étude de H. G. Moyer est l'analyse des transferts optimaux à une impulsion (mode *A* ou *D*) combinée avec la connaissance des commutations, elle permet donc d'étudier les transferts à 2 ou 3 impulsions dont une est finie et une ou deux sont infiniment petites, or ces cas sont fréquemment les cas limites.

On obtient ainsi :

1° La comparaison de $a_0^2 e_0^7$ et de $a_f^2 e_f^7$ permet de séparer les transferts de mode *AAD* de ceux de mode *ADD* :

Si $a_0^2 e_0^7 < a_f^2 e_f^7$ le transfert optimal n'est pas de mode *ADD*.

Si $a_0^2 e_0^7 > a_f^2 e_f^7$ le transfert optimal n'est pas de mode *AAD*.

(Si $a_0^2 e_0^7 = a_f^2 e_f^7$ le transfert optimal n'est pas "à 3 impulsions".)

2° Le mode *ADD* étant le mode retour inverse du mode *AAD*, il suffit d'étudier ce dernier, les résultats concernant l'autre étant symétriques.

3° La zone du plan (e_f, e_0) correspondant aux transferts de mode *AAD* (mais on peut bien sûr y rencontrer des transferts d'un autre mode) a été hachurée sur la figure 33 ci-contre, je propose de l'appeler "Domaine de Moyer" en remerciement pour ses travaux.

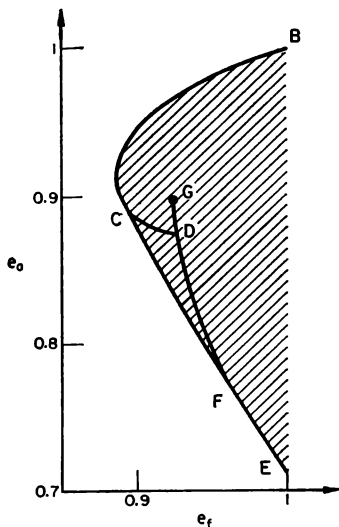


FIG. 33. Le domaine de H. G. Moyer ou domaine *AAD* à 3 impulsions.

La courbe limite *BCFE* est obtenue pour des transferts de type *AAD* équivalents au transfert correspondant de type bi-parabolique.

La courbe *BCD* correspond à des cas où seule la deuxième impulsion est finie, elle passe par les points :

$e_f =$	1	0.95	0.92	0.903	0.888	0.887	0.9	0.92
$e_0 =$	1	0.978	0.962	0.95	0.92	0.9	0.884	0.874

la pente en 1; 1 est de 0.36.

La courbe *EFDG* correspond à des cas où seule la première impulsion est finie, les points connus en sont *E* et *G*:

$$E : e_f = 1; \quad e_0 = \frac{5 + \sqrt{41}}{16} = 0.7127$$

$$\text{pente} = -\frac{3075 + 1855 \sqrt{41}}{10\,496} = -1.4246$$

$$G : e_f = 0.9250; \quad e_0 = 0.895; \quad \text{pente} = -\infty$$

La courbe *CF* correspond à des cas où seule la troisième impulsion est infiniment petite, elle est mal connue mais est sans doute très voisine de la bi-tangente.

D'autres limitations sont connues pour les cas de transferts "à 3 impulsions", il faut toujours:⁽²⁸⁾

$$1^\circ \left(\frac{\sqrt{P_0}}{a_0} + \frac{\sqrt{P_f}}{a_f} \right) \cdot (\max[\sqrt{P_0}; \sqrt{P_f}]) < \frac{11 - \sqrt{41}}{16} = 0.2873 \dots$$

et non $\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_f} \right) \cdot (\max[P_0; P_f]) < \frac{11 - \sqrt{41}}{16}$ comme cela avait été écrit.

$$2^\circ \frac{9}{25} < \frac{P_0}{P_f} < \frac{25}{9}$$

$$3^\circ \frac{\max[A_0; A_f]}{\min[P_0; P_f]} > 21$$

4° $0^\circ < |\bar{\omega}_f| < 22^\circ$: la limite supérieure de $|\bar{\omega}_f|$ n'est pas connue avec précision, elle est comprise entre $18^\circ.8$ et 22° .

Ainsi qu'on le voit, les cas de transferts optimaux "à 3 impulsions" (donc de mode *AAD* ou *ADD*) restent fort rares.

Pour poursuivre la détermination du mode optimal de transfert, utilisons la réversibilité et les symétries pour supposer:

$$1^\circ A_0 \leq A_f \quad (\text{et si } A_0 = A_f : P_0 \geq P_f)$$

2° $0^\circ \leq \bar{\omega}_f \leq 180^\circ$, nous supposons même $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f > 0$ le cas particulier $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f = 0$ étant traité en 3.5.3.1 et 3.5.3.5.

On obtient alors:

(I) Les conditions $A_0 \leq A_f$ et $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f \neq 0$ entraînent l'impossibilité des modes *D* et *DD*.

(II) Si les orbites O_0 et O_f sont non-sécantes (ce qui entraîne $P_0 < P_f$) le transfert optimal est de mode *AA* ou de mode "bi-parabolique" (il peut même être de mode *AAD* si le point (e_f, e_0) fait partie du "Domaine de Moyer").

Remarque pratique: Si, dans ce cas des orbites non-sécantes, $\frac{A_f}{P_0} \leq 8.7967$ le transfert optimal est de mode *AA*.

(III) Si les orbites O_0 et O_f sont "embrassées", c'est-à-dire si $P_f \leq P_0 < A_0 \leq A_f$ (donc $e_0 \leq e_f$) le transfert optimal est de mode AD ou de mode bi-parabolique (il peut même être de mode AAD si le point (e_f, e_0) fait partie du "Domaine de Moyer").

Remarque pratique: Si, dans ce cas des orbites "embrassées", $e_f + 0.579 e_0 \leq 0.845$ le transfert optimal est de mode AD .

(IV) Enfin si les orbites O_0 et O_f sont sécantes et "croisées" (c'est-à-dire si $P_0 < P_f < A_0 < A_f$) le transfert optimal est de mode A ou AA ou AD ou AAD ou ADD ou "bi-parabolique" (les cas de mode AAD et ADD ne se rencontrent que si le point (e_f, e_0) fait partie du "Domaine de Moyer" le mode ADD exigeant de plus $a_0^2 e_0^2 > a_f^2 e_f^2$ donc ici $e_0 > e_f$).

Les transferts optimaux de mode A sont aisés à déceler et à calculer: entre orbites elliptiques coplanaires le transfert optimal est à une seule impulsion *si et seulement si*:

1° Les deux orbites données sont sécantes (ou tangentes dans le cas $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f = 0$).

2° Au point d'intersection le plus bas (où se fait alors l'impulsion optimale) le $\Delta \vec{V}$ impulsif nécessaire est:

(A) Dans l'angle utile local de chacune des deux orbites (cette condition, très restrictive, entraîne en particulier $P_0 \leq P_f \leq A_0 \leq A_f$ pour les transferts de mode A et $P_f \leq P_0 \leq A_f \leq A_0$ pour les transferts de mode D , les égalités n'ayant lieu que si $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f = 0$)

(B) Tel que
$$|\Delta \vec{V}| \leq C_{f\infty} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_f}} - V_{P_0} - V_{P_f}$$

Si cette dernière condition est seule non satisfaite, le transfert optimal est de mode "bi-parabolique" (donc de coût $C_{f\infty}$).

Les transferts optimaux de mode AA ou AD ne sont pas aussi aisés à déceler et à calculer, toutefois si le point (e_f, e_0) ne fait pas partie du "Domaine de Moyer" on peut comparer les modes A , AA et AD en examinant les vecteurs vitesses sur O_0 et O_f au point de rencontre B le plus bas des deux orbites (fig. 34).

À cause de $e_0 e_f \sin \bar{\omega}_f > 0$, on a toujours $\Psi_0 > 0$ et $\Psi_0 > \Psi_f$ en B .

Si $V_f \sin \Psi_f \leq V_0 \sin \Psi_0$ le transfert optimal est de mode AD ou de mode "bi-parabolique".

Si $V_f \sin \Psi_f > V_0 \sin \Psi_0$ il faut comparer la direction de $\vec{V}_f - \vec{V}_0$ direction déterminée par l'angle ψ (fig. 34) avec les "angles utiles" en B relatifs aux orbites O_0 et O_f .

1er cas - B n'est sur un arc obligatoirement balistique, ni sur O_0 , ni sur O_f .

Si $\psi > \min [\psi_{s_0}; \psi_{s_f}]$ le transfert optimal est de mode AA ou de mode "bi-parabolique".

Si $\max[\psi_{i_0}; \psi_{i_f}] \leq \psi \leq \min[\psi_{s_0}; \psi_{s_f}]$ le transfert optimal est de mode *A* ou de mode "bi-parabolique" comme nous venons de le voir ci-dessus.

Si $\psi < \max[\psi_{i_0}; \psi_{i_f}]$ le transfert optimal est de mode *AD* ou de mode "bi-parabolique".

Bien entendu ψ_i est à remplacer par ψ'_i le cas échéant.

2ème cas — *B* est sur un arc obligatoirement balistique de O_0 (donc $e_0 > 0.9250$): le transfert optimal est de mode *AD* ou de mode "bi-parabolique".

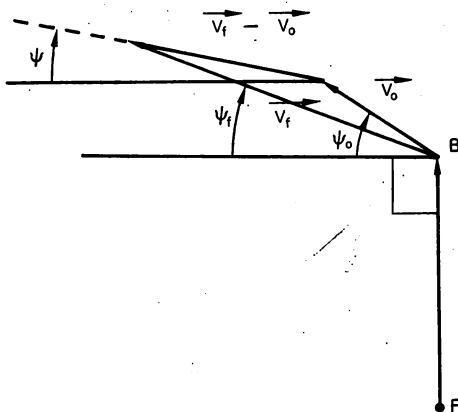


FIG. 34. Étude de la direction du vecteur $(\vec{V}_f - \vec{V}_0)$ au point d'intersection le plus bas *B* entre O_0 et O_f .

3ème cas — *B* est sur un arc obligatoirement balistique de O_f (donc $e_f > 0.9250$): le transfert optimal est de mode *AA* ou de mode "bi-parabolique".

Remarque: si le point (e_f, e_0) est hors du "Domaine de Moyer" *B* ne peut se trouver à la fois sur un arc obligatoirement balistique de O_0 et sur un arc obligatoirement balistique de O_f .

Remarque pratique: dans ce cas des orbites sécantes et "croisées", cas pour lequel donc $P_0 < P_f < A_0 < A_f$ si $\frac{A_f}{P_0} \leq 3.3041$ ou bien si $e_0 + e_f \leq$

$0.845 + 0.31 \min \left[\frac{1}{2}; e_f \right]$ le transfert optimal est de mode *A* ou *AA* ou *AD* et l'étude qualitative peut donc être complète.

Des renseignements plus précis sont donnés en ref. 49.

3.5.3.5. Étude de quelques cas particuliers

(I) Transferts optimaux entre ellipses coplanaires égales

Le transfert optimal est soit du type "bi-parabolique" bien connu, soit d'un type "à 2 impulsions symétriques" cas particulier du mode *AD* (fig. 35).

Ce dernier type se calcule aisément à partir de l'orbite intermédiaire O_1 (pour laquelle $\bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_f}{2}$) on obtient sur cette orbite:

$$\cos v_{I_1} = \cos v_{I_2} = \text{racine de: } e_1^2 x^3 + 3e_1 x^2 + (3 + e_1^2)x + 2e_1 = 0$$

$$\text{et: } \psi_{I_1} = \psi_{II_1} \text{ (ou } \psi'_{I_1} \text{ si } e_1 > 0.9250)$$

$$\psi_{I_1} = \psi_{II_2} + 180^\circ \text{ (ou } \psi'_{I_1} + 180^\circ) = 180^\circ - \psi_{I_1}$$

$$\text{avec } \text{tg } \psi_{I_1} = \frac{e_1 \sin v_{I_1}}{3 + 2e_1 \cos v_{I_1}}$$

La comparaison des deux modes de transferts conduit aux résultats indiqués sur la figure 36 en fonction de $|\bar{\omega}_f|$ et de $e_0 (= e_f)$.⁽⁴⁹⁾

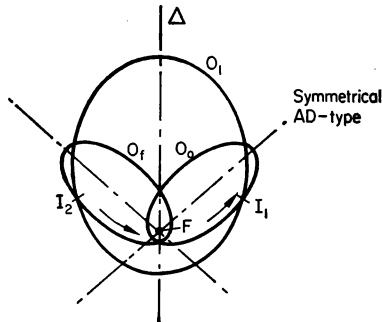
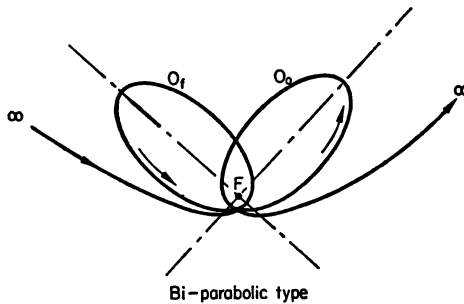


FIG. 35. Les deux types de transferts optimaux entre ellipses coplanaires égales; en haut le type dit parabolique, en bas le type symétrique AD.

(II) *Transferts entre ellipses coplanaires et coaxiales inverses* ($\bar{\omega}_f = 180^\circ$).

Ce cas est un cas particulier des transferts du § 3.5.2. On y rencontre seulement des transferts “par les périées”, “par les apogées” et “bi-paraboliques” (fig. 37).

Dans un cas donné, les trois transferts possibles sont aisés à calculer et à comparer (voir la discussion complète en 49).

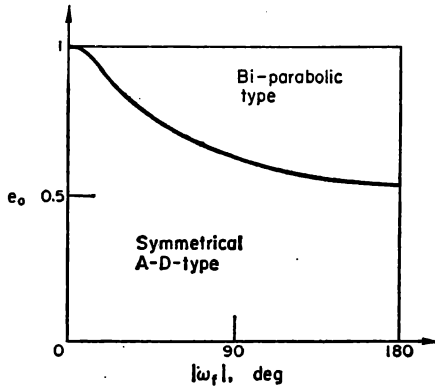


FIG. 36. Discussion du transfert optimal entre 2 ellipses coplanaires égales.

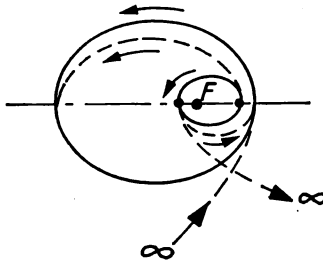


FIG. 37. Les 3 types de transferts optimaux entre ellipses coplanaires et coaxiales inverses (“par les périgées”, “par les apogées” et “bi-paraboliques”).

Remarques pratiques: Si $e_0 + e_f > 1.07066$ le transfert optimal est de type “bi-parabolique”.

Si $\min [A_0; A_f] > \max [P_0; P_f]$ le transfert optimal n’est pas “par les périgées”.

Si de plus dans ce cas (en supposant $P_0 \leq P_f$): $e_0 + e_f \leq 0.845 + 0.31 \min \left[\frac{1}{2}; e_f \right]$ le transfert optimal est “par les apogées”.

Si $\min [A_0; A_f] \leq \max [P_0; P_f]$ le transfert optimal peut être de l’un quelconque des trois modes, la figure 38 permet de comparer directement le “mode par les périgées” et le mode “par les apogées” en fonction de $x = \frac{p_0}{p_f}$ et de $\frac{e_0}{e_f}$ (et en supposant $A_0 \leq P_f$ au besoin grâce à la réversibilité).

La courbe supérieure d’équation

$$\frac{e_0}{e_f} = \frac{1 + 2\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$$

correspond au cas limite des orbites tangentes et la courbe inférieure d'équation

$$\frac{e_0}{e_f} = \frac{2+x}{1+2x} \cdot \frac{1+3x+(1+x)\sqrt{2+2x}}{3+x+(1+x)\sqrt{2+2/x}}$$

correspond au cas limite des orbites quasi-circulaires.

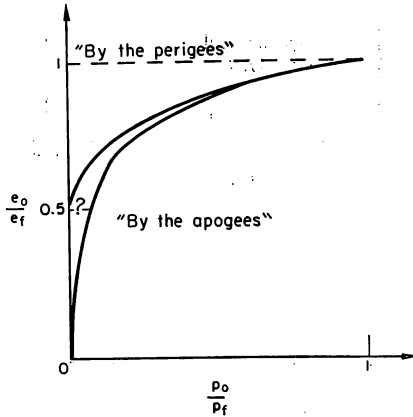


FIG. 38. Comparaison entre les transferts "par les périgées" et "par les apogées" quand $A_0 \leq P_f$.

(III) Transferts entre ellipses coplanaires dont l'une est d'excentricité proche de 1

Ce cas est un cas particulier du § 3.5.4, il est étudié avec plus de précision en ref. 49, on y rencontre des transferts des huit types coplanaires possibles.

3.5.3.6. Calcul des transferts optimaux à deux impulsions entre orbites elliptiques coplanaires

(I) Cas des transferts de mode AA

Pour les transferts de ce type: $P_0 < P_f$ et $A_0 < A_f$. Les transferts du mode DD sont les transferts retour inverse de ceux-ci; ils s'obtiennent donc de la même manière.

On peut développer les éléments de l'orbite intermédiaire O_1 en fonction de ceux des orbites O_0 et O_f lorsque l'angle $\bar{\omega}_f$ est petit (fig. 39).

Utilisons les deux paramètres auxiliaires:

$$e = \frac{A_f - P_0}{A_f + P_0} = e_1 + \text{order}(\bar{\omega}_f^2)$$

$$\Delta = \frac{3-e}{e_f} \left[2e + e^2 - 4e_f - ee_f + 2e \sqrt{\frac{1-e_f}{1-e}} \right] + \frac{3+e}{e_0} \left[2e - e^2 - 4e_0 + ee_0 + 2e \sqrt{\frac{1+e_0}{1+e}} \right]$$

on obtient :

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_f}{\Delta} \cdot \frac{3+e}{e_0} \left[2e - e^2 - 4e_0 + ee_0 + 2e \sqrt{\frac{1+e_0}{1+e}} \right] + \text{ordre } (\bar{\omega}_f^3)$$

$$v_1 = \text{anomalie vraie de } I_1 \text{ sur } O_1 = \frac{\bar{\omega}_f}{\Delta} (3+e) (4+e-e^2) + \text{ordre } (\bar{\omega}_f^3)$$

$$v_2 = \text{anomalie vraie de } I_2 \text{ sur } O_1 = \pi - \frac{\bar{\omega}_f}{\Delta} (3-e) (4-e-e^2) + \text{ordre } (\bar{\omega}_f^3)$$

$$\psi_1 = \text{angle déterminant la direction de l'impulsion en } I_1 = \frac{e\bar{\omega}_f}{\Delta} (3+e) (2-e) + \text{ordre } (\bar{\omega}_f^3)$$

$$\psi_2 = \text{angle déterminant la direction de l'impulsion en } I_2 = \frac{e\bar{\omega}_f}{\Delta} (3-e) (2+e) + \text{ordre } (\bar{\omega}_f^3)$$

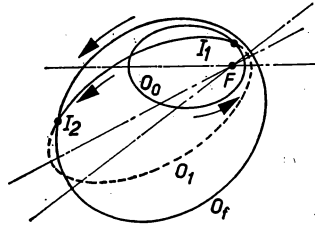


FIG. 39. Exemple d'un transfert optimal du type AA.

$$\left. \begin{aligned} r_{I_1} &= \frac{P_1(1+e_1)}{1+e_1 \cos v_1} = \frac{P_0(1+e_0)}{1+e_0 \cos(v_1+\bar{\omega}_1)} \\ r_{I_2} &= \frac{A_1(1-e_1)}{1+e_1 \cos v_2} = \frac{A_f(1-e_f)}{1+e_f \cos(v_2+\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_f)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où le calcul de} \\ P_1, A_1, e_1 \text{ et } H_1 \\ \text{avec une erreur} \\ \text{relative d'ordre } \bar{\omega}_f^4 \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{H_1 - H_0}{r_{I_1} \cos \psi_1}; \quad C_f - C_1 = \frac{H_f - H_1}{r_{I_2} \cos \psi_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où le calcul de} \\ C_1 \text{ et } C_f \text{ avec une} \\ \text{erreur d'ordre } \bar{\omega}_f^4 \end{array}$$

Remarque: Si l'on pose C_H = vitesse caractéristique du transfert de Hohmann correspondant (obtenu pour $\bar{\omega}_f = 0$, les éléments a_0 , e_0 , a_f et e_f étant inchangés) :

$$C_H = V_{A_f} - V_{P_0} + \sqrt{\frac{2\mu(A_f - P_0)^2}{A_f P_0 (A_f + P_0)}} = \frac{H - H_0}{P_0} + \frac{H_f - H}{A_f}$$

avec $H = \sqrt{\frac{2\mu A_f P_0}{A_f + P_0}}$ = moment cinétique de l'orbite intermédiaire de Hohmann.

On obtient alors:

$$C_f = C_H + \frac{\mu}{4H} e^3 (9 - e^2) \frac{\bar{\omega}_f^2}{\Delta} [1 + \text{ordre } \bar{\omega}_f^2]$$

Il va de soi que l'on peut déduire de ces formules celles concernant le cas des orbites quasi-coaxiales inverses ($\bar{\omega}_f \simeq 180^\circ$), il suffit d'effectuer les modifications et changements de signe appropriés.

On peut développer les éléments de O_1 dans d'autres cas par exemple lorsque O_0 et O_f sont quasi-circulaires voisines⁽⁴⁹⁾ ou même simplement lorsque l'une est un quasi-cercle, l'autre étant quelconque.

(II) Cas des transferts de mode AD.

Pour les transferts de ce type, les orbites O_0 et O_f sont toujours sécantes. Il est commode dans ce problème de changer d'axe de référence.

Nous prendrons (fig. 40) un axe de référence tel que:

$$e_0 \cos \bar{\omega}_0 = x_0 > e_f \cos \bar{\omega}_f = x_f$$

$$e_0 \sin \bar{\omega}_0 = e_f \sin \bar{\omega}_f = \varepsilon$$

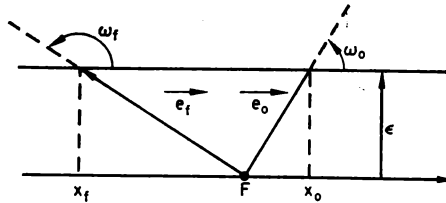


FIG. 40. Définition de ε et nouvel axe de référence.

Lorsque ε est voisin de zéro, les éléments de l'orbite intermédiaire O_1 (fig. 41) peuvent se développer en fonction de ceux de O_0 et O_f .

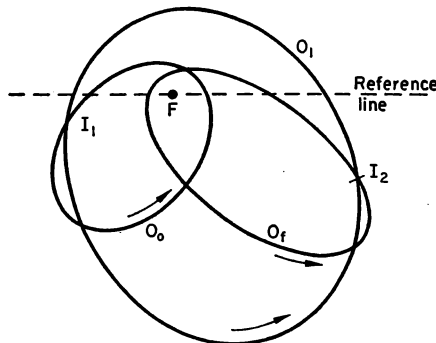


FIG. 41. Exemple de transfert optimal du type AD.

Utilisons les deux paramètres auxiliaires :

$$x = \frac{p_f(1-x_0) - p_0(1+x_f)}{p_f(1-x_0) + p_0(1+x_f)} = e_1 \cos \bar{\omega}_1 + \text{ordre } (\varepsilon^2)$$

$$Z = 3x_0 - 3x_f - 6x_0x_f + xx_0 + xx_f \\ + 2x_0(3+x) \sqrt{\frac{1+x_f}{1+x}} - 2x_f(3-x) \sqrt{\frac{1-x_0}{1-x}}$$

On obtient alors :

$$e_1 \sin \bar{\omega}_1 = \frac{\varepsilon}{Z} \left[(3-x) \left(3x_0 - x - 2x \sqrt{\frac{1-x_0}{1-x}} \right) \right. \\ \left. + (3+x) \left(x - 3x_f + 2x \sqrt{\frac{1+x_f}{1+x}} \right) \right] + \text{ordre } \varepsilon^3(x_0 - x_f)$$

l_1 = longitude, à partir de l'axe de référence, de I_1 (fig. 41)

$$= \pi + \frac{\varepsilon}{Z} \left[(6+2x) \sqrt{\frac{1+x_f}{1+x}} - (6-2x) \sqrt{\frac{1-x_0}{1-x}} \right. \\ \left. + 2x + 3x_0 - 9x_f + xx_f - xx_0 \right] + \text{ordre } \varepsilon^3.$$

l_2 = longitude de I_2 =

$$= \frac{\varepsilon}{Z} \left[(6+2x) \sqrt{\frac{1+x_f}{1+x}} - (6-2x) \sqrt{\frac{1-x_0}{1-x}} + 2x - 9x_0 + 3x_f + xx_f - xx_0 \right] \\ + \text{ordre } \varepsilon^3$$

ψ_1 = angle déterminant la direction de l'impulsion en I_1

$$= \frac{\varepsilon}{Z} (3-x)(x_0 - x_f) + \text{ordre } \varepsilon^3$$

$$\psi_2 = \pi - \frac{\varepsilon}{Z} (3+x)(x_0 - x_f) + \text{ordre } \varepsilon^3$$

Remarque: Ces expressions peuvent être développées en fonction de x_0, x, x_f lorsque $X = \max(x_0; -x_f)$ est petit, on obtient alors par exemple :

$$e_1 \sin \bar{\omega}_1 = \varepsilon \left[1 + \frac{(x_0 - x)(x - x_f)}{12} \right] + \text{ordre } (\varepsilon X^3, \varepsilon^3(x_0 - x_f))$$

$$l_1 = \pi + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{36} (3x_0 + 3x_f - 2x) + \text{ordre } (\varepsilon^3, \varepsilon X^2)$$

$$l_2 = -\frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{36} (3x_0 + 3x_f - 2x) + \text{ordre } (\varepsilon^3, \varepsilon X^2)$$

$$\psi_1 = \frac{\varepsilon}{9} (3-x) \left(1 - \frac{x_0x_f}{12} - \frac{5x^2}{36} \right) + \text{ordre } (\varepsilon^3, \varepsilon X^3)$$

$$\psi_2 = \pi - \frac{\varepsilon}{9} (3+x) \left(1 - \frac{x_0x_f}{12} - \frac{5x^2}{36} \right) + \text{ordre } (\varepsilon^3, \varepsilon X^3)$$

Le calcul des derniers éléments de O_1 (p_1 , a_1 , H_1 et $e_1 \cos \bar{\omega}_1$) et du transfert (C_1 et C_f) peut être fait à l'ordre ε^4 grâce à :

$$r_{l_1} = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos(l_1 - \bar{\omega}_0)} = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos(l_1 - \bar{\omega}_1)}$$

$$r_{l_2} = \frac{p_f}{1 + e_f \cos(l_2 - \bar{\omega}_f)} = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos(l_2 - \bar{\omega}_1)}$$

$$C_1 = \frac{H_1 - H_0}{r_{l_1} \cos \psi_1}; \quad C_f - C_1 = \frac{H_1 - H_f}{r_{l_2} (-\cos \psi_2)}$$

On peut comparer C_f avec la vitesse caractéristique C_H du "transfert de Hohmann" correspondant (obtenu pour $\bar{\omega}_f = \bar{\omega}_0$) et avec celle C_A "du transfert par les apogées" correspondant (obtenu pour $\bar{\omega}_f = \bar{\omega}_0 + 180^\circ$):

$$C_f = C_H + \frac{\mu}{H_1} \cdot \frac{9 - x^2}{2Z} (x_0 - x_f)(x_0 - x_f - |e_0 - e_f|)[1 + \text{ordre} \\ (x_0 - x_f - |e_0 - e_f|)]$$

(cette expression n'est valable que si O_0 et O_f sont "embrassées": $P_0 \leq P_f \leq A_f \leq A_0$ ou bien $P_f \leq P_0 \leq A_0 \leq A_f$), et :

$$C_f = C_A - \frac{\mu}{H_1} \cdot \frac{9 - x^2}{2Z} (x_0 - x_f)(e_0 + e_f - x_0 + x_f)[1 + \text{ordre} (e_0 + e_f - x_0 + x_f)]$$

Lorsque e_0 et e_f sont inférieurs à 0,89, on peut donner des limites supérieures de l'erreur obtenue dans les expressions ci-dessus.

$$\text{erreur sur } l_1 \text{ et } l_2 \text{ (en Rd)} < \frac{|\varepsilon^3|}{2}$$

$$\text{erreur sur } \psi_1 \text{ et } \psi_2 \text{ (en Rd)} < \frac{|\varepsilon^3|}{8}$$

$$\text{erreur sur } e_1 \sin \bar{\omega}_1 < \frac{|\varepsilon^3|}{8} \min [1; x_0 - x_f]$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{erreur relative sur } p_1, a_1, H_1 \text{ et } C_f \\ \text{erreur absolue sur } e_1 \cos \bar{\omega}_1 \end{array} \right\} \leq \frac{\varepsilon^4}{2} (x_0 - x_f)$$

ε étant ordinairement petit, on voit que ces résultats permettent de connaître l'orbite intermédiaire O_1 et le coût C_f du transfert avec une grande précision.

3.5.3.7. Point de vue pratique sur les transferts optimaux entre orbites coplanaires

Nous verrons le point de vue pratique général dans le § 4.1.

En ce qui concerne les transferts optimaux entre orbites coplanaires, nous pouvons écrire :

(I) Les transferts optimaux de mode AA ou DD ont une vitesse caractéristique très peu sensible à l'angle $\bar{\omega}_f$:

Si l'on pose:

1° C_H = vitesse caractéristique du transfert de Hohmann correspondant (obtenu pour $\bar{\omega}_f = 0$, les éléments a_0, e_0, a_f, e_f restant inchangés)

$$2^\circ \quad \varrho = \frac{\max [A_0; A_f]}{\min [P_0; P_f]}; \quad (\varrho \geq 1)$$

On obtient toujours pour ces transferts:

$$1 \leq \frac{C_f}{C_H} \leq \sqrt{1 + \frac{3(\varrho - 1)^2}{16\varrho}}$$

ainsi pour $\varrho = 2$ quel que soit $\bar{\omega}_f$:

$$1 \leq \frac{C_f}{C_H} \leq 1.046$$

Rappelons que si $\varrho \leq 8.7967$ et si les orbites O_0 et O_f sont non sécantes le transfert optimal est toujours de mode AA ou DD .

En particulier les transferts optimaux de mode AA ou DD sont beaucoup moins sensibles à l'angle $\bar{\omega}_f$ que ceux de mode AD comme on peut s'en rendre compte sur les expressions de C_f dans le paragraphe précédent. En conséquence le nécessaire remplacement des impulsions théoriques par des arcs de poussée réels comporte, pour les premiers, une pénalisation beaucoup plus faible que pour les seconds [mais même dans ce dernier cas, la perte est peu élevée (voir § 4.1 et ref. 73)].

(II) Les transferts optimaux théoriques de mode "bi-parabolique" sont de peu d'intérêt pratique dans les cas coplanaires ordinaires.

En effet les solutions utilisables qui s'en rapprochent, solutions qui nécessitent donc l'emploi d'ellipses très allongées éventuellement raccordées à grande distance par un grand cercle ou une grande ellipse intermédiaire doivent généralement être de très longue durée pour être d'une vitesse caractéristique inférieure à celle du transfert mono ou bi-impulsionnel le moins coûteux (baptisé "transfert optimal proche").

Pour être précis, on peut écrire que, en reprenant la notation $\varrho = \frac{\max [A_0; A_f]}{\min [P_0; P_f]}$, il est nécessaire d'aller effectuer au moins une impulsion (ou un arc de poussée) à une distance supérieure à $j(\varrho) \cdot \min [P_0; P_f]$ pour pouvoir obtenir des transferts de vitesse caractéristique inférieure à celle du "transfert optimal proche", la fonction $j(\varrho)$ ⁽²⁸⁾ étant donnée par:

$\varrho = 3.3041$: $j = +\infty$: pour $\varrho \leq 3.3041$ le transfert optimal n'est jamais du mode "bi-parabolique".

$$\left. \begin{array}{l} \varrho = 3.5 \quad j = 7630 \\ \varrho = 4 \quad j = 713 \\ \varrho = 5 \quad j = 160.3 \\ \varrho = 7 \quad j = 53.2 \\ \varrho = 10 \quad j = 26.87 \\ \varrho = 11.5 \quad j = 22.1 \\ \varrho = 15.582 \quad j = 15.582 \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\varrho}} + \frac{\varrho-1}{\sqrt{\varrho(\varrho+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2j}} + \frac{j-1}{\sqrt{j(j+1)}}$$

On voit ainsi qu'habituellement, c'est-à-dire pour $\varrho \leq 7$ ou 10 la solution optimale pratique est toujours un transfert mono ou bi-impulsionnel.

Les "transferts optimaux proches" sont localement optimaux (si $\varrho < 15.582$) et satisfont donc aux conditions d'angle utile et de commutation (§ 3.5.3.3), ils constituent le prolongement analytique naturel des transferts optimaux ordinaires à une ou deux impulsions [ils sont donc comme eux de mode AA (ou DD) si les orbites O_0 et O_f sont intérieures et généralement de mode AD si elles sont sécantes, toutefois, dans ce dernier cas, l'analyse de la direction de la différence des vecteurs vitesses sur O_0 et O_f au point d'intersection le plus bas de ces deux orbites indique parfois que le transfert optimal est de mode A (ou D) ou même AA (ou DD) comme cela est expliqué en § 3.5.3.4].

Un exemple de comparaison d'un "transfert optimal proche" et du transfert "bi-parabolique" correspondant est analysé en détail dans le § 4.1.

3.5.4. Transferts optimaux entre orbites elliptiques dont l'une est d'excentricité voisine de 1. Nous supposons, en utilisant au besoin la réversibilité, que $A_0 \leq A_f$; l'orbite finale est alors d'excentricité voisine de 1 dans les cas discutables (car sinon $e_0 \simeq 1$ donc $\frac{P_f}{P_0} > 11.938$: le transfert optimal est du mode "bi-parabolique").

Nous poserons: $\sqrt{1-e_f^2} = k_f =$ infiniment petit principal et:

$$g = \frac{1 + \sqrt{2+2e_0}}{e_0} - 3; \quad (g \geq 0)$$

Le transfert optimal est de l'un des trois modes suivants:

(I) Mode "bi-parabolique" toujours optimal si:

$$\frac{8}{9} (\sqrt{2}-1) [1 - \cos P_0 \widehat{FP}] > \min \left[\frac{1-e_f}{e_0}, \frac{1-e_0}{e_f} \right]$$

(II) Mode bi-impulsionnel

(III) Mode tri-impulsionnel

Nous ne parlerons pas du premier type déjà connu.

Les deux autres commencent par une impulsion accélératrice quasi-tangentielle pratiquement dans le plan de l'orbite O_0 .

L'orbite O_1 est telle que :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_f(1 + \text{ordre } k_f^2) \\ e_1 &= 1 - \frac{P_0}{a_f} + (\text{ordre } k_f^2) \end{aligned} \right\} P_1 = P_0(1 + \text{ordre } k_f^2)$$

$$i_1 = \text{ordre } k_f^2$$

$$\Omega_1 = \bar{\omega}_f + \text{ordre } k_f$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_f + \text{ordre } k_f; \quad \bar{\omega}_1 \text{ sera précisé plus loin}$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{\mu}{P_0}} (\sqrt{2} - \sqrt{1+e_0}) + \frac{\mu(1 - \cos \bar{\omega}_1)}{H_{1g}} - \frac{H_1}{4a_1} (1 + \text{ordre } k_f^2)$$

$$(\text{Rappelons que } g = \frac{1 + \sqrt{2+2e_0}}{e_0} - 3)$$

Le point I_1 où a lieu la première impulsion a pour anomalie vraie $\frac{4}{g} \sin \bar{\omega}_1 + (\text{ordre } k_f^2)$ sur l'orbite O_1 , il est donc proche de P_1 ; la valeur

correspondante de ψ_1 est $\frac{\sin \bar{\omega}_1}{g} + (\text{ordre } k_f^2)$.

De l'orbite O_1 à l'orbite O_f le transfert optimal est mono ou bi-impulsionnel, pour l'étudier nous allons poser: $\vec{J} = \frac{\vec{e}_f \wedge (\vec{H}_f - \vec{H}_1)}{a_f}$ et $\vec{K} =$ composante normale à \vec{e}_f de $n_f a_f (\vec{e}_f - \vec{e}_1)$; \vec{e} étant le vecteur habituel de longueur e dirigé de F vers P :

$$\vec{e} = e \frac{\vec{FP}}{FP} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{H}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

Dans le cas le plus général, celui où il faut deux impulsions pour passer de O_1 à O_f , ces deux impulsions ont lieu en des points d'anomalie excentrique E_2 et E_3 quasi-fixes au cours de l'impulsion et telles que $E_2 + E_3 = \text{ordre } k_f^2$.

On obtient alors (à l'ordre $n_f a_f k_f^2$ près):

$$\text{pour la deuxième impulsion: } \vec{I}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{J}}{1 - \cos E_2} - \frac{\vec{K}}{\sin E_2} \right)$$

$$\text{et pour la troisième: } \vec{I}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{J}}{1 - \cos E_2} + \frac{\vec{K}}{\sin E_2} \right)$$

La valeur optimale de E_2 s'obtient en minimisant la somme $|\vec{I}_2| + |\vec{I}_3| = C_f - C_1$ d'où en particulier $\cos E_2 \leq 0 + \text{ordre } k_f^2$. Les deux valeurs E_2 et $-E_2$ conduisent évidemment au même minimum et cette étude n'est

pas suffisante pour déterminer le sens optimal de succession des 2ème et 3ème impulsions.

La figure 42 ci-dessous (tirée de la réf. 49) donne les courbes de coût unitaire de $|\vec{I}_2| + |\vec{I}_3| = C_f - C_1$ en fonction de J et K pour diverses valeurs de l'angle $\alpha = (\vec{J}, \vec{K})$, on en déduit aisément $C_f - C_1$ dans un cas quelconque.

Le transfert de O_1 à O_f est mono-impulsionnel seulement si $\alpha = 0^\circ$ ou 180° et $J \geq K$.

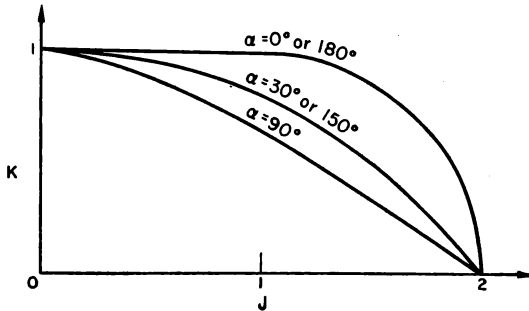


FIG. 42. Courbe de coût unitaire de $C_f - C_1$ dans le plan (J, K) pour quelques valeurs de $\alpha = (\vec{J}, \vec{K})$.

E_2 et $C_f - C_1$ étant ainsi optimisés pour une orbite O_1 quelconque, il faut, pour terminer, optimiser la valeur de $\bar{\omega}_1$ (nous savons déjà que $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_f + \text{ordre } k_f$) afin d'obtenir la solution optimale au second ordre près (ce qui permet de comparer les trois types de transfert).

L'optimisation de $\bar{\omega}_1$ est très différente selon que $i_f \gg k_f^2$ ou bien que $i_f = \text{ordre } k_f^2$, dans le cas coplanaire on obtient les résultats suivants en fonction de $x = \sqrt{\frac{P_0}{P_f}}$ et de $y = \frac{2}{k_f} \left| \sin \frac{\bar{\omega}_f}{2} \right|$

1er cas: $0 \leq g < 1$ (soit $e_0 > 0.7127$): fig. 43.

2ème cas: $g \geq 1$ ($e_0 \leq 0.7127$): fig. 44.

3.5.5. Résultats généraux sur les transferts entre orbites elliptiques. En plus des résultats concernant les cas particuliers étudiés dans les §§ 3.5.1 à 3.5.4 et des indications données dans le § 3.5 un certain nombre de résultats généraux sont connus:

À a_0, e_0, a_f, e_f et i_f fixés c'est entre orbites coaxiales directes ($\bar{\omega}_f = 0^\circ$; $\Omega_f = 0^\circ$ ou 180°) que le transfert optimal est le moins coûteux et c'est probablement entre orbites "coparamètres inverses" (c'est-à-dire pour $\bar{\omega}_f = 180^\circ$ $\Omega_f = \pm 90^\circ$) qu'il est le plus coûteux.

À a_0, e_0, a_f, e_f et $j_f (= \widehat{P_0FP_f})$ fixés c'est entre orbites coplanaires ($i_f = 0^\circ$; $\bar{\omega}_f = \pm j_f$) que le transfert optimal est le moins coûteux.

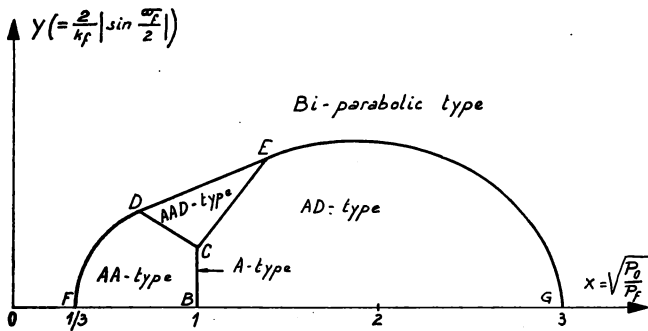


FIG. 43. Discussion du type de transfert optimal dans le cas coplanaire quand $e_f \approx 1$ et $g < 1$ ($e_0 > 0.7127$). Région triangulaire du type AAD :

$$C(1; g), D\left(\frac{3}{5-2g}; \frac{g+2}{5-2g}\right), E\left(\frac{5}{3+2g}, \frac{3g+2}{3+2g}\right)$$

$$\text{Ellipse } DF: 2y^2 = (3x-1) [1+x(g-1)]$$

$$\text{Ellipse } EG: 2y^2 = (3-x) [x(g+1)-1]$$

Il y a une région étroite de type A au voisinage de BC (réf. 49).

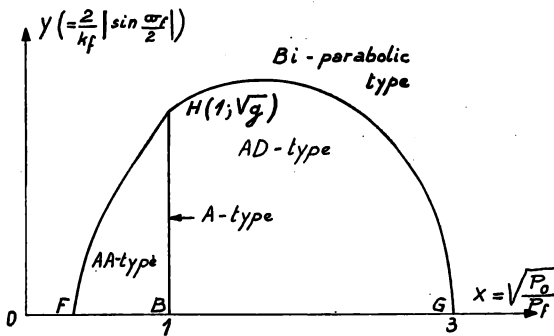


FIG. 44. Même discussion que celle de la Fig. 43 dans le cas $e_f \approx 1, g \geq 1$ ($e_0 \leq 0.7127$). Le type AAD a disparu. La courbe FH est devenue une hyperbole

On peut donc définir pour un transfert donné un transfert coaxial direct correspondant et un transfert coplanaire correspondant de coûts C_{CD} et C_{CP} inférieurs ou égaux à celui C_f du transfert donné. D'autre part, le coût $C_{f\infty}$ des transferts bi-paraboliques est indépendant de l'orientation, on a donc toujours :

$$\max [C_{CD}; C_{CP}] \leq C_f \leq C_{f\infty} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_f}} - V_{P_0} - V_{P_f}$$

En conséquence, si l'un des deux transferts correspondants est de type "bi-parabolique" il en est de même du transfert donné.

En particulier si: $i_f > 60^\circ \cdot 1850$

ou bien si $\frac{P_0}{P_f}$ ou $\frac{P_f}{P_0} > 11.938$

ou encore si: $\frac{8}{9} (\sqrt{2} - 1)(1 - \cos j_f)^2 \geq \min \left[\frac{1 - e_0}{e_f}; \frac{1 + e_f}{e_0} \right]$

le transfert optimal est de type "bi-parabolique".

On peut trouver d'autres conditions suffisantes d'optimalité des transferts "bi-paraboliques" comme par exemple:

$$k_f \left[1 + \sqrt{\frac{P_0}{P_f}} \right] < 4e_f \sin i_f | \sin \omega_f |$$

ou bien symétriquement:

$$k_0 \left[1 + \sqrt{\frac{P_f}{P_0}} \right] < 4e_0 \sin i_f | \sin \Omega_f |$$

mais bien entendu on aboutit encore à ce résultat: entre orbites elliptiques "suffisamment écartées" le transfert optimal est de type "bi-parabolique" tandis qu'entre orbites proches, ce qui est le cas le plus intéressant, le transfert optimal reste inconnu.

La figure 45 permet d'affirmer, dans certains cas, que le transfert optimal *n'est pas* du type "bi-parabolique":

Posons $x_1 = \min \left[\frac{P_0}{P_f}; \frac{P_f}{P_0} \right]$

et $x_2 = \frac{\text{moyenne harmonique de } P_0 \text{ et } P_f}{\text{moyenne quadratique de } A_0 \text{ et } A_f}$

$$= \frac{2P_0P_f}{P_0 + P_f} \sqrt{\frac{2}{A_0^2 + A_f^2}}$$

Si le point $(x_1; i_f)$ est en zone III, le transfert optimal est du type bi-parabolique (résultat déduit de la figure 24).

Si le point $(x_2; i_f)$ est en zone I, le transfert optimal *n'est pas* du type bi-parabolique (la courbe limite passe par $x_2 = 0.3027; i_f = 0$; pente 2.75 et par $x_2 = 1; i_f = 60^\circ \cdot 1850$; pente 2.583 (les pentes sont exprimées pour i_f en radians) cette courbe limite, connue avec peu de précision, est obtenue probablement tout au long pour des orbites égales pour lesquelles $\bar{\omega}_f = 180^\circ$ et $\Omega_f = \pm 90^\circ$).

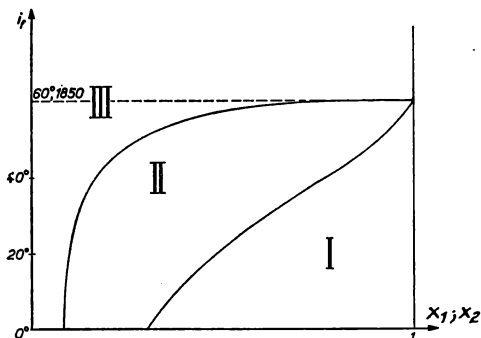


FIG. 45. Discussion du type de transfert optimal entre ellipses dans le cas général

$$x_1 = \min \left(\frac{P_0}{P_f}; \frac{P_f}{P_0} \right)$$

$$x_2 = \frac{2P_0P_f}{P_0+P_f} \sqrt{\frac{2}{A_0^2+A_f^2}}$$

Si le point (x_1, i_f) est dans la zone III le transfert optimal est du type bi-parabolique. Si le point (x_2, i_f) est dans la zone I le transfert optimal n'est pas du type bi-parabolique.

3.6. Transferts optimaux entre orbites elliptiques extérieures à la planète— Cas où l'on peut utiliser des freinages et des manœuvres atmosphériques

Les freinages et les manœuvres atmosphériques sont intéressants surtout lorsque l'on va d'une orbite haute vers une orbite basse ou bien lorsque l'angle des plans d'orbite est élevé, on obtient aisément un certain nombre de résultats :

$$\text{Si } P_0 \geq 4R \left[1 + \frac{R}{\max [A_0; A_f]} \right] \quad \text{et} \quad P_f \geq 4R \left[1 + \frac{R}{A_f} \right]$$

les freinages et les manœuvres atmosphériques n'ont pas d'intérêt quel que soient i_f , Ω_f et $\bar{\omega}_f$.

$$\text{Si } P_0 \geq 4R \left[1 + \frac{R}{\max [A_0; A_f]} \right] \quad \text{et} \quad P < 4R \left[1 + \frac{R}{A_f} \right]$$

le transfert atmosphérique optimal est indépendant de la finesse de la fusée étudiée et du mouvement de la planète sur elle-même, il utilise optimalement la suite ellipse \rightarrow parabole \rightarrow parabole \rightarrow freinage atmosphérique \rightarrow ellipse, suite aisée à déterminer à partir des §§ 3.1.1, 3.1.4 et 3.1.5.

Sa vitesse caractéristique est donc :

$$C_{j \text{ atm}} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}} - V_{P_0} + V_{A_f} - \sqrt{\frac{2\mu R}{A_f(R+A_f)}}$$

il convient bien entendu de le comparer avec le transfert non-atmosphérique optimal (si ce dernier est du type "bi-parabolique" il n'est pas le meilleur ainsi que si $A_f P_f^2 \leq 4.825 R^3$)

Il reste à étudier le cas :

$$P_0 < 4R \left[1 + \frac{R}{\max [A_0; A_f]} \right]$$

Dans ce dernier cas, la finesse aérodynamique de la fusée étudiée et le mouvement de rotation de la planète interviennent beaucoup. Seuls seront exposés les résultats du cas particulièrement favorable où la finesse de la fusée étudiée est infinie et la planète sans rotation (ce cas est toujours plus favorable que ceux où la finesse est inférieure à $\sqrt{\frac{L^2}{2Eq^2} - 1}$, Eq étant la vitesse équatoriale de rotation, ce qui donne 17 dans le cas de la terre).

Dans ces conditions, le transfert "atmosphérique optimal" est indépendant de l'orientation (car on peut évoluer dans toute l'atmosphère sans perdre de vitesse), on obtient aisément deux types optimaux possibles si $A_0 > A_f$ et un seul si $A_0 \leq A_f$.

$$1^\circ \quad A_0 > A_f : C_{f \text{ atm}} = \min [C_{f_1 \text{ atm}}, C_{f_2 \text{ atm}}]$$

$$\text{avec} \quad C_{f_1 \text{ atm}} = V_{A_0} + V_{A_f} - \sqrt{\frac{2\mu R}{A_0(A_0 + R)}} - \sqrt{\frac{2\mu R}{A_f(A_f + R)}}$$

$$\text{et} \quad C_{f_2 \text{ atm}} = V_{A_0} - V_P - 2\sqrt{\frac{2\mu R}{A_0(A_0 + R)}} + \sqrt{\frac{2\mu(A_0 + P_f)}{A_0 P_f}}$$

$$2^\circ \quad A_0 \leq A_f :$$

$$C_{f \text{ atm}} = V_{A_f} - V_{P_0} - 2\sqrt{\frac{2\mu R}{A_f(A_f + R)}} + \sqrt{\frac{2\mu(P_0 + A_f)}{P_0 A_f}}$$

Ces trois types de transfert sont représentés sur un diagramme périgée-apogée (fig. 46) les portions utilisant l'atmosphère étant situées sur la droite $P = R$.

Pour montrer l'intérêt des freinages et des manœuvres atmosphériques, on peut comparer les transferts optimaux les plus onéreux dans les conditions suivantes :

1° Sans utilisation de l'atmosphère :

$$a_0 = a_f = R; \quad e_0 = e_f = 0; \quad i_f \geq 60^\circ.1850 : C_f = (2 - \sqrt{2})L = 0.586L$$

2° Avec utilisation de l'atmosphère (cas de finesse nulle) :

$$a_0 = R; \quad a_f = (2 + 2\sqrt{2})R; \quad e_0 = e_f = 0; \quad i_f > 47^\circ : C_f = 0.426L$$

3° Avec utilisation de l'atmosphère (cas de finesse infinie) :

$$a_0 = R; \quad a_f = 11.938R; \quad e_0 = e_f = 0 : C_f = 0.378L$$

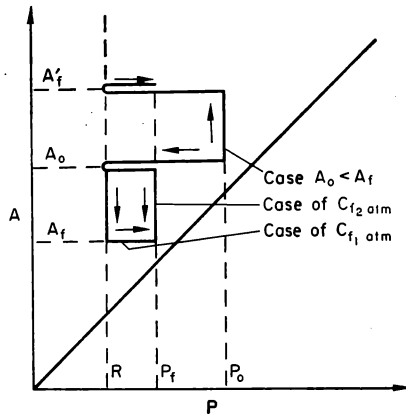


FIG. 46. Les 3 derniers types de transferts "atmosphériques optimaux" dans un diagramme périégée-apogée.

4. QUATRIÈME PARTIE: COMPLÉMENTS

4.1. Le point de vue pratique

Dans la réalité les fusées ne peuvent effectuer les impulsions obtenues par l'étude du problème théorique, d'autre part les transferts du type bi-parabolique sont irréalisables et constituent seulement une limite, enfin dans de nombreux cas, ce n'est pas seulement un transfert simple qui est demandé mais aussi un rendez-vous.

(I) *Le problème du rendez-vous.* Le problème du rendez-vous économique a reçu une solution très élégante grâce aux travaux 74 à 76 dans le cas des orbites elliptiques extérieures à la planète attirante: pour arriver à l'instant approprié sur l'orbite finale, il suffit d'attendre un ou plusieurs tours sur une orbite intermédiaire de période appropriée (obtenue au besoin en fractionnant une impulsion). Le "rendez-vous" n'est pas plus coûteux que le transfert simple correspondant, il demande seulement un peu plus de temps:

$$\text{Si } T_0 \text{ et } T_f \text{ sont les périodes sur les orbites } O_0 \text{ et } O_f \left(T_0 = \frac{2\pi}{n_0}, T_f = \frac{2\pi}{n_f} \right),$$

si T_m et T_M sont les périodes minimale et maximale sur les orbites intermédiaires obtenues au cours du transfert simple optimal ($T_m \ll T_0$, $T_f \ll T_M$) la perte de temps du rendez-vous par rapport au transfert simple peut toujours être choisie inférieure à $T_f + qT_m$ avec $q =$ plus grand

$$\text{entier} < \frac{T_M}{T_M - T_m}$$

(II) *Réalisation pratique des impulsions.* Le remplacement d'une impulsion théorique par un ou plusieurs arcs de poussée (s'il y en a plusieurs, ils

sont situés à un tour d'intervalle les uns des autres, ce qui n'est possible que dans le cas des ellipses extérieures à la planète attirante) a été étudié en particulier par Robbins⁽⁷³⁾ et aussi dans la référence 49, la théorie de Pontryagin⁽⁶⁾ se prête particulièrement bien à cette étude. Il y a aussi, bien entendu, sur ce sujet un très grand nombre d'études numériques dans des cas particuliers comme par exemple celui du transfert cercle-parabole⁽⁸⁶⁾ ou cercle-hyperbole.⁽⁹⁷⁾

Nous répéterons simplement que, si l'accélération de poussée est constante, la perte relative (en vitesse caractéristique) due au remplacement de l'impulsion par un arc de poussée disposé optimalement est inférieure ou égale (excepté si $r = R$ et $S' \neq 0$) à :

$$\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\delta t}{T} \right)^2 (1 - 3S'^2) + \text{ordre} \left(\frac{\delta t}{T} \right)^3$$

ainsi que cela était indiqué dans l'exposé du problème théorique (δt étant la durée de l'arc de poussée, T étant la durée de révolution circulaire à l'altitude de l'impulsion et S' le cosinus directeur radial de cette impulsion).

Si l'accélération de poussée n'est pas constante la formule est à peine modifiée.

Rappelons que pour les impulsions non-horizontales au niveau $r = R$ (donc pour des orbites sécantes à la planète attirante) la perte est d'ordre $\frac{\delta t}{T}$ et non $\left(\frac{\delta t}{T} \right)^2$.⁽⁵⁶⁾

(III) *Utilisation pratique des transferts "bi-paraboliques"*. La nécessaire limitation de durée des transferts entre orbites entraîne évidemment l'impossibilité de l'emploi des transferts de type "bi-parabolique" mais l'on peut, bien entendu, s'approcher plus ou moins de l'optimum théorique en employant des orbites intermédiaires d'excentricité voisine de 1 éventuellement raccordées à grande distance par un grand cercle ou une grande ellipse intermédiaire.

Dans ces conditions, il est important de connaître avec quelle rapidité le coût C_f d'un transfert optimal de durée limitée D tend vers $C_{f\infty}$ lorsque D tend vers l'infini. On obtient à ce sujet le résultat suivant: entre orbites coplanaires, les transferts voisins du type "bi-parabolique" présentent, en général, peu d'intérêt pratique, par contre entre orbites dont les plans font un grand angle ils peuvent présenter un énorme intérêt.

Examinons les deux cas extrêmes suivants:

(1) Cas de grand angle des plans d'orbite: transfert entre deux cercles égaux tels que $i_f = 90^\circ$.

(2) Cas coplanaire: transfert entre deux ellipses égales coaxiales inverses

telles que $q = \frac{A_0}{P_0} = 10$ (donc $a_f = a_0$; $e_f = e_0 = \frac{9}{11}$; $i_f = 0^\circ$; $\bar{\omega}_f = 180^\circ$).

Nous prendrons :

- 1° $P_0 (= P_f)$ = unité de distance (P_0 est nécessairement supérieur à R , ce qui fournit un ordre de grandeur minimal).
- 2° Unité de vitesse caractéristique = vitesse caractéristique du transfert mono ou bi-impulsionnel le moins coûteux (soit $C_f = \sqrt{\frac{2\mu}{P_0}}$ dans le cas 1 (transfert à une impulsion en l'un des nœuds) et $C_f = 2\sqrt{\frac{\mu}{A_0}}$ dans le cas 2: transfert "par les apogées").
- 3° Indice d'éloignement j (qui tend vers l'infini lorsque le transfert tend vers le mode "bi-parabolique") = distance de l'impulsion la plus éloignée (les transferts sont optimisés en fonction de ce paramètre)— La durée D du transfert est un paramètre beaucoup plus mal com-

On obtient alors :

Cas 1 $(a_0 = a_f = P_0 = 1; e_0 = e_f = 0; i_f = 90^\circ)$

$$C_f(j = 1) = 1 \text{ (par définition)}$$

$$C_f(j = \infty) = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$$

$$C_f(j = 8) = 0.6356$$

Un éloignement modéré ($j = 8$) permet une économie considérable très voisine de celle obtenue pour le transfert "bi-parabolique".

Cas 2. Cas coplanaire: $a_0 = a_f = 5.5; e_0 = e_f = \frac{9}{11}; \varrho = \frac{A_0}{P_0} = 10;$
 $i_f = 0^\circ; \bar{\omega}_f = 180^\circ.$

$$C_f(j = 10) = 1 \text{ (par définition)}$$

$$C_f(j = \infty) = 0.363$$

Le transfert "bi-parabolique" permet donc, dans ce cas extrême, une économie considérable par rapport au transfert "optimal proche".

Mais malheureusement :

$$C_f^2(j = 26.87) = 1 \text{ (26.87 correspond à 10 dans le tableau du § 3.5.3.7)}$$

$$C_f(j = 136) = 3/4$$

$$C_f(j = 246) = 2/3$$

$$C_f(j = 1\,442) = 1/2$$

Un éloignement considérable ne permet pas une économie importante, économie toujours beaucoup plus faible que celle obtenue théoriquement dans le transfert "bi-parabolique".

La raison principale pour laquelle les deux cas présentent une si grande différence est que ceux des transferts "bi-paraboliques" qui ne demandent qu'une impulsion à grande distance (comme c'est le cas entre orbites co-axiales directes) présentent une perte d'ordre $D^{-2/3}$ par rapport à l'optimum théorique, tandis que les autres cas présentent une perte d'ordre $D^{-1/3}$, les vitesses circulaires à grande distance décroissent en effet beaucoup moins vite que les vitesses d'apogée à périégée fixe.

Remarque: Dans le premier cas, où il y a une seule impulsion à grande distance, l'optimum pour une longue durée D fixée de transfert est pratiquement obtenu lorsque les quasi-paraboles intermédiaires sont des ellipses allongées d'apogée commun (point où a lieu l'impulsion lointaine).

4.2. Quelques propriétés géométriques des orbites képlériennes

Il est connu depuis longtemps que l'odographe d'un mouvement képlérien est un cercle (cas elliptique) ou un arc de cercle (cas hyperbolique).

F.T. Sun⁽⁷⁹⁾ a fait remarquer que l'odographe des vecteurs vitesses de lancement en M_0 conduisant au point M_f est une hyperbole d'asymptotes

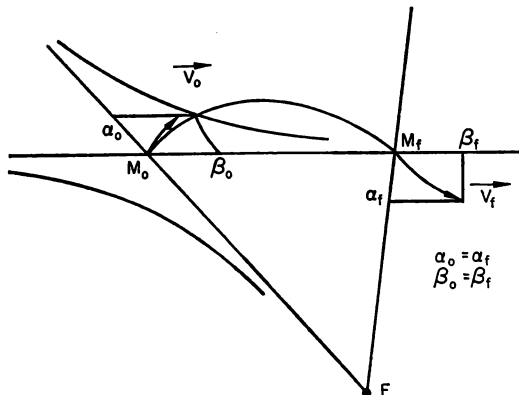


FIG. 47. Odographe au point M_0 conduisant au point M_f . (l'odographe est une hyperbole).

$M_0 F$ et $M_0 M_f$ (fig. 47); bien entendu, la moitié des vitesses hyperboliques sont à supprimer si l'on veut que le passage en M_f ait lieu dans le futur et non dans le passé.

On peut ajouter que si l'on décompose \vec{V}_0 et \vec{V}_f en leurs composantes $\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0$ et $\vec{\alpha}_f, \vec{\beta}_f$ sur les asymptotes orientées $\vec{FM}_0, \vec{M_0 M_f}$ et $\vec{M_f F}, \vec{M_0 M_f}$ on obtient: $\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha}_f$ et $\vec{\beta}_0 = \vec{\beta}_f$

Ces propriétés peuvent être généralisées sans difficultés: L'odographe des vecteurs vitesses de lancement en M_0 conduisant sur une orbite O_0 tangente à l'orbite fixe O_f (dont le plan contient M_0) est une conique de

centre M_0 , c'est même une hyperbole d'asymptotes les deux tangentes menées de M_0 à O_f si ces tangentes sont réelles (fig. 48).

La propriété réciproque de celle-ci est elle aussi toujours exacte.

Ces propriétés permettent par exemple de tracer aisément l'odographe des vecteurs vitesses conduisant à un apogée ou à un périégée d'altitude fixée.

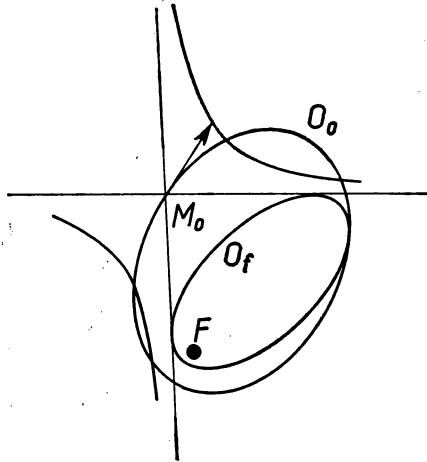


FIG. 48. Odographe au point M_0 conduisant à une orbite O_0 tangente à l'orbite fixe O_f (l'odographe est une conique, ici une hyperbole).

4.3. Direction futures de recherches

On ne peut que mentionner quelques unes des idées de recherches futures :

Sur les freinages et les manœuvres atmosphériques : recherche des transferts optimaux dans les cas de finesse finie et dans ceux de rotation de la planète, en particulier étude du cas limite de finesse nulle.

Sur les transferts entre orbites hyperboliques : étude lorsque les conditions initiales et finales ne sont pas à l'infini, en particulier démonstration de l'existence d'arcs "à poussée intermédiaire" optimaux et examen du voisinage de l'origine et de la fin de ces arcs.

Sur les transferts entre orbites coplanaires : étude plus poussée des cas tri-impulsionnels et de la comparaison des "transferts optimaux proches" avec les transferts "bi-paraboliques".

Sur les transferts entre orbites non coplanaires et non coaxiales : étude des domaines de manœuvrabilité à 5 dimensions (pour les 5 éléments orbitaux) afin de déterminer les impulsions et les commutations optimales ; étude du sens de ces commutations : il est probable que si nous appelons

$\xi \left(= \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \right)$ l'énergie par unité de masse d'une fusée, la quantité $\frac{d\xi}{dC} - C$ qui est constante au cours d'une impulsion est décroissante d'une impulsion à la suivante, cela suffirait pour déterminer le sens optimal des commutations.

Certains problèmes particuliers ont probablement des solutions simples comme par exemple le problème du transfert entre ellipses bi-sécantes égales (non coplanaires), ces ellipses sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan et le transfert optimal est sans doute aussi symétrique par rapport à ce plan.

Les transferts optimaux entre orbites quasi-coplanaires ou quasi-coaxiales ou quasi-circulaires doivent pouvoir être étudiés analytiquement à partir des cas déjà connus, toutefois, les transferts entre orbites à la fois quasi-circulaires et quasi-coplanaires présentent quelques difficultés.

Les problèmes de montée optimale en orbite sont certainement analysables de manière systématique même dans le cas le plus défavorable où la base de lancement est plus écartée de l'équateur que le plan de l'orbite visée.

Enfin, débordant le cadre de l'étude du champ newtonien central pur, les problèmes d'utilisation des forces secondaires existant dans l'espace doivent pouvoir être largement abordés; dans cette direction, deux branches principales sont à envisager:

- 1° Utilisation des forces perturbatrices dues à l'aplatissement de la terre et plus généralement des planètes: par exemple un rendez-vous entre deux fusées dont les orbites sont circulaires se fera pour un prix minimal si l'on prend soin d'attendre pour effectuer le transfert le moment où les deux orbites ont même longitude du nœud équatorial ascendant: l'angle des plans d'orbite est alors minimal (dans le cas de la terre le délai d'attente est de l'ordre du mois, il est beaucoup plus court pour les grosses planètes).
- 2° Étude des transferts optimaux dans le champ d'attraction de plusieurs astres, par exemple dans le système solaire, avec ou sans utilisation de "passages hyperboliques" intermédiaires au voisinage de planètes ou de gros satellites.

Remarque: Dans le cas où l'on utilise pas de "passages hyperboliques" intermédiaires, il est prouvé que le transfert optimal (du point de vue de la vitesse caractéristique) entre planètes d'orbites *circulaires* et *coplanaires* est soit le transfert classique "de Hohmann"⁽¹³⁾ à deux impulsions, soit le transfert "bi-parabolique", les limites entre ces deux cas dépendant des vitesses de libération sur les planètes de départ et d'arrivée (bien entendu seul le transfert "de Hohmann" présente un intérêt pratique).

Par contre, les études des cas d'orbites planétaires non circulaires ou non coplanaires sont très complexes, toutefois certaines idées simples comme celles de réfs. 99 et 100 permettent d'obtenir des résultats non rigoureux mais déjà très précis.

CONCLUSIONS

L'étude analytique des transferts optimaux entre orbites commencée par Hohmann en 1925 et surtout par Lawden vers 1950 a largement bénéficié de la mise au point des théories d'optimisation (Contensou,⁽⁷⁾ Pontryagin,⁽⁸⁾ Breakwell⁽⁵⁾).

Cette étude est actuellement en plein essor. Elle a permis de résoudre de nombreuses questions (transferts optimaux entre orbites coaxiales ou coplanaires ou quasi-circulaires proches etc.), questions dont un grand nombre était laissé sans réponse par les études numériques: les solutions optimales sont-elles impulsionnelles? Quel est le nombre optimal d'impulsions? Y a-t-il des arcs à poussée intermédiaire optimaux? etc.

Elle a fait découvrir des solutions auxquelles on ne s'attendait pas, comme les solutions "bi-paraboliques", solutions qu'il aurait été difficile de découvrir autrement. Enfin et surtout, elle a permis la mise au point de nouvelles méthodes de travail et d'optimisation et en a donné des exemples clairs et simples d'applications.

Toutefois, il faut reconnaître que l'étude analytique se heurte souvent à des barrières sinon insurmontables du moins très difficiles à franchir; aussi, même si l'analyse pure se révèle encore très féconde comme on peut s'en convaincre en lisant le § 4.3 "directions futures de recherche", il est probable que les études analytico-numériques du genre de celles de Moyer,⁽²⁹⁾ Winn,⁽³⁸⁾ Gobetz, Edelbaum et Washington⁽³⁰⁾ se révéleront être celles donnant le plus de résultats.

RÉFÉRENCES

Les références ne sont pas présentées dans l'ordre habituel (ordre de rencontre dans le texte), elles sont groupées en fonction des sujets traités et classées dans l'ordre chronologique.

Les références n° 1 à 79 sont relatives à des études analytiques ou analytico-numériques. Les autres (n° 80 à 101) concernent des exemples d'études numériques ou essentiellement numériques; afin de faciliter la lecture leurs numéros sont décalés vers la droite.

I. *Études generales*

1. H. OBERTH. *Wege zur Raumschiffahrt*. R. Oldenburg, München, 1929.
2. D. F. LAWDEN. Minimal Trajectories. *J. Bis.* 9, 179-186, 1950.
3. D. F. LAWDEN. Minimal Rocket Trajectories. *Jet Propulsion* 23, 360-367 et 382, 1953.
4. D. F. LAWDEN. Fundamentals of Space Navigation. *J. Bis.* 13, 87-101, 1954.
5. J. V. BREAKWELL. The Optimization of Trajectories. *SIAM Journal* 7, 215-247, 1959.
6. В. К. ИСАЕВ. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к одному классу задач оптимального управления, Кандидатская диссертация, МФТИ, 1961.
7. P. CONTENSOU. Étude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. *Astronautica Acta*, 8, fasc. 2-3, 1962.
8. L. S. PONTRYAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R. V. GAMKRELIDZE et E. F. MISCHENKO. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, 1962.
80. A. E. BRYSON, W. F. DENHAM et S. E. DREYFUS. Optimal Programming Problems with Inequality Constraints: Necessary Conditions for extremal Solutions. *AIAA J.* 1, 2544, 1963.
9. В. И. ЧАРНЫЙ. Об оптимальных траекториях со многими импульсами, Искусственные спутники Земли, вып. 16, АН СССР, 1963, 257-264.
81. N. Y. VAGAeva et N. N. MOISEYEV. New methods for solution of problems of optimal transfer theory. XIVème Congrès International d'Astronautique, Paris, septembre 1963.
10. С. В. ДУБОВСКИЙ. Оптимальные перелеты в поле одного и двух притягивающих центров, Докл. на 2-м Всесоюзном съезде механиков, М., 1964.
11. S. PINES. Constants of the Motion for Optimum Thrust Trajectories in a central Force Field. *AIAA J.* 2, 2010, 1964.
12. T. N. EDELBAUM. How many impulses? AIAA paper n° 66-7. Third Aerospace Sciences Meeting, New York, January 1966.
82. R. ROSENBAUM, R. E. WILLWERTH et W. CHUCK. Powered flight trajectory optimization for lunar and interplanetary transfer. *Astronautica Acta*, 12, 159, 1966.

II. *Étude des transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires*

13. W. HOHMANN. *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*. Oldenburg, München, 1925.
14. D. F. LAWDEN. Optimal transfer between circular orbits about two planets. *Astronautica Acta* 1, 2, 89, 1955.
15. T. N. EDELBAUM. Some extensions of the Hohmann transfer maneuver *ARS J.* 29, 864-865, 1959.
16. R. F. HOELKER et R. SILBER. The bi-elliptical transfer between co-planar circular orbits. Proc. 4th Symposium Ballistic Missile and Space Technology, Los Angeles, 1959.
17. G. C. SMITH. The calculation of minimal orbits. *Astronautica Acta* 5, 5, 253, 1959.
18. R. N. PLIMMER. Fuel requirements for inter-orbital transfer of a rocket. Xème Congrès International d'Astronautique, Vienna, 1960.
19. L. TING. Optimum orbital transfers by several impulses. *Astronautica Acta* 6, 5, 256, 1960.
20. D. F. LAWDEN. Impulsive transfer between elliptical orbits—Chapter 11 of *Optimization Techniques*. ed. G. Leitmann, Academic Press, New York 1962.
21. R. B. BARRAR. An analytic proof that Hohmann-type transfer is the true minimum two-impulse transfer. *Astronautica Acta* 9, 1, 1, 1963.
22. S. P. ALTMANN et J. S. PISTNER. Minimum velocity increment solution for two-impulse co-planar orbital transfer. *AIAA J.* 1, 435, 1963.

23. J. V. BREAKWELL. Minimum impulse transfer. *AIAA Progress in Astronautics Series*, 14, 1963.
24. J. M. HORNER. Minimum impulse orbital transfers. *AIAA J.* 1, 1707, 1963.
25. J. P. MAREC. Transferts orbitaux économiques. *La Recherche Aérospatiale* No. 105, 1965.
 83. R. G. GRAHAM. A steepest-ascent solution of multiple arc optimization problems. *AIAA J.* 3, 154-155, 1965.
26. H. G. MOYER. Minimum impulse co-planar circle-ellipse transfer. *AIAA J.* 3, 723, 1965.
27. M. PIERUCCI. Optimum orbital transfer by two impulses of unequal specific impulses. *Astronautica Acta*, 11, 268, 1965.
28. C. MARCHAL. Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (Durée indifférente). *Astronautica Acta* 11, 432-445, 1965.
29. H. G. MOYER. Necessary conditions for optimal single-impulse transfer. AIAA preprint 66-93, January 1966, and *AIAA J.* 4, 1405, 1966.
 84. D. F. BENDER et G. A. MACCUE. Optimal transfers between nearly tangent orbits. *Journal of Astronautical Sciences* 13, 2, 72-75, 1966.
30. F. W. GOBETZ, M. WASHINGTON et T. N. EDELBAUM. Minimum impulse time-free transfer between elliptic orbits. United Aircraft Research Laboratories, Report No. 910330, 4 April 1966.
31. D. F. BENDER et G. A. MACCUE. Conditions for optimal one-impulse transfer. *Journal of Astronautical Sciences* 13, 4, 153-158, 1966.
32. R. D. CULP. Contensou-Buseman conditions for optimal coplanar orbit transfer. *AIAA J.* 5, 371, 1967.

III. *Étude des transferts optimaux entre orbites circulaires non-coplanaires.* *Étude des transferts optimaux entre orbites elliptiques coaxiales non-coplanaires*

33. L. RIDER. Characteristic velocity changing the inclination of a circular orbit to the equator. *ARS J.* 29, 48-49, 1959.
34. R. F. HOELKER et R. SILBER. Injection schemes for obtaining a twenty-four hour orbit. *Aerospace Engr.* 20, 28-29, 76-84, 1961.
35. L. RIDER. Characteristic velocity requirements for impulsive thrust transfer between non-coplanar circular orbits. *ARS J.* 31, 345-351, 1961.
36. H. HILLER. Optimum impulsive transfers between elliptic and non-coplanar circular orbits. Royal Aircraft Establishment, Technical report 65122, June 1965.
37. H. HILLER. Optimum impulsive transfers between non-coplanar elliptic orbits having collinear major axis. Royal Aircraft Establishment, Technical report 65287, Dec. 1965.
38. C. B. WINN. Minimum-fuel transfers between co-axial orbits both coplanar and non-coplanar. AAS Preprint 66-119, July 1966.

Voir aussi les références 44 à 49 dans les études des transferts entre orbites quelconques.

IV. *Étude des transferts optimaux entre orbites elliptiques infiniment proches*

39. J. P. MAREC. Transferts économiques entre orbites infiniment proches. XVI^e Congrès International d'Astronautique, Athènes, 12-18 septembre 1965.
40. T. N. EDELBAUM. A general solution for minimum impulse transfer in the near vicinity of a circular orbit. Analytical Mechanics Associates. Report Contract NAS 12-26, August 1966.

41. J. P. MAREC. Transferts infinitésimaux économiques entre orbites quasi-circulaires non coplanaires. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
42. J. V. BREAKWELL. Private correspondence.
43. J. P. MAREC. Transferts optimaux entre orbites elliptiques proches. Thèse de doctorat d'état, Faculté des Sciences de Paris (1967) — À paraître.

Voir aussi l'étude de F. W. Gobetz, M. Washington et T. N. Edelbaum.⁽³⁰⁾

V. *Étude des transferts optimaux entre orbites elliptiques quelconques*

44. R. S. LONG. Transfer between non-coplanar elliptical orbits. *Astronautica Acta* 6, 2-3, 167, 1960.
45. K. ECKEL. Optimum transfer between non-coplanar elliptical orbits. *Astronautica Acta* 8, 4, 177-192, 1962.
85. G. A. MACCUE. Optimum two-impulse orbital transfer and rendez-vous between inclined elliptical orbits. *AIAA J.* 1, 1865-1872, 1963.
86. K. ECKEL. Optimum transfer in a central force field with n impulses. *Astronautica Acta* 9, 5-6, 302, 1963.
87. L. GENTRY. An analysis of two-impulse orbital transfer. *AIAA J.* 2, 1767-1773, 1964.
46. G. E. KUZMAC, N. J. LAVRENKO, V. K. ISAEV et V. V. SONIN. The linearized theory of optimal multi-impulsive transfers. The problem about optimal rocket flight. XV^e Congrès International d'Astronautique, Varsovie, septembre 1964.
88. D. F. BENDER et G. A. MACCUE. Numerical investigation of minimum impulse orbital transfer. *AIAA J.* 3, 2328-2334, 1965.
47. C. MARCHAL. Transferts optimaux entre orbites elliptiques (durée indifférente). XVI^e Congrès International d'Astronautique, Athènes, 12-18 septembre 1965.
48. T. N. EDELBAUM. Optimization problems in powered space flight. AAS Preprint (Dec. 1965). AAS Progress in Astronautics Series.
89. P. HEMPEL. Eine Zurückführung des Rendezvous-Manövers auf Bahnübergänge. *Astronautica Acta* 12, 2, 153, 1966.
49. C. MARCHAL. Transferts optimaux entre orbites elliptiques (durée indifférente). Thèse de doctorat d'état, Faculté des Sciences de Paris (1967) — À paraître.

VI. *Étude des transferts optimaux entre orbites sécantes à la planète attirante, montée optimale en orbite, traversée de l'atmosphère, descente optimale d'orbite, utilisation des freinages et des manœuvres atmosphériques*

50. W. H. TEMPELMAN. Selected problems in optimum ballistic descent from orbit. *Astronautica Acta* 8, 4, 193-204, 1962.
90. L. TING et M. PIERUCCI. Optimal launching of a satellite by two impulses of unequal specific impulses. *Astronautica Acta* 9, 174, 1963.
51. P. CONTENSOU. Économie de la traversée de l'atmosphère par un engin autopropulsé. *La Recherche Aérospatiale* No. 96, 1963.
52. S. LUBARD. Optimum launching to hyperbolic orbit by two impulses. *AIAA J.* 1, 2858, 1963.
53. A. POZZI et P. D. ARTHUR. An analytical study of lateral range calculation and optimization. XV^e Congrès International d'Astronautique, Varsovie, septembre 1964.
91. P. SANTINI. On optimum L/D modulation in re-entry of manned space vehicle. XV^e Congrès International d'Astronautique, Varsovie, septembre 1964.

54. S. ROSS. Optimal ascent into orbit. A new look at an old problem. XV^e Congrès International d'Astronautique, Varsovie, septembre 1964.
92. T. K. CAMPBELL et T. T. GOLD. Three dimensional trajectory optimization program for ascending and descending vehicles. XVI^e Congrès International d'Astronautique, Athènes, 12-18 septembre 1965.
93. A. POZZI et B. FADINI. A numerical analysis of lateral range calculation and optimization. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
55. В. В. ИВАШКИН. Оптимальные траектории импульсного перехода между орбитами при наличии ограничений по радиусу, Космические исследования, Т. 4, 1966, вып. 4, 510.
56. C. MARCHAL. Optimisation de la phase extra-atmosphérique de la montée en orbite. *La Recherche Aéronautique*, Nos. 116 et 118, 1967.

VII. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques

57. F. W. GOBETZ. Optimum transfers between hyperbolic asymptotes. *AIAA J.* 1, 2034, 1963.
94. W. M. HOLLISTER et J. E. PRUSSING. Optimum transfers to Mars via Venus. *Astronautica Acta* 12, 169, 1966.
58. C. MARCHAL. Transferts optimaux entre orbites hyperboliques (rayon planétaire non nul). XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
59. В. В. ИВАШКИН. Энергетически оптимальные переходы с гиперболической орбиты при отсутствии ограничений на время перехода, Космические исследования, Т. 4, 1966, вып. I. 17.
60. C. MARCHAL. Étude détaillée des transferts optimaux entre orbites hyperboliques (rayon planétaire non nul). À paraître.

VIII. Étude des arcs à poussée intermédiaire

61. D. F. LAWDEN. Optimal intermediate-thrust arcs in a gravitational field. *Astronautica Acta* 8, 106-123, 1962.
62. H. J. KELLEY. Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket flight. *AIAA J.* 1, 1597, 1963.
63. J. L. KELLER. On minimum propellant path for thrust limited rockets. *Astronautica Acta* 10, 262, 1964.
64. G. H. LAWDEN. Trajectory optimization for a rocket with a generalized thrust characteristic. *Astronautica Acta* 10, 279, 1964.
65. H. M. ROBBINS. Optimality of intermediate-thrust arcs of rocket trajectories. *AIAA J.* 3, 1094, 1965.
66. R. E. KOPP et H. G. MOYER. Necessary conditions for singular extremals. *AIAA J.* 3, 1439, 1965.
67. H. M. ROBBINS. Optimal rocket trajectories with subarcs of intermediate thrust. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
68. C. MARCHAL. Généralisation tri-dimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de Lawden. *Astronautica Acta*, Étude envoyée en juin 1966 (à paraître).
69. H. J. KELLEY, R. E. KOPP et H. G. MOYER. *Singular Extremals. Optimization Theory and Applications.* ed. G. Leitmann. Academic Press, New York.

IX. Étude du remplacement d'une impulsion théorique par un arc de poussée

95. D. F. LAWDEN. Optimal programming of rocket thrust direction. *Astronautica Acta* 1, 1, 41-56, 1955.

96. D. F. LAWDEN. Escape from circular orbit. *Astronautica Acta* 4, 3, 218, 1958.
97. R. S. LONG. Escape from circular orbit with finite velocity at infinity. *Astronautica Acta* 5, 3, 159, 1959.
70. B. FRAEIJDS de VEUBEKE. Canonical transformations and the thrust-coast-thrust optimal transfer problem. *Astronautica Acta* 11, 4, 271, 1965.
71. J. E. MACINTYRE et L. CROCCO. Linearized treatment of the optimal transfer of a thrust limited vehicle between co-planar circular orbits. *Astronautica Acta* 12, 224, 1966.
98. M. HANDELSMAN. Optimal free-space, fixed thrust trajectories using impulsive trajectories as starting iteratives. *AIAA J.* 4, 1077, 1966.
72. B. FRAEIJDS de VEUBEKE. Optimal steering and cutoff relight programmes for orbital transfers. *Astronautica Acta* 12, 4, 323, 1966.
73. H. M. ROBBINS. An analytical study of the impulsive approximation. *AIAA J.* 4, 1417, 1966.

Voir aussi la référence 49 dans les études de transferts entre orbites quelconques.

X. Études particulières

74. A. FIUL et H. BRAHAM. Optimization of vehicles and trajectories for the twenty-four hour equatorial satellite mission. ARS Preprint 1120-60, 1960.
75. A. VAN GELDER, E. BETRAMI et H. MUNICK. On minimum time, minimum fuel rendez-vous. Meeting of SIAM, Nov. 1960.
76. T. N. EDELBAUM. Propulsion requirements for controllable satellites. *ARS. J.* 31, 1079-1089, 1961.
99. J. MARTELLY. Sur une méthode de calcul approché des performances optimales des propulsions faibles. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Athènes, 12-18 septembre 1965.
77. A. K. PLATONOV et U. D. TETERIN. Some peculiarities of the two-component non-identical solar correction. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 5-15 octobre 1966.
78. D. H. NEWELL. Spin stabilized interplanetary spacecraft navigation. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
100. MARCO J. DISPES. Voyage à la lune. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
101. F. NARIN. Choice of flight mode for outer planet missions. XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
79. F. T. SUN. On optimum transfer between two terminal points for minimum initial impulse under an arbitrary initial velocity vector. NASA Contractor Report No. 6 R-622, Nov. 1966.

MINIMUM FUEL TRANSFERS BETWEEN ARBITRARY COAXIAL ELLIPSES, BOTH COPLANAR AND NONCOPLANAR

C. BYRON WINN

Associate Professor, Colorado State University,
Fort Collins, Colorado, U.S.A.

ABSTRACT

The Pontryagin Maximum Principle has been used to determine the optimal transfers between arbitrary coaxial ellipses. The results are presented in graphical form. An algebraic technique was employed to solve the Hamiltonian equations and was programmed for a digital computer. This technique is described and an example is presented to illustrate how the curves may be used to determine an optimal transfer.

A. INTRODUCTION

The approach used in this analysis was described in detail in ref. 1, in which transfers between neighboring coaxial ellipses were considered. An analytical solution that was applicable to transfers between neighboring ellipses was presented. The equations must be solved numerically for transfers between arbitrary ellipses. This report presents the analysis and results for transfers between arbitrary coaxial ellipses.

The following notation is employed: ϵ = eccentricity, h = angular momentum, $L = \log h$, λ = adjoint variables, r_p = periapsis radius, r_A = apoapsis radius, i = inclination of orbit plane.

B. ANALYSIS

The Hamiltonian equations were presented in ref. 1. They are nonlinear and coupled but still can be solved rather simply without the use of any numerical integration technique. The switching surface, for positive eccentricity, is shown in Fig. 1. It is plotted here in terms of λ_1^* and λ_2^* , where

$$\lambda_1^* \equiv \lambda_1 e^L, \quad \lambda_2^* \equiv \lambda_2^* e^L$$

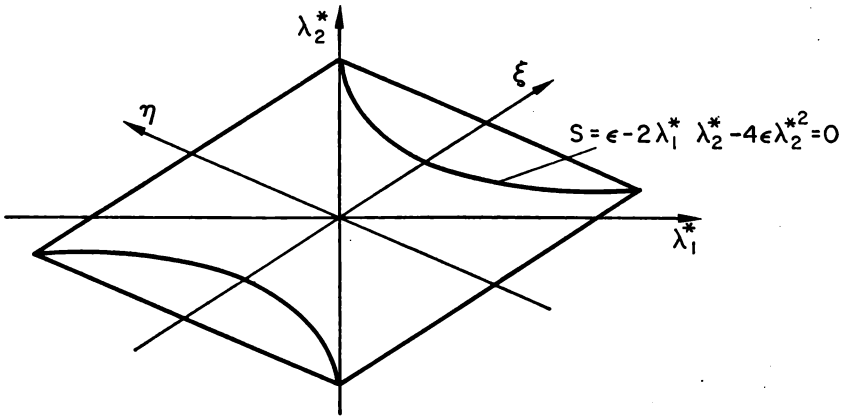


FIG. 1. Switching surface $\epsilon > 0$.

A transformation is defined by the following equations:

$$\lambda_1^* = \frac{1}{2} (\xi - \eta)(1 - \epsilon^2)$$

$$\lambda_2^* = \frac{1}{4} \xi(1 + \epsilon) + \frac{1}{4} \eta(1 - \epsilon).$$

The variables ξ and η are represented on the figure. When $\theta^* = 0$, ξ denotes β_y , and when $\theta^* = \pi$ negative η represents β_y . An arbitrary selection of ξ and η specifies the initial control and the resulting extremal.

In order to determine the extremal resulting from some initial (ξ, η) pair the following momentum diagram was used.

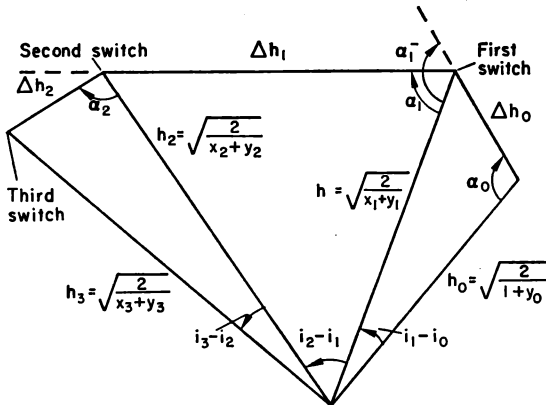


FIG. 2. Momentum diagram.

The angular momentum, h , is given by

$$h = \sqrt{\frac{2}{x+y}}$$

where

$$x \equiv \frac{1}{r_p}, \quad y \equiv \frac{1}{r_A}.$$

Now h_0 is specified by the initial orbit, and α_0 (see figure) can be computed from the initial values of the adjoint variables. The equations are:

$$\beta_y = h \left[\frac{\lambda_1}{1+c\epsilon} + 2c\lambda_2 \right]$$

$$\lambda_4 = \frac{(1+c\epsilon)}{h} \sqrt{1-\beta_y^2} \quad (= \text{constant})$$

$$\beta_z = \frac{c\lambda_4 h}{1+c\epsilon}$$

$$\cos \alpha = -\beta_y$$

$$\sin \alpha = c\beta_z.$$

The direction α_0 of the change in the angular momentum, Δh , can therefore be calculated. The magnitude of Δh during any impulse is given by

$$\Delta h = \frac{h_i^2 \tau^1}{1+c\epsilon_i}$$

where τ^1 is the change in cost since the last switch and the subscript i represents the initial values for that impulse. The procedure followed was to increase cost in increments and for each increment evaluate the new value of angular momentum—using the law of cosines—and subsequently calculate the new values of the adjoint variables from the following equations. Let the subscript n represent new values; then

$$h_n^2 = h_i^2 + \Delta h^2 - 2h_i \Delta h \cos \alpha_i$$

and, if $c = 1$, then $x_n = x_i$ and $y_n = \frac{2}{h_n^2} x_n$, otherwise $y_n = y_i$ and

$x_n = \frac{2}{h_n^2} y_n$. Then

$$\cos \alpha_n = \frac{1}{2h_n \Delta h} \{h_i^2 - h_n^2 - \Delta h^2\},$$

$$\sin \alpha_n = \frac{h_i}{h_n} \sin \alpha_i,$$

$$\epsilon_n = 1 - h_n^2 y_n,$$

$$\beta_{y^n} = -\cos \alpha_n,$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{z_n} &= c \sin \alpha_n, \\
 \lambda_{1_n} &= \lambda_{1_i} - \tau^1, \quad f_{1_n} = h_n \beta_{y_n} / (1 + c \varepsilon_n), \\
 f_{2_n} &= 2c h_n \beta_{y_n}, \quad f_{4_n} = c h_n \beta_{z_n} / (1 + c \varepsilon_n), \\
 \lambda_{2_n} &= \begin{cases} (1 - \lambda_{1_n} f_{1_n} - \lambda_{4_n} f_{4_n}) / f_{2_n}, & f_{2_n} \neq 0 \\ -\lambda_{1_n} / (2(c + \varepsilon_n)), & f_{2_n} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

The corresponding value of S is then computed from

$$S_n = \varepsilon_n (\lambda_{1_n}^2 + \lambda_{4_n}^2) - 2\lambda_{1_n} \lambda_{2_n} (1 - \varepsilon_n^2)$$

which was derived in ref. 1. If S_n has the same sign as the initial value of S , then a switch has not yet occurred along this particular extremal. When S changes sign, a switch must have taken place. It is a simple matter to iterate to any desired accuracy and determine the point at which the switching surface was crossed. The program used determined the correct switching point to within an error of less than 1×10^{-10} .

The adjoint variables must be continuous across a switch. Hence, the new direction, α , can be computed and the above process repeated until the switching surface is again reached. If no stopping condition were prescribed, the procedure could be continued indefinitely. However, there are two criteria that dictate that the extremal should be terminated as it can no longer be optimal. The first is the conjugate point test described in ref. 1. The second is to compare the cost at each point along the extremal with the cost of the bipolarabolic transfer to the same point. The bipolarabolic transfer consists of parabolic orbits between the periapses of the initial and final orbits and escape. All of the required plane change is effected at "infinity", where it costs nothing.

The cost of the bipolarabolic transfer is given by

$$\tau = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{1+y_0}} + x_n \left[\sqrt{\frac{2}{x_n}} - h_n \right], \quad \varepsilon_n > 0$$

or

$$\tau = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{2}{1+y_0}} + y_n \left[\sqrt{\frac{2}{y_n}} - h_n \right], \quad \varepsilon_n < 0.$$

Whenever the cost along an extremal exceeds the bipolarabolic cost, then clearly the extremal can no longer represent the optimal strategy and it should be terminated.

Just as with the small eccentricity transfers, the extremals can be separated into four families corresponding to the four distinct initial strategies. The intersections of these extremals with planes of given inclination can be recorded and the extremal having the lowest cost at a given point is optimal. The goal of this investigation was not only to determine the optimal transfer between two given orbits, but also to present the results in a useable

form. This was accomplished in the following way. Initial values of ξ and η define a unique extremal. Hence the ξ, η space was covered by initial values and the corresponding extremals were tabulated on tape. The four different strategies could easily be separated and graphed individually. Then by direct comparison of costs the extremals having lowest cost would be determined.

The results for circle-to-ellipse transfers are presented in Figs. 3 through 8. These represent inclinations of 30 degrees through 55 degrees in increments of 5 degrees.

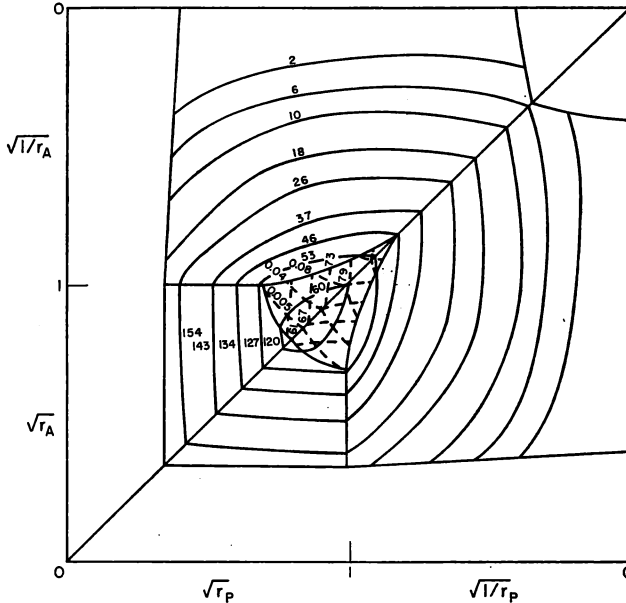


FIG. 3. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 30 degrees inclination.

There are a number of interesting features to be observed. The heavy solid lines represent boundaries between biparabolic, two-impulse, and three-impulse transfers. A further subdivision is between the four separate families of extremals. Of course, in this case there is symmetry about the diagonal so that families 1 and 4 are identical, as are families 2 and 3. The coordinate axes are apsidal distance plotted from 0 to 1 and inverse apsidal distance plotted from 1 to 0. Hence the complete range of distance from 0 to ∞ can be shown. The initial orbit, a circle, is represented by the point in the center of each figure, as $r_A = r_p = 1$. The three-impulse region does not exist for coplanar transfers (this was shown in ref. 1) and it grows in size as inclination increases. Also, the biparabolic region increases in size as the inclination increases. The direction of movement of the bi-

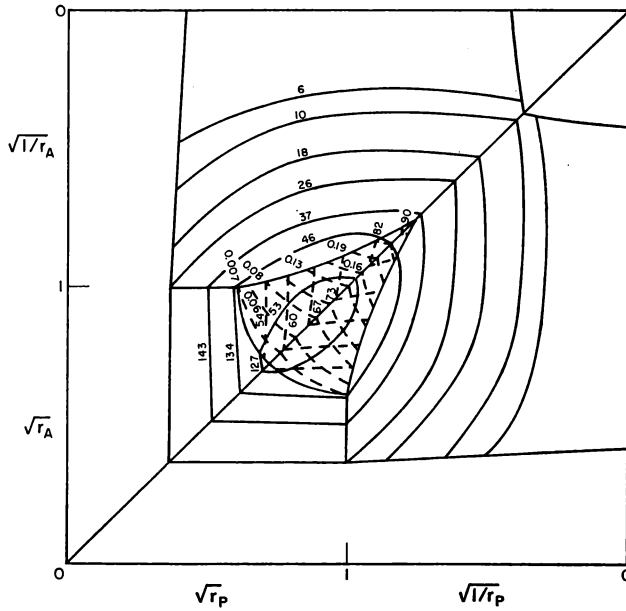


FIG. 4. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 35 degrees inclination.

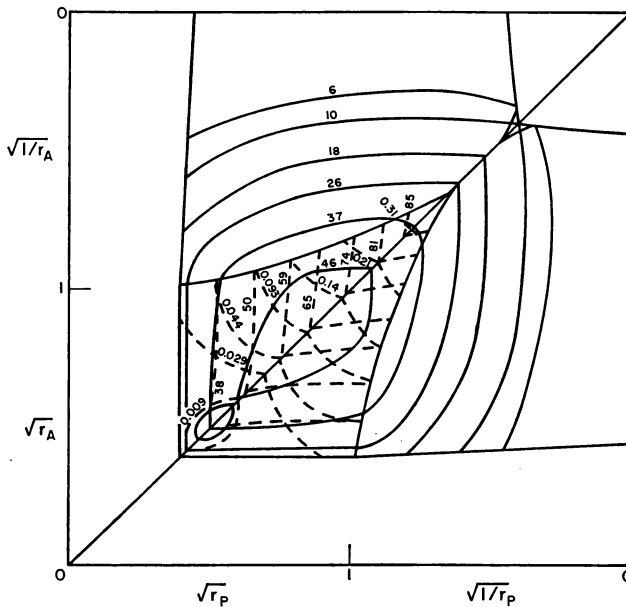


FIG. 5. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 40 degrees inclination.

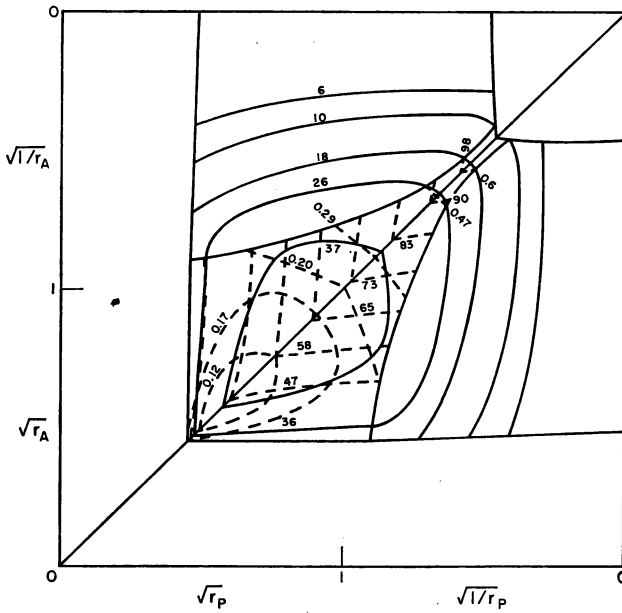


FIG. 6. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 45 degrees inclination.

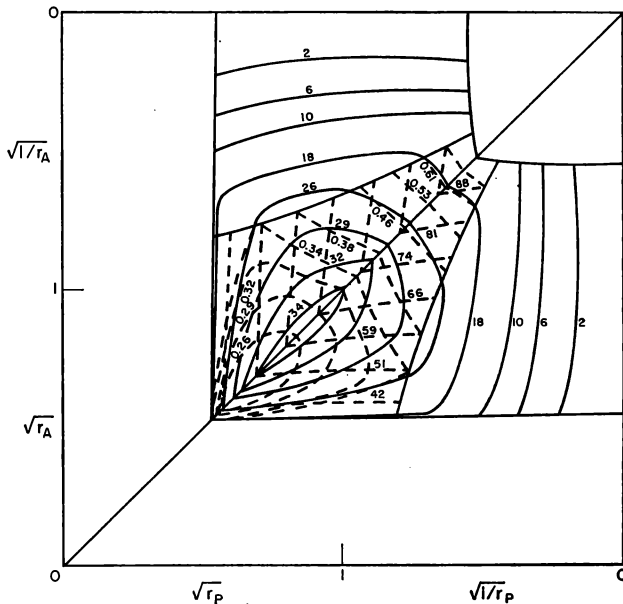


FIG. 7. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 50 degrees inclination.

parabolic boundaries is toward the center of the figures. These two actions occur simultaneously until the inclination reaches approximately 60 degrees, at which time the biparabolic maneuver covers almost the entire figure. Marchal obtains the result that this occurs at an inclination of 60.188 degrees, and this is in agreement with the present results. The diagram for 60 degrees inclination is not presented. Also, this technique of comput-

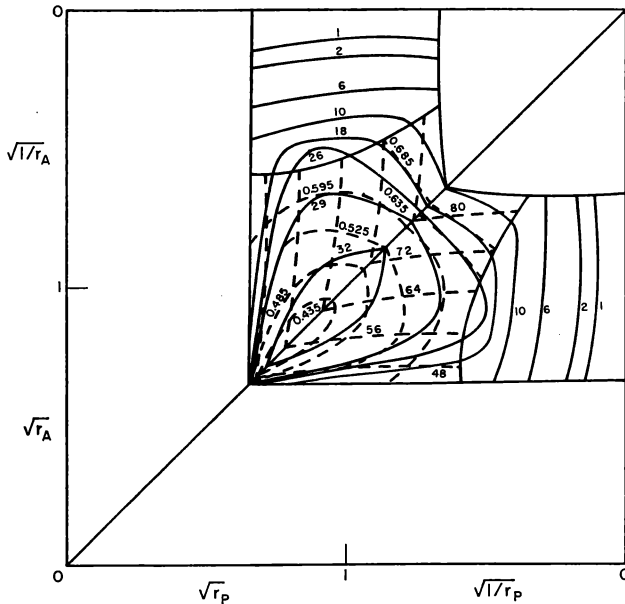


FIG. 8. Minimum fuel transfers between circles and ellipses at 55 degrees inclination.

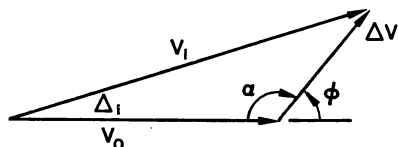
ing extremals did not lead to any extremals having inclinations of 61 degrees. (The results were tabulated at 1-degree intervals but are not plotted in this report.) The regions change shape slowly at first but very rapidly as the inclination approaches 60 degrees.

The boundary separating the two- and three-impulse strategies is unbroken initially; however, for inclinations near 37.5 degrees the boundary separates and forms two disjoint regions in which the two-impulse strategy is optimal. As the inclination continues to increase the smaller region rapidly diminishes in size and disappears when the upper boundary between the two- and three-impulse regions joins to the biparabolic boundary rather than the diagonal.

The results presented also agree with those given by Hiller in a 1965 paper in which circle-to-circle transfers were considered. Hiller obtained an equation for the boundary between the two- and three-impulse strategies

for circle-to-circle transfers, which is a special case of the transfers considered here. He also obtained the result that the biparabolic transfer is best when the inclination exceeds 60 degrees.

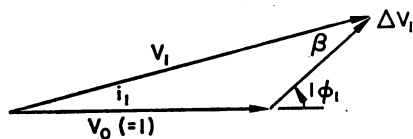
The other lines shown in the figures may be used to determine the magnitude and direction of each impulse. In the two-impulse region the complete trajectory can be determined if the magnitude and direction of the first impulse is known. The direction of the first impulse is given by the solid contours, which are contours of constant values of ϕ , where ϕ is measured between the direction of motion and the impulse as shown in the sketch.



The magnitude of the first impulse is given by the change in the apsidal distance. The magnitude and direction of the second impulse can then be determined.

For three-impulse transfers information about the first two impulses is sufficient to completely determine the transfer. This information is provided by the dashed and solid lines inside the three-impulse regions. These are contours of eccentricity at the end of the first impulse (thereby specifying the magnitude of the first impulse) and of the direction ϕ of the first impulse and the direction α for the second impulse. The following sample calculation illustrates the use of the figures.

Suppose it is desired to transfer between a circle and an ellipse having $r_p = 1.56$, $r_A = 1.786$, and $i = 40^\circ$. The point corresponding to these radii is located in Fig. 5, and it is seen that the optimal transfer requires three impulses. The direction of the first impulse is read to be 37 degrees, and the eccentricity after application of the first impulse is $\epsilon_1 = 0.31$. The impulse diagram is



Then

$$V_1^2 = \frac{1 + \epsilon_1}{r_{p1}} = 1.311 \Rightarrow V_1 = 1.145$$

and

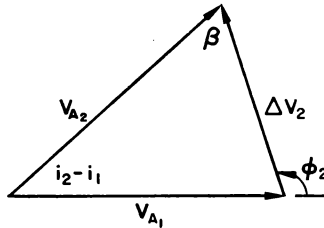
$$\sin \beta = \frac{\sin(\pi - \phi_1)}{V_1} \Rightarrow \beta = 31.6^\circ$$

so

$$i_1 = 5.3^\circ$$

The magnitude of the first impulse can then be calculated from the cosine law. The result is $\Delta V_1 = 0.176$.

The direction of the second impulse is read to be 95° , and it is applied at apoapsis. The impulse diagram is:



The known values of r_{p1} and ε_1 specify that $r_{A1} = 1.905$. Then

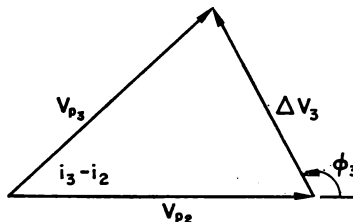
$$V_{A1}^2 = \frac{1 - \varepsilon_1}{r_{A1}} \quad \text{or} \quad V_{A1} = 0.602$$

Then

$$V_{A2}^2 = 2 \left(\frac{r_p}{r_A} \right)_2 \frac{1}{(r_p + r_A)_2}, \quad \text{so} \quad V_{A2} = 0.688.$$

Then $\beta = 61^\circ$ and $i_2 - i_1 = 33.5^\circ$. Finally, $\Delta V_2 = 0.38$.

The amount of plane change remaining for the third impulse is 1.2 degrees. Hence most of the plane change was accomplished by the middle impulse which was applied at the apoapsis. The final impulse is calculated from



The final eccentricity is $\varepsilon = 0.0675$ and $r_{p2} = r_{p3} = 1.56$, $r_{A2} = r_{A3} = 1.786$. Thus

$$V_{p2}^2 = 2 \left(\frac{r_A}{r_p} \right)_2 \frac{1}{(r_A + r_p)_2} = 0.705, \quad \text{or} \quad V_{p2} = 0.84.$$

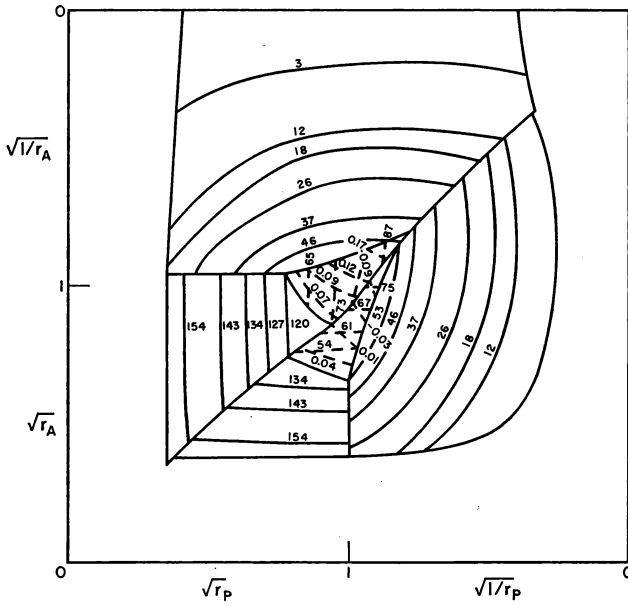


FIG. 9. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.05$, $i = 30$ degrees.

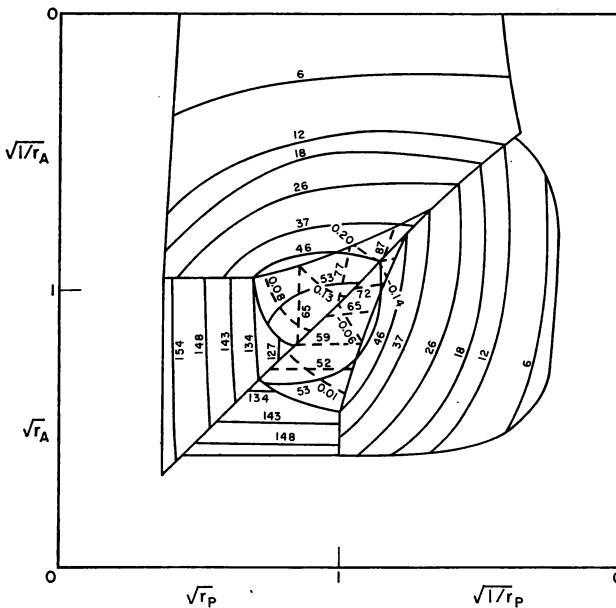


FIG. 10. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.05$, $i = 35$ degrees

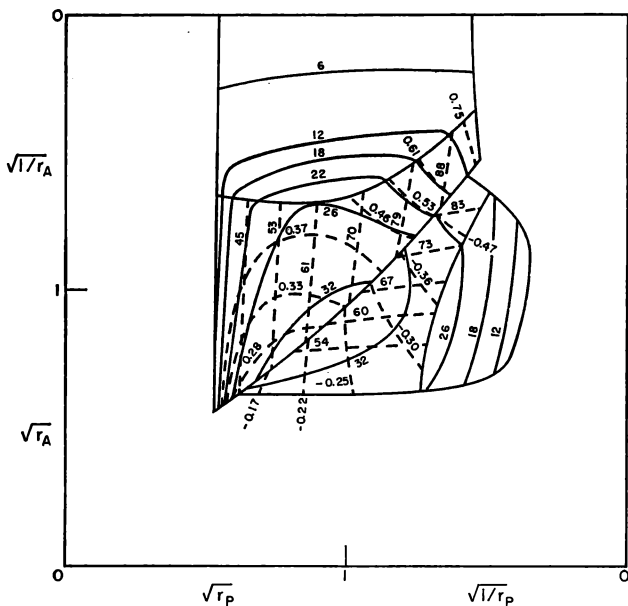


FIG 13. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.05$, $i = 50$ degrees.

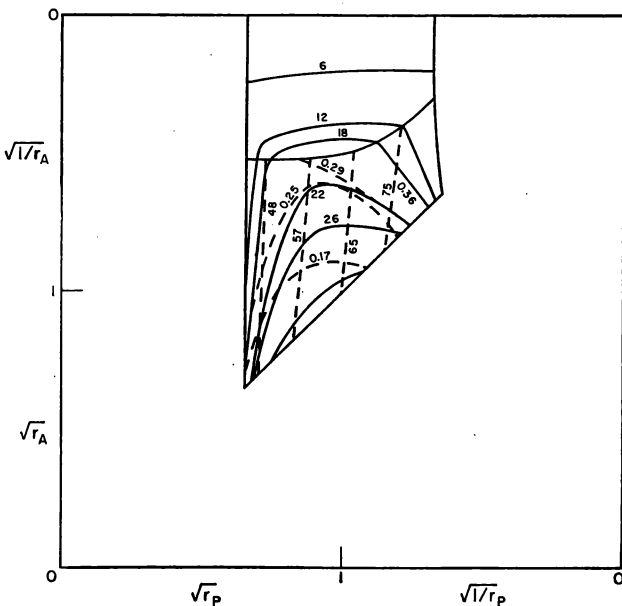


FIG 14. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.05$, $i = 55$ degrees.

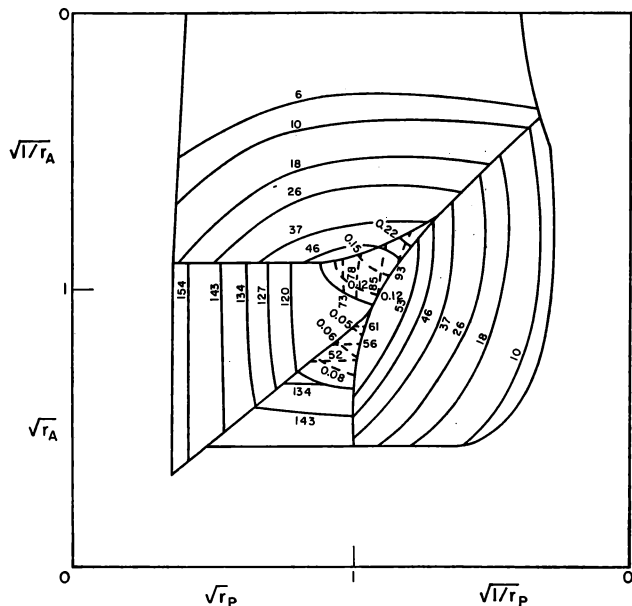


FIG. 15. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 30$ degrees.

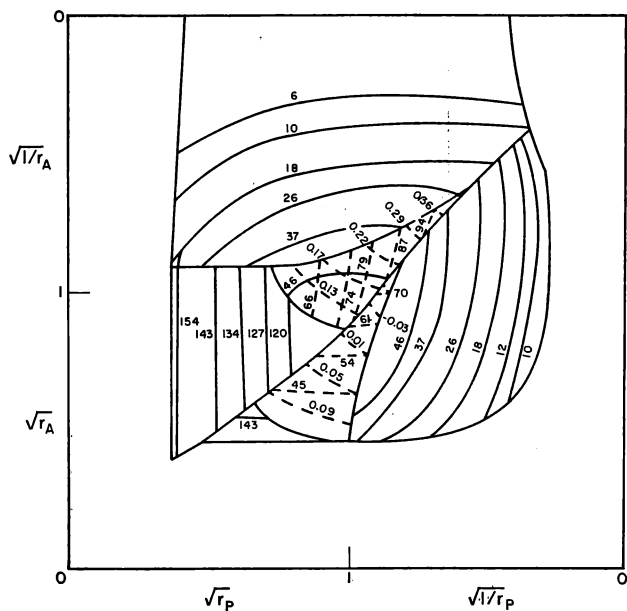


FIG. 16. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 35$ degrees.

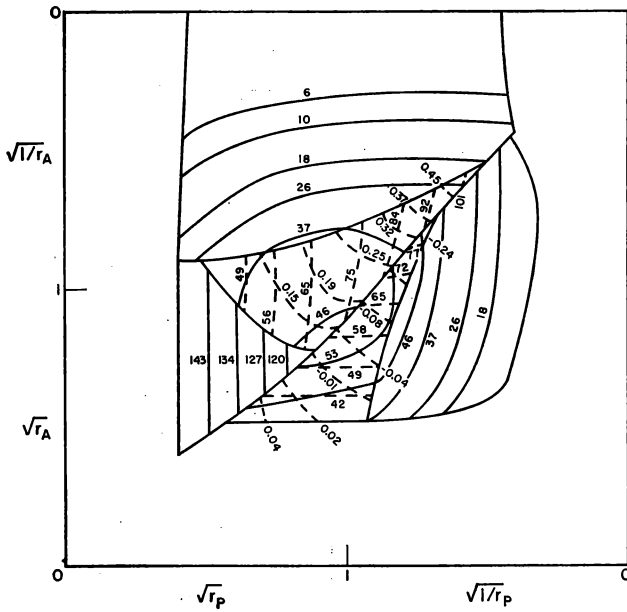


FIG. 17. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 40$ degrees.

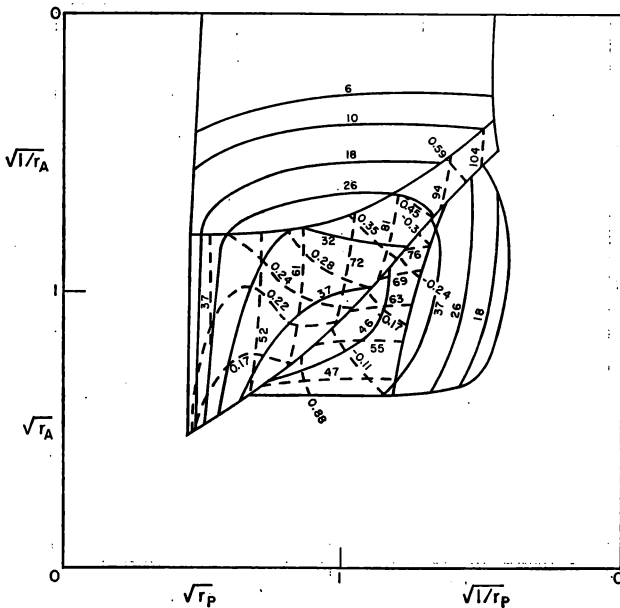


FIG. 18. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 45$ degrees.

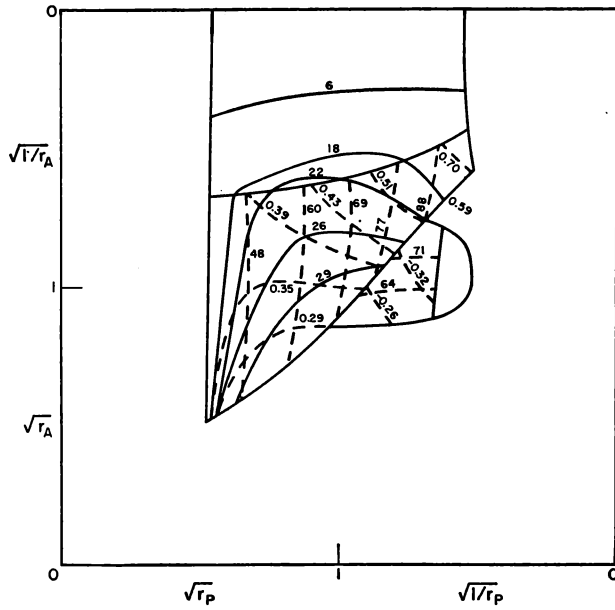


FIG. 19. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 50$ degrees.

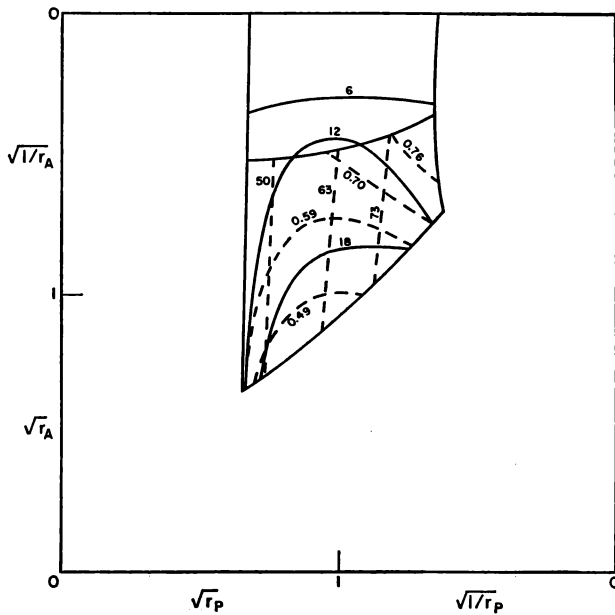


FIG. 20. Minimum fuel transfers, ellipse to ellipse, $\epsilon_0 = 0.10$, $i = 55$ degrees.

Then

$$v_{p_3}^2 = \frac{1 + \varepsilon_f}{r_{p_f}} = 0.684, \quad \text{so} \quad V_{p_3} = 0.828.$$

Therefore $\Delta V_3^2 = 0.00485$, or $\Delta V_3 = 0.022$. Then $\phi_3 = 130^\circ$.

The results of transfers between elliptic orbits are presented in the remaining figures in this report (Figs. 9-20). These figures have the same characteristics as those indicated for circle-to-ellipse transfers. The symmetry property no longer exists, and the wedge-shaped region of three-impulse transfers is sheared just as it was on the figures in the discussion of the linearized theory of ref. 1. Also, the bipolarabolic boundary becomes a smooth curve in region 4, but remains a broken curve in region 1. The figures may be used to calculate the trajectory just as they were illustrated above.

REFERENCE

1. C. B. WINN. Minimum Fuel Transfers between Coaxial Orbits, both Coplanar and Noncoplanar. Stanford University, Center for Systems Research, Sudaar 305, March 1967.

A UNIFORM CLOSED SOLUTION OF THE VARIATIONAL EQUATIONS FOR OPTIMAL TRAJECTORIES DURING COAST†

SAMUEL PINES

Analytical Mechanics Associates, Inc.

and

T. C. FANG

Grumman Aircraft Engineering Corp.

INTRODUCTION

Many optimal trajectories of a thrusting body in a central force field contain extremal arcs along which the engine is shut down. Since closed form solutions of the state are known to exist along these arcs, it is advantageous to avoid numerical integration by utilizing these expressions.

A general method is presented here for obtaining solutions of variational problems which avoid the numerical integration methods usually employed in the solution of these typically unstable systems. Numerical techniques for evaluating the convergent series are discussed and the derivation of the recursion equations, reduction formulae, and termination criteria for the solution of iteration procedures required in the computations is given.

This paper contains the solution of the two-body problem, the corresponding solution of the Euler-Lagrange equations of the adjoint variables for optimal control and, finally, the solution of the variational equations for application in second variation and other iterative methods used to solve two-point boundary value problems. The jump conditions in the state, adjoint, and variational variables which must be satisfied at the switching points for optimal trajectories are also presented.

Another important application for the closed form solution of the second variation lies in the study of stability problems in celestial mechanics. All the solutions are given in Cartesian coordinates in a uniform manner so

† The research and development work reported in this paper was carried out under Contracts NAS 9-4036, Manned Spacecraft Center, NAS 5-9085, Goddard Space Flight Center, and NAS 12-114, Electronics Research Center.

that a single form holds for all coasting arcs; circular, elliptic, parabolic, hyperbolic, as well as rectilinear.

The basic concepts for this paper were developed by the authors in refs. 1 and 2, during developmental studies for NASA.

THE GENERATING FUNCTION FOR THE SOLUTION OF THE VARIATIONAL EQUATIONS

The equations of motion of a vehicle in a central force field along an optimal trajectory when the engine is shut down are given by

$$\ddot{R} = -\mu \frac{R}{r^3} \quad (1a)$$

$$\dot{\Lambda} = -\mu \frac{\Lambda}{r^3} + 3\mu \frac{\Lambda \cdot R}{r^5} R \quad (1b)$$

The variational equations along the same optimal trajectory due to changes in the initial conditions are given by

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta R = -\mu \frac{\delta R}{r^3} + 3\mu \frac{R \cdot \delta R}{r^5} R \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta \Lambda = & -\mu \frac{\delta \Lambda}{r^3} + 3\mu \frac{R \cdot \delta R}{r^5} \Lambda + 3\mu \frac{\delta \Lambda \cdot R}{r^5} R + 3\mu \frac{\Lambda \cdot \delta R}{r^5} R \\ & + 3\mu \frac{\Lambda \cdot R}{r^5} \delta R - 15\mu \frac{\Lambda \cdot R}{r^7} R \cdot \delta R R \end{aligned} \quad (2b)$$

It may be noted that while the equations are nonlinear in the state vector R , they are linear (and, in fact, homogeneous) in the adjoint variables Λ , and in the variational variables δR and $\delta \Lambda$. Moreover, eqs. (1b) and (2a) are the same, and so their solutions differ only by the difference in the initial conditions of the two sets of variables.

It will be shown that, if a closed form solution of the nonlinear differential equation (1a) is known in the terms of the initial conditions, then a complete closed form solution of eqs. (1b), (2a) and (2b) may be obtained by simple partial differentiation. Such a solution is much to be preferred over numerical integration since the error accumulation will be the minimum attainable by numerical processes in finite digital arithmetic.

Consider a nonlinear ordinary vector differential equation

$$\frac{dx}{dt} = h(x, t) \quad (3)$$

with initial conditions $x(t_0)$. The variational differential equations for eq. (3)

are given by

$$\frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \delta x \quad (4)$$

with initial conditions $\delta x(t_0)$.

Assume that we have a solution of eq. (3) in terms of the initial conditions

$$x(t) = x[x(t_0), t] \quad (5)$$

Consider the tentative solution of eq. (4)

$$\delta x(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial x(t_0)} \delta x(t_0) \quad (6)$$

Differentiating eq. (6) with respect to the time, we have

$$\frac{d}{dt} \delta x(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial x(t)}{\partial x(t_0)} \delta x_0 \quad (6a)$$

Since $x(t)$ is a continuous function of $x(t_0)$ and t , we may interchange the order of differentiation and obtain

$$\frac{d}{dt} \delta x(t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x_0} \delta x_0 = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x(t)} \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} \delta x_0 = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x(t)} \delta x(t) \quad (6b)$$

It follows that eq. (6) is a solution of eq. (4). Moreover, since $\frac{\partial x(t)}{\partial x(t_0)}$ is a fundamental solution with unit initial conditions, it follows that

$$\delta x_{t=0} = \delta x(t_0) \quad (7)$$

Consequently, if we have a closed form solution of eq. (1a) in terms of the initial conditions, we may obtain a closed form solution of eqs. (1b) and (2a) by simple partial differentiation. Thus, if R is a vector with components $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), and if

$$x_i(t) = x_i[x_j(t_0), \dot{x}_j(t_0), t] \quad (8)$$

we have

$$\begin{aligned} \delta x_i(t) &= \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \delta x_j(t_0) + \frac{\partial x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \delta \dot{x}_j(t_0) \\ \delta \dot{x}_i(t) &= \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \delta x_j(t_0) + \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \delta \dot{x}_j(t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

Moreover, since $\Lambda(t)$ is a vector with components $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) which satisfies the same differential equation as δR , we have

$$\begin{aligned} \lambda_i(t) &= \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \lambda_j(t_0) + \frac{\partial x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \dot{\lambda}_j(t_0) \\ \dot{\lambda}_i(t) &= \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \lambda_j(t_0) + \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \dot{\lambda}_j(t_0) \end{aligned} \quad (10)$$

By the same argument, since we now have a closed solution of the differential equations for the adjoint variables $\Lambda(t)$ in terms of the initial conditions of both $R(t_0)$ and $\dot{\Lambda}(t_0)$, we have obtained a potential function for generating the solution of the variational differential equations for $\Lambda(t)$.

$$\begin{aligned} \delta\lambda_i(t) = & \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \delta\lambda_j(t_0) + \frac{\partial x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \delta\dot{\lambda}_j(t_0) + \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial x_k(t_0)} \lambda_k(t_0) \delta x_j(t_0) \\ & + \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0) \partial x_k(t_0)} \lambda_k(t_0) \delta \dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial \dot{x}_k(t_0)} \dot{\lambda}_k(t_0) \delta x_j(t_0) \\ & + \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0) \partial \dot{x}_k(t_0)} \dot{\lambda}_k(t_0) \delta \dot{x}_j(t_0) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{\lambda}_i(t) = & \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_j(t_0)} \delta\lambda_j(t_0) + \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0)} \delta\dot{\lambda}_j(t_0) + \frac{\partial^2 \dot{x}_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial x_k(t_0)} \lambda_k(t_0) \delta x_j(t_0) \\ & + \frac{\partial^2 \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0) \partial x_k(t_0)} \lambda_k(t_0) \delta \dot{x}_j(t_0) + \frac{\partial^2 \dot{x}_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial \dot{x}_k(t_0)} \dot{\lambda}_k(t_0) \delta x_j(t_0) \\ & + \frac{\partial^2 \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0) \partial \dot{x}_k(t_0)} \dot{\lambda}_k(t_0) \delta \dot{x}_j(t_0) \end{aligned} \quad (12)$$

THE REGULARIZED SOLUTION OF THE TWO-BODY PROBLEM

Solutions of the two-body problem in uniform Cartesian coordinates are given by several authors.⁽³⁻⁶⁾ The earliest known reference is that due to Stumpff.⁽⁶⁾

Let

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{r^3} \quad (1a)$$

Since $\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H}$ is a constant vector, it follows that $\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = 0$ and motion is confined to a plane. We seek a solution

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= f(t)\mathbf{R}(t_0) + g(t)\dot{\mathbf{R}}(t_0) \\ \dot{\mathbf{R}}(t) &= \dot{f}(t)\mathbf{R}(t_0) + \dot{g}(t)\dot{\mathbf{R}}(t_0) \end{aligned} \quad (13)$$

The solutions of the scalar functions f , g , \dot{f} , \dot{g} as functions of time are poorly convergent and do not accurately describe the motion close to a collision (for the rectilinear case). We transform time to a new variable which regularizes the solution in the entire plane up to the actual collision. Let

$$\beta = \sqrt{a(E - E_0)} \quad (14)$$

In terms of this parameter, the required functions are

$$\begin{aligned}
 f &= 1 - \frac{G_2}{r_0}, \quad \dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu}G_1}{rr_0} \\
 g &= t - t_0 - \frac{G_3}{\sqrt{\mu}}, \quad \dot{g} = 1 - \frac{G_2}{r}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

The functions G_i are given by

$$G_i = \beta^i F_i(\alpha) \tag{15a}$$

where

$$F_i(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{(2k+i)!} \tag{15b}$$

and

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{\beta^2}{a} \\
 \frac{1}{a} &= \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu} \\
 r_0 &= [R(t_0) \cdot R(t_0)]^{1/2} \\
 r &= [R(t) \cdot R(t)]^{1/2} \\
 v_0^2 &= \dot{R}(t_0) \cdot \dot{R}(t_0) \\
 d_0 &= R_0(t_0) \cdot R_0(t_0)
 \end{aligned}
 \tag{15c}$$

In order to reduce the number of computations required to generate the F_i series, we have recourse to both recursion and reduction formulae. For the F_i series, we have the simple recursion formula

$$F_i = \frac{1}{i!} - \alpha F_{i+2} \tag{16}$$

Thus, only the highest F_n need be computed by series with the lower order functions obtainable by recursion.

In order to reduce the maximum number of terms in the series, we introduce a set of reduction formulae for $F_i(\alpha)$ in terms of $F_i\left(\frac{\alpha}{4}\right)$. Thus by limiting $|\alpha| \leq 1$, we require only 12 terms to obtain accuracy of the order of 10^{-16} . The reduction formulae are

$$\begin{aligned}
 F_{2n+1}(\alpha) &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_{2(n-i)}\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{(2i+1)!} + F_0\left(\frac{\alpha}{4}\right) F_{2n+1}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \right\} \\
 F_{2n}(\alpha) &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F_{2(n-i)}\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{(2i+1)!} + F_1\left(\frac{\alpha}{4}\right) F_{2n-1}\left(\frac{\alpha}{4}\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

At times it is necessary to relate the transit time with the regularizing eccentric anomaly. We have, for Kepler's equation,

$$\sqrt{\mu}(t-t_0) = G_3 + r_0 G_1 + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} G_2 \quad (18)$$

If the time is given and we require β , we may use Newton's method as follows:

$$\beta_i = \beta_{i-1} + \frac{\sqrt{\mu}(t-t_0) - \left[G_3 + r_0 G_1 + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} G_2 \right]_{\beta_{i-1}}}{\left(G_2 + r_0 G_0 + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} G_1 \right)_{\beta_{i-1}}} \quad (19)$$

To keep the number of iterations of eq. (19) to a minimum, we recommend stopping on an either/or policy as follows:

(a) No further improvement in β is possible

$$|\Delta\beta_i| \leq |\beta_{i-1}| \cdot 10^{-p} \quad (20a)$$

or

(b) No further improvement in $\sqrt{\mu}(t-t_0)$ is possible

$$|\Delta\beta_i| \leq \frac{|\sqrt{\mu}(t-t_0)|}{\left| G_2 + r_0 G_0 + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} G_1 \right|_{\beta_{i-1}}} \cdot 10^{-p} \quad (20b)$$

where p is the digit word length in the computer (i.e. single precision— $p = 8$; double precision— $p = 16$).

In order to further reduce the number of iterations required, it is helpful to have a good first approximation to the solution of Kepler's equation. We recommend solving the following cubic equation

$$\sqrt{\mu}(t-t_0) = \frac{\beta^3}{6} + r_0 \beta + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} \frac{\beta^2}{2} \quad (21)$$

This equation always has one and only one real root, corresponding to the solution of a parabola with the same initial r_0 and d_0 as the conic in question.

THE SOLUTION OF THE VARIATIONAL EQUATIONS

The closed form solution of the variational equations will be obtained by the partial differentiation of the solution of the two-body problem with respect to the initial conditions. The differentiation of those terms, such as r_0 , d_0 , $\frac{1}{a}$, etc., which are directly dependent on the initial conditions, is

straightforward:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_0}{\partial x_{0i}} &= \frac{x_{0i}}{r_0}, & \frac{\partial d_0}{\partial x_{0i}} &= \dot{x}_{0i}, \\
 \frac{\partial r_0}{\partial \dot{x}_{0i}} &= 0, & \frac{\partial d_0}{\partial \dot{x}_{0i}} &= x_{0i}, \\
 \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial x_{0i}} &= -\frac{2x_{0i}}{r_0^3}, & \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial \dot{x}_{0i}} &= -\frac{2}{\mu} \dot{x}_{0i},
 \end{aligned} \tag{22}$$

The differentiation of the Stumpff functions gives

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_n \left(\beta, \frac{1}{a} \right)}{\partial x_{0i}} &= G_{n-1} \frac{\partial \beta}{\partial x_{0i}} - (nG_{n+2} - \beta G_{n+1}) \frac{x_{0i}}{r_0^3} \\
 \frac{\partial G_n \left(\beta, \frac{1}{a} \right)}{\partial \dot{x}_{0i}} &= G_{n-1} \frac{\partial \beta}{\partial \dot{x}_{0i}} - (nG_{n+2} - \beta G_{n+1}) \frac{\dot{x}_{0i}}{\mu}
 \end{aligned} \tag{23}$$

The variation of β with respect to the initial conditions is obtained by differentiating Kepler's equation and requiring the transit time, $t - t_0$, to remain unchanged. Thus

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \beta}{\partial x_{0i}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) + \frac{x_{0i} \sqrt{\mu}}{r_0 r} p_1 \\
 \frac{\partial \beta}{\partial \dot{x}_{0i}} &= -\frac{G_2 x_{0i}}{\sqrt{\mu} r} + \frac{\dot{x}_{0i}}{\sqrt{\mu} r} p_1
 \end{aligned} \tag{24}$$

where

$$p_1 = \frac{3G_5 - \beta G_4 + r_0(G_3 - \beta G_2) + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} (2G_4 - \beta G_3)}{\sqrt{\mu}}$$

It is convenient to note that we may interchange the order of differentiation and

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial x_{0j}} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_{0j}}, \\
 \frac{\partial \dot{x}_i(t)}{\partial \dot{x}_{0j}} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i(t)}{\partial \dot{x}_{0j}},
 \end{aligned} \tag{25}$$

with the understanding that

$$\frac{\partial x_{0i}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{x}_{0i}}{\partial t} = 0 \tag{25a}$$

With the above hints, we proceed directly to the solution of the problem.

*The First Partial*s

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) \left[\frac{p_1 x_{0j}}{r_0^3} + \frac{r}{\mu} (\dot{x}_j - \dot{x}_{0j}) \right] + f \delta_{ij} + \frac{x_{0j}}{r_0^3} \left[\left(G_2 + \frac{2G_4 - \beta G_3}{r_0} \right) x_{0i} + (3G_5 - \beta G_4) \frac{\dot{x}_{0i}}{\sqrt{\mu}} \right] \quad (26a)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0j}} = \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}}{\mu} [p_1 \dot{x}_{0j} - G_2 x_{0j}] + \frac{\dot{x}_{0j}}{\mu} \left[(2G_4 - \beta G_3) \frac{\dot{x}_{0i}}{r_0} + (3G_5 - \beta G_4) \frac{\dot{x}_{0i}}{\sqrt{\mu}} \right] + g \delta_{ij} \quad (26b)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0j}} = -\frac{\mu x_i}{r^3} \left[\frac{p_1 x_{0j}}{r_0^3} + \frac{r}{\mu} (\dot{x}_j - \dot{x}_{0j}) \right] + \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}}{r} \left[\frac{p_2 x_{0j}}{r_0^3} - \left(\frac{x_{0j}}{r_0} G_0 + \frac{\dot{x}_{0j}}{\sqrt{\mu}} G_1 \right) \right] + \frac{x_{0j}}{r r_0^3} \left[\left(G_1 + \frac{G_3 - \beta G_2}{r_0} \right) \sqrt{\mu} x_{0i} + (2G_4 - \beta G_3) \dot{x}_{0i} \right] + f' \delta_{ij} \quad (26c)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j}} = -\frac{x_i}{r^3} [p_1 \dot{x}_{0j} - G_2 x_{0j}] + \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}}{r \sqrt{\mu}} \left[\frac{p_2 \dot{x}_{0j}}{\sqrt{\mu}} - G_1 x_{0j} \right] + \frac{\dot{x}_{0j}}{\mu r} \left[(G_3 - \beta G_2) \frac{\sqrt{\mu}}{r_0} x_{0i} + (2G_4 - \beta G_3) \dot{x}_{0i} \right] + g' \delta_{ij} \quad (26d)$$

where

$$p_2 = 2G_4 - \beta G_3 + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} (G_3 - \beta G_2) - r_0 \beta G_1$$

The closed form expressions for $\frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial x_k(t_0)}$, etc., are given below. In general, one would expect 24 different types of expressions; however, due to the analytic character of the two-body solution, the various second order cross partials are independent of the order in which the differentiation is carried out. Thus

$$\frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_j(t_0) \partial x_k(t_0)} = \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_k(t_0) \partial x_j(t_0)} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial \dot{x}_j(t_0) \partial x_k(t_0)} = \frac{\partial^2 x_i(t)}{\partial x_k(t_0) \partial \dot{x}_j(t_0)}$$

etc.

It follows that only 6 different expressions are required. These are given below.

*The Second Partial*s

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_{0_j} \partial x_{0_k}} = & -\frac{\delta_{jk}}{r_0 \sqrt{\mu}} \left[G_1(\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) - \frac{(3G_5 - \beta G_4)\dot{x}_{0_i}}{r_0^2} \right] \\
 & + \frac{1}{r_0^3} \left(G_2 + \frac{2G_4 - \beta G_3}{r_0} \right) (x_{0_i} \delta_{jk} + x_{0_j} \delta_{ki} + x_{0_k} \delta_{ij}) + \frac{p_1}{r_0^3} \left[(\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) \delta_{jk} \right. \\
 & + \frac{rx_i}{r_0^3} \{x_{0_j}(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) + x_{0_k}(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})\} + \frac{\mu}{r_0^6} p_1 x_i x_{0_j} x_{0_k} + x_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} + x_{0_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} \\
 & - \frac{3}{2r_0^2} \left[x_{0_k} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0_j}} + x_{0_j} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0_k}} - f(x_{0_k} \delta_{ij} + x_{0_j} \delta_{ik}) \right] + \frac{r}{\mu} \left[(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} \right. \\
 & + (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j}) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} + \frac{r}{r_0^3} (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k})(2x_i - g\dot{x}_{0_i}) + \frac{3}{2r_0^2} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) \{(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})x_{0_k} \\
 & + (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k})x_{0_j}\} \left. \right] + \frac{2G_4 - \beta G_3}{r_0^3} \left[\frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}}{\mu} (x_{0_j} \dot{x}_{0_k} + \dot{x}_{0_j} x_{0_k}) - \frac{2x_{0_j} x_{0_k} x_{0_i}}{r_0^3} \right] \\
 & + \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^3 \sqrt{\mu}} \left[G_1 + \frac{G_3 - \beta G_2}{r_0} \right] (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) - \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^6} p_{3_i} \quad (28a)
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 p_{3_i} = & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left[\dot{x}_i (15G_7 - 7\beta G_6 + \beta^2 G_5) + \left\{ \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) + \frac{x_{0_i} \sqrt{\mu}}{r_0} \right\} \right. \\
 & \left. (8G_6 - 5\beta G_5 + \beta^2 G_4) + r_0 (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) (3G_5 - 3\beta G_4 + \beta^2 G_3) \right] \\
 \frac{\partial^2 x_i}{\partial \dot{x}_{0_j} \partial \dot{x}_{0_k}} = & \frac{(2G_4 - \beta G_3)x_{0_i}}{\mu r_0} \delta_{jk} + \frac{3G_5 - \beta G_4}{\mu^{3/2}} (\dot{x}_{0_i} \delta_{jk} + \dot{x}_{0_j} \delta_{ki} + \dot{x}_{0_k} \delta_{ij}) \\
 & + \frac{p_1}{\mu} \left[(\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) \delta_{jk} + \dot{x}_{0_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_j}} + \frac{p_1}{r_0^3} x_i \dot{x}_{0_j} \dot{x}_{0_k} + \dot{x}_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_k}} - (x_{0_j} \delta_{ik} + \dot{x}_{0_k} \delta_{ij}) \right. \\
 & - \frac{G_2 x_i}{r_0^3} (x_{0_j} x_{0_k} + x_{0_j} \dot{x}_{0_k}) \left. \right] - \frac{G_2}{\mu} \left[x_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_k}} + x_{0_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_j}} - (x_{0_j} \delta_{ik} + x_{0_k} \delta_{ij}) \right. \\
 & \left. - \frac{G_2 x_i x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^3} \right] + \frac{2G_4 - \beta G_3}{\mu^2} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) (x_{0_j} \dot{x}_{0_k} + \dot{x}_{0_j} x_{0_k}) - \frac{\dot{x}_{0_j} \dot{x}_{0_k}}{\mu^2} p_{3_i} \quad (28b) \\
 \frac{\partial^2 x_i}{\partial \dot{x}_{0_j} \partial x_{0_k}} = & \frac{3G_5 - \beta G_4}{r_0^3 \sqrt{\mu}} x_{0_k} \delta_{ij} - \frac{r}{\mu} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \delta_{ij} - \frac{G_2 (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i})}{\mu} \delta_{jk} \\
 & + \frac{(2G_4 - \beta G_3)\dot{x}_{0_j}}{\mu r_0} \delta_{ik}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 \left[\frac{\dot{x}_{0j}}{\mu} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} + \frac{rx_i \dot{x}_{0j}}{\mu r_0^3} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0k}) + \frac{x_{0k}}{r_0^3} \left(\frac{p_1 x_i \dot{x}_{0j}}{r_0^3} - \frac{x_i x_{0j} G_2}{r_0^3} + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j}} - \delta_{ij} \right) \right] \\
& + \frac{r}{\mu} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0k}) \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j}} - G_2 \frac{x_i x_{0j}}{r_0^3} \right) - \frac{G_2 x_{0j}}{\mu} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \\
& + \frac{(\dot{x}_i - \dot{x}_{0i})}{\mu^2} \dot{x}_{0j} \left[\frac{\mu x_{0k}}{r_0} (G_3 - \beta G_2) + (2G_4 - \beta G_3) \dot{x}_{0k} \right] \\
& + \frac{2G_4 - \beta G_3}{\mu r_0^3} [x_{0j} x_{0k} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) - x_{0j} \dot{x}_{0j} x_{0k}] - \frac{\dot{x}_{0j} x_{0k}}{\mu r_0^3} p_{3i}. \tag{28c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j} \partial \dot{x}_{0k}} &= \frac{1}{r \sqrt{\mu}} \left[\frac{x_{0i}}{r_0} (G_3 - \beta G_2) \delta_{jk} + \frac{2G_4 - \beta G_3}{\sqrt{\mu}} (\dot{x}_{0j} \delta_{jk} + \dot{x}_{0j} \delta_{ki} + \dot{x}_{0k} \delta_{ij}) \right] \\
& - \frac{p_1}{r_0^3} \left[x_i \delta_{jk} + \dot{x}_{0k} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0j}} + \dot{x}_{0j} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0k}} - \frac{\dot{x}_i \dot{x}_{0j} \dot{x}_{0k}}{\mu} p_1 + \frac{\dot{x}_{0j} x_{0k} + x_{0j} \dot{x}_{0k}}{\sqrt{\mu}} \left(G_2 \frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\mu}} \right. \right. \\
& \left. \left. + G_1 \frac{x_i}{r} \right) \right] + \frac{p_2}{\mu r} \left[\dot{x}_i \delta_{jk} - (\dot{x}_{0j} \delta_{jk} + \dot{x}_{0j} \delta_{ki} + \dot{x}_{0k} \delta_{ij}) + \dot{x}_{0k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j}} \right. \\
& \left. + \dot{x}_{0j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0k}} + \frac{2x_i \dot{x}_{0j} \dot{x}_{0k}}{r_0^3} p_1 - \frac{G_2 x_i}{r_0^3} (\dot{x}_{0j} x_{0k} + x_{0j} \dot{x}_{0k}) \right] - \frac{G_1}{r \sqrt{\mu}} \left[x_{0j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0k}} \right. \\
& \left. + x_{0k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0j}} - (x_{0j} \delta_{ik} + x_{0k} \delta_{ij}) - \frac{2G_2 x_i x_{0j} x_{0k}}{r_0^3} \right] + \frac{G_2}{r_0^3} \left[x_{0j} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0k}} \right. \\
& \left. + x_{0k} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0j}} + \frac{G_2 \dot{x}_i x_{0j} x_{0k}}{\mu} \right] + \frac{x_{0j} \dot{x}_{0k} + \dot{x}_{0j} x_{0k}}{\mu} \left[\left(\frac{G_3 - \beta G_2}{\sqrt{\mu}} \right) \left(\frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}}{r} \right) \right. \\
& \left. - \frac{(2G_4 - \beta G_3) x_i}{r_0^3} \right] - \frac{\dot{x}_{0j} \dot{x}_{0k}}{\mu^2} p_{4i} \tag{28d}
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
p_{4i} &= -\frac{\sqrt{\mu}}{r_0^3} x_i \left[(15G_7 - 7\beta G_6 + \beta^2 G_5) + \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} (8G_8 - 5\beta G_5 + \beta^2 G_4) \right. \\
& \left. + r_0 (3G_5 - 3\beta G_4 + \beta^2 G_3) \right] + \frac{1}{r} \left[\dot{x}_i (8G_8 - 5\beta G_5 + \beta^2 G_4) \right. \\
& \left. + \left\{ \frac{d_0}{\sqrt{\mu}} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) + \frac{\sqrt{\mu}}{r_0} x_{0i} \right\} (3G_5 - 3\beta G_4 + \beta^2 G_3) \right. \\
& \left. - r_0 \beta (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) (G_3 - \beta G_2) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial x_{0j} \partial x_{0k}} &= \frac{\delta_{jk}}{r_0} \left[\frac{2G_4 - \beta G_3}{rr_0^2} \dot{x}_{0i} - \frac{G_0 (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i})}{r} + \frac{G_1 x_i \sqrt{\mu}}{r_0^3} \right] \\
& + \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0^3} \left(G_1 + \frac{G_3 - \beta G_2}{r_0} \right) (x_{0j} \delta_{jk} + x_{0j} \delta_{ki} + x_{0k} \delta_{ij})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{p_1\mu}{r_0^6} \left[x_i \delta_{jk} - \left(\frac{x_i d}{r\mu} + \frac{r\dot{x}_i}{\mu} \right) \{x_{0_j}(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) + x_{0_k}(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})\} \right. \\
 & + \frac{rx_i}{r_0^3} (x_j x_{0_k} + x_k x_{0_j}) - \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^3} \left(\dot{x}_i p_1 + \frac{2x_i}{r} p_2 \right) + x_{0_j} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0_k}} + x_{0_k} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0_j}} - \frac{6x_i x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^2} \left. \right] \\
 & + \frac{p_2}{rr_0^3} \left[(\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) \delta_{jk} + \frac{rx_i}{r_0^3} \{x_{0_j}(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) + x_{0_k}(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})\} + x_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} + x_{0_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} \right] \\
 & - \frac{3}{2r_0^2} \left[x_{0_k} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} + x_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} - f(x_{0_k} \delta_{ij} + x_{0_j} \delta_{ik}) \right] - \frac{r}{r_0^3} \left[x_k \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} + x_j \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} \right. \\
 & + (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0_j}} - \frac{3x_i x_{0_j}}{r_0^2} \right) + (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j}) \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0_k}} - \frac{3x_i x_{0_k}}{r_0^2} \right) \\
 & - \frac{r}{\mu} (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k})(2f x_{0_i} + g \dot{x}_{0_i}) + \frac{r}{r_0^3} (2f x_{0_i} + g \dot{x}_{0_i}) \{x_j(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \\
 & + x_k(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})\} + \frac{3}{2r_0^2} \{x_i x_{0_j}(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) + x_i x_{0_k}(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j}) + (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i})(x_j x_{0_k} + x_k x_{0_j})\} \left. \right] \\
 & + \frac{d}{\mu r} \left[(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_j}} + (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j}) \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} + \frac{2r}{r_0^3} (\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k})(2f x_{0_i} + g \dot{x}_{0_i}) \right. \\
 & + \frac{3}{2r_0^2} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}) \{x_{0_j}(\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) + x_{0_k}(\dot{x}_j - \dot{x}_{0_j})\} \left. \right] + \frac{\sqrt{\mu}}{rr_0^3} (G_3 - \beta G_2) \left[\frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}}{\mu} (x_{0_j} \dot{x}_{0_k} \right. \\
 & + \dot{x}_{0_j} x_{0_k}) - \frac{2x_{0_j} x_{0_k} x_{0_i}}{r_0^3} \left. \right] - \frac{x_i (2G_4 - \beta G_3) (x_{0_j} \dot{x}_{0_k} + \dot{x}_{0_j} x_{0_k})}{r_0^6} \\
 & - \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^3} \left[\frac{\sqrt{\mu}}{r_0^3} x_i \left(G_1 + \frac{G_3 - \beta G_2}{r_0} \right) - \frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i}}{r} \left(G_0 - \frac{\beta G_1}{r_0} \right) \right] - \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^6} p_{4i}.
 \end{aligned} \tag{28e}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_j} \partial x_{0_k}} &= \left[\frac{r}{r_0^3} \left(\frac{2G_4 - \beta G_3}{r^2} x_{0_k} + x_k \right) - \frac{d}{\mu r} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \right] \delta_{ij} + \left[\frac{G_2 x_i}{r_0^3} \right. \\
 & - \left. \frac{G_1 (\dot{x}_i - \dot{x}_{0_i})}{r \sqrt{\mu}} \right] \delta_{jk} + \frac{\dot{x}_{0_j} (G_3 - \beta G_2)}{rr_0 \sqrt{\mu}} \delta_{ki} + \frac{p_1}{r_0^3} \left[\frac{\dot{x}_{0_j} x_{0_k}}{r_0^2} \left\{ x_i \left(3 + \frac{2p_2}{rr_0} \right) + \frac{p_1}{r_0} \dot{x}_i \right\} \right. \\
 & - \left. \frac{x_{0_j} x_{0_k}}{r_0^3} \left(G_2 \dot{x}_i + \frac{G_1 \sqrt{\mu}}{r} x_i \right) + \frac{\dot{x}_{0_j}}{\mu} \left\{ \frac{d}{r} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) x_i + r \dot{x}_i (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) - \frac{\mu}{r_0^3} r x_i x_k \right\} \right. \\
 & - \left. \dot{x}_{0_j} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0_k}} - \frac{\mu}{r_0^3} x_{0_k} \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_{0_j}} \right] + \frac{p_2}{rr_0^3} \left[\frac{r_0^3}{\mu} \dot{x}_{0_j} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0_k}} + \frac{r}{\mu} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) x_i \dot{x}_{0_j} \right. \\
 & + \left. x_{0_k} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_j}} - \frac{x_i x_{0_j} G_2}{r_0^3} - \delta_{ij} \right) \right] + \frac{G_2 x_{0_j}}{r_0^3} \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_{0_k}} - \frac{3x_i x_{0_k}}{r_0^2} - \frac{r}{\mu} \dot{x}_i (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) \right. \\
 & - \left. x^j \left\{ \frac{d}{r\mu} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) - \frac{r}{r_0^3} x_k \right\} \right] + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_{0_j}} \left[\frac{d}{r\mu} (\dot{x}_k - \dot{x}_{0_k}) - \frac{r}{r_0^3} x_k \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\dot{x}_k - \dot{x}_{0k}) \left[\frac{r}{r_0^3} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_j} - \frac{G_1 x_i x_{0j}}{r_0^3 \sqrt{\mu}} \right] - \frac{G_1 x_{0j}}{r \sqrt{\mu}} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0k}} \\
& + \frac{G_3 - \beta G_2}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}}{r} \left(\frac{x_{0j} x_{0k}}{r_0^3} + \frac{\dot{x}_{0j} \dot{x}_{0k}}{\mu} \right) - \frac{\dot{x}_{0j} x_{0k}}{r_0^3} \left(\frac{x_i}{r_0} + \frac{x_{0i}}{r} \right) \right] \\
& - \frac{2G_4 - \beta G_3}{r_0^3} \left(\frac{x_{0j} x_{0k}}{r_0^3} + \frac{\dot{x}_{0j} \dot{x}_{0k}}{\mu} \right) x_i - \frac{\beta G_1}{\mu r r_0} \dot{x}_{0j} x_{0k} (\dot{x}_i - \dot{x}_{0i}) - \frac{\dot{x}_{0j} x_{0k}}{\mu r_0^3} p_{4i}. \quad (28f)
\end{aligned}$$

JUMP CONDITIONS FOR OPTIMAL THRUST-COAST TRAJECTORIES

To derive the necessary jump conditions, it is convenient to state the differential equations satisfied by the extremal arcs. The Euler-Lagrange equations and the Pontryagin Maximum Principle produce the following differential equations:

$$\begin{aligned}
\ddot{R} &= -\mu \frac{R}{r^3} + \frac{kH(\alpha)}{m} \frac{\lambda}{|\lambda|} \\
\dot{m} &= -\frac{kH(\alpha)}{c} \\
\ddot{\lambda} &= -\mu \frac{\lambda}{r^3} + 3\mu \frac{R \cdot \lambda}{r^5} R \\
\dot{\sigma} &= \frac{kH(\alpha)}{m^2} |\lambda|
\end{aligned} \quad (29)$$

where the function $H(\alpha)$ is the usual Heaviside unit step function

$$\begin{aligned}
H(\alpha) &= 0 & \alpha < 0 \\
H(\alpha) &= 1 & \alpha > 0
\end{aligned} \quad (30)$$

and the constant, k , is the maximum value of the thrust k_{\max} .

The variable α is the switch function

$$\alpha = |\lambda| - \frac{\sigma m}{c} \quad (31)$$

The general rule for the jump condition is derived below. Let x be defined by a differential equation containing a jump discontinuity at $l(x) = 0$.

$$\dot{x} = f(x) + H(l)g(x) \quad (32)$$

The variational differential equation for the variable x is given by

$$\frac{d}{dt} \delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + H(l) \frac{\partial g(x)}{\partial x} \delta x + \delta(l)g(x) \delta l \quad (33)$$

Here, $\delta(l)$ is the dirac delta function and δl is the variation in $l(x)$ defined

at the point $l(x) = 0$. Let \bar{t} be the time at which $l[x(t)] = 0$. Since $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ and $H(l)$ are functions of bounded variation, they contribute no increment to the integral of $\frac{d}{dt}x(t)$ over the infinitesimal interval $\bar{t} - \frac{\delta t}{2}$, $\bar{t} + \frac{\delta t}{2}$. Thus

$$\delta x(\bar{t}^+) - \delta x(\bar{t}^-) = \int_{\bar{t} - \frac{\delta t}{2}}^{\bar{t} + \frac{\delta t}{2}} \delta(l)g(x) \delta l dt \quad (34)$$

Changing the integration variable from dt to $dl/l(\bar{t})$, we may evaluate the integral

$$\delta x(\bar{t}^+) - \delta x(\bar{t}^-) = g[x(\bar{t})] \delta l[x(\bar{t})]/l(\bar{t}) \quad (35)$$

For the differential equations given in eqs. (29), we have

$$l(x) = \alpha = \lambda - \frac{\sigma m}{c} \quad (36)$$

$H(\alpha)$ occurs only in the differential equations for \dot{R} , m and σ . Thus δA , $\delta \dot{A}$ and δR are continuous across the switch, whereas $\delta \dot{R}$, δm and $\delta \sigma$ are discontinuous. Moreover, we may show that $\delta(m\sigma)$ is also continuous across the switch. We have

$$\frac{d}{dt}(\sigma m) = \frac{k}{m} H(\alpha) \alpha \quad (37)$$

and

$$\delta(\sigma m)^+ - \delta(\sigma m)^- = \frac{k}{m} \frac{\alpha}{\dot{\alpha}} \delta \alpha \quad (38)$$

But, since $\alpha = 0$, we have

$$\delta(\sigma m) = 0 \quad (39)$$

It follows that, at $\alpha = 0$, we have

$$\delta \alpha = \frac{\dot{A} \cdot \delta A}{\lambda} \quad (40)$$

The jump conditions for eqs. (29) are given below.

$$\begin{aligned} \text{At } \alpha = 0 \\ \delta R^+ &= \delta R^- \\ \delta \dot{R}^+ &= \delta \dot{R}^- + \frac{k}{m} \frac{\dot{A}}{\lambda} \frac{\dot{A} \cdot \delta A}{\dot{A} \cdot \dot{A}} \\ \delta m^+ &= \delta m^- - \frac{k}{c} \frac{\dot{A} \cdot \delta A}{\dot{A} \cdot \dot{A}} \\ \delta A^+ &= \delta A^- \\ \delta \dot{A}^+ &= \delta \dot{A}^- \\ \delta \sigma^+ &= \delta \sigma^- + \frac{k\lambda}{m^2} \frac{\dot{A} \cdot \delta A}{\dot{A} \cdot \dot{A}} \end{aligned} \quad (41)$$

REFERENCES

1. S. PINES and T. C. FANG, Appendix A—Solution of the Euler–Lagrange Equations during Coast for the Elliptic Transfer Case. Analytical Mechanics Associates, Inc. Report, May 1963.
2. S. PINES and T. C. FANG, A Uniform Solution of the Euler–Lagrange Equations during Coast for the Central Force Field. Analytical Mechanics Associates, Inc. Report, November 1965.
3. S. HERRICK, Astrodynamical Report No. 7, ASTIA Document AD 250 757, 1960.
4. R. H. BATTIN, *Astronautical Guidance*. McGraw-Hill Publishing Co., New York, N.Y.
5. W. H. GOODYEAR, Completely General Closed-Form Solution for Coordinates and Partial Derivatives of the Two-Body Problem. *The Astronomical Journal*, **70**, No. 3, April 1965.
6. K. STUMPF, *Himmelsmechanik*. VEB Verlag, Berlin, 1959.

THE SECOND VARIATION TEST WITH ALGEBRAIC AND DIFFERENTIAL CONSTRAINTS

B. FRAEIJIS DE VEUBEKE

Professor of Aerospace Engineering,
University of Liège

ABSTRACT

The second variation test for the algebraic constrained minimum problem can be placed in eigenvalue form by the introduction of a norm in the space of coordinate perturbations. It appears then as a Jacobi type of accessory minimum problem. A similar objective can be reached in the control problem, where the constraints are of differential type, by norming the weakly varied trajectories in the neighborhood of the optimal. If the norm is expressed in terms of control perturbations only, the eigenvalue type of second variation test and the optimum linear feedback control problem are very closely related. The case of broken extremals is considered and solved by the use of total perturbations, involving a shift in the independent variable. The rate of shift is introduced as an additional control. The eigenvalue test remains applicable to extremals containing singular arcs and constitutes a different approach to the ones attempted previously. An example of such a case is treated in detail.

1. ALGEBRAIC CONSTRAINTS

1.1. First order conditions for a constrained minimum

Let the coordinates (q_1, \dots, q_n) of a vector q satisfy m algebraic constraints

$$g_j(q) = 0 \quad (j = 1, \dots, m < n) \quad (1.1)$$

and consider the problem of finding a point $q = \hat{q}$ where a function $f(q)$ presents a relative minimum. It will be assumed that the functions f and g_j are twice differentiable at \hat{q} . Let δq denote the column matrix of the small increments in the coordinates. The constraints (1.1) will be satisfied to first order in the neighborhood of \hat{q} if

$$g_j(\hat{q}) = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.2)$$

and

$$g_j^{\prime} \delta q = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.3)$$

where g^q denotes the row matrix $\left(\frac{\partial g_j}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial q_n}\right)$ evaluated at \hat{q} . Only the case where the m row matrices in (1.3) are linearly independent will be considered; otherwise the problem is "abnormal". The assumption amounts to stating that all the constraints are "effective" at \hat{q} ; then, the set (1.3) of linear homogeneous equations has $(n-m)$ independent and nontrivial solutions for δq , defined except for a scale factor. They are the *admissible directions* for the variation of coordinates. To the first order

$$f(\hat{q} + \delta q) - f(\hat{q}) = f^a \delta q \quad (1.4)$$

and the first order requirement for a minimum will be that

$$f^a \delta q = \delta f \geq 0 \quad (1.5)$$

This requirement will not be satisfied if the row matrix f^a is linearly independent from the row matrices g^q , for then the $m+1$ linear equations (1.3) and (1.5) would have a matrix of maximal rank $m+1 \leq n$ and a nontrivial solution δq could be found for any arbitrary value of δf . Hence f^a must be expressible as a linear combination

$$f^a = -\sum_1^m \lambda_j g_j^q \quad (1.6)$$

of the m independent row matrices of (1.3). Postmultiplying by δq and taking (1.3) into account, there follows

$$f^a \delta q = \delta f = 0 \quad (1.7)$$

The first order condition (1.6) is usually expressed in the equivalent form

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{or} \quad F^a = 0 \quad (1.8)$$

after introduction of the "augmented function"

$$F(q) = f + \sum_1^m \lambda_j g_j \quad (1.9)$$

The $m+n$ conditions (1.2) and (1.8) constitute a set of $m+n$ algebraic equations to be satisfied by the n coordinates and the m Lagrangian multipliers λ_j . It will be appreciated that the solution for the multipliers is unique, otherwise, by difference of two solutions we would obtain a statement of abnormality (linear dependence of the g_j^q rows). The stationarity condition (1.7) is thus necessary for a minimum. To aim at a sufficiency condition, the left-hand side of (1.4) must now be calculated up to second order:

$$f(\hat{q} + \delta q) - f(\hat{q}) = f^a \delta q + \frac{1}{2} \delta q' f_a^a \delta q \quad (1.10)$$

with f_a^a denoting the $(n \times n)$ matrix of partial second derivatives at \hat{q} . It would be incorrect to suppress the first term by invoking (1.7). Second

order terms, stemming from the requirement to satisfy also the constraints to second order:

$$g_j^a \delta q + \frac{1}{2} \delta q' g_{j_a}^a \delta q = 0 \quad (1.11)$$

would be lost. In fact, combining (1.6) and (1.11), there comes a second order evaluation for this term

$$f^a \delta q = -\sum_1^m \lambda_j g_j^a \delta q = \frac{1}{2} \delta q' \left(\sum_1^m \lambda_j g_{j_a}^a \right) \delta q$$

Substitution of this result into (1.10) gives, in view of the definition (1.9), the second order expression

$$f(\hat{q} + \delta q) - f(\hat{q}) = \frac{1}{2} \delta q' F_a \delta q \quad (1.12)$$

1.2. The second variation test as a Jacobi accessory minimum problem

The second variation just obtained

$$\phi = \frac{1}{2} \delta q' F_a^a \delta q \quad (1.13)$$

is a quadratic form to be evaluated for the admissible variations defined by the constraints (1.3).

A convenient compact formulation of these constraints is

$$G \delta q = 0 \quad (1.14)$$

introducing the $(m \times n)$ matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_1^a \\ \dots \\ g_m^a \end{pmatrix}$$

If, for some admissible nonvanishing variation, ϕ takes a negative value, \hat{q} is certainly not a point of minimum for f . A sufficient condition for a relative minimum is that ϕ be strictly positive for all admissible nonzero variations. If ϕ is only nonnegative, the second variation test is not conclusive and higher order estimates become necessary. It was already observed that admissible variations can be arbitrarily scaled. In fact, if the admissible variation δq gives to the quadratic form the value ϕ , the admissible variation $\alpha \delta q$ (α real and nonzero) gives to the quadratic form the value $\alpha^2 \phi$. Hence scaling does not alter the property of δq to yield a positive, a negative or the zero value to the second variation. Consequently the second variation test is not altered by the addition of an imposed norm on the scaling, such as the Euclidian one

$$\frac{1}{2} \delta q' \delta q = d\varepsilon^2 \quad (1.15)$$

In fact the test is simplified by restricting the scanning to the admissible directions of variation. Another advantage of the introduction of a norm is to reduce the test to the solution of a Jacobi-type of accessory minimum problem. Instead of scanning all the admissible directions we try to find the most critical one: the one giving to ϕ its minimum value. If the minimum value of ϕ is negative, the test has failed; positive, the test is successful; zero, the test is not conclusive.

The accessory problem

$$\frac{1}{2} \delta q' F_q^q \delta q \quad \text{minimum}$$

under the constraints (1.14) and (1.15) can be solved by the Lagrangian technique of section 1.1. Set up the augmented function

$$\frac{1}{2} \delta q' F_q^q \delta q + b' G \delta q + \zeta (d\epsilon^2 - \frac{1}{2} \delta q' \delta q)$$

where

$$b' = (\beta_1, \dots, \beta_m)$$

is a row matrix of Lagrangian multipliers and obtain the necessary first order conditions by equating to zero the partial derivatives with respect to each δq_i . The resulting equations can be written in matrix form as

$$F_q^q \delta q + G' b = \zeta \delta q \quad (1.16)$$

The problem (1.16) and (1.14) can now be placed in the form

$$\begin{pmatrix} F_q^q - \zeta E & G' \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta q \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

where E denotes the $(n \times n)$ identity matrix. It is an eigenvalue problem for the Lagrangian multiplier ζ , associated to the norming constraint. It is also self-adjoint and its $n-m$ eigenvectors for δq , denoted by h_r , constitute an orthonormal basis from which an arbitrary admissible variation can be expanded:⁽¹⁾

$$\delta q = \sum_1^{n-m} \alpha_r h_r \quad (1.18)$$

$$\text{with} \quad h_r' h_s = 0 \quad \text{and} \quad h_r' F_q^q h_s = 0 \quad \text{for} \quad r \neq s \quad (1.19)$$

A simple proof of this is obtained by reducing the problem to the classical one of the simultaneous reduction of two quadratic forms, one of which is positive definite, to their diagonal form. This is achieved by the nonsingular transformation in the variations

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ V \end{pmatrix} \delta q \quad (1.20)$$

where the $n-m$ rows of the submatrix V are taken to complete the already linearly independent rows of G . The constraints (1.14) reduce to

$$\delta p = 0 \quad \text{or} \quad \delta p_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.21)$$

The inversion of (1.20) can be written in the form

$$\delta q = A\delta p + B\delta r$$

and the admissible variations are

$$\delta q = B\delta r$$

The second variation test reduces to that of positive definiteness of the quadratic form

$$\phi = \frac{1}{2} \delta r' B' F_q^q B \delta r \quad (1.22)$$

The Euclidian norm that was imposed on δq is transformed into the norming constraint on the admissible variations:

$$d\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \delta r' B' B \delta r$$

The eigenvalues ζ_r of problem (1.17) are those of the $n-m$ dimensional problem

$$(B' F_q^q B - \zeta B' B) \delta r = 0$$

which has the classical form announced ($B' B$ is positive definite). The eigenvectors u_r of this problem are related to the h_r of problem (1.17) by

$$h_r = B u_r$$

whence the orthogonality properties (1.19) are evident. Substitution of the expansion (1.18) into (1.13), use of the orthogonality properties (1.19) and of norming constraints

$$h_r' F_q^q h_r = \zeta_r h_r' h_r = 2(d\varepsilon)^2 \zeta_r \quad (r = 1, \dots, n-m) \quad (1.23)$$

on the eigenvectors gives the following structure to the second variation

$$\phi = (d\varepsilon)^2 \sum_1^{n-m} \alpha_r^2 \zeta_r \quad (1.24)$$

From (1.18) and (1.23) follows also that the coordinates α_r of a normed admissible vector are related by

$$\sum_1^{n-m} \alpha_r^2 = 1 \quad (1.25)$$

To examine the result in the spirit of the Jacobi accessory problem, the critical direction (minimum of ϕ under (1.25)) is obtained for

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n-m)$$

assuming of course that ζ_1 is the smallest eigenvalue. The failure, success or inconclusiveness of the second variation test is equivalent to the property of the smallest eigenvalue to be negative, positive or zero.

In practice it is most convenient to obtain the eigenvalues from problem (1.17) as roots of the algebraic equation

$$\begin{vmatrix} F_q^q - \zeta E & G' \\ G & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

The algorithms of Routh and Hurwitz can also be applied to test the positive character of all the eigenvalues. As a final observation, the Euclidian norm is not mandatory and was used for simplicity. Any positive definite quadratic form will serve; it may modify the critical direction but not the outcome of the test.

An example of application of this eigenvalue type of analysis to an optimization problem will be found in the article by P. Beckers⁽²⁾. It plays there an important role in eliminating many solutions provided by the simple stationarity conditions.

1.3. Inequality constraints

The algebraic minimum problem with inequality constraints is important in view of its applications to the maximum principle with bounded controls. In addition to the algebraic constraints (1.1), let the minimum problem for $f(q)$ be further constrained by a set of inequalities

$$c_k(q) \geq 0 \quad k = 1, \dots, M \quad (1.27)$$

At any point $q = \hat{q}$ where relative minimality is to be tested, only those inequality constraints for which $c_k(\hat{q}) = 0$ need be considered. To first order then, assuming the functions (1.27) to be differentiable at \hat{q} , we have a set of inequalities in the increments

$$c_k(\hat{q} + \delta q) = c_k^q \delta q \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \leq M \quad (1.28)$$

It is again convenient to make a nonsingular transformation of incremental variables

$$\begin{pmatrix} \delta p \\ \delta r \\ \delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ V \\ W \end{pmatrix} \delta q \quad (1.29)$$

The submatrix V is chosen to generate, together with G , a set of maximal rank $m + \rho \leq n$ in the linear forms (1.3) and (1.28). W , required if $m + \rho < n$, is taken to obtain a nonsingular transformation. The algebraic constraints (1.3) are eliminated by substitution of (1.21) into the other forms. Hence, the inequalities (1.28) can now be written in the form

$$a_k^r \delta r \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \geq \rho \quad (1.30)$$

ρ being the rank of the set of linear forms, and the first order minimality condition can be written as

$$f^r \delta r + f^s \delta s \geq 0 \quad (1.31)$$

Proposition 1. A necessary first order condition for relative minimality is that the row matrix f^s be identically zero. This is obvious since $\delta r = 0$ and δs arbitrary, represents an admissible set of variations and, unless $f^s = 0$, δs can always be so chosen that $f^s \delta s < 0$.

The condition $f^s = 0$ is equivalent to stating that

$$\delta f = f^p \delta p + f^r \delta r = (f^p G + f^r V) \delta q$$

is a linear combination of the linear forms (1.3) and (1.28), since it is a linear combination of a set of maximal rank in these forms. This justifies the following.

Proposition 2. First order necessary conditions for a relative minimum are that at $q = \hat{q}$

$$F^q = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.32)$$

where

$$F = f + \sum_1^m \lambda_j g_j + \sum_1^K \mu_k c_k$$

This proposition, extending the technique of Lagrange to inequality conditions, is more constructive as a first step towards the search for coordinates where a relative minimum can occur. The μ_k are the Kuhn-Tucker multipliers. It should be realized that, for a given point \hat{q} where (1.32) is satisfied, the set of multipliers need not be unique.

However, if the augmentation of the function is restricted to take into account only those constraints which yield for (1.3) and (1.28) a set of maximal rank, then obviously the corresponding set of multipliers is unique. Letting

$$k_1, \dots, k_e$$

denote the set of indices k corresponding to a set of maximal rank, we obtain by virtue of (1.32) and (1.3)

$$\delta f = - \sum_k \mu_k c_k^q \delta q \quad k = k_1, \dots, k_e$$

Then, by virtue of (1.28), the first order condition for a minimum is seen to require that the Kuhn-Tucker multipliers be nonpositive

$$\mu_k \leq 0 \quad k = k_1, \dots, k_e \quad (1.33)$$

A particular and frequent case is that where the complete set of linear forms (1.28) constitutes with (1.3) a set of maximal rank, so that there is a single augmented function and a unique set of multipliers.

If, furthermore, the Kuhn-Tucker multipliers turn out to be strictly negative, the first order minimality criterion is strongly verified ($\delta f > 0$) for

$$c_k^q \delta q > 0 \quad k = 1, \dots, K$$

and weakly verified ($\delta f = 0$) for

$$c_k^q \delta q = 0 \quad k = 1, \dots, K \quad (1.34)$$

Then, either $m+K=n$, and (1.3) plus (1.34) have only the trivial solution $\delta q = 0$; or $m+K < n$ and there are nontrivial solutions. In the former case the minimality of f at $q = \hat{q}$ is proved. In the latter case the proof of minimality still requires a second variation test

$$\frac{1}{2} \delta q' F_q^q \delta q \geq 0$$

under the first order algebraic constraints (1.3) and (1.34). The technique of section 1.2 is applicable to this purpose.

When some of the Kuhn–Tucker multipliers turn out to be zero, we have the following weaker statements:

Proposition 3. If the first order conditions (1.32) are satisfied with a unique set of multipliers and if the K–T multipliers are nonpositive, the first order minimality condition is satisfied.

Let ψ denote the second variation

$$\psi = \frac{1}{2} \delta q' F_q^q \delta q$$

with the constraints on the variations δq restricted to (1.3) and those of (1.34) whose K–T multiplier is strictly negative. Then the strong second order condition

$$\psi > 0 \tag{1.35}$$

is sufficient for relative minimality, but the corresponding weak condition

$$\psi \geq 0 \tag{1.36}$$

is only necessary when at most one of the K–T multipliers is zero.

Proof: If no K–T multiplier vanishes, the proposition is equivalent to the result obtained before. If one K–T multiplier, which can be taken to be μ_1 , is zero, the first order minimality condition is only weakly satisfied for $c_1^q \delta q > 0$.

It becomes necessary to extend the admissible variations in the second variation test to those satisfying

$$c_1^q \delta q \geq 0 \tag{1.37a}$$

$$c_k^q \delta q = 0 \quad k = 2, \dots, K \tag{1.37b}$$

Let ϕ denote the values that the second variation can assume under these conditions. By disregarding (1.37a) we reduce the test to the ψ test of Proposition 3. But, since the set of admissible variations has been thereby further extended, ϕ is positive definite with ψ and (1.35) is sufficient. Further, if a critical variation $\delta q = \delta a$, satisfying (1.37b), is found to render ψ negative, the same will be true of $\delta q = -\delta a$. But then either the first, or the second, will also satisfy (1.37a). Hence the possibility that $\psi < 0$ implies the possibility of $\phi < 0$ and (1.36) is necessary.

If more than one K-T multiplier vanishes, the extension of the proof of sufficiency of (1.35) is obvious. The following counterexample shows that it is useless to attempt a proof of the necessity of (1.36):

$$\begin{aligned} f &= q_1^2 - q_2^2 \\ c_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \geq 0 \\ c_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \geq 0 \end{aligned}$$

The first order conditions (1.32) are satisfied at point $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = 0$ with $\mu_1 = \mu_2 = 0$. (In fact f is stationary there on its own.) The second variation test ψ is given by

$$\psi = \delta q_1^2 - \delta q_2^2$$

with free δq_1 and δq_2 , it obviously can assume negative values. The ϕ test is

$$\begin{aligned} \phi &= \delta q_1^2 - \delta q_2^2 \\ a_{11}\delta q_1 + a_{12}\delta q_2 &\geq 0 \\ a_{21}\delta q_1 + a_{22}\delta q_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

but ϕ can only assume positive values if, for instance, $a_{11} > 0$, $a_{11} + a_{12} < 0$, $a_{21} > 0$ and $a_{22} - a_{21} > 0$. A necessary condition is that the second variation be nonnegative under conditions (1.34) since they are more restrictive than (1.37a and b). These tests are helpful in that they can be conclusive, but if they are not we must examine the more general second variation test on

$$\chi = \frac{1}{2} \delta q' F_q^q \delta q \tag{1.38}$$

with a set of inequalities

$$c_k^q \delta q \geq 0 \quad k = 1, \dots, t \leq n - m \tag{1.38a}$$

corresponding to the zero K-T multipliers of one of the solutions of (1.32), and a complementary set of equalities

$$g_j \delta q = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad c_k^q \delta q = 0 \quad k = t + 1, \dots, K \tag{1.38b}$$

As the intersection of half-spaces and hyperplanes the admissible variations δq form a convex set. Since furthermore $\alpha \delta q$ is admissible, if and only if δq is admissible, and $\alpha \geq 0$, it is a convex cone C with vertex at $\delta q = 0$. On the other hand $\chi \geq 0$ is a convex cone Γ_1 with its anticone Γ_2 (since an arbitrary change in scale and sign does not alter the sign of χ). Convexity results from the following:

Let $\delta q = \delta a$ belong to Γ_1 so that $\chi_a \geq 0$; let also $\chi_b \geq 0$ so that $\delta q = \delta b$ belongs to either Γ_1 or Γ_2 . Then for $\delta q = \alpha \delta a + \beta \delta b$ we find

$$\chi = \alpha^2 \chi_a + \beta^2 \chi_b + \alpha \beta \delta a' F_q^q \delta b$$

If $\delta\alpha'F_q^a \delta b > 0$ we consider δb to belong to Γ_1 and then $\alpha\delta a + \beta\delta b$ belongs to Γ_1 ($\chi \geq 0$) for arbitrary $\alpha \geq 0$ and $\beta \geq 0$ (convexity), while $-\alpha\delta a - \beta\delta b$ belongs to Γ_2 . If $\delta\alpha'F_q^a \delta b \leq 0$ we must consider $-\delta b$ to belong to Γ_1 .

From a geometrical standpoint the second variation test consists in verifying that the convex cone C is contained in either of the convex cones Γ_1 or Γ_2 . Obviously it is sufficient to this purpose to verify the sign of χ for variations lying along the ridges of C . The development of an algorithm to obtain the ridge variations will not be developed here.

2. DIFFERENTIAL CONSTRAINTS

2.1. Tightly controlled systems

Consider now trajectory or control problems wherein the coordinates of a system are subject to differential constraints

$$\dot{q}_i = f_i(q_1, \dots, q_n, t; v_1, \dots, v_r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

to boundary value constraints

$$U_j[q(\alpha), t(\alpha), q(\beta), t(\beta)] = 0 \quad j = 1, \dots, p < 2n+2 \quad (2.2)$$

and the cost function to be minimized is

$$I[q(\alpha), t(\alpha), q(\beta), t(\beta)] \quad (2.3)$$

An optimal trajectory of this problem will be denoted in parametric form as

$$\begin{aligned} q_i &= \hat{q}_i(\theta) & i &= 1, \dots, n \\ t &= \hat{t}(\theta) \end{aligned} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad (2.4)$$

For a given state and time, equations (2.1) constitute a mapping of the set $\{v_1, \dots, v_r\}$ of admissible control vectors into the hodograph space. The range of this mapping, or the set $\{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n\}$ of admissible velocity vectors may be nonconvex. In this case, however, chattering of the controls extends the set of attainable velocity vectors to the convex hull of the range.⁽³⁾ This merely requires the functions f_i to be differentiable with respect to state and time. It will be assumed that, by the addition of appropriate, sectionally linear, artificial controls, chattering has been "regularized"⁽⁴⁾ or, equivalently, the variational problem "relaxed".⁽⁵⁾ The extended set of admissible controls will map into the convex hull and the optimal controls $(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_r)$ will be sectionally continuous functions of the independent variable t .

Under the usual assumption that the f_i functions are differentiable with respect to the control variables, the relations between weak control variations and the correspondingly small changes in the velocity vector are

given, in matrix form, by

$$\delta \dot{q} = F \delta v \quad (2.5)$$

where δv and $\delta \dot{q}$ are column matrices and F is the Jacobian matrix $F = (\partial f_i / \partial v_j)$. If the optimal trajectory contains a segment along which the equations

$$F \delta v = 0 \quad (2.6)$$

admit a continuous non-trivial solution, the set of optimal controls is not well determined in the sense that, neglecting second order changes, the same trajectory can be generated by appropriate first order modifications in the control history. This situation cannot prevail if, along the optimal, F is of maximal rank and this rank equal to the number r of controls (which implies $n \geq r$). In this case the system will be said to be "tightly controlled". This concept means, intuitively, that the system remains sensitive to any combination of small changes in the control variables. It is essential to set up a metric in the space of weakly varied trajectories in terms of control variations only. Such a metric is for instance defined by the norm

$$\|dN\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \delta v' M \delta v dt \quad (2.7)$$

where M is a matrix of constant or variable elements, everywhere positive definite. If the system were not tightly controlled along the optimal, one of the axioms of distance would be violated: any weak control variation, consistent with (2.6), would produce a nonzero distance between the optimal trajectory and itself.

2.2. Change of control variables

Up to now we have disregarded possible constraints arising on the control variations, due to boundedness of certain of the controls. In a relaxed variational problem the domain of admissible controls in E^r has no isolated point, it has only interior points and boundary points. More than often optimal trajectories contain segments along which the control vector lies on the boundary; its variation is then restricted by a set of equations of the form

$$y_k^v \delta v = 0 \quad k = 1, \dots, p < r \quad (2.8a)$$

$$y_k^v \delta v \geq 0 \quad k = p+1, \dots, K \quad (2.8b)$$

In a wide variety of problems a change in control variables

$$v_j = V_j(q, t; w) \quad (2.9)$$

can be devised mapping a domain D of the new controls (w_1, \dots, w_m) (often the whole E^m space) onto the set of all admissible controls $\{v_1, \dots, v_r\}$ and such that the boundary points used along the optimal trajec-

tory become interior points of D . One has then the advantage that the weak variations δw on the new controls are unconstrained. In fact the relation between weak variations is

$$\delta v = V \delta w \quad V = (\partial v_j / \partial w_i) \quad (2.10)$$

with the $(r \times m)$ Jacobian matrix V evaluated along the optimal. Since the transformation is only required when constraints on δv prevail, we are led to assume that the set of linear equations

$$V'y = 0$$

has non-trivial, linearly independent solutions,

$$y = y_k \quad k = 1, \dots, L \quad (\text{hence } L \leq r)$$

so that the equations (2.10) can be solved for δw if, and only if,

$$y'_k \delta v = 0 \quad k = 1, \dots, L \quad (2.11)$$

Then, provided the set of row matrices y'_k be equivalent to a set of independent row matrices y'_k of (2.8a and b), arbitrary δw variations generate only admissible δv variations. In fact they generate a restricted class of admissible variations, since the more stringent equality sign prevails for (2.8b). Thus, while the transformation to new control variables does not restrict the overall controllability of the system, it does restrict the class of weakly varied trajectories about the optimal. To some extent this may increase the existence possibilities of weak relative minima for the cost function. However a weak relative minimum is of little practical significance and nothing should be changed regarding the existence of strong relative minima.

Special care should be exercised in introducing a norm of type (2.7) when changing control variables. The system remains tightly controlled in w if $m < r$ and if V has maximal rank $\rho = m$, for then the equations

$$V dw = 0 \quad (2.12)$$

possess only the trivial solution $\delta w = 0$, while $L = r - m$. But if either $\rho < m < r$ or $\rho < r \leq m$, (2.12) has $m - \rho$ independent non-trivial solutions, while $L = r - \rho$.

A suitable metric when the system is no more tightly controlled in w is of course directly provided by

$$\|dN\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} \delta w' N \delta w dt \quad (2.13)$$

where

$$N = V' M V \quad (2.14)$$

With respect to δw it is in fact a semi-norm, but it guarantees that $\|dN\| \neq 0$ implies a truly varied trajectory.

A simple illustration for a change of control variables is the following. Let (v_1, v_2) be controls which appear linearly in the f_i functions of a

problem so that the system is certainly tightly controlled. Let them be constrained by

$$v_1^2 + v_2^2 \leq F^2$$

They could be the thrust components of a single rocket engine in a plane motion problem, F being then the maximum thrust.

Along a segment of fully thrust trajectory, the variational constraint is

$$\hat{v}_1 \delta v_1 + \hat{v}_2 \delta v_2 \leq 0$$

The transformation of control variables

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = F \frac{1 + \cos w_2}{2} \begin{pmatrix} \cos w_1 \\ \sin w_1 \end{pmatrix}$$

does not restrict the controllability of the system and the complete Euclidian space of the w controls is mapped onto the admissible v controls. But the matrix:

$$V = -\frac{F}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos w_2) \sin w_1 & \cos w_1 \sin w_2 \\ -(1 + \cos w_2) \cos w_1 & \sin w_1 \sin w_2 \end{pmatrix}$$

degenerates in the following cases:

- (1) For $\cos w_2 = 1$ (full thrust) it has rank 1 and restricts the variational constraint to

$$\hat{v}_1 \delta v_1 + \hat{v}_2 \delta v_2 = 0$$

while, simultaneously, $V \delta w = 0$ admits the solution $\delta w_1 = 0$, δw_2 arbitrary. The system is no more tightly controlled. First order changes in the thrust orientation are possible but not a change in the thrust level.

- (2) For $\cos w_2 = -1$ (zero thrust) it has rank zero and introduces artificial constraints $\delta v_1 = 0$, $\delta v_2 = 0$. The system becomes completely insensitive to first order changes in the w controls. (This situation stems of course from the fact that we cannot modify the zero thrust level; that we cannot change the thrust orientation becomes then immaterial.)

2.3. Total variations. First order conditions

The small changes incurred by a state variable or a control, when passing from the optimal to a neighboring trajectory, are usually stated as differences measured for the same value of the independent variable (time).

These *isochronic variations* δq and δw can be generalized to differences involving a time shift s . Such *total variations* will be denoted by

$$x = \delta q + \dot{q}s \quad \text{for state variables} \quad (2.15)$$

$$u = \delta w + \dot{w}s \quad \text{for controls.} \quad (2.16)$$

The notation, which is purposely simple to alleviate the formulation of subsequent analytical developments, should not lead us to forget that x , u and s represent small quantities of the same order as δq and δw . Total variations, already useful in handling problems with variable end values of the time, yield essential simplifications in the presence of broken extremals. Indeed, if an optimal trajectory contains a certain number of control discontinuities, an important part of the controllability of the system by small perturbations is involved in advancing or retarding the epochs of such discontinuities. If $s(\tau)$ denotes the time shift of a discontinuity in the control vector, occurring at $t = \tau$ along the optimal, the isochronic variation δw is not defined in the interval between τ and $\tau + s(\tau)$. In this interval the difference in the control vectors is finite (Fig. 1). One way to reduce

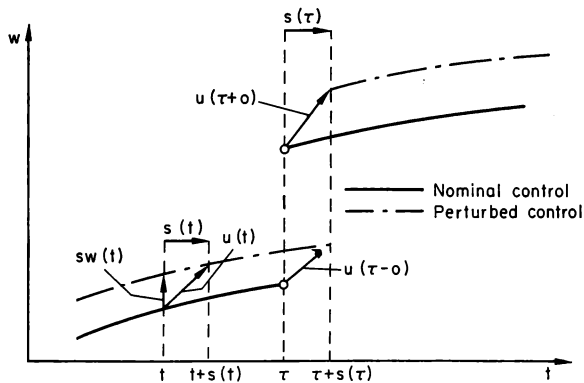


FIG. 1. Isochronic control perturbation $\delta w(t)$ and total control perturbation $u(t)$ involving a time-shift $s(t)$. At the epoch $t = \tau$ of a control discontinuity along the nominal trajectory the time-shift $s(\tau)$ is that of the discontinuity.

Then $u(t)$ is a sectionally continuous first order perturbation.

this case to small perturbations is to allow first order discontinuities in the state variables at $t = \tau$ (see section 2.7). But, by far the simplest way is to consider only the total variations based on the actual time shift. The total variations in state variables are continuous, the total variations in the controls are well defined as sectionally continuous functions of time. In principle the time shifts need only be known at the ends and at the epochs of control discontinuities along the optimal.

However one of the purposes of extending the optimum linear feedback control theory,⁽⁶⁾ based on the second variation, to the case of broken extremals would be to obtain a time shifting rule all along. Some results of first order optimality must first be recalled.

$$H(\lambda, q, t; w) = \lambda' f(q, t; w) \tag{2.17}$$

is the variational Hamiltonian built up from the functions f_i of eqs. (2.1) (except possibly for a transformation of control variables) and from a set of Lagrangian multipliers represented by the row matrix λ' . An equivalent form of equations (2.1) is then

$$\dot{q} = H_\lambda \tag{2.18}$$

where the subscript notation indicates the formation of a column matrix of the corresponding partial derivatives. Similarly the superscript notation will indicate the formation of a row matrix. When the Hamiltonian or derivatives of it are merely considered as functions of time, by substitution of the arguments λ, q and w as time functions along the optimal, the notations

$$\hat{H}, \hat{H}_\lambda \text{ etc.}$$

will be used. As an immediate example the equations (2.15) should be written as

$$x = \delta q + s \hat{H}_\lambda \tag{2.19}$$

The adjoint differential system is, in general,

$$\dot{\lambda} = -H_q$$

and, considered along the optimal, gives

$$\frac{d}{dt} \hat{\lambda} = -\hat{H}_q \tag{2.20}$$

We shall not consider abnormal problems, where the set of optimal multipliers $\hat{\lambda}$ is not uniquely defined (except for scale).

First order optimality conditions are: the maximum principle

$$\hat{w} = \arg \sup H(\hat{\lambda}, \hat{q}, t, w) \tag{2.21}$$

and the transversality conditions

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\alpha) &= J_{q(\alpha)} & \hat{\lambda}(\beta) &= -J_{q(\beta)} \\ \hat{H}(\alpha) &= -J_{t(\alpha)} & \hat{H}(\beta) &= J_{t(\beta)} \end{aligned} \tag{2.22}$$

where J is the augmented functional

$$J(q(\alpha), t(\alpha), q(\beta), t(\beta)) = I + \sum_1^p \mu_j U_j \tag{2.23}$$

At a discontinuity of the control vector, the Weierstrass-Erdmann corner conditions are equivalent to continuity of the multipliers and of the Hamil-

tonian. If control variations are unrestricted, (2.21) implies

$$\hat{H}_w = 0 \quad (2.24)$$

in which case (2.18) and (2.20) have the consequence that

$$\frac{d}{dt} \hat{H} = \hat{H}_t \quad (2.25)$$

In the sequel we shall assume that the control variables are such that they have unrestricted variations along the optimal and use equations (2.24) and (2.25). The transversality conditions are equivalent to

$$(\hat{\lambda}'x - \hat{H}s)_\alpha^b = -\delta J \quad (2.26)$$

where δJ denotes the first order variation of the augmented functional

$$\delta J = \hat{J}^{\alpha(\omega)}x(\alpha) + \hat{J}^{\iota(\omega)}s(\alpha) + \hat{J}^{\alpha(\beta)}x(\beta) + \hat{J}^{\iota(\beta)}s(\beta) \quad (2.27)$$

The first order conditions result in δJ being zero to first order, so that δI is also zero to first order if the variational boundary constraints $\delta U_j = 0$ are satisfied to first order.

2.4. Second variation

To introduce easily a continuous time shift the parametric form of the differential equations is useful. Along the optimal

$$\frac{d\hat{q}}{d\theta} = \frac{d\hat{f}}{d\theta} f(\hat{q}, \hat{t}; \hat{w})$$

and, for a neighboring trajectory,

$$\frac{d\hat{q}}{d\theta} + \frac{dx}{d\theta} = \left(\frac{d\hat{f}}{d\theta} + \frac{ds}{d\theta} \right) f(\hat{q}+x, \hat{t}+s; \hat{w}+u)$$

Subtracting, and identifying θ with the independent variable, we find

$$\dot{x} = f(\hat{q}+x, t+s; \hat{w}+u) - f(\hat{q}, t; \hat{w}) + \dot{s}f(\hat{q}+x, t+s; \hat{w}+u) \quad (2.28)$$

All total variations and the time shift s are now considered as functions of the time. Retaining only first order terms, we obtain the linear perturbation equations with time-varying coefficients

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{f}_x x + \hat{f}_t s + \hat{f}_w u + \dot{s} \hat{f} \\ &= \hat{H}_x x + \hat{H}_t s + \hat{H}_w u + \dot{s} H_\lambda \end{aligned} \quad (2.29)$$

To calculate the effect of perturbations on the functional to the second order we combine equations (2.28) in the single one

$$\hat{\lambda}' \dot{x} = H(\lambda, \hat{q}+x, t+s, \hat{w}+u) - H(\hat{\lambda}, \hat{q}, t, \hat{w}) + \dot{s} H(\hat{\lambda}, \hat{q}+x, t+s, \hat{w}+u)$$

and expand the right-hand side up to second order terms:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}'\dot{x} &= \hat{H}^a x + \hat{H}'s + \hat{H}''u + \dot{s}\hat{H} && \text{(first order terms)} \\ &+ \Delta^2 H + \dot{s}(\hat{H}^a x + \hat{H}'s + \hat{H}''u) && \text{(second order terms)}\end{aligned}$$

where

$$\Delta^2 H = \frac{1}{2}x'\hat{H}''_q x + \frac{1}{2}s\hat{H}''_s s + \frac{1}{2}u'\hat{H}''_{uu} u + x'\hat{H}''_{qu} u + s\hat{H}''_{qs} s + s\hat{H}''_{su} u \quad (2.30)$$

Then, inserting $\hat{H}'' = 0$ and integrating along a segment $t = \tau_m$ to τ_{m+1} along which the optimal controls are continuous

$$\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\hat{\lambda}'\dot{x} - \hat{H}\dot{s}) dt = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\hat{H}^a x + \hat{H}'s) dt + D^2 \quad (2.31)$$

$$\text{where} \quad D^2 = \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \{\Delta^2 H + \dot{s}(\hat{H}^a x + \hat{H}'s)\} dt \quad (2.32)$$

is a second order quantity. The left-hand side is manipulated by partial integration and use of (2.25) and (2.20)

$$\begin{aligned}\int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\hat{\lambda}'\dot{x} - \hat{H}\dot{s}) dt &= \left(\hat{\lambda}'x - \hat{H}s \right)_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} \left(x' \frac{d}{dt} \hat{\lambda} - s \frac{d}{dt} \hat{H} \right) dt \\ &= \left(\hat{\lambda}'x - \hat{H}s \right)_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} + \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} (\hat{H}^a x + \hat{H}'s) dt\end{aligned}$$

when this result is substituted into (2.31), there comes

$$\left(\hat{\lambda}'x - \hat{H}s \right)_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} = D^2$$

This formula may be extended to the whole trajectory by simple addition, remembering that, even at the level of control discontinuities, $\hat{\lambda}$ and \hat{H} are continuous and x and s are required to be continuous. Hence, combining with (2.26) we obtain the second order estimate

$$-\delta J = \left(\hat{\lambda}'x - \hat{H}s \right)_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \{\Delta^2 H + \dot{s}(\hat{H}^a x + \hat{H}'s)\} dt \quad (2.33)$$

What we are really aiming at is the second order estimate of the increase in the functional I :

$$\Delta^2 I = \delta I + \delta^2 I \quad (2.34)$$

where, in the Taylor expansion of

$$I[\hat{q}(\alpha) + x(\alpha), \hat{i}(\alpha) + s(\alpha), \hat{q}(\beta) + x(\beta), \hat{i}(\beta) + s(\beta)]$$

δI and $\delta^2 I$ are respectively the groups of first and second degree terms in the perturbations. $\delta^2 I$ is clearly of second order, and so must be δI since it vanishes to first order. Indeed

$$\delta I = \delta J - \sum_1^p \mu_j \delta U_j$$

and because the boundary conditions must also be enforced to second order

$$\delta U_j = -\delta^2 U_j$$

so that finally

$$\delta I = \delta J + \sum_1^p \mu_j \delta^2 U_j$$

Substitution of this into (2.34) yields

$$\Delta^2 I = \delta J + \delta^2 J \quad (2.35)$$

where the second order estimate of δJ is given by (2.33).

2.5. The Jacobi accessory minimum problem

A necessary condition for a relative minimum is that

$$\Delta^2 I \geq 0$$

for all perturbed trajectories satisfying the linear perturbation equations (2.29) and the perturbed boundary conditions

$$\delta U_j = 0 \quad j = 1, \dots, p \quad (2.36)$$

The idea of the accessory problem is to determine the most critically perturbed trajectory, the one that minimizes $\Delta^2 I$. As in the algebraic case this problem is meaningless because any admissible perturbed trajectory can be scaled arbitrarily (including negative scale factors) without ceasing to be admissible.

This change of scale affects the value of the functional but not its sign (it is homogeneous quadratic in the perturbations). No most critically perturbed trajectory can exist since a more critical can always be found by a change of scale. In fact the accessory minimum problem is generally deviated from its original purpose towards a search for conjugate points. Its original purpose can be restored by introducing a concept of distance between the perturbed trajectory and the optimal one. There is then generally a most critically perturbed trajectory lying at a prescribed distance from the optimal; if the minimum it provides for $\Delta^2 I$ is positive or zero, the necessary second variation condition is fulfilled; if this minimum is negative the extremal is not a relative minimum.

The distance can naturally be defined directly in terms of a positive definite integral over some quadratic form in the perturbations of state variables. This would however modify the adjoint equations of the perturbed problem. A simpler correlation between the accessory minimum problem and the optimum linear feedback control problem is achieved by stating the distance, or the norm of the perturbed trajectory in terms of the control

perturbations alone:

$$d\epsilon^2 = \int_{\alpha}^{\beta} (\frac{1}{2}u'Nu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt \quad (2.37)$$

To account for broken extremals (control discontinuities occurring along the optimal) the total control perturbation u , which is sectionally continuous, is used instead of δw . As already observed, N is taken positive definite for a tightly controlled system but is a suitable non-negative matrix if the transformation to new control variables, required to free the control perturbations, destroys tight control. Furthermore, a new perturbation control σ has been introduced to govern the time shift; it is defined by the additional perturbation equation

$$\dot{s} = \sigma \quad (2.38)$$

To reduce the accessory minimum problem to the same Mayer standard form as the original one, we further introduce the new state variables h and n , governed by the differential equations

$$\dot{h} = \Delta^2 H + \sigma(\hat{H}^q x + \hat{H}' s) \quad (2.39)$$

$$\dot{n} = \frac{1}{2}u'Nu + \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.40)$$

So that the functional to be minimized becomes

$$\Delta^2 I = \delta^2 J + h(\alpha) - h(\beta)$$

and the augmented functional

$$F = \Delta^2 I + \sum_j^p v_j \delta U_j - \zeta [n(\beta) - n(\alpha)] \quad (2.41)$$

As in the algebraic case, the constant multiplier ζ associated with the norming condition (2.37) will play the role of an eigenvalue parameter. Denote by p the column matrix of adjoint multipliers associated with the perturbation equations of state (2.29); by γ the adjoint to h , by ϱ the adjoint to n and by η the adjoint to s . The variational Hamiltonian will be

$$K = p'(\hat{H}_\lambda^q x + \hat{H}_\lambda^s s + \hat{H}_\lambda^u u + \hat{H}_\lambda \sigma) + \gamma(\Delta^2 H + \sigma\hat{H}^q x + \sigma\hat{H}' s) + \frac{1}{2}\varrho(u'Nu + \sigma^2) + \eta\sigma \quad (2.42)$$

Two of the equations of the adjoint system are elementary:

$$\dot{\gamma} = -\frac{\partial K}{\partial h} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\varrho} = -\frac{\partial K}{\partial n} = 0$$

Hence γ and ϱ are constants that can be found from the transversality conditions:

$$\gamma = \frac{\partial F}{\partial h(\alpha)} = -\frac{\partial F}{\partial h(\beta)} = 1$$

which serves to scale the adjoint variables and

$$\varrho = \frac{\partial F}{\partial n(\alpha)} = -\frac{\partial F}{\partial n(\beta)} = \zeta$$

identifying ϱ with the eigenvalue parameter. The remaining equations of the adjoint system are then

$$\dot{p} = -K_x = -\hat{H}_q^\lambda p - \hat{H}_q^a x - \hat{H}_q^w u - \hat{H}_q^t s - \hat{H}_q \sigma \quad (2.43)$$

$$\dot{\eta} = -K_s = -\hat{H}_t^\lambda p - \hat{H}_t^a x - \hat{H}_t^w u - \hat{H}_t^t s - \hat{H}_t \sigma \quad (2.44)$$

The multipliers p are obviously the perturbations of the λ and equations (2.43) the perturbed adjoint differential equations (2.20).

It will be observed that the adjoint equations do not depend on the eigenvalue parameter; they differ from the classical perturbations of the adjoint equations of the original problem⁽⁶⁾ only through the presence of the terms involving time shift and rate of time shift. The adjoint variable η is seen to become constant for autonomous systems. The remaining transversality conditions, supplementing the variational boundary conditions (2.36), are easily obtained from the partial derivatives of the augmented functional and will not be written in detail; they are also homogeneous of the first degree. In fact, because equations (2.39) and (2.40) are ignorable and all the others are homogeneous of degree one, the critical perturbations will only exist for a spectrum of values of the parameter ζ .

2.6 Critically perturbed trajectories

The notion of critically perturbed trajectories implies of course that, in order to minimize the second variation, the control perturbations are optimal. Necessary conditions therefore are

$$K_u = 0 \quad \text{and} \quad K_\sigma = 0$$

or, explicitly, the homogeneous equations

$$\hat{H}_{ww} p + (\hat{H}_{ww}^w + \zeta N) u + \hat{H}_{wx}^a x + \hat{H}_w^t s + \hat{H}_w \sigma = 0 \quad (2.45)$$

$$\hat{H}^\lambda p + \hat{H}^a x + \hat{H}_t s + \sigma \zeta + \eta = 0 \quad (2.46)$$

The last equation contains the first order perturbation of the Hamiltonian which is related to the adjoint to the time perturbation, just like $-H$ is the adjoint variable to the time. In principle, unless ζ is zero, the optimal rate of time shift can be calculated from (2.46). The optimal control perturbations can be obtained from (2.45), if the matrix $(\hat{H}_{ww}^w + \zeta N)$ is nonsingular.

The optimal control perturbations are generally discontinuous at precisely the same corner points as the broken extremal tested. This is due to the discontinuities occurring in the coefficients of the various time-varying matrices. Conversely, at points of continuity of the matrices the optimal

control perturbations remain continuous and are uniquely determined by the eigenvalue. Hence it is not conceivable to introduce strong variations in the accessory problem and the maximum principle does not apply. Note however the strong Legendre–Clebsch condition that \hat{H}_w^* should be negative definite; in which case the optimal controls will indeed maximize the Hamiltonian K for $\zeta = 0$. This case corresponds to the optimum linear feedback controls of guidance theory.⁽⁶⁾ But in the critical perturbation theory, the optimal controls need not maximize the Hamiltonian when the eigenvalue parameter is different from zero.

For a similar reason the Hamiltonian K is not required to be continuous at the corner points; the position of those in time on the perturbed trajectories is not a free variation. Instead, it is the continuity of the adjoint variable to the time shift, η , that plays the essential role in determining this shift at the corner points (see section 2.7).

The main significance of the eigenvalue parameter is obtained through the following tedious but straightforward calculation. Compute the time derivative

$$\frac{d}{dt}(p'x + \eta s)$$

by substituting equations (2.29, 38, 43 and 44). Group the terms proportional to σ and those postmultiplying u' and substitute η from (2.46) and $\hat{H}_w^* p$ from (2.45). After cancellations and consideration of (2.39 and 40), the result can be written in the form

$$\frac{d}{dt}(p'x + \eta s) = -2\dot{h} - 2\dot{\eta}\zeta$$

Integration along the trajectory and application of the norming condition (2.37) gives

$$(p'x + \eta s)_\alpha^\beta = 2h(\alpha) - 2h(\beta) - 2\zeta(d\varepsilon)^2$$

The left-hand side can be evaluated from the transversality conditions and the Euler theorem on homogeneous forms to produce

$$-2\delta^2 J - \sum v_j \delta U_j = 2h(\alpha) - 2h(\beta) - 2\zeta(d\varepsilon)^2$$

Finally, considering equations (2.36)

$$\Delta^2 I = \delta^2 J + h(\alpha) - h(\beta) = \zeta(d\varepsilon)^2 \quad (2.47)$$

From this can be concluded that the positive definite, nonnegative or indefinite character of the second variation depends on the positive, zero or negative character of the smallest eigenvalue. The method has the advantage of remaining applicable to trajectories containing a singular arc (\hat{H}_w^* singular) and constitutes a different approach to other tests devised to this purpose.⁽⁷⁾ An example will be treated in section 2.8.

2.7. Optimal time shift

Some insight into the continuous time shift process, implicit in the perturbational equations, is provided by the elimination of η between equations (2.44 and 2.46). All the time derivatives appearing in the differentiation of (2.46) can be substituted except those of \hat{w} and σ . Considerable simplification occurs by noting that (2.24) can be differentiated:

$$\frac{d}{dt} H_w = H_w^\lambda \dot{\lambda} + H_w^q \dot{q} + H_w^t + H_w^w \dot{w}$$

equated to zero along the optimal yields

$$-\hat{H}_w^\lambda \hat{H}_q + \hat{H}_w^q \hat{H}_\lambda + \hat{H}_w^t + H_w^w \frac{d}{dt}(\hat{w}) = 0$$

This and equation (2.45) finally puts the result of elimination of η in the form:

$$\zeta \left(\dot{\sigma} + u' N \frac{d}{dt} \hat{w} \right) = 0$$

In the study of critical perturbations of nonzero eigenvalue, this implies the rather simple rule:

$$\ddot{s} = -u' N \frac{d}{dt} \hat{w} \quad (2.48)$$

associating the acceleration of time shift to the control perturbations. In the theory of optimal perturbation guidance, or in the search for conjugate points, we have to set $\zeta = 0$. In view of the preceding result we have then to consider (2.46) as a first integral and (2.44) can be ignored as identically satisfied. Simultaneously (2.46) does not yield any more the information about the instantaneous rate of time shift.

Returning then to the Hamiltonian K of equation (2.42) we can observe that it becomes linear in σ and that (2.46) can be considered as the chattering condition on this control. In such cases the control value is usually found by repeated differentiation of this condition. But as we have observed that the first differential is identically zero, we have a case where the actual value of the control is indifferent.

Fortunately the theory still predicts implicitly the optimal time shift at the corner points. This is due to the requirement of continuity of the adjoint η at corner points.

With $\zeta = 0$ in (2.46)

$$\eta = -\delta H$$

as already observed, and continuity requires at a corner point $t = \tau$ that

$$\delta H|_{\tau-0} = \delta H|_{\tau+0} \quad (2.49)$$

despite the discontinuities in the coefficient of the matrices of derivatives of H . Considering that the perturbed trajectories are here neighboring optimals of the original problem, and that continuity of the variational Hamiltonian is a necessary condition, already satisfied along the original optimal, continuity of the first order perturbation of the Hamiltonian is a natural request and could have been justified directly.

The expansion of (2.49) taking into account the continuity of x , s and p , gives

$$\begin{aligned} (\hat{H}^\lambda(\tau+0) - \hat{H}^\lambda(\tau-0))p(\tau) + (\hat{H}^q(\tau+0) - \hat{H}^q(\tau-0))x(\tau) \\ = -(\hat{H}'(\tau+0) - \hat{H}'(\tau-0))s(\tau) \end{aligned} \quad (2.50)$$

In particular, if the system is autonomous, the right-hand side vanishes. To make the calculation of $s(\tau)$ explicit from (2.50) we can introduce the isochronic perturbations

$$\begin{aligned} \delta q(\tau-0) &= x(\tau) - \hat{H}_\lambda(\tau-0)s(\tau) \\ \delta \lambda(\tau-0) &= p(\tau) + \hat{H}_q(\tau-0)s(\tau) \end{aligned} \quad (2.51)$$

whereby (2.50) furnishes

$$Ds(\tau) = (\hat{H}^\lambda(\tau+0) - \hat{H}^\lambda(\tau-0))\delta \lambda(\tau-0) + (\hat{H}^q(\tau+0) - \hat{H}^q(\tau-0))\delta q(\tau-0) \quad (2.52)$$

where

$$D = \hat{H}'(\tau-0) - \hat{H}'(\tau+0) + \hat{H}^\lambda(\tau+0)\hat{H}_q(\tau-0) - \hat{H}^q(\tau+0)\hat{H}_\lambda(\tau-0)$$

The integration of the isochronic perturbations is performed with the simplified perturbation equations ($\sigma = 0$)

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \hat{H}_x^\lambda \delta q + \hat{H}_x^q \delta w \\ \delta \dot{\lambda} &= -\hat{H}_q^\lambda \delta \lambda - \hat{H}_q^q \delta q - \hat{H}_q^w \delta w \\ \hat{H}_w^\lambda \delta \lambda + \hat{H}_w^q \delta q + \hat{H}_w^w \delta w &= 0 \end{aligned}$$

the last one being solvable for δw if the strong Legendre–Clebsch condition is satisfied.

The formula (2.52) is adapted to forward integration of the perturbations. If repeated backward integration is used to prepare a tube of neighboring optimals in order to establish the matrix synthesizing the optimal control perturbations as functions of the state,⁽⁶⁾ we can replace (2.51) by

$$\begin{aligned} \delta q(\tau+0) &= x(\tau) - \hat{H}_\lambda(\tau+0)s(\tau) \\ \delta \lambda(\tau+0) &= p(\tau) + \hat{H}_q(\tau+0)s(\tau) \end{aligned} \quad (2.53)$$

whereby (2.52) takes exactly the same form except that we replace

$$\begin{aligned} \delta \lambda(\tau-0) &\rightarrow \delta \lambda(\tau+0) \\ \delta q(\tau-0) &\rightarrow \delta q(\tau+0) \end{aligned}$$

and D remains in fact the same.

The jump in the isochronic perturbations as we pass a corner point is found by noting that x and p are continuous. Then, from (2.51) and (2.53)

$$\begin{aligned}\delta q(\tau+0) - \delta q(\tau-0) &= (\hat{H}_\lambda(\tau-0) - \hat{H}_\lambda(\tau+0))s(\tau) \\ \delta \lambda(\tau+0) - \delta \lambda(\tau-0) &= (\hat{H}_q(\tau+0) - \hat{H}_q(\tau-0))s(\tau)\end{aligned}\quad (2.54)$$

This can be used in forward integration in conjunction with (2.52) and in backward integration with its indicated modification. The interpretation of (2.54) is of course that the finite difference in the controls during the time interval between τ and $\tau+s(\tau)$, which represents an impulse, can be replaced by a Dirac measure at $t = \tau$ on the velocity vector of the system.

The interpretation of the guidance command can be put forward as follows. Replace the nominal optimal command \hat{w} by the sum of a continuous vector valued function \hat{w}_1 and a vector valued step function \hat{w}_2 .

The perturbed optimal command consists in replacing \hat{w}_1 by $\hat{w}_1 + \delta w$ and displace from $s(\tau)$ in the time scale the steps of \hat{w}_2 .

As regards the conjugate point condition, the situation can be sketched as follows. We start a forward integration with zero initial perturbations on state and time ($\delta q(\alpha) = 0$, $s(\alpha) = 0$) but a nonzero perturbation vector on the multipliers $\delta \lambda(\alpha)$.

If the problem is not abnormal (if the set of optimal multipliers $\lambda(t)$ is unique), the system will leave the optimal trajectory to follow a neighboring one. A conjugate point (to the origin) exists at $t = t(\theta)$ if, for a suitable $\delta \lambda(\alpha)$, the perturbation on the state vanishes again: $\delta q(\theta) = 0$. Stated otherwise: a conjugate point occurs there where the ($n \times n$) matrix of a fundamental system

$$\delta_m q(t) \quad m = 1, \dots, n$$

of state perturbations, generated by n linearly independent perturbations $\delta_m \lambda(\alpha)$, degenerates. The implications of this on optimal perturbation guidance is obvious. One can also prove, by an extension of an argument by Bliss,^(8, 9) that the interdiction to trespass a conjugate point is necessary for the non-negative character of the second variation. To this purpose one takes from $t(\alpha)$ to $t(\theta)$ the perturbed trajectory leading to $\delta q(\theta) = 0$ completed from $t(\theta)$ to $t(\beta)$ by the nominal trajectory itself. This perturbation can be normed by scaling to $(d\epsilon)^2$. One then shows that

- (1) the second variation is zero;
- (2) this perturbation does not give to the second variation its minimum value because a necessary condition to this effect is not satisfied.

(1) is obvious because the contribution of the first portion of trajectory to the second variation is $\zeta(d\epsilon)^2$ and ζ is zero.

(2) is also true because $\delta \lambda(\theta-0)$ cannot have all its components zero (otherwise, backward integration with also $\delta q(\theta) = 0$ shows all perturbations to vanish identically). But $\delta \lambda(\theta+0) = 0$ and the necessary condition of continuity of the perturbed multipliers is violated.

2.8. Application to an extremal with a singular arc

The following example, that can be treated analytically, illustrates the application of the eigenvalue type of second variation analysis to an optimal trajectory involving a singular extremal. The system is described by the differential equations:

$$\dot{q}_1 = v \qquad \dot{q}_2 = q_1^2$$

with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= A > 0 & q_1(\beta) &= B > 0 \\ t(\alpha) &= 0 & t(\beta) &= T > A+B \end{aligned}$$

The functional to be minimized is:

$$I = q_2(\beta) - q_2(\alpha) \text{ minimum.}$$

The single control v is originally a flip-flop $v = \pm 1$. Typically the solution, which can of course be analyzed by elementary methods,⁽⁴⁾ involves chattering of the control in the time interval $(A, C = T - B)$. The relaxed variational problem, which regularizes chattering and makes the absolute minimum accessible, consists in extending the possible control values to the segment $v \in (-1, 1)$. The variational constraints on the control along the segments where $v = \pm 1$ are avoided by the transformation $v = \cos w$. This requires a semi-norm for the metric of weakly varied trajectories:

$$2(d\epsilon)^2 = \int_0^T (\sin^2 w u^2 + \sigma^2) dt$$

The optimal trajectory in (q_1, t) space is shown on Fig. 2. Its characteristics, needed to calculate the critical perturbations, are summarized below.

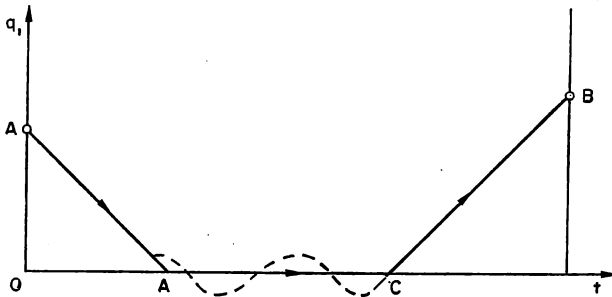


FIG. 2. The three segments of the optimal trajectory in (q_1, t) space. Segment AC is a singular arc. To each eigenvalue of the necessary minimum problem corresponds a perturbed trajectory of the type shown in dotted line.

<i>Segment 1</i>	<i>Segment 2</i>	<i>Segment 3</i>
$t \in (0, A)$	$t \in (A, C)$	$t \in (C, T)$
$\cos \hat{w} = -1$	$\cos \hat{w} = 0$	$\cos \hat{w} = 1$
$\hat{q}_1 = A - t$	$\hat{q}_1 = 0$	$\hat{q}_1 = t - C$
$\hat{\lambda}_1 = -(A - t)^2$	$\hat{\lambda}_1 = 0$	$\hat{\lambda}_1 = (t - C)^2$
$\hat{\lambda}_2 = -1$	$\hat{\lambda}_2 = -1$	$\hat{\lambda}_2 = -1$

The perturbed equations and optimal controls will now be solved for each segment.

Segment 1

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma & \dot{x}_2 &= 2(A-t)x_1 + (A-t)^2\sigma & \dot{s} &= \sigma \\ \dot{p}_1 &= 2x_1 + 2(A-t)(\sigma - p_2) & \dot{p}_2 &= 0 & \dot{\eta} &= 0 \\ (A-t)^2u &= 0 & -p_1 + (A-t)^2p_2 - 2(A-t)x_1 + \zeta\sigma + \eta &= 0 \end{aligned}$$

The adjoint multiplier η will be constant along the whole perturbed trajectory (the system is in fact autonomous). Differentiating the last equation and substituting the differential coefficients from the other equations (or applying directly equation (2.48)), we find $\zeta\dot{\sigma} = 0$. Hence, if the eigenvalue is not zero, σ is a constant which will be denoted by σ_1 . The perturbed equations are now easily integrated. Taking into account the initial values $x_1(0) = 0$ and $s(0) = 0$ needed to satisfy boundary conditions and taking p_1 from the last equation, we obtain the following end values

$$x_1(A) = -\sigma_1 A \quad s(A) = \sigma_1 A \quad p_1(A) = \eta + \zeta\sigma_1$$

The integration of x_2 and p_2 are not required. It is also seen that u must vanish; but this does not affect the other equations. In fact, even if u were nonzero, the system, that is not tightly controlled on this segment, would follow the same trajectory. The only real perturbation here is the shortening or lengthening of the segment by the time shift $s(A)$.

Segment 2

This one is a singular extremal ($\hat{H}_w^* = 0$) but tightly controlled.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -u & \dot{s} &= \sigma & \dot{p}_1 &= 2x_1 \\ -p_1 + \zeta u &= 0 & & & \zeta\sigma + \eta &= 0 \end{aligned}$$

A differential equation is obtained for the optimal perturbed control by two differentiations:

$$\zeta\dot{u} = \dot{p}_1 = 2x_1 \quad \zeta\ddot{u} = 2\dot{x}_1 = -2u$$

We change the eigenvalue parameter by the transformation:

$$\omega^2 = 2/\zeta$$

and solve in succession

$$u = a \sin \omega(t-A) + b \cos \omega(t-A)$$

$$\omega x_1 = a \cos \omega(t-A) - b \sin \omega(t-A)$$

$$\omega^2 p_1 = 2a \sin \omega(t-A) + 2b \cos \omega(t-A)$$

Since η is constant and ζ assumed non-zero, σ is a constant, denoted σ_2 and

$$2\sigma_2 + \omega^2 \eta = 0 \quad (a)$$

Integrating s , with continuity at $t = A$, we find

$$s = \sigma_2(t-A) + \sigma_1 A$$

The continuity requirements at $t = A$ of p_1 and x_1 furnish:

$$2b = 2\sigma_1 + \omega^2 \eta \quad (b)$$

$$a = -\omega \sigma_1 A \quad (c)$$

The end values of interest are:

$$s(C) = \sigma_2(C-A) + \sigma_1 A$$

$$x_1(C) = \frac{1}{\omega} [a \cos \omega(C-A) - b \sin \omega(C-A)]$$

$$p_1(C) = \frac{2}{\omega^2} [a \sin \omega(C-A) + b \cos \omega(C-A)]$$

A critical perturbation of this segment is oscillatory.

Segment 3

Segment 3 is simply lengthened or shortened as segment 1.

$$\dot{x}_1 = \sigma \quad \dot{s} = \sigma \quad \dot{p}_2 = 0$$

$$\dot{p}_1 = 2x_1 + 2(t-C)\sigma - 2(t-C)p_2$$

$$(t-C)^2 u = 0 \quad p_1 + (t-C)^2 p_2 - 2(t-C)x_1 + \zeta \sigma + \eta = 0$$

Again σ is found to be a constant, denoted σ_3 . Integration with continuity at $t = C$ produces:

$$x_1 = (t-C)\sigma_3 + \frac{1}{\omega} (a \cos \omega(C-A) - b \sin \omega(C-A))$$

$$\sigma = (t-C)\sigma_3 + \sigma_2(C-A) + \sigma_1 A$$

and p_1 is taken from the optimal control equation. Continuity of p_1 at $t = C$ requires:

$$\zeta \sigma_3 + \eta + \frac{2}{\omega^2} (a \sin \omega(C-A) + b \cos \omega(C-A)) = 0 \quad (d)$$

Finally the boundary conditions $x_1(T) = 0$ and $\sigma(T) = 0$ yield

$$\omega B\sigma_3 + a \cos \omega(C-A) - b \sin \omega(C-A) = 0 \quad (e)$$

$$B\sigma_3 + \sigma_2(C-A) + \sigma_1 A = 0 \quad (f)$$

Equations (a)–(f) are homogeneous in the six quantities $a, b, \eta, \sigma_1, \sigma_2$ and σ_3 . The three first ones are easily eliminated to produce a homogeneous set of conditions in the three rates of time shift:

$$\sigma_1(\cos \phi - \omega A \sin \phi) - \sigma_2(1 + \cos \phi) + \sigma_3 = 0$$

$$-\sigma_1(\sin \phi + \omega A \cos \phi) + \sigma_2 \sin \phi + \sigma_3 \omega B = 0$$

$$\sigma_1 A \omega + \sigma_2 \phi + \sigma_3 B \omega = 0 \quad (\phi = \omega(C-A))$$

Setting the determinant equal to zero, we obtain a transcendental equation to be satisfied by the eigenvalues and which depends on the two parameters:

$$p = \frac{A}{C-A} \quad \text{and} \quad q = \frac{B}{C-A}$$

$$\frac{\sin \phi}{\phi} (1 + p + q - pq\phi^2) + \cos \phi (p + q + 2pq) + 2pq = 0$$

It is easily seen to possess an infinite sequence of eigenvalues:

$$\phi = \pm \phi_1, \pm \phi_2 \dots \quad 0 < \phi_1 < \phi_2 \dots$$

asymptotic to $\pm n\pi$ for n large.

The corresponding eigenvalues ζ_i are all positive

$$\zeta_i = 2 \left(\frac{C-A}{\phi_i} \right)^2 \quad \zeta_1 > \zeta_2 > \zeta_3 \dots > 0$$

Although there is no most critically perturbed trajectory, the second variation test is satisfied; zero is an infimum but not a minimum of $\Delta^2 I$.

REFERENCES

1. B. FRAELIS DE VEUBEKE. Une condition suffisante de minimum relatif dans le problème des extrémés liés. *Acad. R. de Belgique, Bull. Cl. des Sciences*, 512–17, 1966–4.
2. P. BECKERS. Coplanar impulsive transfers and the second variation test. Proc. Colloquium on Optimization in Space Flight Mechanics, Liège, 1967. Pergamon Press.
3. P. CONTENSOU. Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique. *Astronautica Acta*, 8, 2–3, 1962.
4. B. FRAELIS DE VEUBEKE. Régularisation des réticences et réduction du Principe du Maximum de Pontrjagin au calcul classique des variations. Comité National de Mécanique Théorique et Appliquée, juin 1964.
5. J. WARGA. Relaxed variational problems. *J. Math. Anal. Appl.* 4, 432–55, 1962.

6. J. V. BREAKWELL, J. L. SPEYER and A. E. BRYSON. Optimization and Control of nonlinear systems using the second variation. *SIAM Journal on Control*, 1, 2, 193–223, 1963.
7. H. J. KELLEY, R. E. KOPP and H. G. MOYER. Singular extremals. *Topics in Optimization*, Chap. 3. Academic Press, 1967.
See also: H. M. ROBBINS. A generalized Legendre–Clebsch condition for the singular cases of optimal control. IBM report 66–825/2043, September 1966.
8. G. BLISS. *Lectures on the Calculus of Variations*. The University of Chicago Press, 1946.
9. J. V. BREAKWELL and Y. C. HO. On the conjugate point condition for the control problem. *Int. J. Engng. Sci.* 2, 565–79, 1965.

NUMERICAL INTEGRATION OF PLANE ORBITAL TRANSFERS WITH MULTIPLE POWERED ARCS

J. GEERTS

Research Assistant,
Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales,
Université de Liège

ABSTRACT

The purpose of this numerical investigation has been to evaluate the penalty on propellant expenditure in a transfer using a chemical rocket of small thrust. The thrust acceleration at departure was taken to be 0.03 times the gravitational acceleration. Results show that the excess expenditure over that of a bi-impulsive transfer can be reduced by a factor 4 when passing from a TCT optimal solution to a TCTCT one.

POSITION OF THE PROBLEM

The problem is a planar one. The time and the angle are open. The orbit of arrival is defined by its total energy and its angular momentum. Optimization is for minimum propellant expenditure of a rocket of limited thrust with respect to both thrust orientation and cutoff-relight capability. All state variables are made non-dimensional by using the radius of the circular departure orbit, the corresponding orbital velocity and the initial mass as units. The 4 state variables are

z : inverse of the angular momentum

A and B : related to eccentricity e and argument of pericenter θ_0 by:

$$A = ze \cos \theta_0$$

$$B = ze \sin \theta_0$$

θ : the polar angle with respect to a fixed direction

z , A , B are osculating variables, they remain constant during a coasting arc. The independent variable is the characteristic velocity

$$\phi = c \ln \mu$$

where μ is the (reduced) reciprocal of instantaneous mass.

The two dimensionless parameters of the problem (excluding the geometrical characteristics of the orbits of departure and of arrival) are

c : the reduced effective exhaust velocity,

a : the ratio of thrust acceleration to gravitational acceleration at departure.

The numerical values adopted for the parameters were

$$c = 0.3228 \quad a = 0.03$$

The method of Runge-Kutta-Gill was used to integrate the system of 8 differential equations⁽²⁾ (4 equations for the system of state variable and 4 equations for the adjoint system). According to the maximum principle, it is possible to compute at each step the optimal thrust orientation ψ , while the sequence of powered and coasting arcs is ruled by a switching function also calculated step by step.

For open time transfers, the Lagrangian multipliers are orbital constants just like the osculating variables. The only variables during a coasting arc are the polar angle θ and the time (which is here a separable variable anyway). Hence, if θ_c denotes the polar angle at a cutoff, the only unknown will be the polar angle θ_r at the next relight condition. From the analytical results^(1, 2) there are two types of orbital jump, a symmetrical one and an asymmetrical one and the type of jump can be decided by tests. There are two unknown initial values: ψ_a and θ_a ; their choice determines a discrete set of orbits of arrival. The choice of θ_a and ψ_a is limited by the condition that the initial rate of growth of "the switching function" be positive; this condition can be expressed analytically.⁽²⁾

THRUST-COAST-THRUST TRANSFERS (TCT)

With a program, named ORVAL, written in FORTRAN IV for IBM7040 it has been possible to draw Fig. 1. It is a region of initial values allowing a TCT transfer, starting from a circular orbit. This region is very narrow and therefore difficult to delimitate. Some points, corresponding to different r_b (radius of a circular orbit of arrival) are plotted on this figure. Another program (named CATI) determines ψ_a and θ_a for an imposed transfer. The values of ψ_a and θ_a are automatically improved by a convergent process to satisfy the end conditions. This is achieved, classically, by experimental measurement of the sensitivities of end conditions to small increments in initial values, followed by linear corrections. After several iterations, it is possible to obtain the initial values with sufficient accuracy. A typical co-circular transfer obtained with the CATI program will be illustrated. The radius of departure is 1.0 and the radius of the orbit of arrival is 1.5. The following figures show the evolution of some of the variables.

Figure 2 presents μ and r against θ (r reduced radial distance).

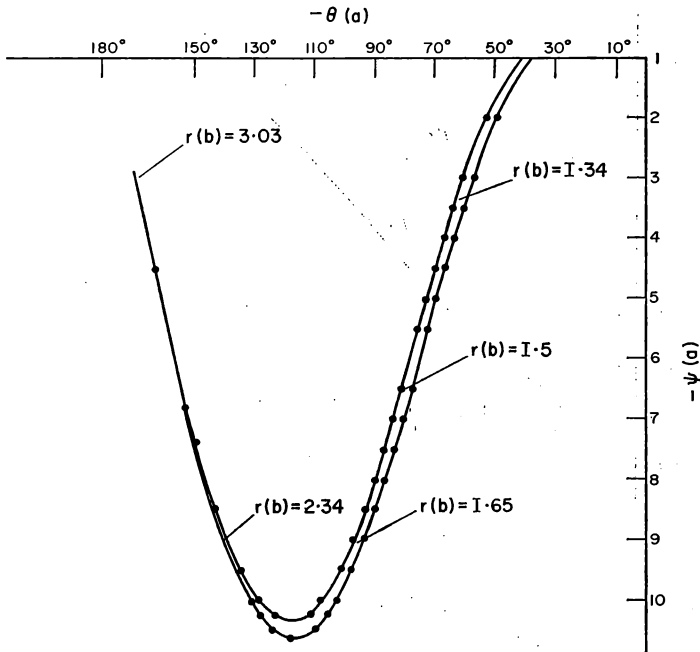


FIG. 1. $\theta(a)$ (in degrees) against $\psi(a)$ (in degrees multiplied by 10).

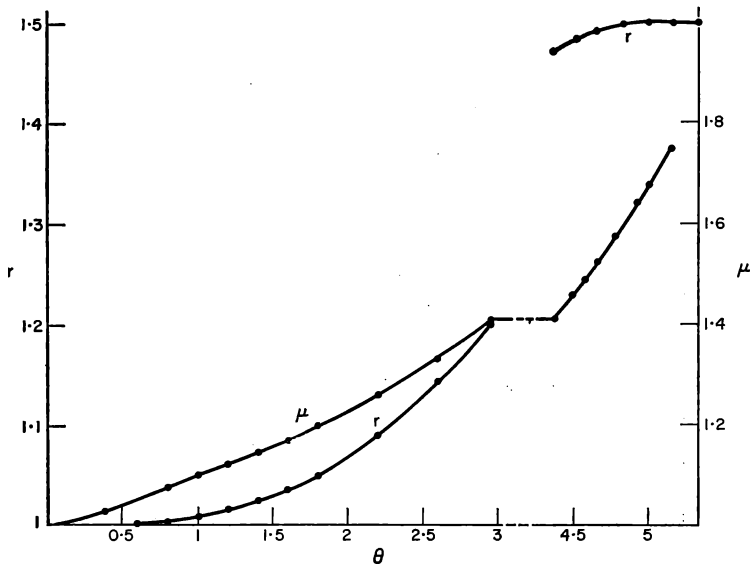


FIG. 2. r and μ against θ (in radians).

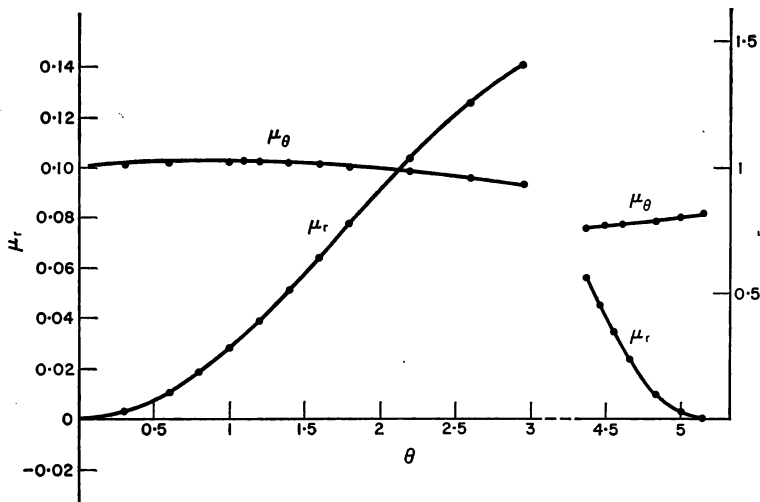


FIG. 3. u_θ and u_r against θ (in radians).

Figure 3 presents, against θ , the tangential velocity u_θ and the radial velocity u_r .

Figure 4 presents the optimal thrust orientation ψ against θ .

Figure 5 is a picture of the co-circular transfer in polar coordinates. The thrust arcs are the solid curves, the coasting arc is dashed.

Figure 6 also depicts a TCT transfer but the radius of the final orbit is raised to 3.03.

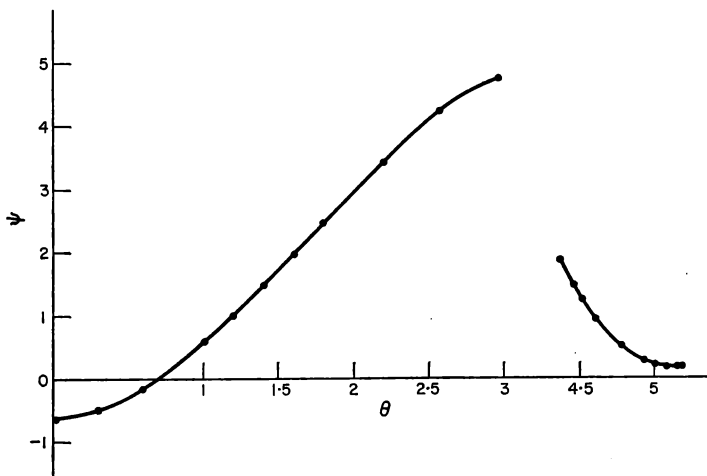


FIG. 4. ψ (in degrees) against θ (in radians).

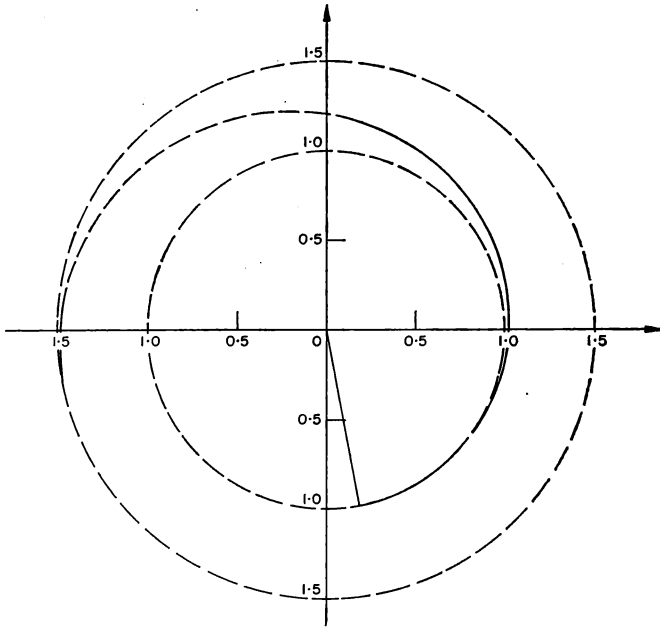


FIG. 5. Co-circular transfer with $r_b = 1.5$.

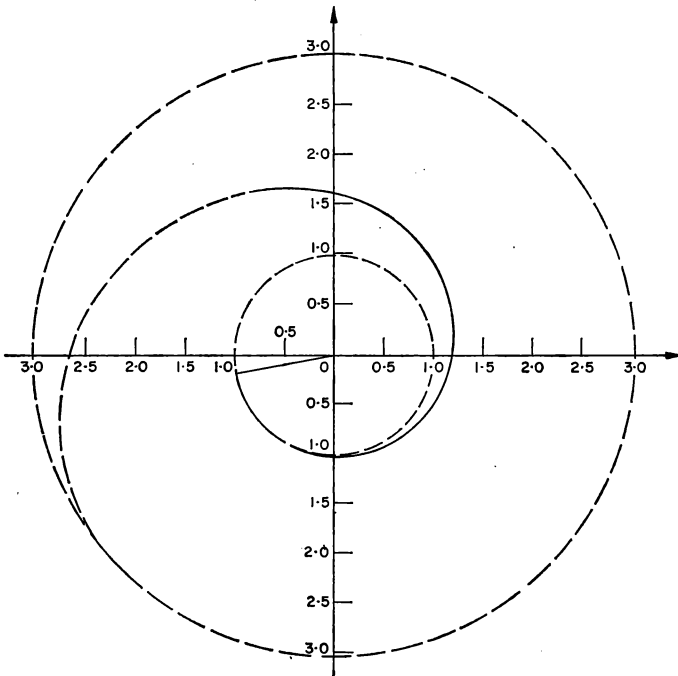


FIG. 6. Co-circular transfer with $r_b = 3.03$.

COMPARISON BETWEEN TCT TRANSFERS, TCTCT TRANSFERS AND HOHMANN BI-IMPULSE TRANSFERS

If m_{bH} is the residual mass at arrival for a Hohmann bi-impulsive transfer and m_b the residual for a TCT transfer:

$$\varepsilon = 1 - \frac{m_b}{m_{bH}}$$

is the relative penalty of propellant expenditure.

Figure 7 shows how this penalty increases in a co-circular transfer with the increase in the ratio of radii.

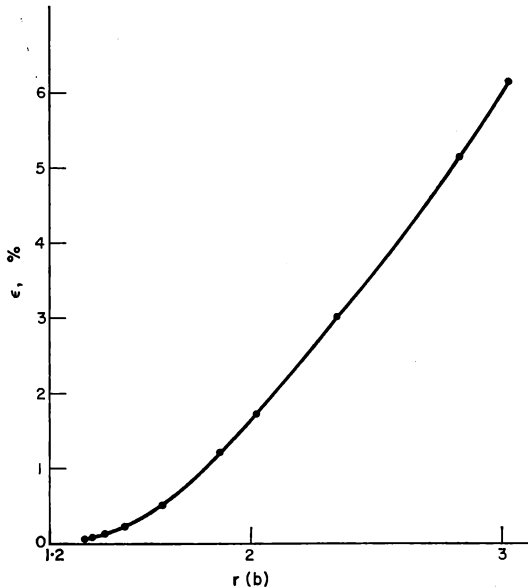


FIG. 7. ε against $r(b)$.

A comparison was also made between several types of co-circular transfers by varying the number of coasting arcs. The ratio of radii was held fixed at 1.5. A simple TCT transfer was compared with two TCTCT transfers (containing two coasting arcs). The best one of those, which has a first symmetrical jump followed by an antisymmetrical, reduced the penalty by a factor of 4.

The residual masses at arrival orbit (for $r_b = 1.5$) were found to be respectively

$$m_{bH} = 0.5696 \quad (\text{reference Hohmann value})$$

$$m_{TCT} = 0.5684$$

$$m_{TCTCT} = 0.5693$$

CONCLUSIONS

The characteristics of the orbit of arrival are extremely sensitive to the initial parameters θ_a and ψ_a .

The penalty in propellant expenditure due to finite thrust is either small or can be made so, even for large energy changes, by introducing a second coasting arc.

REFERENCES

1. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE. Canonical Transformations and the Thrust-Coast-Thrust Optimal Transfer Problem. *Astronautica Acta*, **11**, 4, 1965.
2. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE. Optimal Steering and Cutoff-relight Programs for Orbital Transfers. *Astronautica Acta*, **12**, 4, 1966.
3. RALSTON. *Mathematical Methods for Digital Computers*. John Wiley, 1965.
4. B. FRAEIJIS DE VEUBEKE and J. GBERTS. Optimization of Multiple Impulse Orbital Transfers by the Maximum Principle. *Proc. XVth International Astronautical Congress*, Warsawa 1964, Vol. I, pp. 589–616. Gauthier-Villars, Paris.

RENDEZ-VOUS IMPULSIONNELS, OPTIMAUX, DE LONGUE DURÉE, ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES, PROCHES, COPLANAIRES OU NON

JEAN-PIERRE MAREC

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales,
29 Avenue de la Division Leclerc, 92 Châtillon, France

RÉSUMÉ

L'étude linéarisée des rendez-vous impulsions optimaux de longue durée entre orbites quasi-circulaires proches, coplanaires ou non, se déduit très simplement de l'étude des transferts correspondants.

Toute solution présente évidemment la dégénérescence temporelle suivante: une poussée au $k^{\text{ième}}$ tour (différent du premier et du dernier) peut être décomposée, en partie ou en totalité, en plusieurs poussées appliquées, au même endroit et dans la même direction, antérieurement et postérieurement à ce tour.

Laissant de côté cette première espèce de dégénérescence temporelle, les solutions optimales sont, suivant le rendez-vous à réaliser, de l'un des six types suivants:

Type I (bi-impulsionnel): deux impulsions bien déterminées.

Type II (bi-impulsionnel, nodal): deux impulsions bien déterminées appliquées aux nœuds.

Type III (singulier, tridimensionnel): il y a dégénérescence spatiale et temporelle de la solution. Une certaine liberté est laissée dans le choix du point d'application et de la grandeur de la poussée ainsi que dans le choix du numéro du tour où cette poussée est appliquée.

L'orientation optimale de la poussée ne dépend que de la position du point d'application. Elle est contenue dans l'un des deux plans tangents à l'orbite faisant un angle de 30° avec le plan horizontal local.

Tout rendez-vous de ce type peut, en particulier, être réalisé d'une infinité de façons à l'aide de trois impulsions et même, souvent, à l'aide de deux impulsions bien déterminées (d'une seule façon ou de deux façons différentes).

Type IV (tri-impulsionnel): quatre impulsions, pouvant être réduites à trois impulsions bien déterminées (une ou deux au premier tour et deux ou une au dernier tour) ou exceptionnellement à deux impulsions bien déterminées, au premier et au dernier tour (l'une accélératrice, l'autre décélératrice).

Type I bis (singulier, plan): il y a, comme pour le type III, dégénérescence spatiale et temporelle de la solution, mais ici, la poussée optimale est tangentielle. Le rendez-vous peut, en particulier, être réalisé d'une infinité de façons, à l'aide de deux impulsions bien déterminées (toutes deux accélératrices ou toutes deux décélératrices).

Type IV bis (singulier, plan): il y a dégénérescence spatiale. La poussée optimale est tangentielle et appliquée, comme pour le type IV, seulement au premier et au dernier tour.

Le rendez-vous peut, en particulier, être réalisé à l'aide de trois impulsions ou, souvent même, de deux façons différentes, à l'aide de deux impulsions bien déterminées (dont l'une accélératrice et l'autre décélératrice).

Les solutions de type IV et IV bis ne se présentent que pour les rendez-vous "lointains" (grand écart "supplémentaire" en longitude).

Enfin, il existe une relation linéaire entre les numéros des tours où sont appliquées les deux impulsions des solutions bi-impulsionnelles rencontrées dans les types I, II, III et I bis, ce qui laisse un degré de liberté (dégénérescence temporelle de seconde espèce).

ABSTRACT

The first order study of optimal impulse rendez-vous of long duration between near-circular, non-coplanar, close orbits can be deduced very simply from the study of the corresponding transfers.

Naturally, every solution presents the following time-degeneracy: a thrust application at the k^{th} revolution (different from the first and from the last) can be decomposed, partially or completely, into several thrusts applied, at the same location and in the same direction, before and after this revolution.

Letting this first kind of time-degeneracy apart, the optimal solutions belong to one of the six following types, depending on the rendez-vous to be performed:

Type I (two-impulse type): two well-defined impulses.

Type II (two-impulse, nodal type): two well-defined impulses applied at the nodes.

Type III (three-dimensional, singular type): there exists a space- and time-degeneracy of the solution. A certain freedom exists in the choice of the point of application and of the magnitude of the thrust as well as in the choice of that number of the revolution at which this thrust is applied.

The optimal orientation of the thrust vector only depends on the location of the point of application. It lies in one of the two planes tangent to the orbit and making an angle of 30° with the local horizontal plane.

Every such rendez-vous can, in particular, be performed in an infinite number of ways with the use of three impulses and even, often, with the help of two well-defined impulses (in one way or in two different ways).

Type IV (three-impulse type): four impulses, which can be reduced to three well defined impulses (one or two at the first revolution and two or one at the last one) or exceptionally to two well-defined impulses, one at the first and one at the last revolution (one for acceleration and one for deceleration).

Type I bis (plane, singular type): there exists, as for type III, a space- and time-degeneracy of the solution, but here, the optimal thrust is tangential. In particular, the rendez-vous can be performed in an infinite number of ways, with the use of two well-defined impulses (both accelerating or both decelerating).

Type IV bis (plane, singular type): there exists a space-degeneracy. The optimal thrust is tangential and is applied, as in type IV, only at the first and at the last revolution.

In particular, the rendez-vous can be performed with the use of three impulses or, even often, in two different ways, with the help of two well-defined impulses (one for acceleration and one for deceleration).

The solutions of type IV and IV bis are only present in the case of "remote" rendez-vous (large "extra" angular lag).

Finally for the two-impulse solutions found in types I, II, III and I bis, there exists a linear relation between the numbers of the revolutions at which the two impulses are applied, which leaves one degree of freedom (second kind of time-degeneracy).

1. INTRODUCTION

La présente étude étend au cas des rendez-vous de longue durée les résultats relatifs aux transferts impulsionsnels, optimaux, entre orbites quasi-circulaires, proches, coplanaires ou non, précédemment obtenus par F. W. Gobetz, M. Washington, T. N. Edelbaum⁽¹⁻²⁾ et par l'Auteur⁽³⁾ et supposés connus du lecteur.

On fait l'hypothèse que, *au cours du rendez-vous*, l'orbite osculatrice () s'écarte peu de l'orbite finale (O_f) (écart maximum de l'ordre de $\varepsilon \ll 1$) et que l'orbite finale a une excentricité $e_f \leq$ ordre $\varepsilon \ll 1$.

Cela permet de retenir, en première approximation, la solution obtenue par linéarisation autour de l'orbite finale (O_f), acceptant ainsi une erreur relative d'ordre ε sur la solution.

Afin de simplifier les calculs, on choisit les unités suivantes:

Unité de longueur: $a_f =$ demi-grand axe de (O_f)

Unité de temps: $\frac{T}{2\pi} =$ [période de révolution sur l'orbite (O_f)]/2 π

L'unité de vitesse est alors la vitesse circulaire $V_{\text{circ}}(a_f)$ à la distance a_f du centre d'attraction 0 et l'unité d'accélération, la pesanteur $g(a_f)$ à la distance a_f de 0.

Le propulseur, à vitesse d'éjection constante, est supposé capable de fournir des impulsions. Un rendez-vous optimal correspond à une vitesse caractéristique ΔC minimale ($\Delta C = \int_{t_0}^{t_f} |\vec{\gamma}| dt$, où $\vec{\gamma} =$ accélération de poussée).

En plus des 5 variations imposées:

$-\Delta\eta$ } composantes, sur les axes fixes \vec{Ox} , \vec{Oy} (Fig. 1a),
 $\Delta\xi$ } de la rotation infinitésimale $\vec{\Delta j}$ du plan de l'orbite,

$\frac{\Delta a}{a_f} = \Delta a =$ "dilatation" relative du demi-grand axe,

$\Delta\alpha$ } composantes de la variation $\vec{\Delta e}$ du vecteur périégée \vec{e} ,
 $\Delta\beta$ } dirigé vers le périégée et de longueur e (excentricité),
 déjà considérées dans le cas du transfert, il faut ajouter une 6ème variation imposée $\Delta\tau$ relative au rendez-vous.

Dans cette étude, la variable de description est la longitude† $L = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ fixant la *position* du mobile M .

La donnée du paramètre τ remplace alors la donnée du *temps* t . Le paramètre τ a une définition assez complexe, précisée dans la référence 4, mais l'interprétation de la variation $\Delta\tau$ de τ est simple (fig. 1b):

$\Delta\tau$ est l'avance temporelle, comptée sur l'orbite finale (O_f), du mobile fictif M_0 de même longitude L_0 que le mobile réel initial M_0 , par rapport au mobile cible initial M_{c0} .

† Le terme: "ascension droite" serait plus approprié.

où $\gamma'_x, \gamma'_y, \gamma'_z$ sont les composantes de l'accélération de poussée $\vec{\gamma}$ dans les axes mobiles \mathcal{MXYZ} . ($\overline{\mathcal{M}X}$: radial; $\overline{\mathcal{M}Y}$: horizontal; $\overline{\mathcal{M}Z}$: normal au plan de l'orbite).

Les seconds membres de ces équations ne contenant pas l'état, l'adjoint :

$$\vec{p} = [p_\xi = p_z \cos L_z, p_\eta = p_z \sin L_z, p_a, p_\alpha = p_e \cos L_e, p_\beta = p_e \sin L_e, p_\tau, p_c = +1]$$

est constant.

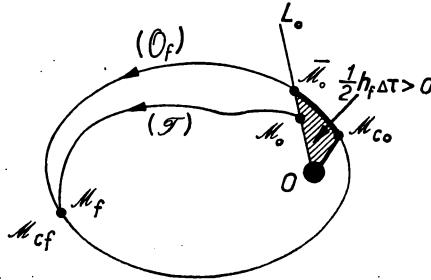


FIG. 1b. Interprétation du paramètre $\Delta\tau$.

Le vecteur efficacité \vec{p}'_v indiquant la direction optimale de poussée a pour composantes :

$$\vec{p}'_v \begin{cases} X = p_e \sin(L-L_e) + 2p_\tau [1 - \cos(L-L_0)] \\ Y = \frac{2p_a - 3p_\tau(L-L_0) + 2p_e \cos(L-L_e) + 4p_\tau \sin(L-L_0)}{2p'_{a1}} \\ Z = p_z \sin(L-L_z) \end{cases} \quad (2)$$

Nous supposons dans la suite que le rendez-vous est de longue durée, c'est-à-dire que l'angle de transfert ΔL est $\gg 2\pi$.

Si l'on admet alors sur la solution une erreur relative non plus d'ordre ε mais d'ordre: $\max\left(\varepsilon, \frac{1}{\Delta L}\right)$, l'équation en τ' s'écrit :

$$\tau' = -3L\gamma'_y \simeq -3(2k\pi)\gamma'_y \quad (3)$$

où $k = (\text{numéro du tour}) \ll N = (\text{nombre total de tours})$

Le vecteur efficacité devient alors :

$$\vec{p}'_v \begin{cases} X = p_e \sin(L-L_e) \\ Y = \frac{2p_a - 3p_\tau L + 2p_e \cos(L-L_e)}{2p'_{a1}} \\ Z = p_z \sin(L-L_z) \end{cases} \quad (4)$$

Il est important de remarquer que, dans cette approximation, les positions initiales et finales (longitudes L_0 et L_f) n'interviennent plus dans le

calcul. Seul le nombre total de tours N intervient, ce qui simplifie beaucoup la solution.

Notons également que les solutions impulsionnelles (ou, à la rigueur, les solutions singulières) étant seules considérées ici, $|\vec{p}_v|$ est ≤ 1 ; donc, dans (2), $|Y|$ est ≤ 1 , ce qui entraîne: $p_r \leq \text{ordre} \frac{1}{\Delta L}$.

2. DOMAINE ACCESSIBLE

Il s'agit de définir l'ensemble des points de l'espace à 5 dimensions des variations Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , Δj , Δa , $\Delta \tau$ qui peuvent être atteints avec la vitesse caractéristique ΔC .

Il est commode, dans le cas des rendez-vous de longue durée, de prendre comme sixième variation non plus $\Delta \tau$ mais:

$$\Delta \mathcal{O} = \frac{4}{3} \frac{\Delta \tau}{\Delta L} + \Delta a \quad (5)$$

ce qui introduit des symétries supplémentaires dans le domaine accessible.

En effet, remarquant que:

$$\mathcal{O}' = \frac{4}{3} \frac{\tau'}{\Delta L} + a' = \left(1 - 2\frac{k}{N}\right) a' \quad (6)$$

et prenant l'axe de référence \vec{Ox} selon la ligne des nœuds, support du vecteur rotation $\vec{\Delta j}$ ($d\alpha$ et $d\beta$ représentent alors respectivement de_{\parallel} et de_{\perp}), il est possible de modifier le signe de chacune des 5 variations définissant le rendez-vous, sans modifier les autres variations, en effectuant, pour toutes les poussées, les changements suivants:

$\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j, \Delta a, \Delta \mathcal{O}$	L	k	X	Y	Z
$-\Delta e_{\parallel}$	$\pi - L$	k	$-X$	Y	$-Z$
$-\Delta e_{\perp}$	$-L$	k	$-X$	Y	Z
$-\Delta j$	$\pi + L$	k	X	Y	Z
$-\Delta a$	$\pi + L$	$N - k$	$-X$	$-Y$	$-Z$
$-\Delta \mathcal{O}$	L	$N - k$	X	Y	Z

Ces changements ne modifiant pas la grandeur des poussées, donc la consommation, le domaine accessible est symétrique par rapport aux axes, plans et espaces de coordonnées et il suffit de ne considérer que des variations positives. (Il est cependant quelquefois commode, pour montrer comment les solutions optimales se composent linéairement, de considérer des variations de signes quelconques.)

Cherchons tout d'abord à définir, dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$, l'ensemble des points accessibles avec la vitesse caractéristique ΔC , les variations Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , Δj étant fixées.

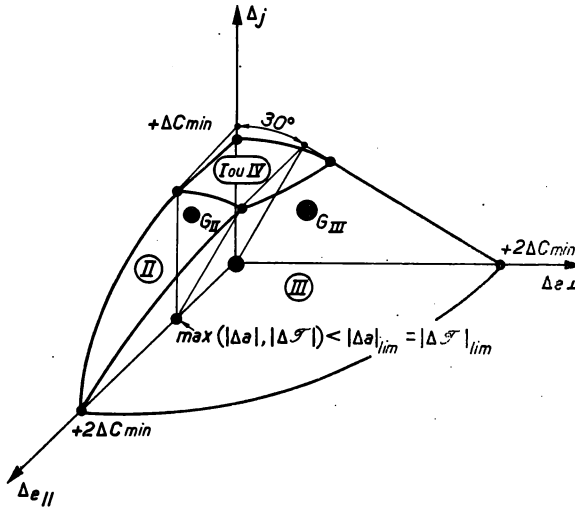


FIG. 2. Domaine accessible pour :

$$\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{T}|) < |\Delta a|_{\text{lim}} = |\Delta \mathcal{T}|_{\text{lim}}.$$

Cela suppose que la vitesse caractéristique ΔC est au moins égale à la vitesse caractéristique minimale ΔC_{\min} nécessaire pour produire les variations Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , Δj qui définissent le point G de la figure 2, soit :

$$\Delta C^2 \geq \Delta C_{\min}^2 = \begin{cases} \frac{\Delta e_{\parallel}^2}{4} + \Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 & \text{si } 3\Delta e_{\perp}^2 \leq \Delta j^2 \text{ (II)} \\ \frac{\Delta e_{\parallel}^2}{4} + \frac{(|\Delta e_{\perp}| + \sqrt{3}|\Delta j|)^2}{4} & \text{si } 3\Delta e_{\perp}^2 \geq \Delta j^2 \text{ (III)} \end{cases} \quad (7)$$

Il existe alors, associée à ΔC , une valeur maximale $|\Delta a|_{\max}$ de $|\Delta a|$ (fig. 4) obtenue dans l'étude du transfert simple ($\Delta \mathcal{T}$ indifférent). Δa_{\max}^2 est la plus grande des racines de l'équation bicarrée (27) de la référence 3.

Le domaine accessible dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$ est donc nécessairement contenu dans la bande : $-|\Delta a|_{\max} \leq \Delta a \leq +|\Delta a|_{\max}$ (fig. 5). Le segment : $\Delta \mathcal{T} = 0$, $-|\Delta a|_{\max} \leq \Delta a \leq +|\Delta a|_{\max}$ du plan, obtenu dans le cas du trans-

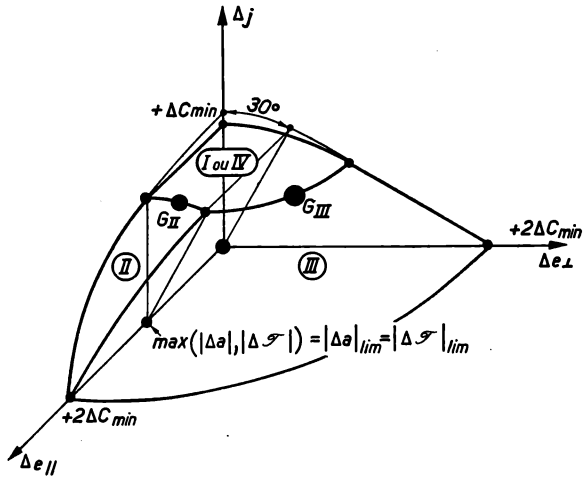


FIG. 3. Domaine accessible pour :

$$\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|) = |\Delta a|_{\text{lim}} = |\Delta \mathcal{C}|_{\text{lim}}.$$

fert simple, n'est autre que le *contour apparent* du domaine accessible dans ce plan relatif au rendez-vous, parallèlement à l'axe $\overline{O\Delta\mathcal{C}}$.

Considérons à présent la loi de poussée qui produit une variation $\Delta\mathcal{C}$ maximale (fig. 6). Il lui correspond une certaine variation Δa .

L'équation (6) montre que cette loi de poussée est nécessairement telle que toutes les accélérations ($da > 0$) soient faites au premier tour ($k = 0$) et toutes les décélérations ($da < 0$) au dernier tour ($k = N$). (Solution de type $\mathcal{A}_0\mathcal{D}_N$).

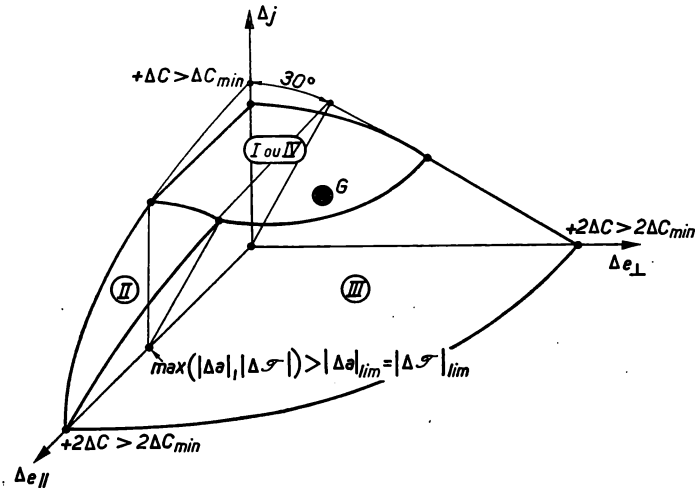


FIG. 4. Domaine accessible pour :

$$\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|) > |\Delta a|_{\text{lim}} = |\Delta \mathcal{C}|_{\text{lim}}.$$

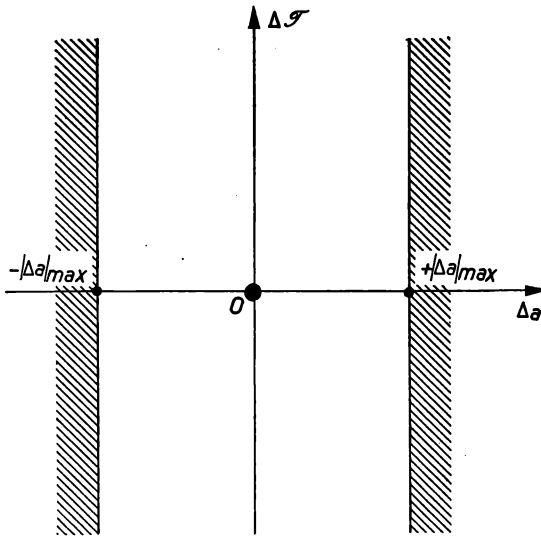


FIG. 5.

Montrons que la même valeur $\Delta \mathcal{V}_{\max}$ peut être obtenue pour $\Delta a = |\Delta a|_{\max}$. Il suffit pour cela de modifier la loi de poussée de la façon suivante: toute décélération au point de longitude L , due à une poussée de direction X, Y, Z , produite au dernier tour, est remplacée par une accélération de même grandeur, au point de longitude $L + \pi$, due à une poussée de direction $-X, -Y, -Z$, produite au premier tour.

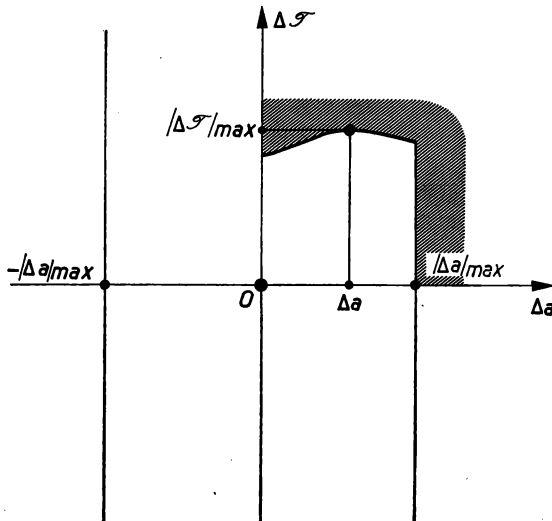


FIG. 6.

Cette modification ne change pas Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , Δj et $\Delta \mathcal{T}_{\max}$ (ni évidemment ΔC).

La nouvelle solution, optimale puisqu'elle conduit à $\Delta \mathcal{T}_{\max}$, ne comportant que des accélérations au premier tour (type \mathcal{A}_0) est telle que:

$$\Delta \mathcal{T}_{\max} = \Delta a \leq \Delta a_{\max} \quad (8)$$

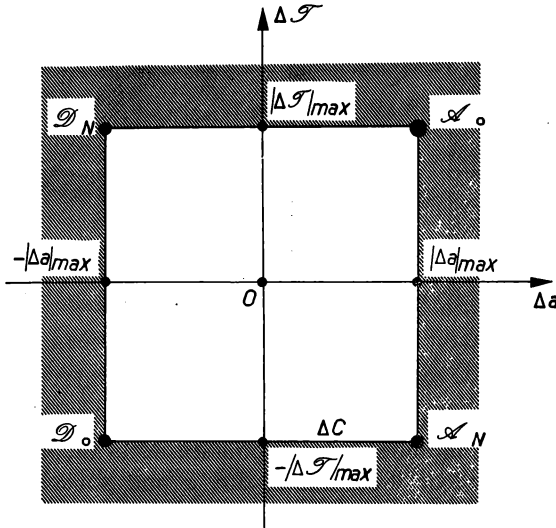


FIG. 7. Domaine accessible dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$.

Or, la solution optimale de type I (ou, à la rigueur, limite entre les types I et II ou I et III) rencontrée dans l'étude du transfert simple et conduisant à Δa_{\max} peut produire:

$$\Delta \mathcal{T} = \Delta a_{\max} \quad (9)$$

à condition de placer toutes les accélérations au premier tour (solution bi-impulsionnelle de type $A_0 A_0$).

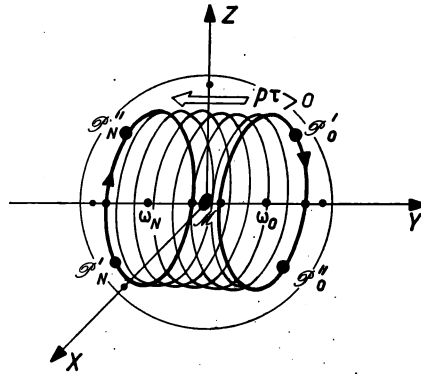
La comparaison des équations (8) et (9) montre que: $\Delta \mathcal{T}_{\max} = \Delta a_{\max}$ et que la solution optimale $\mathcal{A}_0 \equiv A_0 A_0$ est de type I.

Notons que, pour $\Delta \mathcal{T} = \Delta \mathcal{T}_{\max}$, toute valeur intermédiaire de Δa entre $-|\Delta a|_{\max}$ et $+|\Delta a|_{\max}$ s'obtient par combinaison linéaire $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N$ de la solution de type I: $\mathcal{A}_0 \equiv A_0 A_0$ (deux accélérations au premier tour) conduisant à $+|\Delta a|_{\max}$ et de la solution de type I: $\mathcal{D}_N \equiv D_N D_N$ (deux décélérations au dernier tour), conduisant à $-|\Delta a|_{\max}$ (fig. 7).

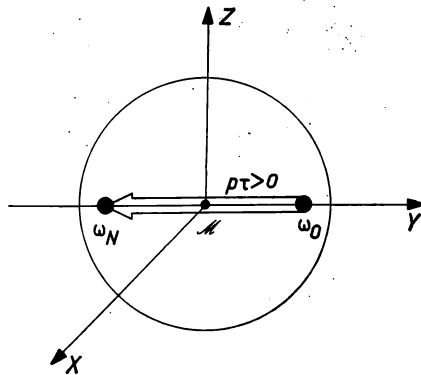
La solution optimale correspondante, d'un type nouveau (type IV), correspond à une valeur de $p'_{\mathcal{T}}$ non nulle. Son existence se déduit aisément de la considération de la courbe d'efficacité (fig. 8).

En effet, pour $p'_{\mathcal{D}} \neq 0$, cette courbe peut être considérée comme décrite par le point \mathcal{D} , parcourant avec la période 2π une ellipse, contenue dans un plan (π) fixe passant par \overline{MY} , se déplaçant lentement et parallèlement à \overline{MY} , le déplacement par tour (ou "pas") étant égal à :

$$|\Delta Y| = |-3p'_{\mathcal{D}}(2\pi)| = \text{ordre } \frac{1}{\Delta L} \ll 1$$



a. Type IV



b. Type IV bis

FIG. 8. Courbe d'efficacité dans le cas de rendez-vous lointains.

Une solution de type IV est quadri-impulsionnelle et peut bien être regardée comme composition de deux solutions de type I: l'une, \mathcal{A}_0 , au premier tour (2 impulsions accélératrices A_0A_0 aux points de longitudes L'_0 et L''_0 , avec $X''_0 = -X'_0$, $Y''_0 = Y'_0$, $Z''_0 = -Z'_0$); l'autre, \mathcal{D}_N , au dernier tour (deux impulsions décélératrices D_ND_N aux points diamétralement opposés, de

longitudes $L'_N = L'_0 + \pi$ et $L''_N = L''_0 + \pi$, avec $X''_N = -X'_N = X'_0$, $Y''_N = Y'_N = -Y'_0$, $Z''_N = -Z'_N = Z'_0$.

Notons également que le point $\mathcal{A}_0(|\Delta a|_{\max}, |\Delta \mathcal{T}|_{\max})$ pouvant être obtenu avec la vitesse caractéristique ΔC , le point $\mathcal{A}_N(|\Delta a|_{\max}, -|\Delta \mathcal{T}|_{\max})$ symétrique du premier par rapport à l'axe $\overline{O\Delta a}$ et correspondant à une solution de type I à deux impulsions accélératrices $A_N A_N$ appliquées au dernier tour, peut également être obtenu avec cette même vitesse caractéristique, ainsi que tout point \mathcal{A} du segment $\mathcal{A}_0 \mathcal{A}_N$ (par exemple, par combinaison linéaire des solutions \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_N ; mais nous verrons que cela n'est pas le seul procédé possible).

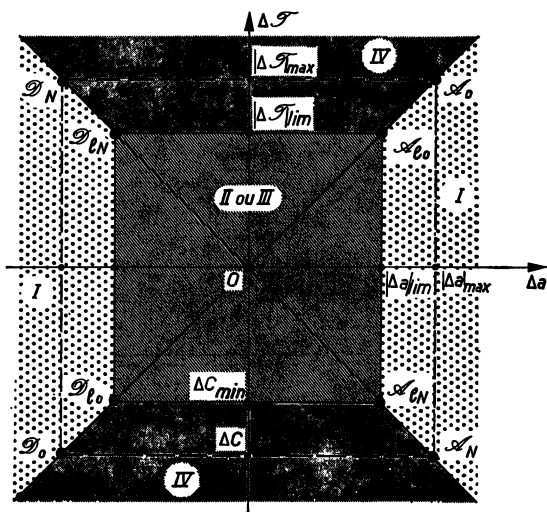


FIG. 9. Lignes iso ΔC .

En conclusion, le domaine accessible dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{T}$ avec la vitesse caractéristique ΔC , et pour $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$ données, est l'intérieur du carré $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N \mathcal{D}_0 \mathcal{A}_N$ représenté sur la figure 7. On en déduit que:

la section $\Delta a = \text{constante}, \Delta \mathcal{T} = \text{constante}$, du domaine accessible, dans l'espace à 3 dimensions $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$, est la même que celle correspondant au transfert simple à condition de remplacer $|\Delta a|$ par: $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{T}|)$.

Suivant que: $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{T}|) = \begin{cases} |\Delta a| \\ |\Delta \mathcal{T}| \end{cases}$, la partie du domaine appe-

lée (I) dans le cas du transfert simple doit être baptisée (I)/(IV) (fig. 4) (ou bien (I bis)/(IV bis), lorsque $\Delta j = 0$; dans ce dernier cas $|\Delta a|_{\max} = 2\Delta C$)

Traçons maintenant dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{C}$ et pour $\Delta e_{\parallel}, \Delta e_{\perp}, \Delta j$ fixés, les iso ΔC (fig. 9).

Si $\Delta C < \Delta C_{\min}$, aucun rendez-vous ne peut être réalisé.

Si $\Delta C = \Delta C_{\min}$ (fig. 2 et 3), tous les points à l'intérieur du carré $\mathcal{A}_{10}, \mathcal{D}_{IN}, \mathcal{D}_{10}, \mathcal{A}_{IN}$ peuvent être atteints en utilisant des solutions de type II/III selon que $3\Delta e_{\perp}^2 \leq \Delta j^2$.

Si $\Delta C > \Delta C_{\min}$, l'iso ΔC est formée des quatre côtés du carré $\mathcal{A}_0 \mathcal{D}_N \mathcal{D}_0 \mathcal{A}_N$.

La figure 10 indique les valeurs de $p'_{\mathcal{C}}$ correspondant à chacune des régions du plan $\Delta a, \Delta \mathcal{C}$.

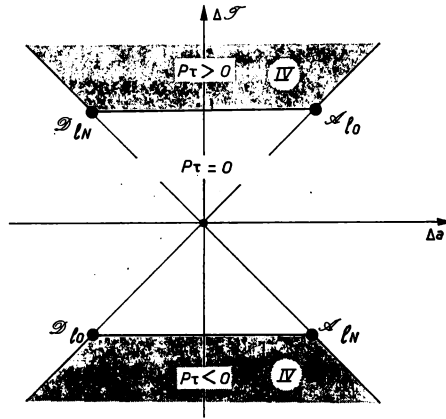


FIG. 10. Valeur de $p'_{\mathcal{C}}$.

3. DÉGÉNÉRESCENCES—SOLUTIONS À NOMBRE MINIMAL D'IMPULSIONS

Dans la plupart des cas, la solution linéarisée optimale n'est pas unique mais dégénère en un grand nombre de solutions correspondant à une même vitesse caractéristique ΔC .

La dégénérescence peut intéresser soit uniquement la grandeur de la poussée (dégénérescence de grandeur), soit le point d'application et la grandeur (dégénérescence spatiale), soit encore le numéro du tour où la poussée est appliquée et éventuellement sa grandeur (dégénérescence temporelle).

Ces cas peuvent d'ailleurs se présenter simultanément, ce qui conduit à une dégénérescence spatio-temporelle complexe.

Rappelons que, dans le cas des transferts simples, il y a dégénérescence temporelle complète, la poussée optimale pouvant être appliquée à n'importe quel tour, avec fractionnement éventuel. Il y a, de plus, dégénéres-

cence spatiale dans les deux cas singuliers de type I bis et III et dégénérescence de grandeur pour les solutions de type II correspondant à $\Delta a = \Delta e_{\parallel} = 0$ [types (9), (10), (11) de la figure 6 de la référence 3].

Pour les rendez-vous, il existe également des cas dégénérés.

Il y a deux espèces de dégénérescences temporelles :

La première espèce, qui sera laissée de côté, est la suivante : une poussée au $k^{\text{ième}}$ tour (différent du premier et du dernier) peut être décomposée, en partie ou en totalité, en plusieurs poussées appliquées, au même endroit et dans la même direction, antérieurement et postérieurement à ce tour. Par exemple, une impulsion ΔV au $k^{\text{ième}}$ tour peut être décomposée en trois impulsions $\Delta V/3$ appliquées respectivement aux $(k-1)^{\text{ième}}$, $k^{\text{ième}}$ et $(k+1)^{\text{ième}}$ tour.

La seconde espèce intéresse les cas où il y a plusieurs applications de poussée par tour. Il est possible d'affecter à chacune de ces applications un numéro de tour, les numéros de tours ainsi obtenus étant liés par une relation linéaire, ce qui laisse une certaine possibilité de choix.

Il existe également des dégénérescences spatiales et des dégénérescences de grandeur.

Donnons quelques exemples de ces dégénérescences en portant notre attention sur les solutions à nombre minimal d'impulsions (figs. 11, 12, 13) très importantes dans la pratique, ce qui permettra d'ailleurs d'éviter l'étude de dégénérescences spatio-temporelles trop complexes.

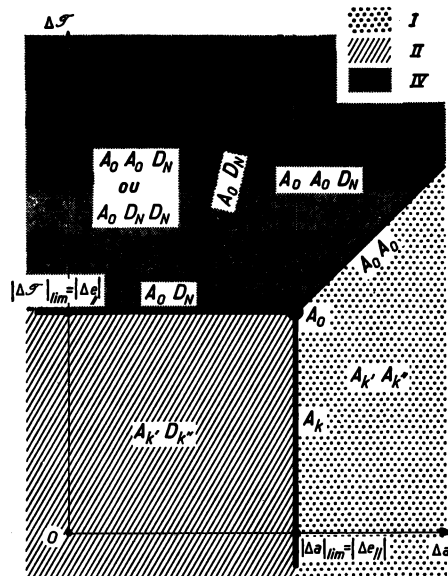


FIG. 11. Nombre minimal d'impulsions ($|\Delta j| > \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|$).

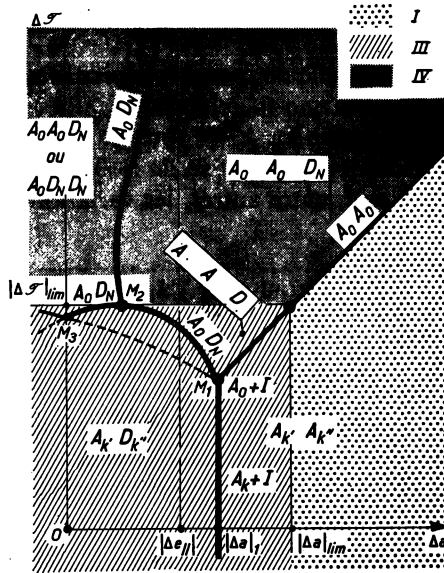


FIG. 12. Nombre minimal d'impulsions ($|\Delta j| < \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|$).

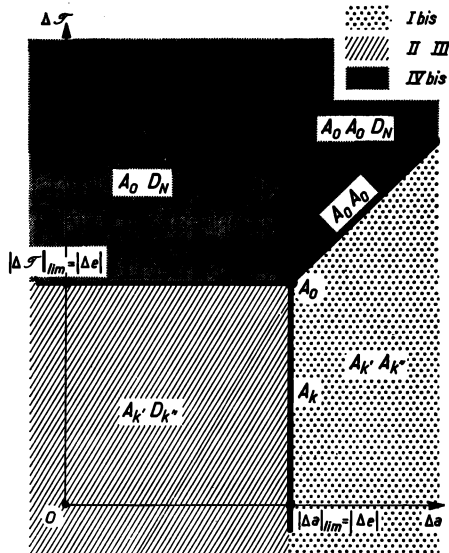


FIG. 13. Nombre minimal d'impulsions ($|\Delta j| \rightarrow 0$).

3.1. Type I

La dégénérescence temporelle de première espèce étant écartée, les solutions sont bi-impulsionnelles :

L'impulsion $I'\Delta C$, appliquée au k' ^{ième} tour et l'impulsion $I''\Delta C$ appliquée au k'' ^{ième} tour (solution $A_{k'}, A_{k''}$, si $\Delta a > 0$ ou $D_{k'}, D_{k''}$ si $\Delta a < 0$), avec $I' + I'' = 1$, produisent, entre autres, les variations :

$$\Delta a = 2Y\Delta C$$

$$\Delta \mathcal{C} = 2Y\Delta C \left[\left(1 - 2\frac{k'}{N}\right) I' + \left(1 - 2\frac{k''}{N}\right) I'' \right]$$

d'où :

$$k'I' + k''I'' = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{C}}{\Delta a}\right)$$

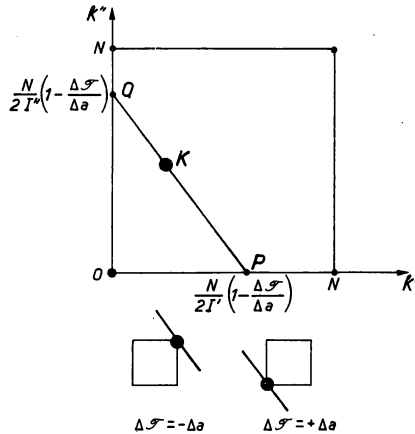


FIG. 14. Dégénérescence temporelle des solutions bi-impulsionnelles de type I.

Pour un rendez-vous donné (I' , I'' , Δa , $\Delta \mathcal{C}$, N fixés), le point K de coordonnées k' et k'' peut donc être choisi librement sur le segment PQ (fig. 14). Il subsiste un degré de liberté. Il y a dégénérescence temporelle (de seconde espèce). Tout point M de la région I du plan Δa , $\Delta \mathcal{C}$ peut donc être obtenu, en général, par une infinité de solutions bi-impulsionnelles. Les numéros de tours relatifs à ces deux impulsions bien déterminées sont liés par une relation linéaire.

3.2. Type II

On obtient des résultats analogues avec cette fois une solution de type $A_{k'}D_{k''}$ comportant une accélération et une décélération. La relation (10) est remplacée par :

$$k'I' - k''I'' = \frac{N}{2} (I' - I'') \left(1 - \frac{\Delta\mathcal{C}}{\Delta a} \right).$$

soit encore (fig. 15):

$$k'(\Delta a + \Delta e_{\parallel}) + k''(\Delta a - \Delta e_{\parallel}) = N(\Delta a - \Delta\mathcal{C}) \tag{11}$$

3.3. Type III

Il y a dans ce cas une dégénérescence spatio-temporelle complexe.

Cherchons dans quelles conditions la solution peut ne comporter que deux impulsions.

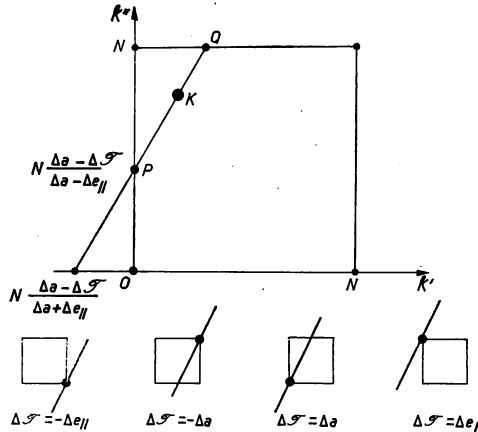


FIG. 15. Dégénérescence temporelle des solutions bi-impulsionnelles de type II.

Les variations Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , Δj et la consommation $\Delta\mathcal{C}$ étant données, le point G représentatif du transfert associé au rendez-vous considéré, est situé, dans les axes Ox'_1, y'_1, z_1 de la Fenêtre de Viviani (V) (fig. 16), sur une parallèle (Δ) à l'axe Oz_1 (fig. 17).

Soit $V'V''$ l'une des deux cordes de (V) passant par G . Il lui correspond la solution bi-impulsionnelle $I'\Delta\mathcal{C}, I''\Delta\mathcal{C}$ ($I' + I'' = 1$) telle que :

$$\frac{\Delta a}{2} = z_{1G} = I'z'_{1G} + I''z''_{1G} \tag{12}$$

$$\frac{\Delta\mathcal{C}}{2} = \left(1 - 2\frac{k'}{N} \right) I'z'_{1G} + \left(1 - 2\frac{k''}{N} \right) I''z''_{1G} \tag{13}$$

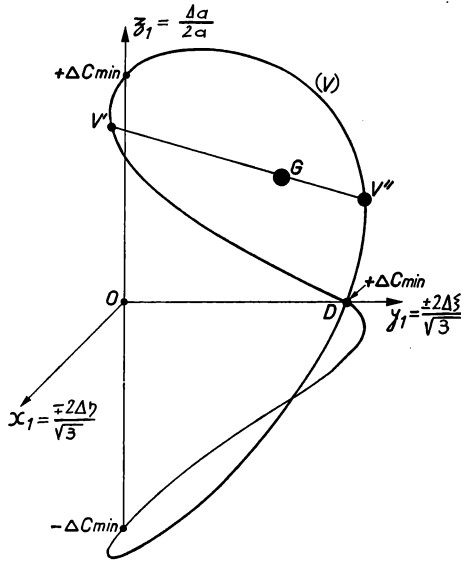


FIG. 16. Type III. Solutions bi-impulsionnelles.

Dans ces équations I' , I'' , β_1' et β_1'' sont fixés par le transfert à réaliser. En effet, fixons le point G par la donnée de ses coordonnées cylindriques

α , $r < \frac{\Delta C}{2}$, $\beta_1 = \frac{\Delta a}{2}$ dans des axes de centre σ (fig. 18). Alors:

$$\cos \beta = 2 \frac{r}{\Delta c} \cos \varphi \quad (14)$$

$$\begin{cases} \alpha' = 2L' = \alpha + \varphi - \beta \\ \alpha'' = 2L'' = \alpha + \varphi + \beta \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \beta_1' = \Delta C \cos L' \\ \beta_1'' = \Delta C \cos L'' \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} I' = \frac{1}{2} + \frac{r}{\Delta C} \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \\ I'' = \frac{1}{2} - \frac{r}{\Delta C} \frac{\sin \varphi}{\sin \beta} \end{cases} \quad (17)$$

La droite (Δ) étant fixée par la donnée de α et r , les paramètres I' , I'' , β_1' , β_1'' dépendent du seul paramètre angulaire $\varphi = (\vec{\sigma G}, \vec{\sigma X})$ théoriquement calculable en fonction de Δa par (12) (2 solutions réelles correspondant aux deux cordes $V'V''$ passant par G).

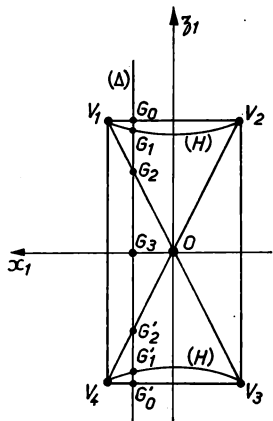


FIG. 17. Section $y_1 = \text{constante}$.

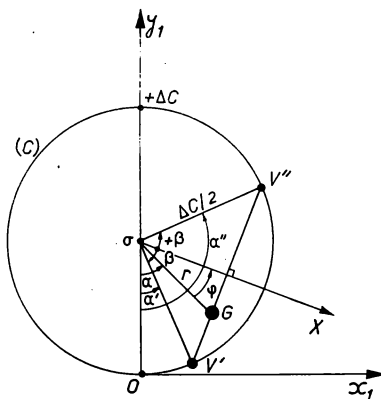


FIG. 18. Notations.

Les résultats sont alors analogues à ceux obtenus dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de types I et II, les relations (10) et (11) étant cette fois remplacées, pour chacune des deux solutions bi-impulsionnelles relatives au point G, par :

$$k' I'_{z_1'} + k'' I''_{z_1''} = \frac{N}{2} (I'_{z_1'} + I''_{z_1''}) \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{C}}{\Delta a} \right) \quad (18)$$

En ce qui concerne la valeur maximale $\Delta \mathcal{C}_{\text{max}, 2}$ de $\Delta \mathcal{C}$ qu'il est possible d'obtenir, à Δa fixé, à l'aide de deux impulsions seulement, deux cas sont à envisager selon que les points V' et V'' sont tous deux situés dans le même demi-espace $z_1 = \frac{\Delta a}{2} > 0$ [solutions AA, à deux impulsions accélératrices (fig. 19)] ou $z_1 < 0$ (solutions DD, à deux impulsions décélératrices), ou bien dans deux demi-espaces différents (solutions AD, à une impulsion accélératrice et une impulsion décélératrice, fig. 20).

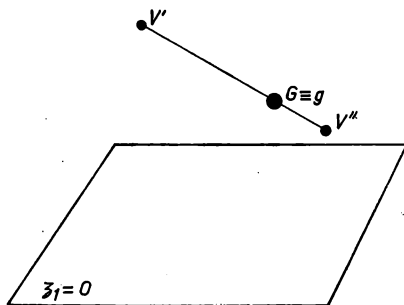


FIG. 19. Deux impulsions accélératrices.

La frontière séparant les points G correspondant à chacun de ces cas est obtenue lorsque V' (ou V'') est confondu avec le point double D de (V) .

Cette frontière est donc la portion de surface du cône circulaire (I) [$x_1^2 + (y_1 - \Delta C_{\min})^2 - z_1^2 = 0$] de sommet D s'appuyant sur la Fenêtre de Viviani (V) , intérieure au volume (\mathcal{O}) limité par le plus petit contour convexe [portions de cylindres (C_I) et (C_{II})] habillant (V) .

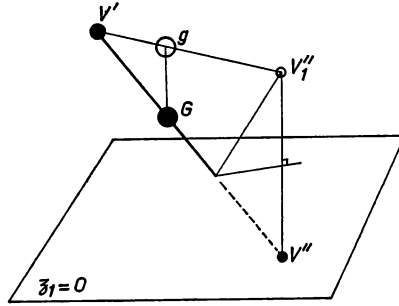


FIG. 20. Une impulsion accélératrice et une impulsion décélératrice.

Les solutions relatives aux deux cordes $V'V''$ de (V) passant par G appartiennent au même cas.

Lorsque le point G se déplace sur la droite (Δ) de G_0 à G_3 (fig. 17), les deux cordes $V'V''$ passant par G évoluent de la façon suivante :

Lorsque G est en G_0 , elles sont confondues avec la dégénéralice V_1V_2 du cylindre (C_I) .

Lorsque G est entre G_0 et G_1 [où G_1 est l'un des deux points d'intersection G_1 et G'_1 , du cône (I) et de la droite (Δ)], elles sont situées toutes deux dans le demi-espace $z_1 > 0$ (cas 1).

Lorsque G est en G_1 , elles se confondent avec la génératrice DG_1 du cône (I) .

Lorsque G est entre G_1 et G_3 , elles traversent toutes deux le plan $z_1 = 0$. (Cas 2).

Lorsque G est en G_3 , elles sont symétriques par rapport au plan $z_1 = 0$.

Étudions successivement les cas 1 et 2.

1er cas : deux impulsions accélératrices AA (ou deux impulsions décélératrices DD)

Le point G est situé dans le volume représenté sur la figure 21, ou, plus exactement, sur le segment G_0G_1 (ou $G'_0G'_1$) de la figure 17. D'où la limitation :

$$|\Delta a_1| = \sqrt{\Delta e_{\parallel}^2 + \left(|\Delta e_{\perp}| - \frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}} \right)^2} \leq |\Delta a| \leq |\Delta a|_{\text{lim}} \quad (19)$$

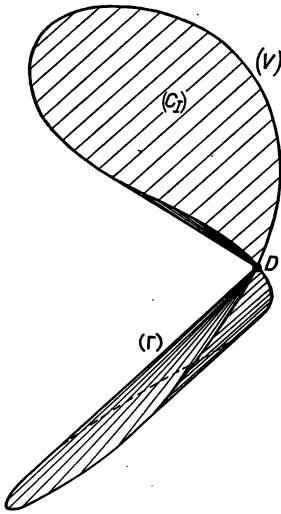


FIG. 21. Points pouvant être atteints à l'aide de deux impulsions accélératrices (ou deux impulsions décélétratives).

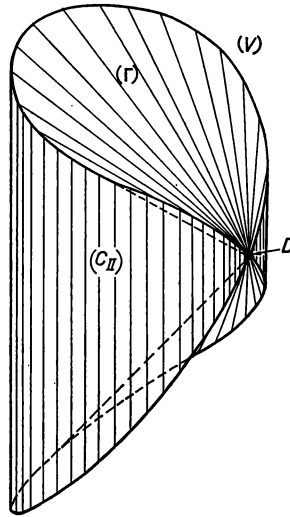


FIG. 22. Points pouvant être atteints à l'aide d'une impulsion accélératrice et d'une impulsion décélétratrice.

Supposons $\Delta a > 0$. Comme dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de type I, la valeur maximale de $\Delta \mathcal{T}$ s'obtient lorsque les deux impulsions accélératrices sont appliquées au premier tour (solution A_0A_0). L'équation (13) montre qu'alors $\Delta \mathcal{T}_{\max, 2} = \Delta a$ pour chacune des deux solutions bi-impulsionnelles relatives au point G (fig. 23).

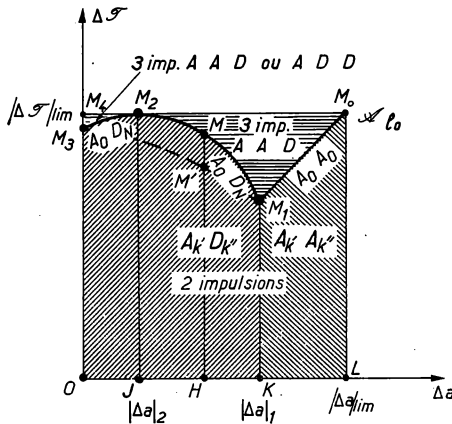


FIG. 23. Type III. Solutions bi-impulsionnelles.

2ème cas : une impulsion accélératrice A et une impulsion décélératrice D

Le point G est situé dans le volume représenté sur la figure 22, ou, plus exactement sur le segment $G'_1 G'_1$ de la figure 17, d'où la limitation :

$$|\Delta a| \leq |\Delta a_1| = \sqrt{\Delta e_{\parallel}^2 + \left(|\Delta e_{\perp}| - \frac{|\Delta j|}{\sqrt{3}} \right)^2} \quad (20)$$

Comme dans l'étude des solutions bi-impulsionnelles de type II, la valeur maximale de $\Delta \mathcal{C}$ s'obtient lorsque l'impulsion accélératrice $I' \Delta C$ est appliquée au premier tour et l'impulsion décélératrice $I'' \Delta C$ au dernier tour (solution $A_0 D_N$).

Pour chacune des solutions bi-impulsionnelles relatives au point G , les équations (12) et (13) dans lesquelles $k' = 0$ et $k'' = N$ et $\Delta \mathcal{C} = \Delta \mathcal{C}_{\max, 2}$, fournissent une représentation paramétrique en fonction de l'angle φ de la frontière $\widehat{M_1 M_3}$ (fig. 23) séparant les solutions de type III à 2 impulsions (type $A_0 D_N$), ou plus, des solutions de type III à 3 impulsions AAD ou ADD , ou plus.

Lorsque, sur la figure 17, G est en G_1 , les deux cordes $V'V''$ passant par G étant confondues avec la génératrice DG_1 du cône (I), les deux solutions bi-impulsionnelles relatives à G sont identiques (point M_1 de la figure 23).

Lorsque G est en G_2 , l'une des deux cordes $V'V''$ passant par G est la diagonale $V_1 V_3$. Pour la solution bi-impulsionnelle correspondante $\Delta \mathcal{C}_{\max, 2} = \Delta \mathcal{C}_{\text{lim}}$ (en effet le point g défini sur la figure 20 est alors en G_0) et

$$|\Delta a| = |\Delta a_2| = 2 |\Delta e_{\parallel}| \left(\frac{|\Delta j|}{3 |\Delta j| + \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|} \right)^{\frac{1}{2}} < |\Delta e_{\parallel}| \quad (21)$$

À l'autre corde correspond une solution bi-impulsionnelle plus défavorable ($\Delta \mathcal{C}_{\max, 2} < \Delta \mathcal{C}_{\text{lim}}$).

Lorsque G est en G_3 , les deux cordes passant par G sont symétriques par rapport au plan $\xi_1 = 0$. Les solutions bi-impulsionnelles correspondantes donnent le même point M_3 .

En conclusion, à chaque point de la région $OKM_1 M' M_3 O$, correspond une double infinité de solutions bi-impulsionnelles de type $A_{k'} D_{k''}$. Dans la région $M_3 M' M_1 M M_2 M_3$, il ne lui correspond qu'une simple infinité de telles solutions.

Cas particuliers :

(1) Si G est sur le cylindre (C_{II}) ($r = \frac{\Delta C}{2}$) les deux frontières $M_0 M_1 M M_2 M_3$ et $M_0 M_1 M' M_3$ coïncident avec le segment $M_0 M_4$ (cas limite avec les solutions de type II).

(2) Si G est en σ , centre du cercle (C), ($r = 0$) ces deux frontières se composent du segment $M_0 M_1$ et de l'arc de cercle $\widehat{M_1 M_2}$ (fig. 24).

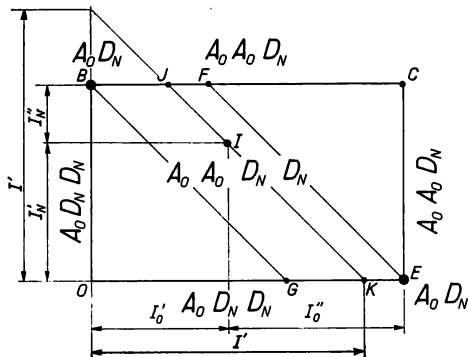


FIG. 25. Type IV. Dégénérescence de grandeur.

type IV à une solution *tri-impulsionnelle* de type $A_0D_N D_N$ (ou bien $A_0A_0D_N$).

Si le segment JK est dans le parallélogramme $BGEF$, l'utilisation du point J conduit à une solution tri-impulsionnelle de type $A_0A_0D_N$ et l'utilisation du point K à une solution tri-impulsionnelle de type $A_0D_N D_N$.

Enfin, si le segment JK est confondu avec BG (ou FE), l'utilisation du point B (ou E) conduit à une solution *bi-impulsionnelle* de type A_0D_N .

Cherchons, dans le plan $\Delta a, \Delta \mathcal{C}$ la courbe frontière correspondant à ces solutions bi-impulsionnelles (figs. 11 et 12).

Comme au point E , $I'_0 = I'_N = 0$ les équations (22-24) donnent :

$$\left| \frac{\Delta a}{\Delta \mathcal{C}} \right| = |I' - I''| = \left| \frac{\Delta e_{\parallel}}{\Delta \mathcal{C}} \frac{\sin L}{\sin \delta} \right| \quad (27)$$

soit, compte tenu des résultats de la référence 3.

$$\left| \frac{\Delta a}{\Delta e_{\parallel}} \right| = \left| \frac{\sin L}{\sin \delta} \right| = \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \quad (28)$$

où $x = \frac{\sqrt{\Delta \mathcal{C}^2 - \Delta e_{\parallel}^2}}{|\Delta e_{\parallel} \operatorname{tg} \delta|}$ est la racine de plus *petit* module (c'est-à-dire ici de module ≤ 1) de l'équation réciproque du second degré :

$$x^2 + \frac{\Delta \mathcal{C}^2 + \Delta j^2 + \Delta e_{\perp}^2 - \Delta e_{\parallel}^2}{|\Delta e_{\perp}| \sqrt{\Delta \mathcal{C}^2 - \Delta e_{\parallel}^2}} x + 1 = 0 \quad (29)$$

qui ne dépend que du paramètre figurant en coefficient de x .

$$|\Delta a| \text{ est minimum } \left(|\Delta a|_{\min} = \frac{\sqrt{2} |\Delta j| \sqrt{\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2 - 2\Delta j^2}}{|\Delta e_{\perp}|} \right)$$

pour $\Delta \mathcal{C} = \sqrt{\Delta e_{\perp}^2 + \Delta j^2} \left(\geq \Delta \mathcal{C}_{\lim} \text{ selon que } |\Delta j| \geq \frac{|\Delta e_{\perp}|}{\sqrt{3}} \right)$

Lorsque $|\mathcal{A}\mathcal{C}| \rightarrow \infty$, $|\Delta a| \rightarrow |\Delta e_{\parallel}|$. Enfin, pour $|\mathcal{A}\mathcal{C}| = |\mathcal{A}\mathcal{C}|_{II}$, on retrouve bien $|\Delta a| = \begin{cases} |\Delta e_{\parallel}| \\ |\Delta a_2| \end{cases}$ selon que $|\Delta j| \gtrless \sqrt{3} |\Delta e_{\perp}|$

3.5. Type I bis

Il y a ici encore une dégénérescence spatiale et temporelle assez complexe. Aussi nous intéresserons-nous seulement aux solutions bi-impulsionnelles.

Il existe une infinité de solutions bi-impulsionnelles assurant le transfert Δe_{\parallel} , Δe_{\perp} , $\Delta j = 0$, $|\Delta a| = 2\Delta C$. Les impulsions $\Delta V'$ et $\Delta V''$ tangentes sont telles que le centre de gravité des masses $\Delta V'$ et $\Delta V''$ placées aux points d'application \mathcal{M}' et \mathcal{M}'' , soit en G tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{\Delta e}}{\Delta a} \quad (30)$$

La donnée d'une corde quelconque $\mathcal{M}'\mathcal{M}''$ passant par G fixe le rapport $\Delta V''/\Delta V'$ des impulsions et donc la solution.

Il y a dégénérescence spatiale des solutions bi-impulsionnelles.

De plus, une solution bi-impulsionnelle particulière étant choisie, il existe une dégénérescence temporelle (de seconde espèce) semblable à celle rencontrée dans l'étude du type I (équation 10).

3.6. Type IV bis

Il n'y a plus ici de dégénérescence temporelle puisque, par exemple, si $\mathcal{A}\mathcal{C} > 0$, toutes les accélérations sont faites au premier tour (\mathcal{A}_0) et les décélérations au dernier tour (\mathcal{D}_N). Il subsiste cependant une dégénérescence spatiale: les solutions \mathcal{A}_0 et \mathcal{D}_N sont du type I bis dégénéré et le point M du segment $\mathcal{A}_0\mathcal{D}_N$ s'obtient par combinaison linéaire de ces deux solutions (fig. 9).

Les points \mathcal{A}_0 et \mathcal{D}_N pouvant, tous deux, et d'une infinité de façons, être obtenus en particulier par des solutions bi-impulsionnelles, le point M peut être obtenu, en particulier, et d'une infinité de façons, par des solutions quadri-impulsionnelles ou mieux, d'une simple ou double infinité de façons par des solutions tri-impulsionnelles, à cause de la dégénérescence de grandeur déjà signalée pour les solutions de type IV (fig. 25).

Le point M peut même, dans certains cas, être obtenu par des solutions bi-impulsionnelles. En effet, l'impulsion $\overrightarrow{\Delta V}_0$ tangente, accélératrice, appliquée au premier tour et l'impulsion $\overrightarrow{\Delta V}_N$ tangente, décélétratrice, appliquée au dernier tour (fig. 27) produisent les variations:

$$\Delta a = 2(\Delta V_0 - \Delta V_N) \quad (31)$$

$$\Delta \mathcal{C} = 2(\Delta V_0 + \Delta V_N) = 2\Delta C \quad (32)$$

$$\overrightarrow{\Delta e} = 2\Delta V_0 \overrightarrow{OM}_0 - 2\Delta V_N \overrightarrow{OM}_N = 2\Delta C \overrightarrow{OG} \quad (33)$$

où G est le centre de gravité des masses positives ΔV_0 placée en M_0 , et ΔV_N , placée en M'_N symétrique de M_N par rapport à O .

Δa et $\Delta \mathcal{T}$ étant fixés, les équations (31) et (32) fournissent les grandeurs ΔV_0 et ΔV_N des impulsions.

$\vec{\Delta e}$ (donc G) étant fixé, il s'agit de construire la (ou les) cordes $M_0M'_N$ passant par G telles que :

$$\frac{GM'_N}{GM_0} = \frac{\Delta V_0}{\Delta V_N} = \rho = \text{rapport fixé} \tag{34}$$

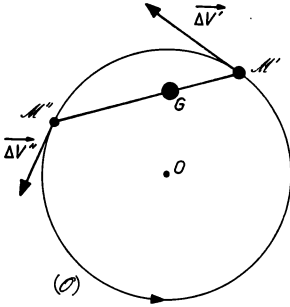


FIG. 26. Type I bis. Solutions bi-impulsionnelles.

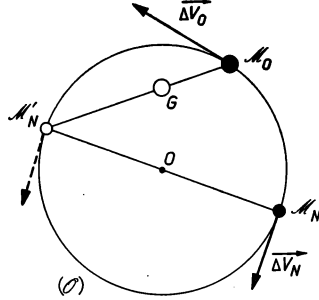


FIG. 27. Type IV bis. Solutions bi-impulsionnelles.

Deux cordes $M_{01}M'_{N1}$ et $M_{02}M'_{N2}$ symétriques par rapport à OG , répondent à la question. M'_{N1} et M'_{N2} sont les points d'intersection du cercle (O) et du cercle (C) qui se déduit de (O) par l'homothétie de centre G et de rapport ρ (fig. 28). Ces points ne sont réels que si

$$|1 - \rho| < O\omega = \frac{|\vec{\Delta e}|}{2\Delta C} (1 + \rho) < 1 + \rho \tag{35}$$

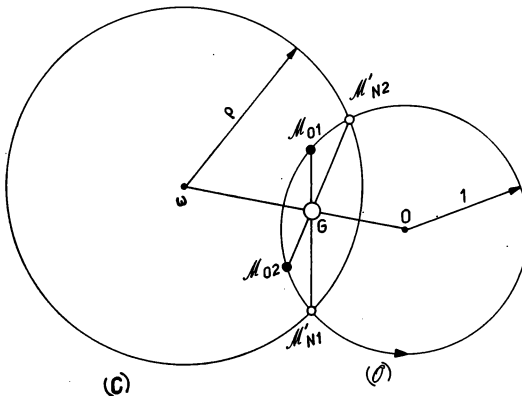


FIG. 28. Type IV bis. Détermination des points d'application des deux impulsions.

La seconde inégalité

$$|\vec{\Delta e}| < 2\Delta C$$

est automatiquement satisfaite dans la zone IV bis car :

$$|\vec{\Delta e}| = |\Delta \mathcal{C}|_{\text{lim}} < |\Delta \mathcal{C}| = 2\Delta C$$

La première inégalité s'écrit encore :

$$|\Delta a| < |\vec{\Delta e}| = |\Delta a|_{\text{lim}} \quad (36)$$

Il n'y a donc de solutions bi-impulsionnelles (une impulsion au premier tour et une impulsion au dernier tour) que dans la bande $|\Delta a| < |\Delta a|_{\text{lim}}$ (fig. 13).

4. CONCLUSIONS

L'étude des rendez-vous impulsionnels, économiques, de longue durée entre orbites quasi-circulaires, proches, non coplanaires, se déduit simplement de l'étude des transferts simples correspondants. Le domaine accessible correspondant à la vitesse caractéristique ΔC s'obtient en remplaçant $|\Delta a|$ par : $\max(|\Delta a|, |\Delta \mathcal{C}|)$ dans l'étude du transfert simple, avec $\Delta \mathcal{C} = \frac{4}{3} \frac{\Delta \tau}{\Delta L} + \Delta a$, où $|\Delta \mathcal{C}|$ est le rattrapage angulaire.

La solution optimale est d'un des quatre types I, I bis, II ou III déjà rencontrés (réf. 3) ou de deux types nouveaux : types IV et IV bis.

Le nombre minimal d'impulsions est égal à 3 ou 2 suivant le rendez-vous considéré.

RÉFÉRENCES

1. F. W. GOBETZ, M. WASHINGTON et T. N. EDELBAUM. Minimum-Impulse Time-Free Transfer between Elliptic Orbits. United Aircraft Research Laboratories Report No. 910330-4, April 1966.
2. T. N. EDELBAUM. A general solution for minimum impulse transfers in the near vicinity of a circular orbit. Analytical Mechanics Associates. Report Contract NAS. 12-26, August 1966.
3. J.-P. MAREC. Transferts infinitésimaux, impulsionnels, économiques entre orbites quasi-circulaires, non coplanaires. Communication présentée au XVII^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
Aussi : Note au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, séance du 16 mai 1966.
Aussi : Publication ONERA No. 115 (1966).
4. J.-P. MAREC. Transferts optimaux entre orbites elliptiques proches. Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences de Paris. (A paraître.)

MINIMUM-IMPULSE TRANSFER BETWEEN A CIRCULAR ORBIT AND A NEARBY NON-COPLANAR ELLIPTIC ORBIT†

J. V. BREAKWELL

Stanford University

ABSTRACT

The Pontryagin maximum principle is applied with orbit parameters as state variables, characteristic velocity as independent variable, and orbital position and thrust direction as control variables, to analyze minimum-impulse transfer with no limit on time. It is assumed (i) that one orbit is circular, (ii) that eccentricity as well as changes of energy and orbit plane are rather small. Charts are presented from which the details of the optimal transfer can be obtained, whether 2-impulse or 3-impulse. The analysis differs substantially inside and outside a parameter region, which is region III of Marec⁽¹⁾ and the singular region of Edelbaum.⁽²⁾ A special "transition" analysis and chart are necessary near the boundary of this region.

1. INTRODUCTION

Minimum-impulse transfer in an inverse-square field, even with time unrestricted, is a complicated problem. It has been known for some time now that in certain circumstances the optimal transfer may be 2-impulse, 3-impulse, or bi-parabolic.⁽³⁻⁵⁾ The general criterion, however, which distinguishes the circumstances leading to these three types is not yet known, although some partial results in this direction have been obtained by Marchal.⁽⁶⁾ It is not even yet established that these three types exhaust the possibilities. Numerical programs for settling this question by iterative computation of the optimal transfer between any two given orbits are not yet available:

A 3-impulse transfer, for example, is described by seven parameters, so that a search program is out of the question without extensive preclassification; on the other hand, a direct dynamic programming computation in the state-space of orbit parameters is stymied by the excessive dimension

† This work was partly supported by the U.S. Air Force under Research Contract AF 33 (615) 1411.

of this space, namely 5 if time is unrestricted. If one orbit is circular, the state-space becomes effectively four-dimensional, which is still excessive.

A more cautious approach was suggested by Marchal (end of section 2 in ref. 6), namely to examine the characteristic velocity (or "effort") required, as well as the optimal procedure, for low eccentricities and small changes of plane and of energy, the results to be expanded in powers of these small quantities. The bi-parabolic case doesn't arise here, of course.

If only the first power of small parameter changes is included in the expression for effort, one arrives at a theory of infinitesimal transfer between nearly circular orbits. The variables adjoint to the orbit parameters are now constant during the transfer, and the appropriate Hamiltonian, a function of position in orbit, must have two or more equal maxima except in the case of transfer between intersecting orbits, where one impulse may suffice. The general possibilities here have been examined by Marec⁽¹⁾ and by Edelbaum⁽²⁾. They arrive at the existence of three distinct types of transfer: A nodal type (Marec's II) in which the impulses are applied at the nodes of the initial and final orbits, a non-degenerate type (Marec's I) where the impulses are applied at well-determined positions not on the line of nodes, and a singular type (Marec's III) in which the Hamiltonian is flat and impulses may be applied anywhere, in certain specific directions, provided that they combine to the desired transfer. The three regions of parameter space are shown in Fig. 1, borrowed from Marec, for a typical

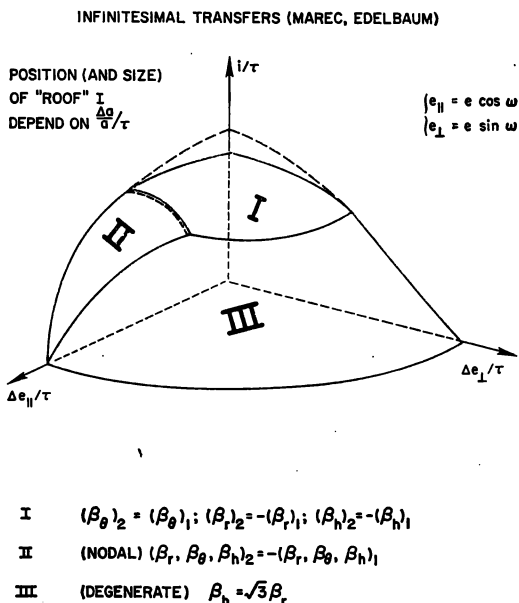


FIG. 1. Infinitesimal transfers.

positive $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)/\tau$, τ being normalized effort, an appropriate first-degree function of the parameter changes $\frac{\Delta a}{a}$, i (inclination), Δe_{\parallel} and Δe_{\perp} (components of "eccentricity vector" \parallel and \perp to line of nodes of initial and final orbit) as follows:

$$\begin{aligned} \text{I } \tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{i^2 + (\Delta e)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2} + \sqrt{\left[i^2 - (\Delta e)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right]^2 + 4i^2(\Delta e_{\perp})^2} \\ \text{II } \tau &= \sqrt{i^2 + (\Delta e_{\perp})^2} + \frac{1}{4} (\Delta e_{\parallel})^2 \\ \text{III } \tau &= \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta e_{\parallel})^2 + (\Delta e_{\perp} + i\sqrt{3})^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

The boundary between regions I and II is a one-impulse locus. Even in cases I and II an impulse at one position may be subdivided into two (or more) impulses separated by one (or more) impulses at the other position with no change in effort (to first order). This theory, then, is insufficient to distinguish transfers requiring three impulses from those requiring two impulses.

This ambiguity is removed if one seeks to expand the effort to higher than first power of the small parameter changes. Here one must account for changes in the Hamiltonian during the transfer, and the analysis, which is lengthy (sections 3, 4, 5) is especially difficult in extending region III (section 4). The boundary of the infinitesimal theory between region III and regions I and II has to be replaced by a "transition region" with a separate analysis (section 5).

The results of this paper are confined to the case where one orbit is circular, and we suppose this to be the initial orbit. The nature and details of the optimal transfer will be obtainable from a family of charts.

2. NECESSARY CONDITIONS FOR MINIMUM-IMPULSE TRANSFER

We define an orbit-parameter 5-vector

$$p = \begin{pmatrix} \ln h = L \\ e \\ \omega \\ i^* \\ \Omega \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

h being orbital angular momentum, ε eccentricity, ω argument of perigee, i^* orbital inclination, Ω longitude of ascending node, relative to a suitably chosen "equator" and origin of longitude thereon (longitude being measured with respect to a non-rotating earth). This equator and origin need not correspond to the actual equator and vernal equinox, since we are ignoring any earth oblateness, and it will be convenient to allow the equator to conform to the desired transfer in a certain way.

Following Contensou⁽⁷⁾ we adopt as independent variable the effort, or more precisely: $\tau = \Delta v/\mu$, μ being Gm_{\oplus} , where m_{\oplus} is earth mass. The equations defining the rate of our 5-vector are (cf. refs. 8, 9):

$$\frac{dp_i}{d\tau} = e^L \hat{\beta} \cdot \vec{f}_i(p, \theta), \quad (2.2)$$

where $\hat{\beta}$ is a unit-vector in the direction of thrust, θ the orbital angular position measured from ascending node relative to the chosen equator. The vector functions \vec{f}_i , functions of ε , ω , i^* and θ , are:

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_1 &= \left(0, \frac{1}{1 + \varepsilon c_{\theta - \omega}}, 0 \right), & \vec{f}_2 &= \left(s_{\theta - \omega}, \frac{2c_{\theta - \omega} + \varepsilon(1 + c_{\theta - \omega}^2)}{1 + \varepsilon c_{\theta - \omega}}, 0 \right) \\ \vec{f}_3 &= \left(-\frac{1}{\varepsilon} c_{\theta - \omega}, \frac{s_{\theta - \omega}(2 + \varepsilon c_{\theta - \omega})}{\varepsilon(1 + \varepsilon c_{\theta - \omega})}, -\frac{c_{i^*} s_{\theta}}{s_{i^*}(1 + \varepsilon c_{\theta - \omega})} \right) \\ \vec{f}_4 &= \left(0, 0, \frac{c_{\theta}}{1 + \varepsilon c_{\theta - \omega}} \right), & \vec{f}_5 &= \left(0, 0, \frac{s_{\theta}}{s_{i^*}(1 + \varepsilon c_{\theta - \omega})} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

[Here we have adopted the abbreviations: c_{θ} for $\cos \theta$, s_{θ} for $\sin \theta$.]

The adjoint variables λ_i obey

$$\frac{d\lambda_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.4)$$

where the Hamiltonian H is given by:

$$H = e^L \sum_{i=1}^5 \lambda_i \hat{\beta} \cdot \vec{f}_i(p, \theta). \quad (2.5)$$

In particular $\lambda_5 = \lambda_{\omega}$ is constant and $\frac{d\lambda_1}{d\tau} = \frac{d\lambda_L}{d\tau} = -H$. Necessary conditions for transferring from an initial orbit $p^{(0)}$ to a final orbit $p^{(f)}$ with minimum effort τ are given by the Pontryagin maximum principle: $\hat{\beta}$ and θ must be chosen to maximize H . This maximized H is then a constant of the motion which may be chosen as unity by suitable normalization of the adjoint variables. The maximization of H with respect to $\hat{\beta}$ is trivial: $\hat{\beta}$ must be \parallel to $\sum_{i=1}^5 \lambda_i \vec{f}_i(p, \theta)$, so that

$$H = e^L \left| \sum_{i=1}^5 \lambda_i \vec{f}_i(p, \theta) \right|. \quad (2.6)$$

The adjoint variables λ_ω and λ_{i^*} are, generally, not constant. It is always possible, however, to define our equator so that, for the particular transfer of interest,

$$\lambda_{i^*} = 0 \quad \text{and} \quad \lambda_\omega = \lambda_\Omega \cos i^*, \tag{2.7}$$

i^* being variable. This will simplify the remaining analysis. To verify that this is possible, we may follow Lawden⁽¹⁰⁾ in considering position \vec{r} and velocity \vec{v} as states, rather than the orbit parameters themselves. If $\vec{\lambda}_r$ and $\vec{\lambda}_v$ are the corresponding adjoint variables, it is known⁽¹¹⁾ that $\vec{v} \times \vec{\lambda}_v + \vec{r} \times \vec{\lambda}_r$ is a constant \vec{k} during transfer. Now it may⁽¹²⁾ also be shown that λ_ω , λ_{i^*} , and λ_Ω are the components of this constant \vec{k} in the directions of angular momentum vector, ascending node, and north pole, respectively. If, then, we choose our equator \perp to \vec{k} , with "north" pole along \vec{k} , we arrive at (2.7).

Since we are interested in near-circular orbits, we introduce, in place of ε and ω , the "eccentricity components":

$$\xi = \varepsilon c_\omega, \quad \eta = \varepsilon s_\omega. \tag{2.8}$$

The corresponding adjoint variables are:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\xi &= \lambda_\varepsilon c_\omega - \frac{\lambda_\omega}{\varepsilon} s_\omega \\ \lambda_\eta &= \lambda_\varepsilon s_\omega + \frac{\lambda_\omega}{\varepsilon} c_\omega, \end{aligned} \right\} \tag{2.9}$$

so that, because of (2.7),

$$\xi \lambda_\eta - \eta \lambda_\xi = \lambda_\Omega c_{i^*}. \tag{2.10}$$

The radial, circumferential and out-of-plane components $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ of the optimal $\hat{\beta}$ are now given by:

$$\begin{aligned} \frac{e^L}{H} &= \frac{\beta_x}{\lambda_\xi s_\theta - \lambda_\eta c_\theta} = \frac{\beta_z}{\frac{(\lambda_\Omega s_{i^*}^*) s_\theta}{1 + \xi c_\theta + \eta s_\theta}} \\ &= \frac{\beta_y}{\left[\frac{\lambda_L}{(1 + \xi c_\theta + \eta s_\theta)} + 2(\lambda_\xi c_\theta + \lambda_\eta s_\theta) + \frac{\xi s_\theta - \eta c_\theta}{1 + \xi c_\theta + \eta s_\theta} (\lambda_\xi s_\theta - \lambda_\eta c_\theta) \right]} \end{aligned} \tag{2.11}$$

where

$$\begin{aligned} H^2 e^{-2L} &= (\lambda_\xi s_\theta - \lambda_\eta c_\theta)^2 + \frac{(\lambda_\Omega s_{i^*}^*)^2 s_\theta^2}{(1 + \xi c_\theta + \eta s_\theta)^2} + \left[\frac{\lambda_L}{1 + \xi c_\theta + \eta s_\theta} + \text{etc.} \right]^2 \\ &= F(\xi, \eta, \lambda_L, \lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\Omega s_{i^*}^*; \theta), \quad \text{say.} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Position θ , of course, must maximize F in (2.12). It can be shown,⁽¹²⁾ moreover, that, except when F has a double maximum (cf. ref. 8), \bar{r} and $\hat{\beta}$ are (piecewise) constant as τ varies, implying impulses at positions θ , separated by coasting arcs between positions θ_1 and θ_2 corresponding to equal maxima of F .

3. THE EXTENSION TO HIGHER ORDER OF MAREC'S REGIONS I AND II

Generalizing the analyses of Marec and Edelbaum, we anticipate (after several false starts!) that the appropriate state and adjoint variables are of the following orders of magnitude: λ_ξ and $\lambda_\rho s_{i^*}$ of order zero, with $(\lambda_\rho s_{i^*})^2 > 3\lambda_\xi^2$, the difference of these last quantities being also of order zero; λ_L , λ_η and ξ of first order (O_1) in the effort τ , a small quantity; L , η of second order (O_2) in τ . We suppose here that h_0 is scaled to unity, so that $L_0 = 0$; τ is thus the dimensionless $\Delta v / \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ (to first order). Equations (2.1)–(2.4) and (2.11), together with the maximization of F in (2.12), show that these orders of magnitude are maintained during the transfer, the change in λ_ξ being O_2 , and (2.10) shows that $i^* = \frac{\pi}{2} + O_2$. If we define an angle $\alpha \left(\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$ such that $(\lambda_\xi)_0 = c_\alpha$, $\lambda_\rho = s_\alpha$ (there is no loss of generality in supposing that $\lambda_\xi \geq 0$, $\lambda_\rho > 0$), then the optimal $\theta = \pm \frac{\pi}{2} + O_1$, given by:

$$(1 - 4c_\alpha^2)c_\theta = -\xi(1 - 3c_\alpha^2) + 2\lambda_L c_\alpha + 3\lambda_\eta c_\alpha s_\theta, \quad \text{of first order,} \quad (3.1)$$

where $s_\theta = \pm 1 + O_2$, according to the sign of the switching function:

$$S = \frac{3\lambda_\eta c_\alpha}{s_\alpha^2} (2\xi c_\alpha^2 + 2\lambda_L c_\alpha - \xi s_\alpha^2) + \frac{1 - 4c_\alpha^2}{s_\alpha^2} [2\lambda_\eta (\lambda_L + \xi c_\alpha) - \eta s_\alpha^2], \quad (3.2)$$

which is O_2 . The optimal $\hat{\beta}$ is given, neglecting O_2 , by:

$$\beta_x = s_\theta c_\alpha, \quad \beta_y = \lambda_L + 2c_\alpha c_\theta + 2\lambda_\eta s_\theta + \xi c_\alpha, \quad \beta_z = s_\theta s_\alpha. \quad (3.3)$$

The behavior of λ_η and the switching function S with τ are found to be:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_\eta &= (\lambda_\eta)_0 + \tau s_\alpha^2 s_{\theta_0}, \\ S &= S_0 - 6\tau (\lambda_\eta)_0 s_\alpha^2 - 3\tau^2 s_{\theta_0} s_\alpha^4, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

from which it follows that the first switch in θ , i.e. the first coasting period,

occurs at

$$\tau = \tau_1 = \frac{1}{s_\alpha^2} \left\{ -(\lambda_\eta)_0 s_{\theta_0} + \sqrt{(\lambda_\eta)_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|} \right\}, \quad (3.5)$$

with subsequent switches at regular "intervals"

$$\Delta\tau_i = \frac{2}{s_\alpha^2} \sqrt{(\lambda_\eta)_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|}. \quad (3.6)$$

Consecutive values of the controls θ and β , (β_x, β_z being readily obtained) are obtainable from (3.1) and (3.3):

$$\begin{aligned} c_{\theta_1} \text{ (prior to } \tau_1) &= \frac{1}{1-4c_\alpha^2} \{2(\lambda_L)_0 c_\alpha + 3(\lambda_\eta)_0 s_{\theta_0} c_\alpha - \xi_0(1-3c_\alpha^2)\} \\ c_{\theta_2} = c_\theta(\tau_1^+) &= \frac{1}{1-4c_\alpha^2} \{2\lambda_L(\tau_1) c_\alpha - 3\lambda_\eta(\tau_1) s_{\theta_0} c_\alpha - \xi(\tau_1)(1-3c_\alpha^2)\} \\ c_{\theta_3} = c_\theta(\tau_2^+) &= \frac{1}{1-4c_\alpha^2} \{2\lambda_L(\tau_2) c_\alpha + 3\lambda_\eta(\tau_2) s_{\theta_0} c_\alpha - \xi(\tau_2)(1-3c_\alpha^2)\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

and

$$\left. \begin{aligned} (\beta_y)_0 &= (\lambda_L)_0 + 2c_\alpha c_{\theta_1} + 2(\lambda_\eta)_0 s_{\theta_0} + \xi_0 c_\alpha \\ \beta_y(\tau_1^+) &= \lambda_L(\tau_1) + 2c_\alpha c_{\theta_2} - 2\lambda_\eta(\tau_1) s_{\theta_0} + \xi(\tau_1) c_\alpha \\ \beta_y(\tau_2^+) &= \lambda_L(\tau_2) + 2c_\alpha c_{\theta_3} + 2\lambda_\eta(\tau_1) s_{\theta_0} + \xi(\tau_2) c_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

The evolution of the parameters Ω and ξ is steady throughout:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \tau s_\alpha + O_2 \\ \xi &= \xi_0 + \tau c_\alpha + O_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

In particular, if the initial orbit is circular ($\xi_0 = \eta_0 = 0$), the effort is

$$\tau = \sqrt{\xi^2 + (\Omega - \Omega_0)^2} + O_2, \quad (3.10)$$

Neglecting O_2 , $\Omega - \Omega_0$ is just the inclination i of the general to the initial orbit, and ξ is the component e_\perp of the eccentricity vector \perp to the line of nodes of the general and initial orbits, so that $\alpha = \cot^{-1} \frac{e_\perp}{i}$.

Of more interest here is the evolution of the following reduced parameters:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2L(1-4c_\alpha^2)}{\tau^2 s_\alpha^2} = \frac{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)(1-4c_\alpha^2)}{\tau^2 s_\alpha^2} \\ y &= \frac{1-4c_\alpha^2}{\tau^2 s_\alpha^2} (\eta + \xi c_\psi) = \frac{e_\parallel(1-4c_\alpha^2)}{\tau^2 s_\alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

e_{\parallel} being the component of the eccentricity vector $||$ to the line of nodes of the general and initial orbits, and $\psi, = \frac{\pi}{2} + O_1$, the angle from the ascending node of the general orbit relative to the initial orbit. This angle ψ is given (cf. (4.17) later) by:

$$c_{\psi} = \frac{av}{\tau} s_{\theta} c_{\theta}. \quad (3.12)$$

The parameters x and y are given in terms of further quantities

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{(\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0}}{\sqrt{(\lambda_{\eta})_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|}} \quad \text{or} \quad \left(\frac{(\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0}}{\sqrt{(\lambda_{\eta})_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|}} + 2 \right) \\ &\quad \text{according as } (\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0} > 0 \quad \text{or} \quad < 0, \\ \mu &= \frac{\tau s_{\alpha}^2}{\sqrt{(\lambda_{\eta})_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|}} \quad \text{or} \quad \frac{\tau s_{\alpha}^2 |(\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0}|}{(\lambda_{\eta})_0^2 + \frac{1}{3} |S_0|}, \\ &\quad \text{according as } (\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0} > 0 \quad \text{or} \quad < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

by

$$x = \begin{cases} \text{if } (\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0} > 0, & 0 < \lambda \leq 1: \\ \frac{3}{\lambda\mu} + (4s_{\alpha}^2 - 3) \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right), & 0 < \mu \leq 1 - \lambda, \quad 1 \text{ impulse,} \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{1 - \lambda + (1 - 2\lambda)(\mu - 1 + \lambda)\} + \frac{4s_{\alpha}^2 - 3}{\mu^2} \{1 - \lambda + (\mu - 1)(\mu - 1 + \lambda)\}, & 1 - \lambda < \mu \leq 3 - \lambda, \quad 2 \text{ impulses in ratio } 1 - \lambda : \mu - 1 + \lambda, \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{3 - 5\lambda + (1 - 4\lambda)(\mu - 3 + \lambda)\} + \frac{4s_{\alpha}^2 - 3}{\mu^2} \{5 - 3\lambda + (\mu - 1)(\mu - 3 + \lambda)\}, & \mu > 3 - \lambda, \quad 3 \text{ impulses in ratio } 1 - \lambda : 2 : \mu - 3 + \lambda, \end{cases} \quad (3.14a)$$

$$y = \begin{cases} \frac{3}{\lambda\mu} + (4s_{\alpha}^2 - 3) \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right), & 0 < \mu \leq 1 - \lambda, \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{1 - \lambda - (1 - 2\lambda)(\mu - 1 + \lambda)\} + \frac{4s_{\alpha}^2 - 3}{\mu^2} \{1 - \lambda - (\mu - 1)(\mu - 1 + \lambda)\}, & 1 - \lambda < \mu \leq 3 - \lambda, \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{3\lambda - 1 + (1 - 4\lambda)(\mu - 3 + \lambda)\} + \frac{4s_{\alpha}^2 - 3}{\mu^2} \{\lambda - 3 + (\mu - 1)(\mu - 3 + \lambda)\}, & \mu > 3 - \lambda, \end{cases}$$

or else

if $(\lambda_\eta)_0 s_{\theta_0} < 0$, $1 \leq \lambda < 2$:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{3(2-\lambda)}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda + (5-2\lambda) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\} \\ &\quad + \frac{(4s_\alpha^2 - 3)(2-\lambda)^2}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda + \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 1 \right) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\} \\ y &= \frac{3(2-\lambda)}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda - (5-2\lambda) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\} \\ &\quad + \frac{(4s_\alpha^2 - 3)(2-\lambda)^2}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda - \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 1 \right) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (3.14b)$$

with $\mu > (2-\lambda)(3-\lambda)$, 2 impulses in ratio $3-\lambda: \frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda$.

The optimal θ_m 's are given by:

$$\frac{c_{\theta_2}}{1-2\lambda} = \frac{c_{\theta_3}}{1-4\lambda} = c_{\theta_1} = \frac{3e_{\perp} s_\alpha^2}{\lambda \mu (4s_\alpha^2 - 3)} \quad (3.15a)$$

or

$$\frac{c_{\theta_2}}{5-2\lambda} = c_{\theta_1} = \frac{-3e_{\perp} s_\alpha^2}{\mu (4s_\alpha^2 - 3)} \quad (3.15b)$$

and the optimal β_y 's by:

$$\left. \begin{aligned} (\beta_y)_0 &= \frac{is_\alpha}{2\lambda\mu(4s_\alpha^2 - 3)} \{3(1-\lambda^2) + 4\lambda^2 s_\alpha^2\} \\ \beta_y(\tau_1^+) &= \frac{is_\alpha}{2\lambda\mu(4s_\alpha^2 - 3)} \{3(\lambda-1)^2 - 4\lambda^2 s_\alpha^2\} \\ \beta_y(\tau_2^+) &= \frac{is_\alpha}{2\lambda\mu(4s_\alpha^2 - 3)} \{3(1-6\lambda + \lambda^2) + 4\lambda(2-\lambda)s_\alpha^2\} \end{aligned} \right\} \quad (3.16a)$$

or

$$\left. \begin{aligned} (\beta_y)_0 &= \frac{-is_\alpha}{2\mu(4s_\alpha^2 - 3)} \{3(\lambda-1)(3-\lambda) + 4(\lambda-2)^2 s_\alpha^2\} \\ \beta_y(\tau_1^+) &= \frac{-is_\alpha}{2\mu(4s_\alpha^2 - 3)} \{3(3-\lambda)^2 - 4(\lambda-2)^2 s_\alpha^2\} \end{aligned} \right\} \quad (3.16b)$$

Contours of constant λ, μ are shown in the $x-y$ plane in Figs. 2 and 3, corresponding to the extreme cases $\alpha = \frac{\pi}{2}$ and $\alpha = \frac{\pi}{3}$ respectively. The triangular region around the origin bounded by the dotted lines corre-

sponds to 3-impulse transfers and the heavy diagonal line segments correspond to 1-impulse transfers. Note that the 1-impulse locus with negative Δa extends inward as far as the corner of the 3-impulse region, while that with positive Δa does not extend inward as far as this region. The wave-fronts corresponding to increasing τ (i.e. increasing μ) move toward the x -axis

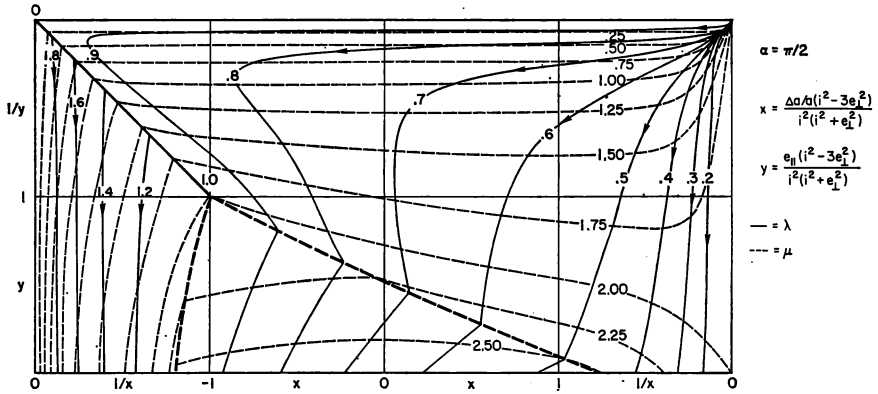


FIG. 2. Non-linear chart for regions I and II: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

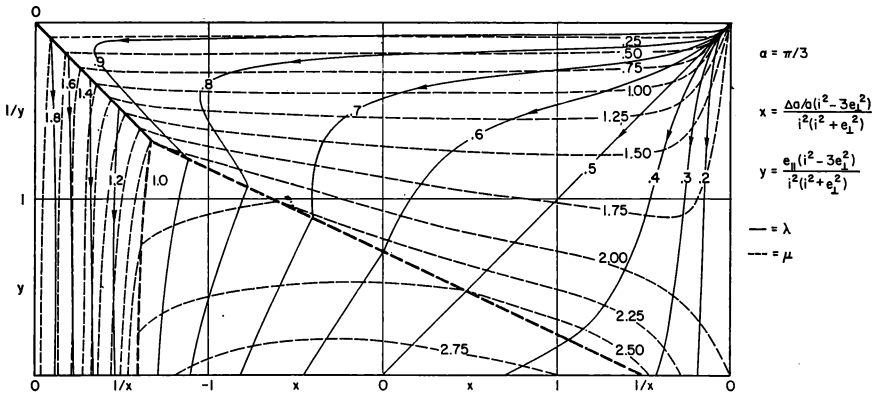


FIG. 3. Non-linear chart for regions I and II: $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

where they are met by identical wave-fronts moving from negative y . The optimal paths, then, do not cross the x -axis, and it suffices to show the upper half $x-y$ plane. Figure 2, corresponding to $e_{\perp} = 0$, was obtained by Winn.⁽¹³⁾ The case $\alpha = \frac{\pi}{3}$, for which $\lambda_{\rho} s_i^* = \lambda_{\xi} \sqrt{3}$, lies on the boundary of Marec's region III and outside the domain of this analysis, and requires

a separate "transition analysis" (section 5). In fact, the 3-impulse region in the space of parameters $\frac{\Delta a}{a}/\tau^2, e_{\parallel}/\tau^2$, grows indefinitely large as $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$, i.e.

as we approach region III. Nevertheless, x and y are linear functions of s_z^2 for fixed λ and μ , so that iterative interpolation between Figs. 2 and 3 will suffice to obtain λ and μ corresponding to given x, y and α , with $\frac{\pi}{2} > \alpha > \frac{\pi}{3}$. Formulas (3.15) and (3.16) then determine the optimal transfer.

Case b, corresponding to $(\lambda_{\eta})_0 s_{\theta_0} < 0$, applies only to the 2-impulse region below the leftward diagonal and outside the dotted boundary of the 3-impulse region. Incidentally, the region between the diagonals corresponds to Marec's region II and the regions below the diagonals to Marec's region I.

The main part of region I and II, in which e_{\parallel} and $\frac{\Delta a}{a}$ are of the same order of magnitude as i and e_{\perp} , requires only two impulses, computable rather easily in region II and not so easily in region I.⁽²⁾ Our higher order theory tells us furthermore that the larger impulse should be applied first, the wave-fronts in an appropriate parameter space meeting equal and opposite wave-fronts when the two impulses are equal.

4. THE EXTENSION TO HIGHER ORDER OF MAREC'S REGION III

Generalizing the analyses of Marec and Edelbaum, we anticipate that

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\rho} s_i^* &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1+A) \\ \lambda_{\xi} &= \frac{1}{2}(1+B) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

where $A, B, \lambda_L, \lambda_{\eta}, L, \xi, \eta$ are all first-order small quantities. Condition (2.10) then leads to: $i^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\eta}{\sqrt{3}} + O_2$, so that $s_i^* = 1 + O_2$ and $A = \text{constant} + O_2$. If we suppose, further, that $H_{\max} = 1$ and occurs at $\theta = \theta_m$, we obtain two homogeneous relations between our seven small quantities:

$$\left. \begin{aligned} 3(A-B)s_{\theta_m}^2 + 4\lambda_L c_{\theta_m} + 6\lambda_{\eta} s_{\theta_m} c_{\theta_m} - \xi s_{\theta_m}^2 c_{\theta_m} - \eta s_{\theta_m} (2 + c_{\theta_m}^2) \\ + 4(L+B) = 6(A-B)s_{\theta_m} c_{\theta_m} - 4\lambda_L s_{\theta_m} \\ + 6\lambda_{\eta} (c_{\theta_m}^2 - s_{\theta_m}^2) - \xi s_{\theta_m} (2c_{\theta_m}^2 - s_{\theta_m}^2) - \eta c_{\theta_m} (2 + 3s_{\theta_m}^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

The condition $F\left(\xi, \eta, \lambda_L, \frac{1}{2}(1+B), \lambda_\eta, \frac{\sqrt{3}}{2}(1+A); \theta\right) \leq 1 - 2L + O_2$, with equality at $\theta = \theta_m$, can be converted into:

$$p_6(t) \equiv 3(A-B)t^2(1+t^2) + \lambda_L(1-t^2)(1+t^2)^2 + 3\lambda_\eta t(1-t^4) - \xi t^2(1-t^2) - \eta t(1+4t^2+t^4) + (L+B)(1+t^2)^3 \leq 0, \quad (4.3)$$

where t denotes $\tan \frac{\theta}{2}$, the equality holding at $t = t_m = \tan \frac{\theta_m}{2}$. $p_6(t)$ is therefore expressible in the form $(t-t_m)^2 \pi_4(t)$, where $\pi_4(t)$ is a negative definite, or negative semi-definite, fourth-degree polynomial.

The optimal β is given, neglecting O_1 , by

$$\beta_x = \frac{1}{2} s_{\theta_m}, \quad \beta_y = c_{\theta_m}, \quad \beta_z = \frac{\sqrt{3}}{2} s_{\theta_m}, \quad (4.4)$$

and the evolution of the small quantities $A, B, \lambda_L, \lambda_\eta, \xi, \eta, L$, neglecting O_2 , by:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{d\tau} = 0, \quad \frac{dB}{d\tau} = \frac{1}{2} s_{\theta_m}^2 c_{\theta_m}, \quad \frac{d\lambda_L}{d\tau} = -1, \quad \frac{d\lambda_\eta}{d\tau} = \frac{1}{4} s_{\theta_m} (3 - c_{\theta_m}^2), \\ \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{2} (1 + 3c_{\theta_m}^2), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{3}{2} s_{\theta_m} c_{\theta_m}, \quad \frac{dL}{d\tau} = c_{\theta_m}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

The corresponding evolution of the polynomial $p_6(t) = p_6(t, \tau)$, is:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p_6(t, \tau) = (t-t_m)^3 (t+t_m) (1+c_{\theta_m})^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} c_{\theta_m}\right) t^2 - \frac{1}{4} s_{\theta_m} t + \left(1 + \frac{1}{2} c_{\theta_m}\right) \right] \quad (4.6)$$

the square bracket enclosing a positive-definite quadratic function of t .

Suppose now that $\theta_m = \theta_1$ at $\tau = 0$ and that θ_m switches to θ_2 at $\tau = \tau_1$. Then $p_6(t, \tau_1)$ is expressible in the form:

$$p_6(t, \tau_1) = (t-t_1)^2 (t-t_2)^2 (\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1), \quad (4.7)$$

where $\alpha_1 < 0$, $\gamma_1 < 0$ and $\beta_1^2 \leq 4\alpha_1\gamma_1$. It follows from (4.3) and (4.7) that, at $\tau = \tau_1$: $(A-B)$, $(L+B)$, ξ , η , λ_L , λ_η , are certain linear functions of α_1 , β_1 , γ_1 , with coefficients dependent on t_1, t_2 . In particular,

$$\xi = \xi_1 = \frac{1}{2} (k_0 - k_2 + k_4 - k_6), \quad \eta = \eta_1 = -\frac{1}{4} k_3, \quad (4.8)$$

where k_j is the coefficient of t^j in $p_6(t, \tau_1)$.

Assuming again that $\xi_0 = \eta_0 = 0$, we may combine (4.5) and (4.8) to obtain

$$\left. \begin{aligned} 2t_1 t_2 (t_1 + t_2) \alpha_1 - (t_1^2 + 4t_1 t_2 + t_2^2) \beta_1 + 2(t_1 + t_2) \gamma_1 = 6s_{\theta_1} c_{\theta_1} \tau_1, \\ (t_1^2 + 4t_1 t_2 + t_2^2 - 1 - t_1^2 t_2^2) \alpha_1 + 2(t_1 + t_2) (t_1 t_2 - 1) \beta_1 \\ + (t_1^2 t_2^2 + 1 - t_1^2 - 4t_1 t_2 - t_2^2) \gamma_1 = (1 + 3c_{\theta_1}^2) \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Noting furthermore that there is a linear relation between the odd powers of t in (4.3), we find that

$$2(2-t_1t_2)(t_1+t_2)\alpha_1+(t_1^2+4t_1t_2+t_2^2-2-2t_1^2t_2^2)\beta_1+2(t_1+t_2)(2t_1t_2-1)\gamma_1=0. \quad (4.10)$$

Combining (4.9) and (4.10), we can easily solve for $\frac{\alpha_1}{\tau_1}$, $\frac{\beta_1}{\tau_1}$, $\frac{\gamma_1}{\tau_1}$ as functions of t_1, t_2 .

For values of τ greater than τ_1 , and prior to the next switch of θ_m , we find from (4.6) and (4.7) that the reduced fourth-degree polynomial π_4 is given by:

$$\pi_4(t, \tau) = (t-t_1)^2(\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1) + (\tau - \tau_1)(t-t_2)(t+t_2)(1+c_{\theta_2})^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} c_{\theta_2}\right) t^2 - \frac{1}{4} s_{\theta_2} t + \left(1 + \frac{1}{2} c_{\theta_2}\right) \right]. \quad (4.11)$$

The next switch τ_2 is the least τ , greater than τ_1 , for which $\pi_4(t, \tau)$ has two equal factors, say $(t-t_3)^2$. A root-locus analysis,⁽¹⁴⁾ together with the positive-definite character of the square-bracketed term in (4.11) and the negative-definite character of $(\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1)$, shows that $|t_2|$ must be no less than $|t_1|$. This means that β_y never increases, which is not surprising in view of decreasing character of λ_L . If $|t_2| > |t_1|$, $|t_3| > |t_2|$ and τ_1 and t_3 may be obtained by a search on τ as follows: τ_2 is the least τ greater than τ_1 for which $S^* = 0$, where

$$\left. \begin{aligned} S^* &= B_2 D_0^2 - B_1 D_0 D_1 + B_0 D_1^2, & D_0 &= 2A_2 B_0^2 - 3A_1 B_0 B_1 \\ &\quad - 4A_0 B_0 B_2 + 4A_0 B_1^2, \\ D_1 &= A_3 B_0^2 - 3A_1 B_0 B_2 + 4A_0 B_1 B_2, \\ B_0 &= \frac{1}{2} A_0 A_2 - \frac{3}{16} A_1^2, & B_1 &= \frac{3}{4} A_0 A_3 - \frac{1}{8} A_1 A_2, \\ B_2 &= A_0 A_4 - \frac{1}{16} A_1 A_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

and A_j is the coefficient of t^{4-j} in $\pi_4(t, \tau)$.

The corresponding t_3 is given by:

$$t_3 = -D_1/D_0. \quad (4.13)$$

[Here B_j/A_0 is the coefficient of t^{2-j} in the remainder $\pi_2(t)$ when $\pi_4(t, \tau)$ is divided by $\frac{\partial}{\partial t} \pi_4(t, \tau)$, $\frac{A_0 D_j}{B_0^2}$ is the remainder $\pi_1(t)$ when $\frac{\partial}{\partial t} \pi_4(t, \tau)$ is divided by $\pi_2(t)$, and S^* is a multiple of the remainder when $\pi_2(t)$ is divided by $\pi_1(t)$.]

For $\tau = \tau_2$, we again express $p_6(t, \tau)$ in factored form, now as $(t-t_2)^2(t-t_3)^2(\alpha_2 t^2 + \beta_2 t + \gamma_2)$, so that $\alpha_2 = A_0$, $\beta_2 = A_1 + 2A_0 t_2$, $\gamma_2 = A_2 + 2A_1 t_2 + 3A_0 t_2^2$. Then, for $\tau > \tau_2$ until another switch, $p_6(t, \tau) = (t-t_3)^2 \pi_4(t, \tau)$, where $\pi_4(t, \tau)$ is now $(t-t_2)^2(\alpha_2 t^2 + \beta_2 t + \gamma_2) + (\tau - \tau_2)(t-t_3)(t+t_3)(1+c_{\theta_3})^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} c_{\theta_3}\right) t^2 - \frac{1}{4} s_{\theta_3} t + \left(1 + \frac{1}{2} c_{\theta_3}\right) \right]$. The previous algorithm may now be applied to determine τ_3 and t_4 , etc.

There are 2 "singular" limiting possibilities here: (i) If $t_2 = t_1$, t_m increases in absolute value, without changing sign, continuously with τ . This corresponds to the continued existence of a double maximum of H , mentioned in section 2. (ii) If $t_2 = -t_1$, t_m "chatters" continuously between $\pm |t|$, with $|t|$ increasing continuously with τ .

Computations were made for various t_1 , t_2 , using (4.9) and (4.10) followed by the search algorithm $S^* = 0$, $t_3 = -D_1/D_0$, to obtain $\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}$, t_3 , $\frac{\tau_3 - \tau_2}{\tau_1}$, t_4 , etc. The consequent evolution with $\frac{\tau}{\tau_1}$ of the following reduced parameters was computed:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{i(e_{\perp} + i\sqrt{3})}{\tau^2} \\ \Sigma_2 &= \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m} c_{\theta_m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{ie_{\parallel}}{\tau^2} \\ \Sigma_3 &= \frac{\text{av}}{\tau} c_{\theta_m} = \frac{L}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta a}{a} \right) / \tau \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

To justify (4.14) we know from (2.2), (2.3) and (4.4) that

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{\tau} &= 2 - \frac{3}{2} \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m}^2, & \frac{\eta}{\tau} &= \frac{3}{2} \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m} c_{\theta_m}, & \frac{L}{\tau} &= \frac{\text{av}}{\tau} c_{\theta_m}, \\ \frac{\Delta i^*}{\tau} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m} c_{\theta_m}, & \frac{\Omega - \Omega_0}{\tau} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\text{av}}{\tau} s_{\theta_m}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Next we determine the inclination i of the current orbit to the initial orbit by considering the angle ψ (as in section 3) defining the position of the node of initial and general orbits relative to our equator, so that, to first order:

$$\left. \begin{aligned} \Delta i^* c_{\psi} + (\Omega - \Omega_0) s_{\psi} &= i, & \Delta i^* s_{\psi} - (\Omega - \Omega_0) c_{\psi} &= 0, \\ \xi c_{\psi} + \eta s_{\psi} &= e_{\parallel}, & \xi s_{\psi} - \eta c_{\psi} &= e_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

from which it follows that

$$\frac{c_{\psi}}{\Sigma_2} = \frac{s_{\psi}}{\Sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}, \quad (4.17)$$

and

$$\frac{i}{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}, \quad \frac{e_{\parallel}}{\tau} = \frac{2\Sigma_2}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}}, \quad \frac{e_{\perp}}{\tau} = \frac{2\Sigma_1}{\sqrt{\Sigma_1^2 + \Sigma_2^2}} - \sqrt{3} \frac{i}{\tau}, \quad (4.18)$$

consistent with (1.1)_{III} and the first two equations (4.14).

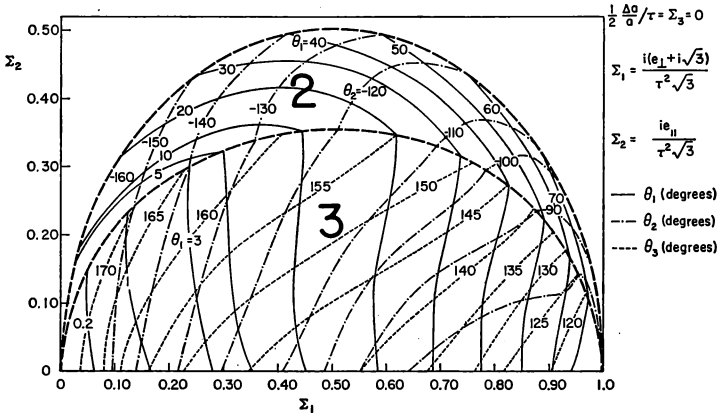


FIG. 4. Non-linear chart for region III; $\Sigma_3 = 0$.

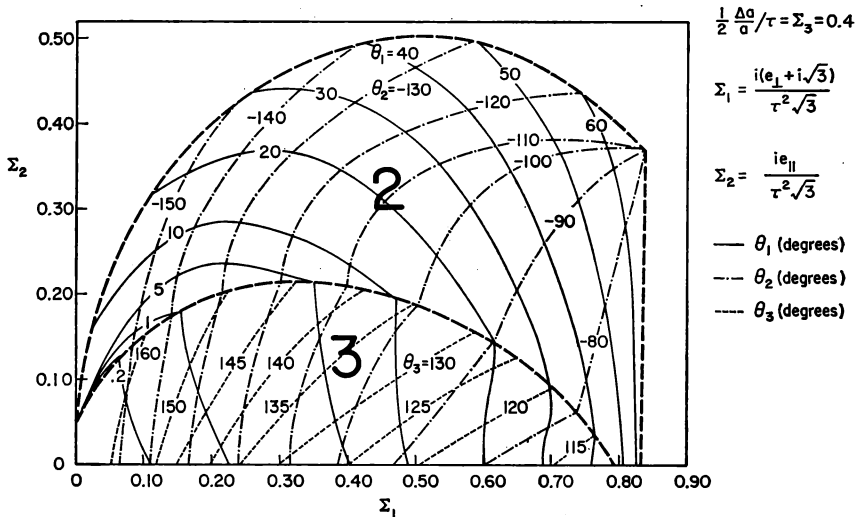


FIG. 5. Non-linear chart for region III; $\Sigma_3 = +0.4$.

The wave-fronts of constant τ in $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ space were found to move toward the $\Sigma_1 \Sigma_3$ plane, where they were met by equal and opposite wave-fronts. It sufficed, then, to consider only positive Σ_2 . Again it was found that the optimal transfers required either 2 or 3 impulses, the

1-impulse possibilities here lying on the corner of the boundary with regions I and II. Contours of constant θ_1 , θ_2 and θ_3 (when necessary), are shown in the $\Sigma_1\Sigma_2$ plane in Fig. 4 for $\Sigma_3 = 0$, and in Figs. 5 and 6 for typical positive and negative Σ_3 . The upper boundary is the boundary with region II, and the right-hand boundary is with region I. It should be noted that singular type (i) did not arise, while singular type (ii) occurred

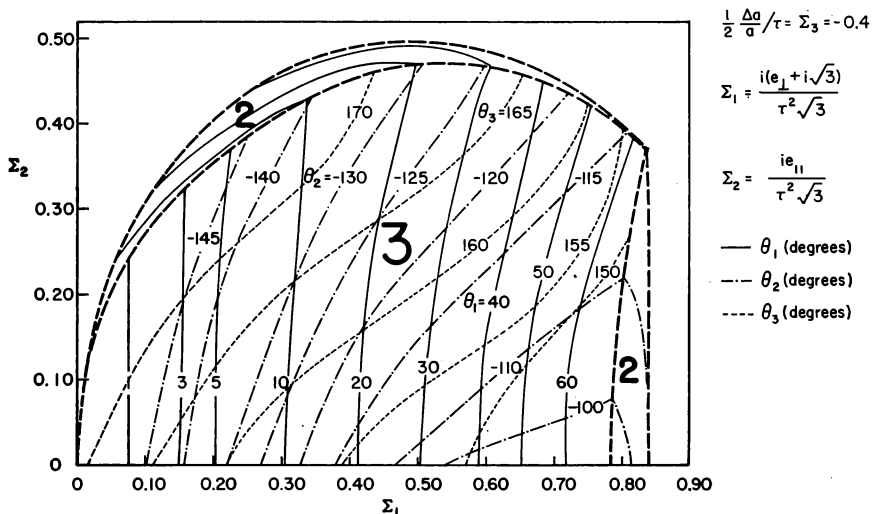


FIG. 6. Non-linear chart for region III; $\Sigma_3 = -0.4$.

only on the boundary with region I, for which a separate overriding analysis is made in section 5. The optimal $\hat{\beta}'$'s are determined immediately from (4.4) as soon as the optimal θ_m 's have been read from figures like 5 and 6. The partitioning of τ , given by (1.1)_{III} between impulses is easily computed with the aid of the definitions of $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ in (4.14) as averages over τ .

5. THE TRANSITION REGION BETWEEN REGION III AND REGIONS I AND II

We have seen in section 3 that the boundary between 2-impulse and 3-impulse transfers in regions I and II occurs where $\frac{\Delta a}{a}$ and e_{\parallel} are of second order in τ , but that the appropriate coefficients grow indefinitely large as $i - e_{\perp}\sqrt{3} \rightarrow 0$ (from above). On the other hand, we have seen in section 4 that this boundary in region III, in which $i < e_{\perp}\sqrt{3}$, occurs where

$\frac{\Delta a}{a}$ and e_{\parallel} are of first order in τ . A careful analysis is therefore in order for the case where $\frac{|i-e_{\perp}\sqrt{3}|}{i} \ll 1$. Returning to the analysis of section 3 and

allowing α to approach $\frac{\pi}{3}$ from above, we see that c_{θ_m} in (3.15) becomes larger than a first-order small quantity. If we suppose that $\alpha - \frac{\pi}{3}$ is of an order of magnitude between order zero and first order in τ , then c_{θ_m} is between order zero and first order. The error terms O_2 in (3.8) become of lower order, and (3.8) should be replaced, using (4.15), by

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \tau \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{av}{\tau} c_{\theta_m}^2 \right] \\ \xi &= \tau \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{3}{2} \frac{av}{\tau} c_{\theta_m}^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Furthermore c_{ψ} in (3.12) is also between order zero and first order, so that we must use (4.16) to obtain

$$\frac{i-e_{\perp}\sqrt{3}}{\tau} = \frac{(\Omega-\Omega_0)-\xi\sqrt{3}}{\tau} + \frac{\Delta i^* + \eta\sqrt{3}}{\tau} c_{\psi},$$

which, combined with (3.12), (5.1) and i^*, η from (4.15), yields

$$\frac{i-e_{\perp}\sqrt{3}}{\tau} = 2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - 2\sqrt{3} \left\{ \frac{av}{\tau} c_{\theta_m}^2 - \left[\frac{av}{\tau} (s_{\theta_m} c_{\theta_m}) \right]^2 \right\} \quad (5.2)$$

Next, from (3.11) and (3.14), for small $\alpha - \frac{\pi}{3}$; and $0 < \lambda \leq 1$:

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \frac{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)}{\tau^2} = x = \begin{cases} \frac{3}{\lambda\mu}, & 0 < \mu \leq 1-\lambda \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{1-\lambda+(1-2\lambda)(\mu-1+\lambda)\}, & 1-\lambda < \mu \leq 3-\lambda \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{3-5\lambda+(1-4\lambda)(\mu-3+\lambda)\}, & 3-\lambda < \mu \end{cases} \quad (5.3a)$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \frac{e_{\parallel}}{\tau^2} = y = \begin{cases} \frac{3}{\lambda\mu}, & 0 < \mu \leq 1-\lambda \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{1-\lambda-(1-2\lambda)(\mu-1+\lambda)\}, & 1-\lambda < \mu \leq 3-\lambda \\ \frac{3}{\lambda\mu^2} \{3\lambda-1+(1-4\lambda)(\mu-3+\lambda)\}, & 3-\lambda < \mu \end{cases}$$

or, if $1 < \lambda < 2$:

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \frac{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)}{\tau^2} = x = -\frac{3(2-\lambda)}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda + (5-2\lambda) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\} \quad (5.3b)$$

$$\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \frac{e_{\parallel}}{\tau^2} = y = \frac{3(2-\lambda)}{\mu^2} \left\{ 3-\lambda - (5-2\lambda) \left(\frac{\mu}{2-\lambda} - 3 + \lambda \right) \right\}$$

The optimal θ_m 's are given by:

$$\frac{c_{\theta_2}}{1-2\lambda} = \frac{c_{\theta_3}}{1-4\lambda} = c_{\theta_1} = \frac{3\sqrt{3}\tau}{16\lambda\mu \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)} \quad (5.4a)$$

or

$$\frac{c_{\theta_3}}{5-2\lambda} = c_{\theta_1} = -\frac{3\sqrt{3}\tau}{16\mu \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)} \quad (5.4b)$$

We now introduce the parameter ζ and the angle β ($0 \leq \beta \leq \pi$) given by

$$\frac{c_{\beta}}{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)} = \frac{s_{\beta}}{e_{\parallel}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2 + e_{\parallel}^2}} = \frac{1}{\zeta}, \quad (5.5)$$

and a parameter λ^* defined by:

$$\lambda^* = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{y_B}{y}} & \text{if } y > y_B & \text{and } \frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{4} \\ 3 - \frac{y}{y_B} & \text{if } y < y_B & \text{and } \frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{4} \\ 2\sqrt{\frac{|x_B|}{|x|}} & \text{if } |x| > |x_B| & \text{and } \beta < \frac{\pi}{4} \text{ or } \beta < \frac{3\pi}{4} \\ 3 - \frac{|x|}{|x_B|} & \text{if } |x| < |x_B| & \text{and } \beta < \frac{\pi}{4} \text{ or } \beta < \frac{3\pi}{4}, \end{cases} \quad (5.6)$$

where (x_B, y_B) is a typical point on the boundary between the 2-impulse and 3-impulse regions in Fig. 3, obtainable from (5.3a) by setting $\mu = 3 - \lambda$ if $0 \leq \beta \leq \frac{3\pi}{4}$, or by setting $\lambda = 1$ and using $2 < \mu < \frac{8}{3}$ if $\beta > \frac{3\pi}{4}$. We

can then eliminate $\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$ between (5.2) and (5.3), using (5.4)–(5.6) to

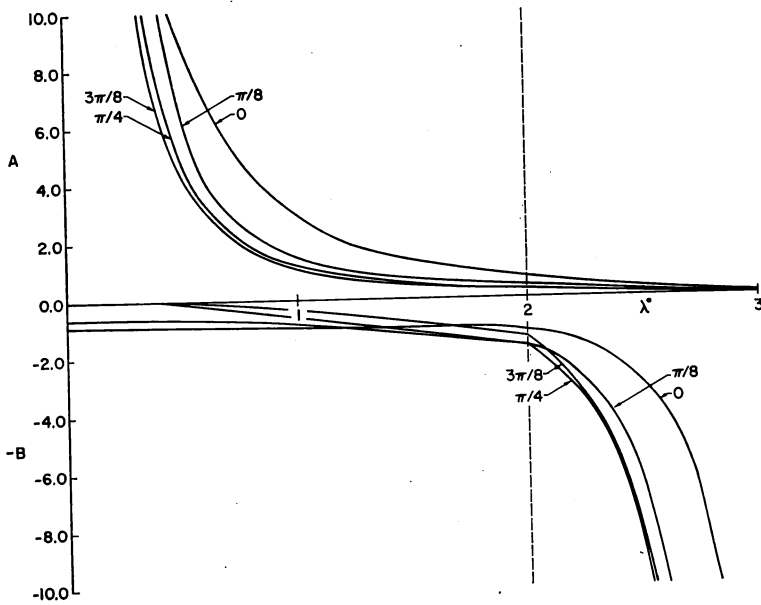


FIG. 7. Nomograph for transition region: $0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$.

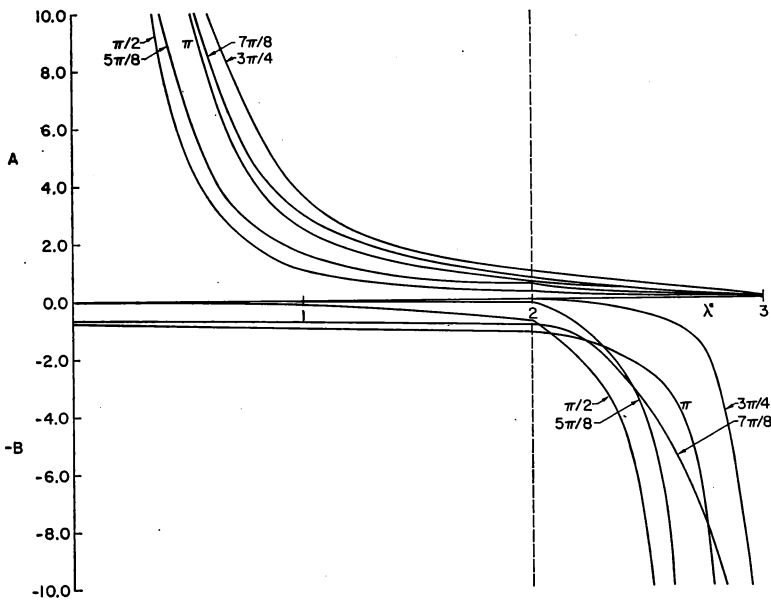


FIG. 8. Nomograph for transition region: $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi$.

obtain a relation:

$$\frac{(i - e_{\perp} \sqrt{3}) \tau \zeta}{\tau^4 + \zeta^3} = \frac{\tau^4}{\tau^4 + \zeta^3} A(\lambda^*, \beta) - \frac{\zeta^3}{\tau^4 + \zeta^3} B(\lambda^*, \beta), \quad (5.7)$$

where the functions $A(\lambda^*, \beta)$, $-B(\lambda^*, \beta)$, are shown in Fig. 7 for various $\beta < \frac{\pi}{2}$ and in Fig. 8 for various $\beta \geq \frac{\pi}{2}$. The interval $2 < \lambda^* \leq 3$ corresponds to 3-impulse transfers. Equation (5.7) is to be used, in conjunction with Figs. 7 or 8, knowing the orbit parameters, to interpolate between A and $-B$ in the ratio $\tau^4 : \zeta^3$ in order to determine the parameter λ^* . For $\tau^4 \gg \zeta^3$ this transition theory reverts to the analysis of section 3, and for $\tau^4 \ll \zeta^3$ to that of section 4. The boundary between 2-impulse and 3-impulse regions, if $i - e_{\perp} \sqrt{3}$ is exactly zero, occurs where ζ is of order $\tau^{4/3}$. Finally, after λ^* is determined, the definition (5.6) permits location of the corresponding (x, y) in Fig. 3, so that λ, μ may be read and the optimal transfer described, using (4.4), (5.3) and (5.4).

6. CONCLUSIONS AND RECOMMENDATIONS

Perhaps the most striking result of this paper appears in comparing the conclusions in section 3 for regions I, II with those in section 4 for region III. Inside regions I and II the 3-impulse region consists, as in ref. 13, of points for which $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)/i^2$ and e_{\parallel}/i^2 are sufficiently small and for which $i > e_{\perp} \sqrt{3}$, this region constituting in a sense only a narrow ridge in parameter space, including the point $i > 0, \frac{\Delta a}{a} = e_{\parallel} = e_{\perp} = 0$, corresponding to the elementary results on circle to inclined equal circle in ref. 5. In region III, on the other hand, the 3-impulse region is a very substantial portion of parameter space. 3-impulse transfers, then, are far more prevalent than is suggested, for example, by Winn's results⁽¹³⁾ for coaxial transfers.

No mention has been made in this paper of points in the hyperplane $i = 0$ corresponding to coplanar transfer from circle to nearby ellipse, for which, of course, the optimal transfer is a Hohmann type 2-impulse transfer. The results of this paper do not converge unambiguously to this simple result as we approach the origin in Figs. 4-6, and a separate transition analysis should be carried out for $0 < i \ll e_{\perp}, \frac{\Delta a}{a}$.

Some preliminary numerical studies have been carried out based on the non-linear small-transfer theory of sections 3-5, for cases where the major axis of the final ellipse is \perp to the line of nodes of ellipse with initial circle; i.e. $e_{\parallel} = 0, e_{\perp} > 0$. $\frac{\Delta a}{a}$ was chosen to be +0.1, e_{\perp} was in turn 0.05, 0.1,

0.15; and the nature of the optimal transfer was examined as i was allowed to increase from zero. For $i = 0$, of course, the transfer is of Hohmann type, requiring only a single impulse in the case $e_{\perp} = 0.1$, and a backward second impulse in the case $e_{\perp} = 0.15$. For sufficiently large i , on the other hand, the transfer requires three impulses, all applied close to the line of nodes. As i increases from zero, the transfer is 2-impulse for a while, except in the case $e_{\perp} = 0.15$, in which it is 3-impulse as soon as $i > 0$. An interesting feature of the transfers concerns the positions of the impulses: the first impulse moves gradually, as i increases, from the major-axis toward a node; the second impulse, and the third impulse, when present, is almost immediately rather close to the line of nodes. Further numerical studies are planned, and it will be interesting to observe here the difference between negative and positive Δa , already apparent in Figs. 2, 3, 5, 6.

The methods of analysis of this paper are extendable to the general problem of transfer between nearby non-coplanar ellipses, involving two further parameters, $(e_{\parallel})_0$ and $(e_{\perp})_0$. Figures like 2 and 3 should be obtainable, for example, with the aid of a double interpolation routine. The symmetry between $\pm e_{\parallel}$ disappears, however, if $(e_{\parallel})_0 \neq 0$, and the upward and downward wave-fronts must terminate along a curved common front which has to be computed using an explicit non-linear expression for the effort τ , which was unnecessary in this paper. This lack of symmetry, for $(e_{\parallel})_0 \neq 0$, appears in particular in the coaxial problem, and is evident in Fig. 7 of ref. 13. To generalize Figs. 4, 5 and 6 to the case $(e_{\parallel})_0 \neq 0$, $(e_{\perp})_0 \neq 0$, requires a triple interpolation (!), since interpolation on Σ_3 was already involved. Again the symmetry between $\pm \Sigma_2$ disappears and a common wave-front must be computed. To attempt to generate the corresponding 3-parameter family of charts seems, in any case, hardly worthwhile.

What may, nevertheless, prove profitable is the incorporation of this analysis into a sophisticated preliminary subroutine in a large computer program for determining optimal transfer between non-coplanar ellipses, not necessarily nearby. The later part of the computation would involve iteration, either of gradient type or of neighboring-optimal type where initial adjoint variables would be repeatedly adjusted.

The situation concerning the two possible singular types mentioned in section 4, if now $(e_{\parallel})_0 \neq 0$ and $(e_{\perp})_0 \neq 0$, is not yet clear. It appears that the chattering type (ii) is always overridden by a transition analysis toward regions I and II. Type (i), however, may possibly arise in region III and must certainly arise in the (unexplored) transition region between region III and the coplanar problem, since it arises in the coplanar problem itself, as has been shown by Lawden⁽¹⁵⁾ (see also ref. 8). It should be mentioned here this coplanar singular arc has been shown to be non-optimal,^(16, 17) and some analogous reasoning may perhaps rule out type (i) throughout region III.

REFERENCES

1. J. P. MAREC. Transferts Infinitesimaux Impulsionnels Économiques entre Orbites Quasi-Circulaires non Coplanaires. Proc. 17th IAF Congress, Madrid, October 1966.
2. T. N. EDELBAUM. Minimum Impulse Transfers in the Near Vicinity of a Circular Orbit. *J. Astronaut. Sci.* **14**, 2, 1967.
3. A. SHTERNFELD. *Soviet Space Science*, pp. 109–111. Transl. Basic Books, Inc., New York, 1959.
4. R. F. HOELKER and R. SILBER. The Bi-elliptical Transfer between Coplanar Circular Orbits. Proc. 4th Symposium on Space Technology, Los Angeles, 1959.
5. T. N. EDELBAUM. Some Extensions of the Hohmann Transfer Maneuver *ARS J.* **29**, 864–865, 1959.
6. C. MARCHAL. Transferts Optimaux entre Orbites Elliptiques (Durée Indifférente). Proc. 16th IAF Congress, Athens, September 1965.
7. P. CONTENSOU. Étude Théorique der Trajectories Optimales dans un Champ de Gravitation: Application un cas d'un Centre Unique. *Astronaut. Acta*, **8**, 134–150, 1962.
8. J. V. BREAKWELL. Minimum Impulse Transfer. *Progress in Astronaut. and Aeronaut.* **14**, 1964.
9. F. R. MOULTON. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Macmillan, 1914.
10. D. F. LAW DEN. *Optimal Trajectories for Space Navigation*. Butterworths, 1963.
11. W. G. MELBOURNE and C. G. SAUER Jr. Optimum Interplanetary Rendezvous with Power-Limited Vehicles. *AIAA J.* **1**, 1, 1963.
12. H. W. SMALL. Unpublished results. Stanford University, 1967.
13. C. B. WINN. Minimum-Fuel Transfers between Coaxial Orbits, both Coplanar and Noncoplanar. Presented at Space Flight Mech. Specialist Conf., Denver, July, 1966.
14. W. R. EVANS. *Control-System Dynamics*. McGraw-Hill, 1954.
15. D. F. LAW DEN. Optimal Intermediate-Thrust Arcs in a Gravitational Field. *Astronaut. Acta*, **8**, 106–123, 1962.
16. H. M. ROBBINS. Optimality of Intermediate-Thrust Arcs of Rocket Trajectories. *AIAA J.* **3**, 6, 1965.
17. R. E. KOPP and H. G. MOYER. Necessary Conditions for Singular External. *AIAA J.* **3**, 8, 1965.

COPLANAR IMPULSIVE TRANSFERS AND THE SECOND VARIATION TEST

P. BECKERS

Laboratoire de Techniques Aéronautiques et Spatiales,
Université de Liège

ABSTRACT

Minimization of propellant expenditure in the orbital transfer problem can be approached by the Maximum Principle. One result is that no intermediate thrust arcs occur if no restrictions are imposed on the duration or on the polar angle of the transfer.⁽²⁾ Then, if the impulsive solutions are approached as limiting cases of finite thrust, the Maximum Principle furnishes a wide variety of multiple impulse solutions, most of which are however merely stationary.⁽²⁾ If the Maximum Principle is applied directly in terms of osculating variables to the case of unlimited thrust, it furnishes additional conditions on the polar angle positioning of the impulses, considered as a control, and the solutions turn out to be restricted to the locally minimal ones.^(1, 3)

In the present formulation the problem is stated in the purely algebraic form of a constrained minimum, with differentiable constraints, and the Lagrangian multiplier technique is used. The number of impulses is left open. The first order conditions furnish a verification of the impulse diagram rules.⁽²⁾ An eigenvalue form of the second variation test⁽⁴⁾ is applied to select the locally minimal solutions. It is of easy analytical application to the case of co-circular transfers. It remains of easy numerical application to more complicated situations.

NOTATIONS AND EQUATIONS OF MOTION

- R a reference radius,
 g_0 acceleration of the gravity field at the distance R of the attractive center,
 K angular momentum of the orbit,
 H energy of the orbit.

Reduced variables are used in this problem.

When R is taken as unit of length and g_0 as unit of acceleration the natural unit of velocity is $\sqrt{g_0 R}$ (orbital velocity at the distance R) and $\sqrt{R/g_0}$ the unit of time

$$k = \frac{K}{R^2} \sqrt{\frac{R}{g_0}} \quad \text{and} \quad h = \frac{H}{Rg_0}$$

will be the non-dimensional angular momentum and energy. The Keplerian motion on an orbit of energy h and angular momentum k is described by the following equation

$$\frac{1}{\varrho} = z^2(1 + e \cos v)$$

where the eccentricity e is given by

$$e^2 = 2hk^2 + 1$$

$\varrho = r/R$ reduced radius,

$v = \theta - \theta_0$ true anomaly,

θ polar angle,

θ_0 argument of pericenter,

$z = 1/k$ inverse angular momentum.

The reduced radial and tangential velocities are given respectively by

$$u_r = ze \sin v$$

$$u_\theta = z(1 + e \cos v)$$

POSITION OF THE PROBLEM

A chemical rocket must transfer a vehicle from a given orbit o to a given orbit n . Assuming unlimited thrust the operation is performed in a succession of impulses and minimization of propellant expenditure is equivalent to minimize the sum of moduli of the impulsive velocity changes.

If α_i is the true anomaly at arrival on some intermediate orbit i , β_i the true anomaly at departure from this orbit i , the equation of motion of the vehicle on this orbit is:

$$1/\varrho = (1 + e_i \cos(\alpha_i + \psi))z_i^2$$

$$0 < \psi < \beta_i - \alpha_i$$

the radial velocity $u_{ri} = z_i e_i \sin(\alpha_i + \psi)$

the tangential velocity $u_{\theta i} = z_i(1 + e_i \cos(\alpha_i + \psi))$.

Let (x_i, y_i) denote the radial and tangential components of the impulse

$$x_i = u_{ri}(\alpha_i) - u_{r_{i-1}}(\beta_{i-1}) = z_i e_i \sin \alpha_i - z_{i-1} e_{i-1} \sin \beta_{i-1}$$

$$y_i = u_{\theta i}(\alpha_i) - u_{\theta_{i-1}}(\beta_{i-1}) = z_i(1 + e_i \cos \alpha_i) - z_{i-1}(1 + e_{i-1} \cos \beta_{i-1})$$

and $f_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ the modulus of the impulse.

The function to minimize is $f = \sum_{i=1}^n f_i$.

There are n impulses (n open), $n-1$ coasting arcs and n constraints expressing that during an impulse, the distance to the center of attraction remains constant:

$$g_i = z_i^2(1 + e_i \cos \alpha_i) - z_{i-1}^2(1 + e_{i-1} \cos \beta_{i-1}) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

It is also possible to add a constraint specifying the total polar angle: angle between the initial and final orbital axes:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - \beta_{i-1} = 2k\pi + \Gamma$$

We know e_0, z_0 parameters of the departure orbit,
 e_n, z_n parameters of the final orbit,
 Γ total polar angle between the axes.

The augmented function of Lagrange is

$$F = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i (z_i^2(1 + e_i \cos \alpha_i) - z_{i-1}^2(1 + e_{i-1} \cos \beta_{i-1})) \\ + \Lambda \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_{i-1}) - 2k\pi - \Gamma \right)$$

The first variation test gives the stationary solutions amongst which the second variation test can select relative minima. The first derivatives are:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i} - \lambda_i z_i^2 e_i \sin \alpha_i + \Lambda = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_{i-1}} = \frac{\partial f_i}{\partial \beta_{i-1}} + \lambda_i z_{i-1}^2 e_{i-1} \sin \beta_{i-1} - \Lambda = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial e_i} = \frac{\partial f_i}{\partial e_i} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial e_i} + \lambda_i z_i^2 \cos \alpha_i - \lambda_{i+1} z_i^2 \cos \beta_i = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{\partial f_i}{\partial z_i} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial z_i} + 2\lambda_i z_i(1 + e_i \cos \alpha_i) - 2\lambda_{i+1} z_i(1 + e_i \cos \beta_i) = 0$$

The most difficult problem is to find a solution to these equations in general case. In the angle free case ($\Lambda = 0$), given the initial orbit, it is an easy matter to use the impulse diagram⁽²⁾ to construct solutions to these equations. However, the final orbit of this construction is not necessarily the one required. But for any solution, once established, it is an easy matter to apply the second variation test in eigenvalue form⁽⁴⁾ to check whether it provides a real local minimum. One particular problem whose analytical treatment can proceed rather far is that of the transfer between two coplanar elliptic orbits when no angular constraint is imposed. Numerical conclusions are given for transfers between circular orbits. For $\Lambda = 0$ the first group (1) of the stationarity conditions has the simple solution:

$$\sin \alpha_i = 0, \quad \sin \beta_{i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

It is logical to take $\beta_i = \alpha_i + \pi$ because, if $\beta_i = \alpha_i$, we simply accumulate two impulses at the same point, if $\beta_i = \alpha_i + 2\pi$ we come back to the same point after describing a complete Keplerian orbit and the solution is equivalent to having superimposed the next impulse at once; we have only increased the transfer duration and its total polar angle. This shows, in passing, that the optimal transfers established under the assumption of unlimited thrust can theoretically be described with a finite thrust engine. The impulses need only be broken into very small parts superimposed during a sequence of intermediate closed coasting orbits. Of course the duration and polar angle tend to infinity at the limit. The last group (2) of stationarity conditions is used to furnish the values of λ_i and λ_{i+1} . However, each equation contains the moduli f_i and f_{i+1} . According to whether the impulses are accelerations or brakings, the derivatives of f_i and f_{i+1} change sign and different values are obtained for λ_i and λ_{i+1} .

We may denote $e_i \cos \alpha_i = a_i$ and $e_i \cos \beta_i = -a_i$ with the advantage that the new eccentricity a_i can vary from $-\infty$ to $+\infty$.

A positive (negative) a_i means that the impulse f_i is applied at the peri-center (apocenter) of the orbit i .

From the derivative with respect to e_{i+1} and z_{i+1} we find the values of λ_{i+1} and λ_{i+2} . Comparison of the two expressions for λ_{i+1} gives $(n-2)$ relations between a_i and z_i .

Their structure depends on the sequence of accelerations and brakings. The three following cases are obtained:

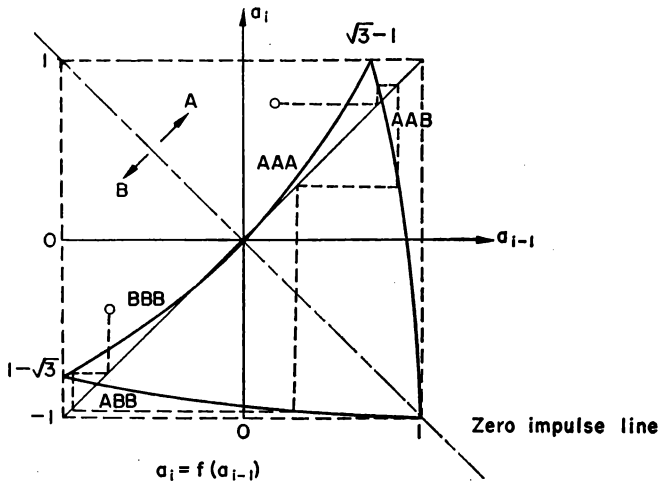
$$\begin{array}{l} A, A, A \\ B, B, B \end{array} \quad a_i = \frac{3+a_{i-1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3(3+a_{i-1})(1-a_{i-1})}$$

$$\begin{array}{l} A, A, B \\ B, B, A \end{array} \quad a_i = 3 - 3a_{i-1}^2 - a_{i-1}^3$$

$$\begin{array}{l} A, B, B \\ B, A, A \end{array} \quad a_{i-1} = -3 + 3a_i^2 - a_i^3$$

We can build the following graph separated in two domains by the zero impulse line. If we know a_{i-1} we must place the value of a_i on one of the curves according to the sequence of accelerations and brakings.

These relations between a_{i-1} and a_i must be satisfied only if the transfer contains more than two impulses. In this case we see that it is difficult to find the path leading with n impulses from the orbit o , having eccentricity e_0 , to the orbit n , having given eccentricity e_n . However, the analysis of the second variation will limit the number of impulses and thus clarify the problem.



BBB, AAA

a_{i-1}	a_i
-1	-0.732051
-0.8	-0.624469
-0.6	-0.497056
-0.4	-0.352271
-0.2	-0.187451
0	0
0.2	0.214359
0.4	0.463068
0.6	0.760769
1.732051	1

AAB

a_{i-1}	a_i
0.732051	1
0.75	0.890625
0.80	0.568000
0.85	0.218373
0.90	-0.159000
0.95	-0.564875
1	-1

ABB

a_i	a_{i-1}
-1	1
-0.95	0.564875
-0.90	0.159000
-0.85	-0.218375
-0.80	-0.568000
-0.75	-0.090625
-0.732051	-1

The second variation test.⁽⁴⁾ The second derivatives of F at points $\sin \alpha_i = 0, \sin \beta_i = 0$ are

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i^2} = -\frac{z_i a_i}{|y_i|} (y_i - z_i e_i + \lambda_i z_i |y_i|)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \beta_{i-1}} = \frac{z_i a_i z_{i-1} a_{i-1}}{|y_i|}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \beta_{i-1}^2} = -\frac{z_{i-1} a_{i-1}}{|y_i|} (y_i - z_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i z_{i-1} |y_i|)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} = 2\lambda_i(1+a_i) - 2\lambda_{i+1}(1-a_i)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial e_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial e_i} = \cos \alpha_i \left(2z_i(\lambda_i + \lambda_{i+1}) + \frac{y_i}{|y_i|} + \frac{y_{i+1}}{|y_{i+1}|} \right)$$

The others are zero. We can now build the matrix

$$F_q^q = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_r} \right)$$

and the constraints matrix

$$G = \left(\frac{\partial g_j}{\partial q_i} \right)$$

where only the derivatives with respect to z_i and e_i turn out to be different from zero:

$$\frac{\partial g_i}{\partial z_i} = 2(1+a_i)z_i$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial e_i} = z_i^2 \cos \alpha_i$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial e_{i-1}} = z_{i-1}^2 \cos \alpha_{i-1}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial z_{i-1}} = -2z_{i-1}(1-e_{i-1})$$

Now it is necessary to obtain all the eigenvalues of

$$\begin{vmatrix} F_q^q - E\zeta & G' \\ G & 0 \end{vmatrix} \text{ to see if they are all positive.}^{(4)}$$

This matrix can be written in a diagonal block form

$$\text{with } A_{ii} = \begin{vmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & A_{nn} & \\ & & & M \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta_{i-1}^2} - \zeta & \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \beta_{i-1}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \beta_{i-1}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i^2} - \zeta \end{vmatrix}$$

Each A_{ii} submatrix furnishes 2 eigenvalues. M , which contains a part of $F_q^2 - E\zeta$ and the nonzero parts of G and G' , gives $n-2$ remaining eigenvalues ($n =$ number of impulses). It is quite easy to obtain a necessary condition on the eigenvalues of A_{ii} . The product of the roots of $|A_{ii}| = 0$ must be positive

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \beta_{i-1}^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \beta_{i-1} \partial \alpha_i} \right)^2 > 0$$

or

$$-a_i a_{i-1} (1 - \lambda_i^2 z_i^2 (1 + a_i)) > 0$$

Presently, with elliptic or parabolic transfers, $1 - \lambda_i^2 z_i^2 (1 + a_i)$ is always positive and the condition reduces to $-a_i a_{i-1} > 0$. If the impulse i is applied at the apocenter (pericenter) of the orbit $i-1$, it must also be applied at the apocenter (pericenter) of the orbit i . Looking at the graph obtained from the first variation, it is easy to deduce that the maximum number of impulses is three and necessarily of the type AAB or ABB . The other conditions on the eigenvalues are best obtained numerically except when limiting the analysis to circular orbits. However, the general conclusion can be stated as follows.

There are three possibilities to transfer between elliptic orbits which satisfy the second variation test: two impulses (Hohmann type) between coaxial elliptic orbits, three impulses, the last being a braking one, transfer by two parabolic coasting arcs with a vanishingly small impulse at infinity. In the particular case of a transfer between circular orbits, the three types satisfy the second variation test but there are zero eigenvalues; we must consider these cases as limiting cases. The three impulses transfer is only possible with a ratio of distances to the center $9 < r_3/r_0 < 15.6$. The transfer through infinity is possible if $r_3/r_0 > 11.94$ (the duration is infinite).

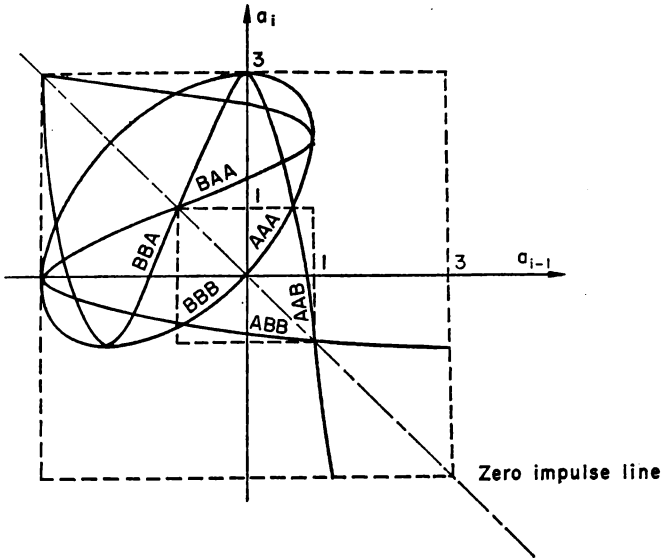
Those conclusions are naturally in agreement with those found previously in the literature.

CONCLUSIONS

The application of Lagrangian multipliers and the eigenvalue type of second variation test determine all the local minima, analytically in the simplest cases, numerically in the most difficult cases. In case of several competing minima the absolute one must be determined by computation. An advantage of the second variation test in the transfer problem between elliptic orbits is that the number of impulses need not be fixed *a priori*. Constraints on the polar angle produces coupling between the blocks of the second variation matrix and the method becomes difficult to handle analytically. It still can serve as a numerical sufficiency test for a minimum.

IMPULSE DIAGRAMS

The (a_{i-1}, a_i) diagram contains virtually all the multiple-impulse transfer cases satisfying the first variation conditions. The use of this diagram is best explained on an example. A knowledge of the apses of the departure orbit and a decision as to the one where the first impulse will be applied determine the a_i coordinate of the first point.



Relations between eccentricities of successive transfer orbits.

Suppose the point is chosen in the (A) domain: the first impulse is an acceleration. The a_i coordinate is brought back as an a_{i-1} coordinate by reflexion in the "mirrorline" $a_i = a_{i-1}$. This operation produces the transfer; it prepares the application of a second impulse at the other apsis of the orbit resulting from the first impulse. The choice of the second a_i coordinate determines the second impulse and, if the operation is ended, the characteristics of the final orbit. This describes the simple Hohmann case.

If the game is to continue by at least a second transfer, the second a_i coordinate must be such that the second point falls on one of the curves AAA or AAB or ABB (the first impulse was an acceleration); suppose that it can be taken on the AAA curve. Then, after a second reflexion on the mirror, the third point must be taken in the (A) domain and we have the representation of a three acceleration impulse transfer.

Again if the game is to continue, the third point will have to fall on either the AAA curve again, or the AAB curve. The general rule is of course that if the previous impulse lies on a curve, the next usable curve

must have its two first letters coincident with the two last ones of the previous curve. Suppose we are now on the *AAB* curve. After reflexion the game can be ended by the use of a braking impulse or prolonged by use of the *ABB* curve. The next prolongation makes necessary use of the *BBB* curve on which a series of points can be taken in succession. A result of these rules, is that after switching from acceleration to braking it is impossible to revert to acceleration.

REFERENCES

1. J. V. BREAKWELL. Minimum impulse transfer. AIAA Astrodynamics Conference, Yale University, New Haven, Connecticut, August 1963.
2. B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE and J. GEERTS. Optimization of multiple impulse orbital transfers by the maximum principle. *Proc. XVth International Astronautical Congress, Warsaw, 1964*, vol. 1, pp. 589–616. Gauthier-Villars.
3. J.-P. MAREC. Transferts orbitaux économiques. *La Recherche Aérospatiale*, **105**, Mars-Avril 1965.
4. B. M. FRAEIJIS DE VEUBEKE. The second variation test with algebraic and differential constraints. Colloquium on Optimization in Space Flight Mechanics, University of Liège, June 1967. Pergamon Press.

REGULAR AND SINGULAR CONTROLS IN MULTIDIMENSIONAL OPTIMUM TRANSFER PROBLEMS

PETER HEMPEL

Junkers Flugzeug- und Motorenwerke GmbH, München

ABSTRACT

The synthesis of minimum-fuel controls for a class of aerospace control problems is considered. The task is reduced to the corresponding synthesis problem for a proper linear model, and the determination of the control is carried out repeatedly, as soon as new measurement data are available. It is shown that the linear system can be treated by resolving three transcendent equations followed by resolving a system of linear equations.

1. INTRODUCTION

During the past several years the theory of optimum control has expanded rapidly. A number of interesting problems in the aerospace field have been studied and resolved.⁽¹⁾ In most cases numerical solutions are given which have been calculated by means of a digital computer. This is due to the fact that the equations of motion are highly non-linear, thus preventing a direct analysis. Proper tools to handle non-linear differential equations in connection with optimization procedures to determine a basic theoretical survey are rarely available.

The author believes, on the other hand, that tools for the analytical treatment of complex optimization problems must be developed. This is important, because the large quantities of empirical material generated by computers urgently call for a proper theoretical skeleton. Even for comparatively simple problems it is still unknown what the structure of the optimum control is in dependence of mission duration and other parameters.

In order to go one step into this direction, this paper presents an analytical treatment of a class of minimum-fuel optimization problems related to the movement of aerospace vehicles and outlines possible applications. A proper linear model is investigated which admits an efficient treatment by means of analytical tools. By updating the model from time to time a practical guidance scheme is obtained.

2. LINEAR MODEL

Let the motion of the vehicle be described by a linear system

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = u \quad (1)$$

with x = position vector,

u = thrust acceleration vector,

$p(t)$, $q(t)$ = coefficient functions approximating resistance and gravity.

How to select $p(t)$, $q(t)$ properly will be explained in section 3. For given boundary values $x(0)$, $\dot{x}(0)$; $x(T)$, $\dot{x}(T)$ and given time duration T , the control $u(t)$ is to be found which minimizes the integral

$$G = \int_0^T |u| dt \quad (2)$$

taking into account the constraint

$$|u| \leq u_{\max} \quad (3)$$

The system (1) may be rewritten in system form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -q(t)E & -p(t)E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix} u \quad (4)$$

with E = unit matrix of dimension 3. For the general discussion of this chapter, every vector may have the dimension n ; subsequently E is the unit matrix of dimension n . Let $\phi(t)$ be a fundamental matrix of the homogeneous system (4); one obtains

$$\begin{aligned} z &= \int_0^T \phi^{-1}(t) Bu dt, \\ z &= \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \phi^{-1}(T) \begin{pmatrix} x(T) \\ \dot{x}(T) \end{pmatrix} - \phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

According to the maximum principle⁽²⁾ the optimum control has the general structure

$$u = u_{\max} \frac{B^* \phi^{-1*} c}{|B^* \phi^{-1*} c|} \quad \text{for } |B^* \phi^{-1*} c| > 1 \quad (6)$$

$$u = 0 \quad \text{for } |B^* \phi^{-1*} c| < 1$$

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ being a constant vector which determines the individual optimum control. The singular case, if it occurs, requires a different treatment.

Putting (6) in (5) yields

$$z = u_{\max} \int_{K(c)} \frac{\phi^{-1} B B^* \phi^{-1*} c}{|B^* \phi^{-1*} c|} dt \quad (7)$$

where $I(c)$ means the set of t -values for which the first inequality (6) holds. (7) is equivalent to $2n$ equations and has to be resolved for c in order to determine the optimum control which belongs to the given boundary values and constraints. It will be shown that c can be derived from the solution of three in general algebraic or transcendent equations for the metric quantities $|c_1|$, (c_1, c_2) , $|c_2|$, followed by resolving a system of linear equations with dimension $2n$. In fact, (7) may be written in the form

$$\begin{aligned}\Delta x &= Ac_1 + Bc_2 \\ \Delta y &= Bc_1 + Cc_2\end{aligned}\quad (8)$$

where A, B, C depend only on the scalar products $|c_1|$, (c_1, c_2) , $|c_2|$. From (8) one deducts

$$\begin{aligned}|\Delta x|^2 &= A^2 |c_1|^2 + 2AB(c_1, c_2) + B^2 |c_2|^2 \\ (\Delta x, \Delta y) &= AB |c_1|^2 + (AC + B^2) (c_1, c_2) + BC |c_2|^2 \\ |\Delta y|^2 &= B^2 |c_1|^2 + 2BC(c_1, c_2) + C^2 |c_2|^2\end{aligned}\quad (9)$$

From eqs. (9) the values of $|c_1|$, (c_1, c_2) , $|c_2|$ can be calculated. Then the linear system (8) (with A, B, C already known) provides a system of linear equations for the components of c_1, c_2 .

An interesting "adjointness" relationship between $\Delta x, \Delta y$ and c_1, c_2 is valid. It follows from (8) that the equation

$$[\Delta x, \Delta y] = (AC - B^2)[c_1, c_2] \quad (10)$$

holds; taking the norm on both sides gives a relationship which is sometimes helpful to reduce (9).

3. MODEL APPLICATION

This section is devoted to the problem of selecting proper models of the type discussed in general in section 2. For a real optimum space maneuver certain defined boundary values of the state must be reached and the optimality conditions maintained throughout the flight. It is evident that open-loop guidance can only achieve the second goal. The sufficiently accurate satisfaction of the final state, however, is much more important, from a practical standpoint, than the exact maintenance of the optimality conditions. In fact, the application of the linear model (1) involves neglecting certain partial derivatives with respect to state variables. This appears to be acceptable, but the problem is recommended for further mathematical studies.

Let the true motion of the mass point representing a space vehicle be governed by

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, \dot{x})\dot{x} + g(x)x = u \quad (11)$$

with the same connotation as in (1). The suggested solution of the fuel optimal transfer is this: From the initial and final values of the state vector an initial estimation of the quantities $f(x, \dot{x})$, $g(x)$ as functions of time is made. This determines initial functions $p(t)$, $q(t)$ for the application of (1). The control is calculated and exerted according to the formulas given in section 2. From time to time, as made apparent by observations of the state, the initial functions $p(t)$ and $q(t)$ are replaced by new estimations reflecting the error which has built up. A flow diagram of events has been presented in Fig. 1.

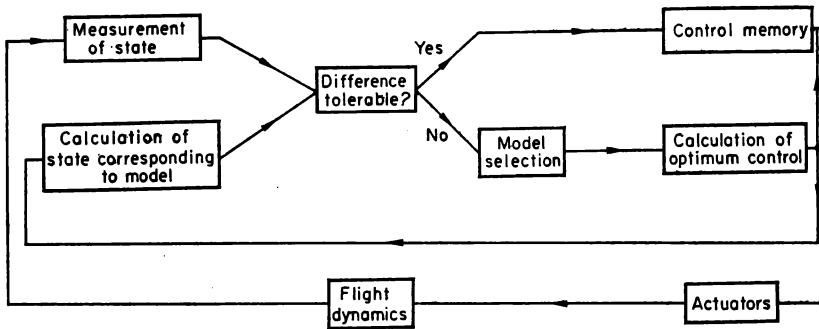


FIG. 1. Block diagram of optimum control

The given solution provides an interesting means to overcome the synthesis problem by paying a small penalty with respect to the exact optimality conditions. Obviously, the method is also applicable to other optimization criteria, if only the calculations corresponding to section 2 can be made in a sufficiently simple manner.

In the following, special models of type (1) are discussed. Consider the case of transferring the masspoint against a central field of gravity with the common inverse-square law and no atmospheric resistance. Equation (11) becomes

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{|x|^3} x = u \quad (12)$$

with $\mu = \text{constant}$ of the field. One has $p(t) \equiv 0$ and the simplest choice of $q(t)$ is to replace the factor $\mu/|x|^3$ by a constant (average or initial) value. This means replacing the original field by the field of a harmonic oscillator at a proper gravity level. The detailed calculations are given in ref. 3. It is shown there that eqs. (9) for this special case can be further reduced to two transcendent equations which contain elliptical functions of the first and the second order.⁽⁴⁾ There is one disadvantage connected with this simple model: the singular case occurs for a sufficiently high thrust level or sufficiently long duration. The singular case is unrealistic, however,

and makes the automatic synthesis of the optimum control more difficult.

In this paper another choice of $q(t)$ is proposed, namely, to take $q(t)$ equal to the function $\mu/|x|^3$ for the initial orbit, as if no control would be executed. By introducing the mean anomaly of the motion in the reference orbit as a new independent variable and properly normalizing the state and control variables, one obtains

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{x}{a} \right) + q(\tau) \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{u}{a\omega^2} \tag{13}$$

$$q(\tau) = \frac{1}{(\cos \varphi - e)^3}, \quad \tau = \omega t = \frac{2\pi t}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t$$

a = large semi-axis of reference orbit,

e = eccentricity of reference orbit,

φ = eccentric anomaly in reference orbit,

φ and τ are connected by the Kepler equation

$$\tau = \varphi - e \sin \varphi \tag{14}$$

The investigation has been tacitly restricted to elliptical orbits. An easy calculation shows that a fundamental matrix of (4) is given by

$$\phi(\tau) = \begin{pmatrix} (\cos \varphi - e)E & \sin \varphi E \\ -\sin \varphi E & \cos \varphi E \\ \frac{1 - e \cos \varphi}{1 - e \cos \varphi} E & \frac{\cos \varphi}{1 - e \cos \varphi} E \end{pmatrix} \tag{15}$$

$\varphi = \varphi(\tau)$ (substituting $\frac{d}{d\tau}$ for $\frac{d}{dt}$, $\frac{x}{a}$ for x and $\frac{u}{a\omega^2}$ for u in (4)). The

square of the important denominator in (6) takes on the form

$$|B^* \phi^{-1} c|^2 = \sin^2 \varphi |c_1|^2 - 2 \sin \varphi (\cos \varphi - e) (c_1, c_2) + (\cos \varphi - e)^2 |c_2|^2 \tag{16}$$

This means that the singular case no longer occurs (except in the special case $e = 0$) and a more realistic model has been derived. Figure 2 shows a typical switching function.

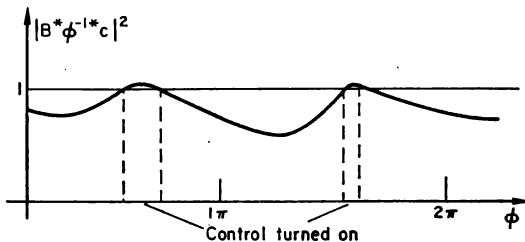


FIG. 2. Typical switching function

As has been shown in ref. 4, the integrals A , B , C can be reduced to elementary functions and elliptical integrals of the first, second and third order. The final analysis of eq. (9) for the considered case is still open. A numerical study is recommended. Study of the case of free boundary values is still missing as well.

REFERENCES

1. A. E. BRYSON, Jr. Applications of Optimal Control Theory in Aerospace Engineering. *J. Spacecraft Rockets* 4, 5, 545-553, 1967.
2. L. S. PONTRJAGIN, V. G. BOLTJANSKIJ, R. V. GAMKRELIDZE, and E. F. MISCENKO. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. R. Oldenbourg, München/Wien, 1964.
3. P. HEMPEL. Optimale dreidimensionale Aufstiegsbahnen in einem Gravitations-Modellfeld. *Z. f. Flugwissenschaften* 15, 3, 85-90, 1967.
4. WHITTAKER and WATSON. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1929.