

Rapport SF-28

Novembre 1974

"LES CONNEXIONS CINEMATIQUES CO-DEFORMABLES

DES ELEMENTS DE COQUE PLANS"

Université de Liège
des Sciences Appliquées et Mathématiques
Chemin des Chevreuils, Bât B52/A
S-4000 LIEGE

B. FRAEIJIS de VEUBEKE

LES CONNEXIONS CINEMATIQUES CO-DEFORMABLES DES ELEMENTS DE

COQUE PLANS

Prenons immédiatement l'exemple concret d'un élément triangulaire à champs cubiques :

1) du type super-élément pour la flexion

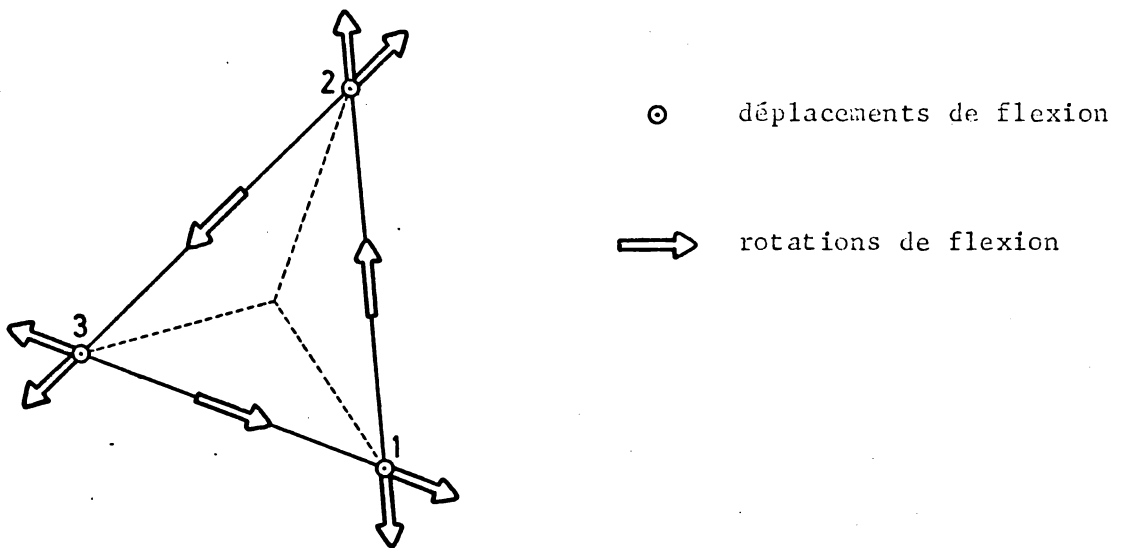


Figure 1

Les définitions des rotations de flexion aux sommets sont les projections orthogonales sur les directions des côtés d'un vecteur rotation au sommet. Les conventions de sens positifs sont ceux de la figure 1;

2) l'état d'extension est défini par les coordonnées généralisées ci-après :

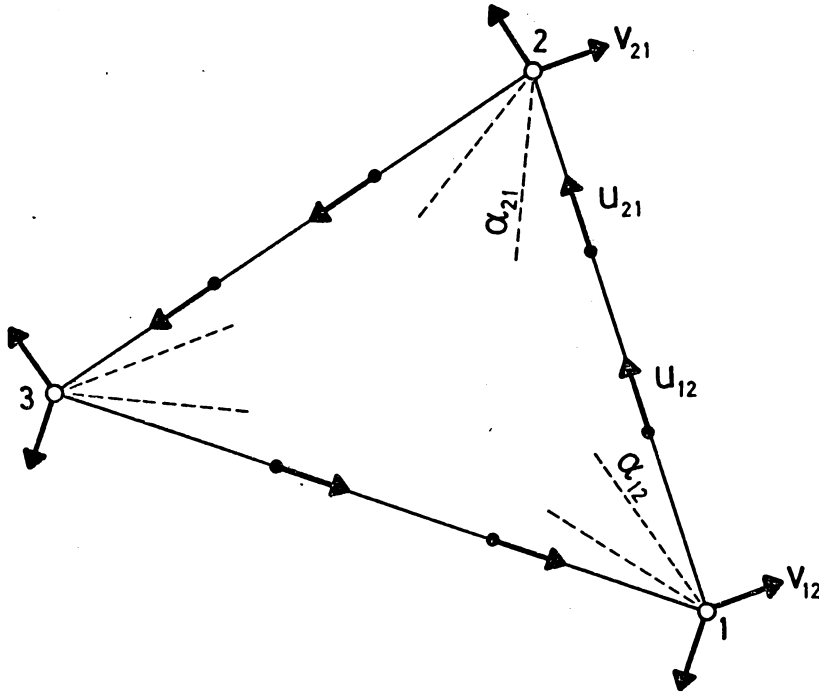


Figure 2

En chaque sommet, les projections orthogonales du vecteur déplacement sur les normales extérieures aux côtés et leur dérivée le long du côté (les pentes de membrane); le long de chaque côté deux déplacements projetés sur le côté.

Les conventions de sens positifs sont ceux de la figure 2.

Le total de $3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$ coordonnées généralisées, augmenté des deux coordonnées de fonctions bulle, correspond aux $2 \times 10 = 20$ coefficients des champs cubiques.

Prenons pour un assemblage de deux éléments, les axes locaux suivants :

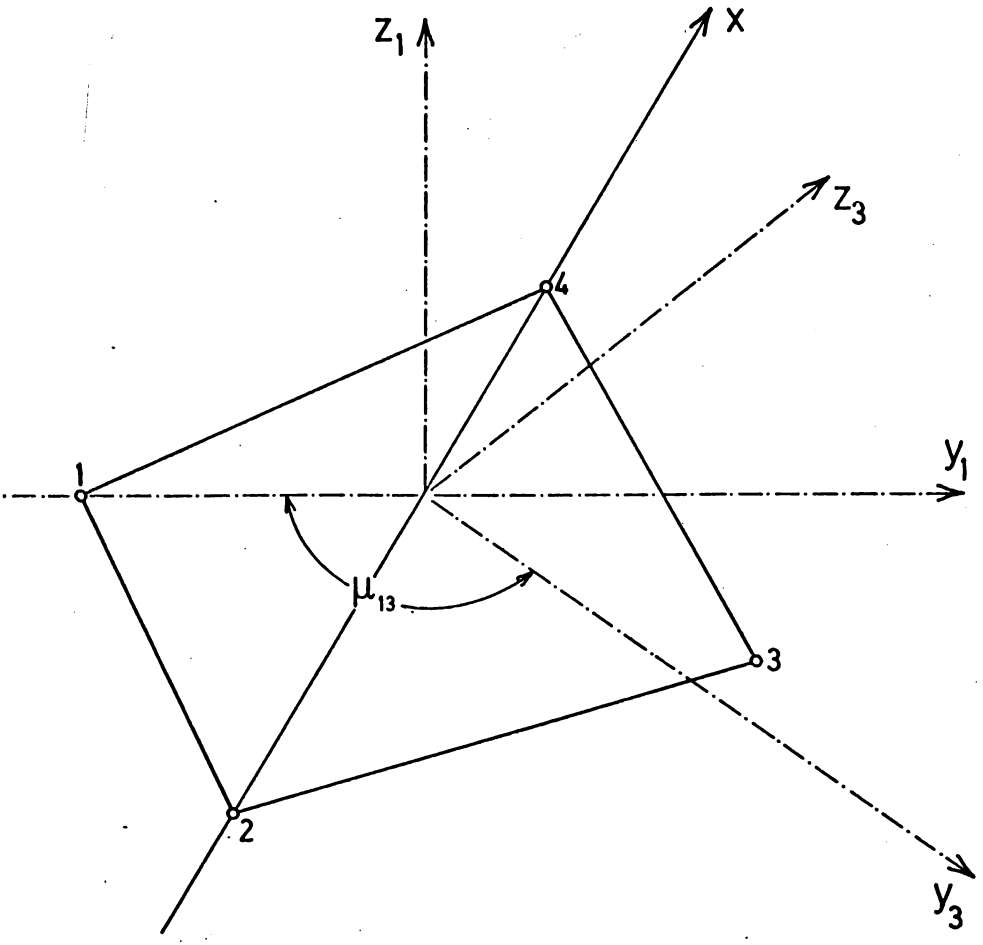


Figure 3

L'axe des x suivant l'intersection, les axes des y₁ et y₃ perpendiculaires dans le plan de chaque élément, les axes des z₁ et z₃ perpendiculaires aux plans.

Les conditions de continuité des déplacements sont alors

$$(a) \quad u_1 = u_3$$

$$(b) \quad \frac{\partial w_1}{\partial y_1} = \frac{\partial w_3}{\partial y_3}$$

$$(c) \quad (v_1 + i w_1) e^{i(\pi - \mu_{13})} = v_3 + i w_3 \quad \text{ou}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \mu_{13} & \sin \mu_{13} \\ -\sin \mu_{13} & -\cos \mu_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Elles doivent avoir lieu pour toute valeur de x de 2 à 0, et, selon les choix des coordonnées généralisées précédentes, seront effectivement assurées avec les champs cubiques par :

l'identification (a) en quatre points de l'axe,

l'identification (b) en trois points

l'identification (c) aux points 2 et 0, accompagnée en ces mêmes points d'une identification de dérivées

$$(d) \quad \begin{pmatrix} \partial v_1 / \partial x \\ \partial w_1 / \partial x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \cos \mu_{13} & -\sin \mu_{13} \\ +\sin \mu_{13} & \cos \mu_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial v_3 / \partial x \\ \partial w_3 / \partial x \end{pmatrix}$$

Recherche d'inconnues nodales

Il est évident qu'en un noeud, il n'existe qu'un seul vecteur déplacement (3 composantes dans un repère global) qui peut être projeté pour chaque élément en :

- une composante de flexion perpendiculaire à son plan,

- deux composantes covariantes d'extension dans son plan selon le schéma de la figure 2.

Ainsi pour les conditions de transition de la figure 3, l'adoption de déplacements nodaux en 0 et en 2 permet de satisfaire automatiquement aux conditions (a) et (c) en ces points.

Il est clair que les déplacements au 1/3 et 2/3 de l'arête d'interface dans la direction de l'interface sont des inconnues nodales (d'interfaces). Leur choix permet d'achever de satisfaire aux conditions (a).

Le choix des rotations de flexion autour de l'axe d'interface, en 0, en 2 et au point milieu, permet de satisfaire automatiquement aux conditions (b). Les rotations de flexion aux sommets d'un élément, telles que définies sur la figure 1, sont donc en principe susceptibles d'être retenues comme inconnues nodales.

Restent à satisfaire, les conditions (d). A cet effet, calculons les rotations de flexion perpendiculaires à l'axe d'interface (figure 4).

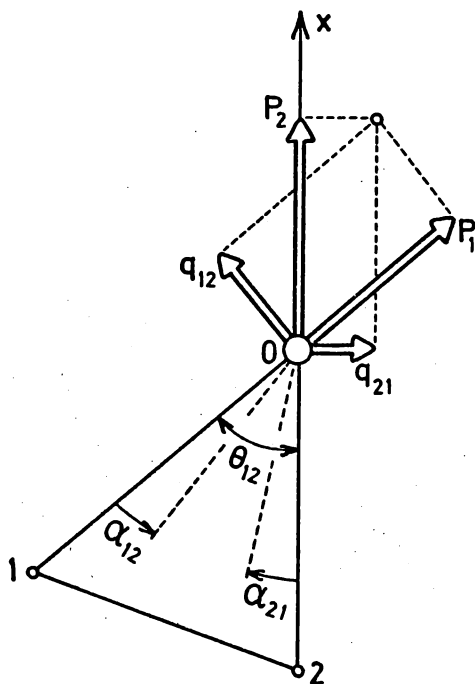


Figure 4

Décompositions de la rotation de flexion dans le plan de l'élément 102.

Tous sens positifs indiqués.

On a

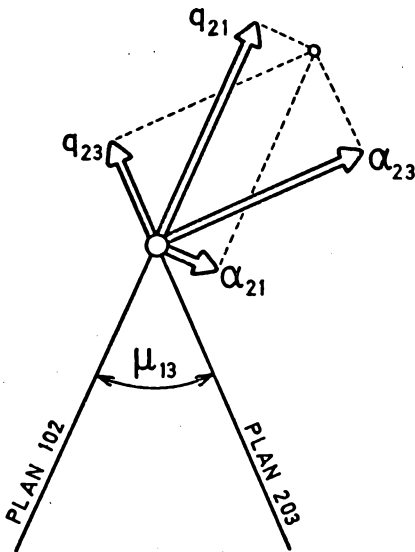
$$(q_{21} + i p_2) e^{i\theta_{12}} = -q_{12} + i p_1 \quad (0)$$

ce qui fournit les valeurs cherchées en fonction des rotations de flexion p_1 et p_2 telles que tentativement retenues comme inconnues nodales :

$$q_{21} = \frac{p_1 - p_2 \cos \theta_{12}}{\sin \theta_{12}} \quad (1)$$

$$q_{12} = \frac{p_2 - p_1 \cos \theta_{12}}{\sin \theta_{12}} \quad (2)$$

Chaque élément apporte au noeud 0, par exemple, deux rotations de flexion (p_1 et p_2 pour l'élément 102) et deux pentes d'extension (α_{12} et α_{21} pour l'élément 102). La figure 5 montre comment la paire de pentes de l'interface, constituée par α_{21} et q_{21} doit être transmise à l'élément 203, dont le plan fait l'angle μ_{13} avec celui de l'élément 102.



Vue dans la direction
de Ox .

Tous les vecteurs rota-
tion sont positifs.

Figure 5

On a

$$(\alpha_{23} + i q_{23}) e^{i\mu_{13}} = \alpha_{21} + i q_{21} \quad (3)$$

ce qui fournit les valeurs

$$\alpha_{21} = \frac{q_{21} \cos \mu_{13} - q_{23}}{\sin \mu_{13}} \quad (4)$$

$$\alpha_{23} = \frac{q_{21} - q_{23} \cos \mu_{13}}{\sin \mu_{13}}$$

On peut encore y remplacer q_{21} par (1) et q_{23} par l'équation (2) où les indices sont reculés d'un rang. Ceci fournit

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\sin \mu_{13}} \left\{ \frac{\cos \mu_{13}}{\sin \theta_{12}} p_1 + p_2 \left(\frac{\cos \theta_{23}}{\sin \theta_{23}} - \frac{\cos \theta_{12}}{\sin \theta_{12}} \cos \mu_{13} \right) - \frac{1}{\sin \theta_{23}} p_3 \right\} \quad (5)$$

$$\alpha_{23} = \frac{1}{\sin \mu_{13}} \left\{ \frac{1}{\sin \theta_{12}} p_1 + p_2 \left(\frac{\cos \theta_{23}}{\sin \theta_{23}} \cos \mu_{13} - \frac{\cos \theta_{12}}{\sin \theta_{12}} \right) - \frac{\cos \mu_{13}}{\sin \theta_{23}} p_3 \right\} \quad (6)$$

Les p_i comme inconnues nodales

Les formules (5) et (6) semblent résoudre le problème du choix des inconnues nodales. En un nœud intérieur, les inconnues nodales seraient constituées par :

- 3 composantes de déplacement du nœud,

- les rotations de flexion p_i communes aux interfaces aboutissant au noeud.

Les pentes de membrane de chaque élément lié au noeud peuvent être calculées à l'aide des formules (5) et (6) et ainsi tous les déplacements généralisés locaux pourraient être générés.

Les relations entre angles au sommet et angles dièdres

Prenons l'exemple d'un noeud triple (trois interfaces convergentes)

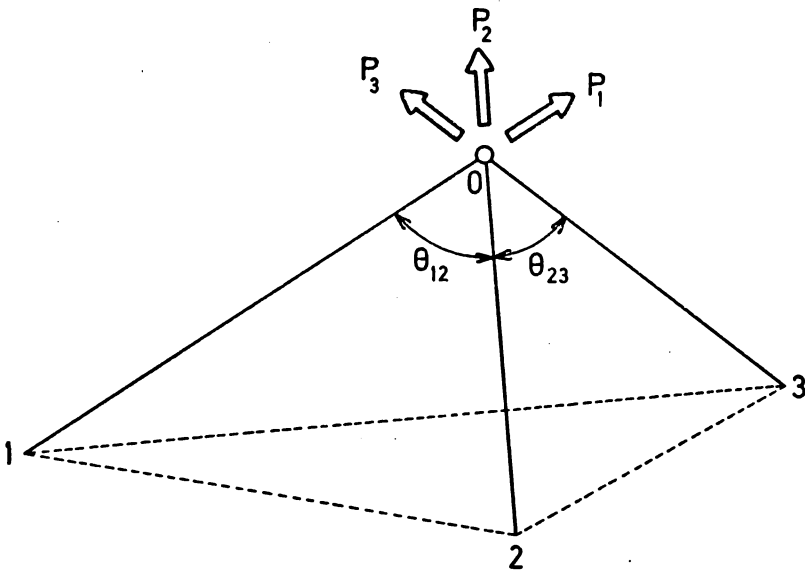


Figure 6

On aurait six degrés de liberté au noeud. Dans le cas

$$\mu_{13} = \mu_{21} = \mu_{32} = \frac{\pi}{2}$$

(coin de cube), les formules donnent

$$\theta_{23} = \theta_{31} = \theta_{12} = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_{12} = -\alpha_{21} = +p_3$$

$$\alpha_{23} = -\alpha_{32} = p_1$$

$$\alpha_{31} = -\alpha_{13} = p_2$$

et les angles droits des éléments au noeud sont conservés, comme on pouvait le prévoir.

Le résultat

$$\alpha_{23} + \alpha_{32} = 0 \quad \alpha_{31} + \alpha_{13} = 0 \quad \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0 \quad (g)$$

pour un noeud triple est en fait général; il exprime que les glissements des faces à hauteur du noeud sont nuls.

En effet, supposons que nous rendions chacune des faces rigides, ce qui annule en particulier les glissements à hauteur du noeud.

Il n'en reste pas moins vrai que l'ensemble rigide possède au noeud la totalité des degrés de liberté de rotation, puisque chaque élément composant, possède la totalité des modes rigides de déplacement.

Par conséquent, une équation telle que

$$\alpha_{23} + \alpha_{32} = f(p_1, p_2, p_3) = 0$$

obtenue après substitution de (6) et de (5) avec ses indices décalés d'un rang, doit être vérifiée pour des valeurs arbitraires de p_1 , p_2 et p_3 . Les coefficients de p_1 , p_2 et p_3 doivent être nuls et les équations purement géométriques qui en résultent expriment des relations très utiles entre les angles au sommet des faces et les angles dièdres.

Ce sont respectivement :

$$\frac{1}{\sin\mu_{13} \sin\theta_{12}} - \frac{1}{\sin\theta_{31} \sin\mu_{21}} = 0 \quad (\text{coef. de } p_1) \quad (7)$$

$$\frac{\cos\theta_{23} \cos\mu_{13}}{\sin\mu_{13} \sin\theta_{23}} - \frac{\cos\theta_{12}}{\sin\mu_{13} \sin\theta_{12}} + \frac{\cos\mu_{21}}{\sin\mu_{21} \sin\theta_{23}} = 0$$

(coef. de p_2) (8)

$$- \frac{\cos\mu_{13}}{\sin\mu_{13} \sin\theta_{23}} + \frac{\cos\theta_{31}}{\sin\mu_{21} \sin\theta_{31}} - \frac{\cos\theta_{13} \cos\mu_{21}}{\sin\mu_{21} \sin\theta_{23}} = 0$$

(coef. de p_3) (9)

Les neuf relations provenant de ces équations et de leur permutées cycliques peuvent être résumées dans :

$$\frac{\sin \mu_{13}}{\sin \theta_{31}} = \frac{\sin \mu_{21}}{\sin \theta_{12}} = \frac{\sin \mu_{32}}{\sin \theta_{23}} = \mu \quad (10)$$

ainsi que

$$\cos \mu_{13} = \frac{\cos \theta_{31} - \cos \theta_{23} \cos \theta_{12}}{\sin \theta_{23} \sin \theta_{12}} \quad (11)$$

avec ses deux permutées cycliques.

Réciproquement, l'existence même de ces relations géométriques entraîne la nullité des glissements au sommet selon (g).

Dégénérescence coplanaire

Supposons maintenant que nous ayons encore un système de trois éléments mais dont les interfaces convergent cette fois dans un même plan.

Faisant $\mu_{13} = \pi$ dans l'équation (3), il vient

$$\alpha_{23} + \alpha_{21} = 0 \quad (12)$$

ce qui représente correctement une transmission directe des pentes de membrane à l'interface 2-0, et de même

$$q_{23} + q_{21} = 0$$

pour la transmission de la rotation de flexion. Cette dernière relation montre, après substitution en fonction de p_1 , p_2 et p_3 , que ces dernières variables ne sont plus indépendantes.:

$$p_3 \sin \theta_{12} - p_2 (\cos \theta_{23} \sin \theta_{12} + \sin \theta_{23} \cos \theta_{12}) + p_1 \sin \theta_{23} = 0$$

et, comme ici $\theta_{12} + \theta_{23} = 2\pi - \theta_{31}$, la relation

$$p_1 \sin \theta_{23} + p_2 \sin \theta_{31} + p_3 \sin \theta_{12} = 0 \quad (13)$$

Sa forme invariante vis-à-vis des permutations cycliques d'indices, montre qu'elle résume les conditions de transition au sommet quand elle est associée à (12) avec ses permutées cycliques, c'est-à-dire

$$\alpha_{23} + \alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{31} + \alpha_{32} = 0 \quad \alpha_{12} + \alpha_{13} = 0 \quad (14)$$

Comparé au cas non dégénéré, il y a augmentation de deux unités dans le nombre de degrés de liberté, qui passe de 3 à 5 (deux p_i et, par exemple, α_{23} , α_{31} et α_{12}).

Comme dans les applications aux coques, on est amené pour un maillage fin à se rapprocher du cas dégénéré, l'emploi des variables p_i conduit à des équations (5) et (6) mal conditionnées. Il faut envisager un autre choix de degrés de liberté.

Différentes formes des équations (5) et (6)

Additionnant (5) et (6), le facteur $1 + \cos \mu_{13}$ vient en évidence

$$\alpha_{21} + \alpha_{23} = \frac{1 + \cos \mu_{13}}{\sin \mu_{13}} \left\{ \frac{p_1}{\sin \theta_{12}} + p_2 (\cot \theta_{23} - \cot \theta_{12}) - \frac{p_3}{\sin \theta_{23}} \right\} \quad (15)$$

et comme

$$\frac{1 + \cos \mu_{13}}{\sin \mu_{13}} = \cot \frac{1}{2} \mu_{13} \rightarrow 0$$

Quand $\mu_{13} \rightarrow \pi$, on voit que pour des valeurs de p_i d'ordre 1, $\alpha_{21} + \alpha_{23}$ est une grandeur petite au voisinage du cas dégénéré.

Par contre, la différence,

$$\alpha_{23} - \alpha_{21} = \frac{1 - \cos \mu_{13}}{\sin \mu_{13}} \left\{ \frac{p_1}{\sin \theta_{12}} - p_2 (\cot \theta_{23} + \cot \theta_{12}) + \frac{p_3}{\sin \theta_{23}} \right\} \quad (16)$$

a une valeur limite plus difficile à discuter, parce que

$$\frac{1 - \cos \mu_{13}}{\sin \mu_{13}} = \tan \frac{1}{2} \mu_{13}$$

tend vers l'infini, mais en même temps le crochet peut s'écrire

$$\frac{1}{\sin \theta_{12} \sin \theta_{23}} \left\{ p_1 \sin \theta_{23} - p_2 \sin (\theta_{12} + \theta_{23}) + p_3 \sin \theta_{12} \right\}$$

et tend, lui, vers zéro en vertu de (13).

Remarquons aussi qu'une rotation du type $p_1 = p_2 = 0$ $p_3 \neq 0$ n'est pas une rotation autour de l'interface 3-0, mais bien une rotation dont le vecteur a une projection orthogonale nulle sur 1-0 et 2-0 et dont l'axe est par conséquent perpendiculaire au plan 1-0-2. Examinons par curiosité l'effet d'une rotation véritable q_1 autour de l'arête 1-0.

Il vient d'abord pour les rotations de flexion dans le plan 1-0-2

$$p_1 = q_1 \quad p_2 = q_1 \cos \theta_{12}$$

Ensuite, s'il s'agit d'une rotation entraînant l'élément voisin 2-0-3 comme un solide :

$$p_3 = q_1 \cos \theta_{31}$$

Les équations (5) et (6) fournissent, eu égard à (11)

$$\alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{23} = \sin \theta_{12} \sin \mu_{13} q_1 \quad (17)_1$$

On trouve de même pour une rotation q_2 autour de 2-0, et q_3 autour de 3-0

$$\alpha_{21} = 0 \quad \alpha_{23} = 0 \quad (17)_2$$

$$\alpha_{21} = - \sin \theta_{23} \sin \mu_{13} q_3 \quad \alpha_{23} = 0 \quad (17)_3$$

respectivement. Les permutations cycliques de ces formules permettent par ailleurs de trouver les valeurs correspondantes des autres pentes de membrane, au cas où l'on aurait affaire à un noeud triple.

Autre forme des équations de transition

Puisque les p_i comme inconnues nodales ne semblent pas se prêter à une forme bien conditionnée pour le calcul des autres variables au voisinage de la dégénérescence, nous les éliminons au profit des q_{ij} . Les trois conditions de transition pour l'arête 2-0 au voisinage du sommet 0 peuvent alors s'écrire comme suit :

prenant la partie réelle et la partie imaginaire de l'équation (3)

$$\alpha_{23} \cos \mu_{13} - q_{23} \sin \mu_{13} - \alpha_{21} = 0 \quad (18)_1$$

$$\alpha_{23} \sin \mu_{13} + q_{23} \cos \mu_{13} - q_{21} = 0 \quad (18)_2$$

Prenons aussi la partie réelle de l'équation (0)

$$q_{21} \cos \theta_{12} - p_2 \sin \theta_{12} + q_{12} = 0$$

et la partie réelle de l'équation

$$q_{32} + i p_3 = (-q_{23} + i p_2) e^{-i\theta_{23}}$$

déduite de (0) par décalage des indices, soit

$$q_{32} + q_{23} \cos \theta_{23} - p_2 \sin \theta_{23} = 0$$

L'élimination de p_2 fournit

$$q_{21} \cos \theta_{12} \sin \theta_{23} + q_{12} \sin \theta_{23} - q_{32} \sin \theta_{12} - q_{23} \cos \theta_{23} \sin \theta_{12} = 0 \quad (18)_3$$

Le système $(18)_1$, $(18)_2$, $(18)_3$ constitue le groupe des conditions de transition pour l'arête 2-0, liant les variables $(\alpha_{21}, \alpha_{23})$ et $(q_{21}, q_{12}, q_{23}, q_{32})$; les variables restantes $(\alpha_{12}, \alpha_{32})$ n'y figurant évidemment pas.

Ce système dégénère pour $\mu_{13} = \pi$ en

$$\alpha_{23} + \alpha_{21} = 0$$

$$q_{23} + q_{21} = 0$$

$$+ q_{21} \sin \theta_{13} + q_{12} \sin \theta_{23} - q_{32} \sin \theta_{12} = 0 \quad (\theta_{13} = \theta_{12} + \theta_{23})$$

et, s'il s'agit d'un noeud triple et pas d'un simple assemblage temporaire de deux éléments coplanaires, on peut encore y remplacer

$$\theta_{13} = 2\pi - \theta_{31}.$$

Analyse des nouvelles conditions de transition pour un noeud triple

Prenons les variables dans l'ordre suivant

$$\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} \alpha_{21} \alpha_{32} \alpha_{13} \quad q_{12} q_{23} q_{31} q_{21} q_{32} q_{13}$$

La matrice du système des liaisons est établie en prenant dans l'ordre les trois liaisons du type $(18)_1$, puis $(18)_2$ et enfin $(18)_3$.

0 $\cos \mu_{13}$ 0 0 $\cos \mu_{21}$ $\cos \mu_{32}$ 0 0	-1 0 0 0 -1 0 0 0 -1	0 $-\sin \mu_{13}$ 0 0 0 $-\sin \mu_{21}$ $-\sin \mu_{32}$ 0 0	0 0 0
0 $\cos \mu_{13}$ 0 0 0 $\sin \mu_{21}$ $\sin \mu_{32}$ 0 0	0 0 0	0 $\cos \mu_{13}$ 0 0 0 $\cos \mu_{21}$ $\cos \mu_{32}$ 0 0	-1 0 0 0 -1 0 0 0 -1
0	0	$\sin \theta_{23}$ $-\cos \theta_{23} \sin \theta_{12}$ 0 0 $\sin \theta_{31}$ $-\cos \theta_{31} \sin \theta_{23}$ $-\cos \theta_{12} \sin \theta_{31}$ 0 $\sin \theta_{12}$	$\cos \theta_{12} \sin \theta_{23}$ $-\sin \theta_{12}$ 0 $\cos \theta_{23} \sin \theta_{31}$ $-\sin \theta_{23}$ $-\sin \theta_{31}$ 0 $\cos \theta_{31} \sin \theta_{12}$

Au vu de cette matrice, il est clair que en toute généralité :

- 1) $(\alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{13})$ s'expriment toujours directement en fonction des deux groupes $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31})$ et (q_{12}, q_{23}, q_{31})
- 2) (q_{21}, q_{23}, q_{31}) s'expriment toujours directement en fonction des deux mêmes groupes.

Après substitution, il ne restera qu'un système de 3 liaisons entre ces deux derniers groupes et le problème se pose de savoir quelles sont les trois meilleures inconnues nodales à retenir dans le cas non dégénéré.

Le cas dégénéré (coplanaire) fournit une indication à cet égard : ses cinq degrés de liberté sont constitués de $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31})$ qui sont arbitraires et du groupe (q_{12}, q_{23}, q_{31}) pourvu d'une seule liaison effective :

$$q_{23} \sin\theta_{31} + q_{31} \sin\theta_{12} + q_{12} \sin\theta_{23} = 0$$

Si donc on est au voisinage de la dégénérescence, le système linéaire exprimant les variables (q_{12}, q_{23}, q_{31}) en fonction de $(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31})$ aura une matrice tendant à dégénérer deux fois tandis que les coefficients des seconds membres tendront eux-même vers zéro.

Le système est, explicitement :

$$\begin{aligned} \sin\theta_{23}q_{12} + (\cos\mu_{13} \cos\theta_{12} \sin\theta_{23} - \cos\theta_{23} \sin\theta_{12})q_{23} - \sin\theta_{12} \cos\mu_{21}q_{31} = \\ \alpha_{31} \sin\theta_{12} \sin\mu_{21} - \alpha_{23} \sin\theta_{23} \cos\theta_{12} \sin\mu_{13} \end{aligned}$$

avec ses deux permutées cycliques.

Combinant cette équation avec la suivante décalée d'un indice et utilisant les formules du type (9) pour remplacer les termes $\cos\theta_{12}$, $\cos\mu_{13}$ et $\cos\theta_{23} \cos\mu_{21}$, ainsi que la relation aux sinus (10), on obtient une forme particulièrement claire quant à la dégénérescence :

$$\begin{aligned}
& (\alpha_{12} \sin \theta_{23} + \alpha_{23} \sin \theta_{31})(1 - \cos \mu_{32}) - \alpha_{31} \sin \theta_{12} (\cos \mu_{13} + \cos \mu_{21}) \\
& = \alpha_{31} \sin \theta_{12} \sin \mu_{21} - \alpha_{23} \sin \theta_{23} \cos \theta_{12} \sin \mu_{13} \\
& \quad + \alpha_{12} \sin \theta_{23} \sin \mu_{32} - \alpha_{31} \sin \theta_{31} \cos \theta_{23} \sin \mu_{21}
\end{aligned}$$

car pour cette équation et ses permutées cycliques, le premier membre tend vers la même relation

$$- 2 (\alpha_{12} \sin \theta_{23} + \alpha_{23} \sin \theta_{31} + \alpha_{31} \sin \theta_{12})$$

tandis que les seconds membres s'annulent.