

Exploiter les démarches des élèves pour soutenir leurs apprentissages : une illustration autour d'une activité intitulée « les puzzles de fractions »

Fanny Boraita, Département Education et Formation - Université de Liège
f.boraita@ulg.ac.be

Isabelle Demonty, Département Education et Formation - Université de Liège
isabelle.demonty@ulg.ac.be

Annick Fagnant, Département Education et Formation - Université de Liège
afagnant@ulg.ac.be

Cet article présente une activité intitulée « Puzzles de fractions » qui a été mise en place auprès d'élèves de 5e et 6e années de l'enseignement primaire (10-12 ans) en vue de donner du sens aux opérations sur les fractions. Il illustre comment l'exploitation des démarches des élèves tout au long d'une activité permet de mettre en œuvre une évaluation formative informelle qui vise à soutenir leur processus d'apprentissage. Dans l'activité présentée, l'évaluation informelle prend place sous la forme de régulations interactives entre élèves et entre l'enseignant et ses élèves lors des phases d'exploitation collectives.

1. Introduction

Cet article présente une activité mise en place auprès d'élèves en fin d'enseignement primaire en vue de donner du sens aux opérations sur les fractions. L'activité « Puzzles de fractions » est une activité qui fait partie

d'un outil didactique intitulé « Du concret pour abstraire », réalisé dans le cadre d'une recherche commanditée conduite entre 2013 et 2015¹. La recherche a été réalisée par des chercheurs de l'Université de Liège en étroite collaboration avec trois formatrices du Centre d'Autoformation et de Formation continuée (CAF) de Tihange et huit enseignants responsables de la formation mathématique des élèves de 5e et 6e années de l'enseignement primaire (élèves de 10-12 ans) ou du premier degré de l'enseignement secondaire (élèves de 12-14 ans).

Prenant la liberté de proposer une extension au titre du numéro thématique consacré à « l'évaluation des apprentissages en mathématiques », nous avons fait le choix d'orienter nos propos autour d'une « évaluation au service des apprentissages » en nous ancrant dans la perspective d'une évaluation formative informelle ou non-instrumentée (Morrisette & Compaoré, 2012 ; Mottier Lopez, 2015). Ce type d'évaluation prend place au cours des activités d'enseignement/apprentissage, notamment à partir des régulations interactives entre l'enseignant et ses élèves (Allal, 2007 ; Bell & Cowie, 2001 ; Morrisette, 2013).

Après avoir présenté brièvement quelques fondements sur lesquels s'appuie l'outil « Du concret pour abs-

¹ « Du concret pour abstraire : un outil pratique à destination des enseignants de 5^e et 6^e primaire et de 1^{re} et 2^e secondaire » (Boraita, Demonty, Pirotte & Fagnant, 2015) est le résultat d'une recherche intitulée « L'enseignement de l'abstraction entre 10 et 14 ans : un outil au service des mathématiques » commanditée

par le Service général de l'Enseignement organisé par la Fédération Wallonie-Bruxelles et menée à l'Université de Liège sous la direction de Dominique Lafontaine (Service d'analyse des Systèmes et des Pratiques d'enseignement) et d'Annick Fagnant (Service de didactique générale et intervention éducative).

traire », nous présenterons les différentes étapes de l'activité « Puzzles de fractions » en illustrant comment l'exploitation des démarches des élèves permet de mettre en œuvre une évaluation formative informelle visant à soutenir leur processus d'apprentissage. Ces illustrations sont issues des mises en place réalisées par les enseignants du groupe de travail impliqué dans la construction de l'outil didactique.

2. L'outil « Du concret pour abstraire »

Dans le domaine des nombres et des opérations, la transition entre l'enseignement primaire et secondaire s'accompagne de l'évolution d'une réflexion ancrée dans le calcul sur les nombres naturels et décimaux au primaire vers les rudiments de l'algèbre au début du secondaire (Kieran, 2007). En géométrie, cette transition n'est pas plus aisée puisqu'elle s'accompagne également d'un certain nombre de changements au niveau du statut des figures géométriques dans le cadre de la preuve ainsi que du rôle des instruments de mesures (Perrin-Glorian, Mathe & Leclercq, 2013). Comment les enseignants peuvent-ils aider les élèves, dès la fin de l'enseignement primaire, à réaliser ces passages progressifs à l'abstraction, indispensables à la cohérence des apprentissages mathématiques lors de la transition primaire-secondaire ? C'est au cœur de cette problématique que s'est positionnée la recherche qui a conduit au développement de l'outil didactique intitulé « Du concret pour abstraire » dont est issue l'activité « Puzzles de fractions ». Son objectif est d'amener les enseignants des deux niveaux scolaires à identifier les véritables difficultés de leurs élèves dans le passage progressif à l'abstraction et

à envisager des démarches d'enseignement qui travaillent spécifiquement ces difficultés.

L'outil didactique propose des activités situées dans les domaines numérique et géométrique. Face aux situations-problèmes proposées dans le domaine numérique, le raisonnement des élèves, généralement centré sur la réponse, doit évoluer vers une analyse fine des opérations permettant d'obtenir cette réponse. Ce type de raisonnement se développe notamment via des activités qui mettent l'accent sur l'exploitation et la confrontation de démarches variées de résolution. Les activités centrées sur les « puzzles » de fractions se situent à ce niveau : en primaire, elles visent à donner du sens aux opérations sur les fractions ; au début du secondaire, elles investissent aussi le calcul algébrique. C'est sur l'activité proposée en primaire que le présent article se centre.

3. L'activité « Puzzles de fractions » proposée en fin d'enseignement primaire

3.1. Les grandes étapes de l'activité

L'activité² vise à donner du sens aux fractions et aux opérations sur les fractions au travers d'une confrontation des démarches de résolution développées par les élèves et d'une exploitation judicieuse de celles-ci par l'enseignant, notamment lors de différents moments collectifs. Le puzzle

² Cette activité s'inspire de l'activité développée par De Terwangne, Hauchart et Lucas (2007) présentée dans l'ouvrage « Oser les fractions dans tous les sens » (De Boeck).

servant de base à cette activité est à la figure 1.

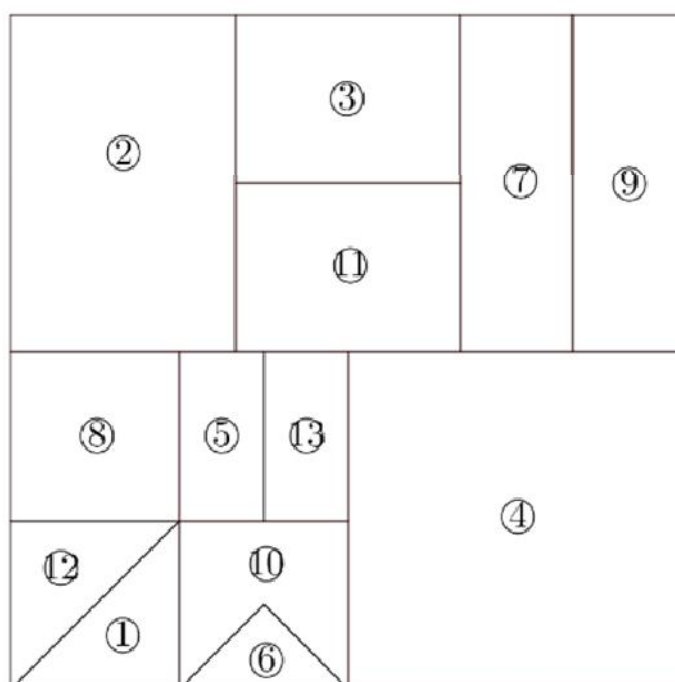


Figure 1. Puzzle servant de base à l'activité proposée pour les élèves de 5e et 6e années primaire

Quatre étapes composent la séquence : (1) la construction du puzzle ; (2) la recherche de la valeur des pièces lorsque le puzzle vaut l'unité ; (3) la vérification que la somme de chaque pièce correspond à l'unité et (4) la recherche de la valeur d'autres pièces au départ d'une autre qui représente l'unité. Tout au long de l'activité, le lien avec le support visuel et la manipulation des pièces du puzzle stimule la variété des démarches possibles pour déterminer la valeur d'une pièce. L'intérêt de l'activité réside dans les confrontations entre ces démarches. Dès l'étape 2, il est important de demander aux élèves d'expliquer leurs démarches au regard des manipulations effectuées avec les pièces du puzzle. C'est en effet la référence aux opérations de fractionnement, pratiquées sur le puzzle dans son entièreté ou sur certaines de ses pièces, qui permet de donner du sens aux opérations sur les fractions.

La séquence proposée amène les élèves à travailler la composition de fractionnements, l'addition de grandeurs fractionnées, la simplification de fractions et la notion de fractions équivalentes. Lors des exploitations réalisées dans certaines classes, les enseignants ont également eu l'occasion de travailler au départ d'une symbolisation plus formelle des opérations sur les fractions : le cas échéant, ils ont pu amorcer avec les élèves une réflexion sur le double statut du signe d'égalité abordé non seulement comme amorce d'un résultat, mais aussi comme signe placé entre deux opérations désignant la même fraction.

3.2. Une évaluation formative informelle au service des apprentissages mathématiques

Contrairement à une évaluation formative formelle (ou instrumentée) qui prend généralement la forme d'une tâche papier-crayon de type « mini-

test » administré en fin de séquence, l'évaluation formative informelle ou non instrumentée (Morrisette, 2013 ; Mottier Lopez, 2015) prend place quant à elle tout au long des activités d'enseignement-apprentissage (Mottier Lopez, 2012 ; Morrisette, 2013). S'inscrivant dans une perspective élargie de l'évaluation formative (Allal & Mottier Lopez, 2005), elle se réalise dans l'interaction entre l'enseignant et les élèves en cours d'apprentissage et se cible sur les régulations interactives réalisées à l'initiative de l'enseignant (Mottier Lopez, 2012).

L'activité « Puzzles de fractions » alterne des moments en duo et en groupe-classe. Le cœur de l'activité réside dans les échanges et les moments de confrontations lors desquels l'enseignant a un rôle prépondérant à jouer puisque c'est lui, par ses interventions, qui aidera les élèves à symboliser leurs démarches et à progresser dans la recherche des différentes pièces du puzzle. Les discussions mathématiques qui s'installent entre les différents acteurs constituent un moment durant lequel les significations de chacun seront ajustées et régulées afin de soutenir les apprentissages de tous (Morrisette, 2013).

Grâce aux interactions se déroulant au sein des binômes et aux confrontations collectives, les élèves sont amenés à expliciter leurs raisonnements et à justifier leurs démarches. L'enseignant doit les aider à exprimer leurs démarches et à les symboliser. Par exemple, lorsque les élèves composent deux fractionnements du puzzle, les interactions orchestrées par l'enseignant peuvent conduire les élèves à comparer des opérations impliquant des fractions et à confronter différentes expressions. Son rôle est essentiel pour soutenir les échanges et faire évoluer les apprentissages mathématiques des élèves.

3.3. Illustration du déroulement de l'activité et d'épisodes de régulations interactives

- Étape 1 : la construction du puzzle

Les élèves constituent le puzzle et sont informés qu'ils devront « nommer les pièces » du puzzle en trouvant quelle fraction une pièce représente par rapport à l'unité. La manipulation des pièces leur permet de mettre directement les différentes pièces du puzzle en relation les unes avec les autres. Les élèves manipuleront les pièces durant toute la séquence ; elles ne doivent donc pas être collées. Plusieurs reconstitutions de puzzle sont possibles, mais un modèle peut être distribué aux élèves de façon à ce que le groupe classe travaille à partir du même point de référence tout au long de l'activité. Le modèle servant de base à l'activité est celui présenté à la figure 1 ci-dessus.

- Étape 2 : la recherche de la valeur des pièces lorsque le puzzle vaut une unité

Par duo, les élèves déterminent la valeur des pièces. Plusieurs démarches peuvent être utilisées pour nommer une même pièce et il est souvent nécessaire de mettre en relation les pièces les unes avec les autres (voir figure 2).

La recherche de la valeur de la pièce (4) ne pose pas de difficulté : la plupart des élèves la reportent quatre fois dans le puzzle et déduisent qu'elle correspond à $\frac{1}{4}$. Une fois que la pièce (4) est trouvée, l'enseignant peut proposer de chercher la valeur de la pièce (8) en la mettant en relation avec la pièce (4). Cette démarche conduit au raisonnement suivant : $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Par la suite, les élèves déterminent la valeur de la pièce (5) en la mettant en relation avec la pièce (8) : $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$ ou avec la pièce (4) : $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{4} = \frac{1}{32}$.

Figure 2. Exemple illustrant la mise en relation de plusieurs pièces du puzzle

Lors des phases d'exploitations collectives, l'enseignant conduit les élèves à confronter différentes opérations sur les fractions : les élèves expliquent les raisonnements qu'ils ont menés pour trouver la valeur d'une pièce et l'enseignant les aide à symboliser les démarches en mobilisant des opérations sur les fractions.

Généralement considérées comme abstraites, ces opérations prennent ici du sens grâce au support constitué par le puzzle qui permet de visualiser les relations entre les pièces et les résultats des opérations effectuées (figure 3).

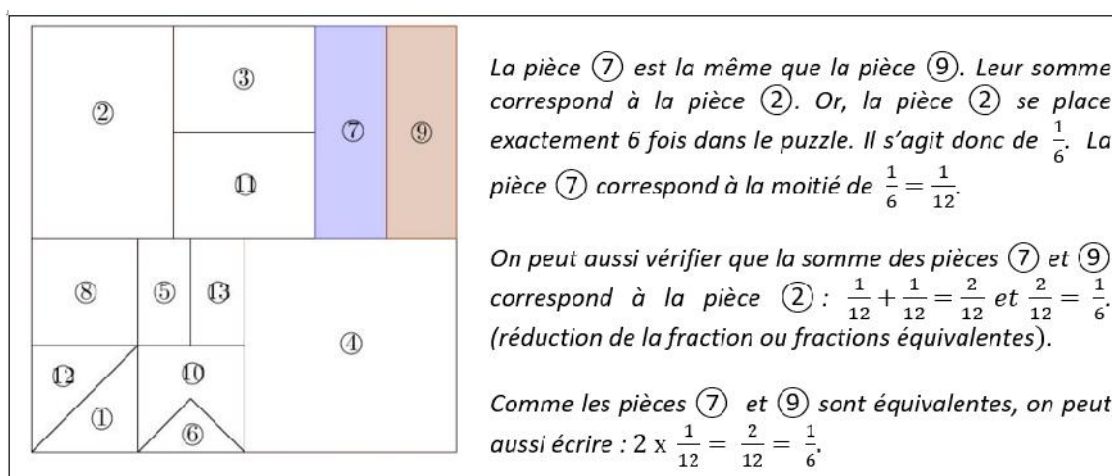


Figure 3. Exemple illustrant la confrontation de différentes opérations impliquant des fractions

Le verbatim repris dans la figure 4 illustre un exemple de régulations interactives entre un enseignant et ses élèves.

Le type de rétroaction formative que privilégie l'enseignant dans les interactions vise à susciter le questionnement chez les élèves.

Enseignant: « Comment peut-on trouver la pièce ② à l'aide des pièces ⑦ et ⑨ ? »
Élèves: « C'est la ⑦ et la ⑨ ensemble »
Ens: « Donc comment fait-on ? Montrez-moi »
El: « C'est 2 fois la pièce ⑨ qui fait la pièce ② ».
Ens: « Donc j'écris $2 \times$ quelle fraction ? »
El: « $2 \times \frac{1}{12}$ »
El: « Ce qui est égal à $\frac{2}{12}$ »
Ens: « Et si je veux aller plus loin encore. Je peux simplifier ? »
El: « Oui, $\frac{1}{6}$ »
Ens: « Quelqu'un a fait autrement que ce calcul $2 \times \frac{1}{12}$? »
El: « Nous : $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$ »
El: « parce que c'est la pièce ⑦ et la ⑨ »
El: donc égal aussi à $\frac{1}{6}$ »

Figure 4. Verbatim illustrant des régulations interactives enseignant – élèves

L'enseignant ne doit pas « faire à la place » des élèves, mais il doit les soutenir et les aider à donner du sens aux opérations qu'ils effectuent sur les fractions. Prenant cours « dans le feu de l'action », ces régulations interactives ne sont pas sans risque puisqu'il s'agit « d'inférer dans les processus de pensées et de communication en cours » (Perrenoud, 1998, p.114.). Il est donc primordial que l'enseignant interprète correctement les démarches des élèves pour leur fournir des régulations appropriées à leur raisonnement.

Comme suggéré par Morrissette et Compaoré (2012), dans l'évaluation informelle non-instrumentée, impliquer l'ensemble du groupe-classe est l'occasion de revenir sur les principales difficultés rencontrées. En invitant l'élève 1 à expliquer sa démarche, l'enseignant favorise l'émergence d'une régulation interactive entre élèves (figure 5). La démarche de l'élève 1 est incomplète : il exprime une pièce en fonction d'une autre, mais en perdant de vue le puzzle complet. Les échanges avec l'élève 2 lui permettent de prendre conscience de son erreur, puis les deux élèves construisent ensemble une solution correcte.

Certains élèves trouvent la valeur de la pièce ⑦ en remarquant que celle-ci entre trois fois dans la pièce ④.

Élève 1: « La pièce ⑦ entre trois fois dans la pièce ④ donc elle vaut $\frac{1}{3}$ »

Élève 2: « Non car la pièce ④ c'est le quart ».

E1: Donc comment veux-tu faire ?

E2: « Ben, c'est $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ alors »

E1: « Et ça fait quoi ? »

E2: « Ben, attends $\frac{1}{12}$ »

Figure 5. Verbatim illustrant des régulations interactives entre élèves

Les mises en commun sont aussi des moments privilégiés pour établir des liens entre les apprentissages réalisés. C'est une étape très importante d'une évaluation formative informelle qui doit « s'inscrire dans la logique d'une régulation continue explicite » (Morrissette & Compaoré, 2012, p.32).

La confrontation des démarches peut être l'occasion d'amener les élèves vers une réflexion un peu plus abstraite qui s'appuie sur une écriture plus formelle des opérations sur les fractions. Si ce type de réflexion peut être amorcé en primaire, il devra être poursuivi au secondaire puisque les opérations sur les fractions vont progressivement se détacher d'un support visuel pour opérer directement sur des fractions-nombres.

Par exemple, concernant la valeur de la pièce ⑦, les deux démarches rapportées dans les extraits repris dans les figures 3 et 5 permettent de faire le point sur différents éléments importants. Dans l'extrait repris dans la figure 3, on a vu que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, ce qui peut aussi s'écrire $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (multiplication de fractions). On a aussi vu que $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12}$ (addition de fractions) et que $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ (simplification de la fraction). Dans l'extrait repris dans la figure 5, on a vu que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ correspondait aussi à $\frac{1}{12}$. On peut dès lors montrer que $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$ est égal à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, autrement dit, que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$. Dans ces exemples, le statut de l'égalité est double. Lorsque les élèves symbolisent une démarche à l'aide d'opérations impliquant des fractions, l'égalité, symbolisée par le signe « = », est envisagée de manière dynamique et permet d'amorcer le résultat de l'opération. À l'inverse, lorsque les élèves sont amenés à comparer deux démarches permettant de trouver la valeur d'une même pièce, le signe d'égalité est

alors vu de manière statique, comme un signe placé entre deux expressions représentant la même fraction.

- Étape 3 : vérifier que la somme de chaque pièce correspond à l'unité

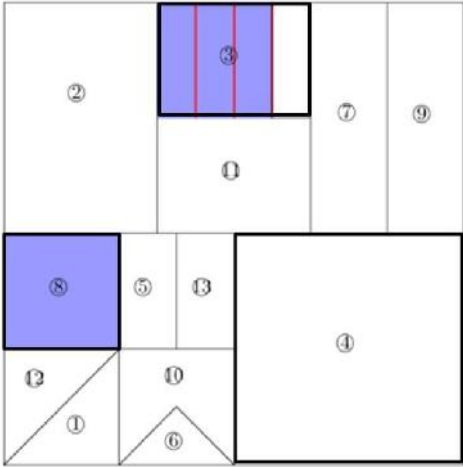
Après avoir déterminé la valeur de chaque pièce du puzzle, les élèves peuvent vérifier que la somme des pièces est égale à l'unité. C'est toujours par confrontation des opérations avec le dessin du puzzle que les élèves sont amenés à raisonner pour additionner les fractions.

- Étape 4 : trouver la valeur d'une pièce au départ d'une autre pièce

Dans cette étape, l'unité de référence change. Elle ne correspond plus au puzzle entier, mais à une pièce. Ce changement d'unité permet d'introduire des fractions supérieures à l'unité. Comme pour les étapes précédentes, il importe que les différentes démarches énoncées par les élèves puissent être confrontées. C'est lors de ces confrontations que l'évaluation informelle prend essentiellement place.

À titre illustratif, la figure 6 expose quelques exemples de démarches développées par des élèves lors de la réalisation de cette 4^e étape de l'activité.

Si la **pièce (8)** est une unité, que représente la pièce (3) ?



Démarche 1 :

La pièce (3), c'est la pièce (8) + $\frac{1}{3}$ de la pièce (8).
C'est donc $\frac{4}{3}$.

Démarche 2 :

La pièce (8), c'est $\frac{3}{4}$ de la pièce (3). Donc la pièce (3), c'est $\frac{4}{3}$ de la pièce (8).

Démarche 3 :

La pièce (8), c'est $\frac{1}{4}$ de la pièce (4).
La pièce (4), c'est $4 \times$ la pièce (8). La pièce (4) vaut donc 4.
La pièce (3), c'est la même valeur que la pièce (7).
On voit que c'est $\frac{1}{3}$ de la pièce (4).
Comme la pièce (4) vaut 4 ; le pièce (3) vaut donc $\frac{1}{3}$ de 4, donc $\frac{4}{3}$.

Figure 6. Démarches permettant de trouver la valeur d'une pièce lorsqu'une autre pièce représente l'unité (la fraction est plus grande que l'unité)

4. Conclusion

Si les visées de l'évaluation formative sont de soutenir la progression des apprentissages, d'examiner les difficultés et de proposer des pistes de régulations aux démarches de raisonnement des élèves (Perrenoud, 1998 ; Allal & Mottier-Lopez, 2005), on constate trop souvent qu'elle se réduit à l'administration de « mini-tests » récupérés dans une visée sommative (Morrissette, 2013). Cette façon de circonscrire l'évaluation formative ne permet pas d'explorer suffisamment les liens entre les apprentissages et leur évaluation. Afin de pallier cette vision réductrice de l'évaluation formative, l'évaluation informelle non-instrumentée, par ses régulations interactives régulières, permet de réguler et de soutenir l'apprentissage tout

L'objectif de cet article était de présenter une activité mise en place auprès d'élèves de la fin de l'enseignement primaire (10-12 ans) en vue de donner du sens aux opérations sur les fractions. L'article visait aussi à illustrer comment l'exploitation des démarches des élèves tout au long de l'activité permettait de mettre en œuvre une évaluation formative informelle propre à soutenir leur processus d'apprentissage. Il n'est pas rare de constater que les élèves manipulent des « objets » mathématiques et des symbolisations abstraites qu'ils n'ont pas intégrés correctement. C'est notamment via des activités qui mettent l'accent sur l'exploitation et la confrontation de démarches variées qu'il est possible de donner du sens aux

mathématiques. Dans l'activité présentée, le lien avec le support visuel et la manipulation des pièces sont importants pour donner du sens aux opérations sur les fractions et aux différentes expressions symboliques associées. Les régulations interactives, orchestrées par l'enseignant tout au long de l'activité, sont également nécessaires pour soutenir les élèves dans leurs recherches et pour les aider à symboliser leurs raisonnements. L'évaluation informelle non-instrumentée favorise ainsi l'entretien d'un lien indispensable entre l'apprentissage et l'évaluation au service de cet apprentissage.

Références

Allal, L. (2007). « Régulation des apprentissages : Orientation conceptuelle pour la recherche et la pratique en éducation ». In Allal, L. & Mottier Lopez, L. (dir.). Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation. Bruxelles : De Boeck. 7-23

Allal, L. & Mottier Lopez, L. (2005). Formative evaluation of learning: A review of publications in french. In Formative Assessment: Improving learning in secondary classrooms (p. 265-290). Paris : Éditions OCDE.

Boraita, F., Demonty, I., Pirotte, M. & Fagnant, A. (2015). Du concret pour abstraire. Un outil pratique à destination des enseignants de 5e - 6e primaire et de 1re - 2e secondaire. Rapport final de la recherche intitulée « L'enseignement de l'abstraction entre 10 et 14 ans : un outil au service des cours de mathématiques ». Belgique : Liège, Université de Liège, aSpe, DGIE. <http://hdl.handle.net/2268/188488>

Bell, B. & Cowie, B. (2001). Formative assessment and science education. Dordrecht : Kluwer Academic Press.

De Terwangne, M., Hauchart, C. & Lucas, F. (2007). Oser les fractions dans tous les sens. Bruxelles, Belgique : De Boeck.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra in the middle school through college levels: building meaning for symbols and their manipulation. In F.K Lester (Ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Morrisette, J. (2013). Des modes d'interaction au cœur de la mise en œuvre d'une évaluation formative non instrumentée. Nouveaux C@hiers De La Recherche En Education, (16)2, 88-111.

Morrisette, J. & Compaoré, G. (2012). Le savoir-faire enseignant sur l'évaluation formative informelle. Formation et Profession, (20)3, 26-35.

Mottier Lopez, L. (2012). La régulation des apprentissages en classe. Bruxelles: De Boeck.

Mottier Lopez, L. (2015). Evaluations formatives et certificatives des apprentissages. Bruxelles : De Boeck

Perrenoud, P. (1998). L'évaluation des élèves. De la fabrication de l'excellence à la régulation des apprentissages. Bruxelles, Belgique : De Boeck.

Perrin-Glorian, M.J., Mathe, A.C., Lelerc, R. (2013). Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Repères-Irem, 90, 5-41.