En souvenir de la conjecture de la discrépance

Jacques Bair

Mots clés : conjecture, théorème, suite dont les éléments sont 1 ou -1, discrépance.

Résumé. *La conjecture de la discrépance a été formulée par P.* Erdös *en 1932. Nous la présentons d'une manière intuitive, mais aussi de façon plus formelle. Nous énonçons également un théorème que T.* Tao *en a déduit fin 2015.*

Introduction

Le mot « discrépance » est peu courant en langue française ; d'ailleurs, nous ne l'avons pas trouvé dans nos dictionnaires habituels. Il provient du latin *discrepantia* et a pour synonyme « dissonance » ; en un sens figuré, il signifie encore « divergence, dissemblance, discordance ».

Au début des années 1930, le prolifique mathématicien hongois d'origine juive Paul Erdös (1913 - 1996) (1) a énoncé la *conjecture de la discrépance*. Il a fallu attendre plus de quatre-vingts années pour que cette énigme soit élucidée. C'est en effet le mathématicien américain Terence Tao (2) qui a démontré la pertinence de cette conjecture pendant le dernier trimestre de l'année 2015 (cf. [1] et [5]).

Dans cet article, nous ne donnerons pas la solution détaillée de ce problème, car cela dépasse largement le cadre de ce travail. Nous allons nous contenter d'introduire intuitivement et concrètement la conjecture elle-même. Ensuite, nous présenterons mathématiquement la conjecture énoncée par Erdös, avant de citer le théorème correspondant obtenu par Tao.

1. Présentation intuitive du problème

Le « jeu » qui va être présenté se pratique à deux joueurs. Pour des raisons qui apparaîtront clairement ci-dessous, ceux-ci seront nommés dans la suite le *poseur* et le *ramasseur*.

1.1. Le problème dans une version simple

Le poseur possède des billes toutes semblables, sauf qu'elles sont soit blanches, soit noires, et ceci en nombre illimité pour chacune des deux couleurs. Il effectue une promenade au cours de laquelle il va déposer sur le sol une bille après chaque mètre parcouru. Il doit placer le plus possible de billes, mais il est obligé de « bien » choisir la couleur lors de chaque dépôt, sauf pour le premier qui correspond, pour fixer les idées, au placement d'une bille blanche. En effet, le ramasseur, qui va le suivre en partant du même endroit initial, va ramasser les billes et les placer sur un des deux

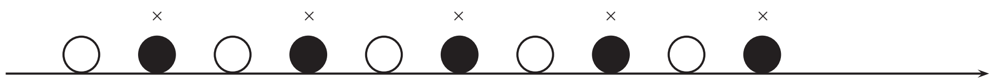
(1) Des renseignements sur ce mathématicien sont donnés en fin d'article.
(2) Sur cet auteur, voir l'article [2].

plateaux d'une balance, les billes blanches étant mises sur le plateau de droite et les billes noires à gauche ; toutefois, le ramasseur a la possibilité de prendre les billes, soit tous les mètres, soit tous les deux mètres, ou bien tous les trois mètres et ainsi de suite (les espacements entre deux billes successives pouvant donc augmenter à chaque fois d'un mètre). Il importe que la balance en question soit, quel que soit le mode de ramassage, *bien réglée* en ce sens que les nombres de billes sur les deux plateaux ne peuvent différer que d'une unité au plus.

Combien de billes le poseur pourra-t-il placer sur le sol de sorte que la balance du ramasseur reste constamment bien réglée ?

1.2. L'alternance, une proposition naturelle

Le poseur pourrait avoir le réflexe assez naturel d'alterner les billes blanches et noires pour obtenir la disposition suivante :



Dans ce cas, son partenaire aura tout le temps sa balance bien réglée s'il accomplit des pas simples (c'est-à-dire d'un mètre chacun). Mais, dès qu'il allongera les pas et ramassera les billes tous les deux mètres par exemple, il constatera que sa balance penchera vite vers la gauche (en fait, à partir du deuxième double pas).

Une meilleure réponse doit être plus subtile.

1.3. Une solution optimale

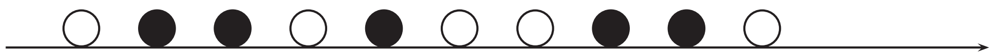
Nous allons procéder par étapes successives, en essayant lors de chacune d'elles d'augmenter de deux unités le nombre de billes utilisées par le poseur. Cette méthode s'inspire un peu de la vidéo [4].

Comme la première bille est par convention blanche, il convient évidemment que la suivante soit noire pour maintenir la balance bien réglée, de sorte que la première étape donne ce résultat :

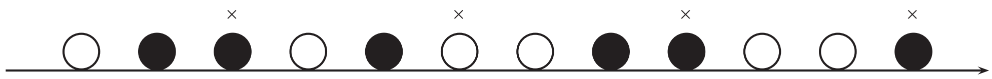
Quand les deux premières billes sont sélectionnées, le poseur n'a aucune indication relative à la couleur de la troisième bille s'il pense que son partenaire va ramasser les billes tous les mètres ; mais dès qu'il se souvient que le ramasseur peut récupérer les billes tous les deux mètres, il est obligé de choisir une quatrième bille blanche (puisque la deuxième est noire) ; donc la troisième doit être noire en se rappelant que le ramassage peut se faire tous les mètres (et que la quatrième est blanche). Ainsi, la deuxième étape fournit la configuration suivante :

En continuant de la même manière, le poseur peut placer deux billes supplémentaires lors de chaque étape. Il pose en premier lieu la dernière bille en tenant compte de la possibilité qu'a le ramasseur de ne prendre les billes qu'après des espaces qui deviennent de plus en plus longs (pouvant augmenter à chaque étape d'une unité), puis il dépose l'avant-dernière en revenant à l'idée d'un possible ramassage tous les mètres. De la sorte, à l'issue de chaque étape, le nombre de billes utilisées est pair, avec autant de blanches que de noires.

Les deux joueurs arrivent ainsi à la cinquième étape qui se présente comme suit :



En restant fidèle à sa méthode, le poseur va ensuite placer en sixième étape une douzième bille noire puisque la sixième est blanche ; en conséquence, la onzième doit être blanche pour respecter l'équilibre entre les deux couleurs à l'issue de chaque étape. Mais cette situation débouche sur une impossibilité ; de fait, un ramassage tous les trois mètres déréglerait la balance puisqu'il y aurait alors une bille blanche et trois noires. La figure suivante résume cette ultime phase :



Ce petit raisonnement montre que le poseur ne peut pas placer douze billes en respectant les règles fixées et que, dès lors, le nombre maximal recherché est effectivement égal à onze.

1.4. Généralisation et conjecture

Si la condition de réglage de la balance devient moins contraignante, alors le nombre de billes pouvant être utilisées va naturellement croître.

Donnons deux cas particuliers fort simples ; ils sont cités par T. Tao dans [5].

Si la balance se dérègle dès que les nombres de billes sur les deux plateaux diffèrent d'au moins trois (et non plus deux comme ci-dessus) unités, le poseur pourra placer 1 161 billes sur le sol, mais pas plus. Si un bon réglage tolère une différence entre les plateux de quatre unités (et non plus trois), le nombre total de billes employées peut dépasser 13 000.

La question étudiée par Erdös et ses successeurs consiste à se demander s'il est possible de traiter semblablement des situations plus compliquées correspondant aux cas où la balance reste bien réglée lorsque la différence entre les nombres de billes sur les deux plateaux peut devenir aussi grande que l'on veut.

La conjecture de la discrépance se ramène à cette supposition : quel que soit le niveau de réglage de la balance, le poseur peut toujours placer sur le sol des billes de manière à ce que la balance du partenaire se dérègle lors du ramassage.

2. Présentation formelle du problème

Pour étudier le problème exposé dans la section précédente, les mathématiciens font appel à des suites infinies particulières ; en effet, les billes utilisées par le poseur sont en nombre illimité pour chacune des deux couleurs, et le dépôt d'une bille blanche peut être représenté par le nombre $+1$ et celui d'une noire par l'opposé -1. En participant à ce jeu, les protagonistes sont donc en présence d'une suite infinie dont les éléments sont $+1$ ou -1. Par exemple, les deux raisonnements développés dans la section précédente conduisent à de telles suites, à savoir $(+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, \ldots)$ et $(+1, -1, -1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, \ldots)$.

Attardons-nous quelque peu sur de telles suites et, en premier lieu, présentons brièvement le cas particulier, simple et bien connu, d'une suite alternée.

2.1. Suite alternée

Les éléments d'une suite alternée sont en réalité les valeurs prises successivement par la fonction f définie sur $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ par $f(i) = (-1)^{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Nous allons dès lors assimiler cette suite à la fonction elle-même, et la noter simplement f ou plus explicitement $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$.

Bien entendu, la suite f est bornée. De plus, pour chacune de ses suites partielles $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$, la différence entre le nombre d'éléments $+1$ et celui de -1 est nulle (lorsque n est pair) ou vaut 1 (lorsque n est impair) ; or, cette différence est donnée par la somme $\sum_{j=1}^{n} f(j)$; on a donc, quel que soit l'entier n, $|\sum_{j=1}^{n} f(j)| \leqslant 1$.

Par ailleurs, il est bien connu que la série de Grandi, c'est-à-dire la suite formée par toutes les sommes partielles de f, diverge ; toutefois, elle est « quasi-convergente » en un certain sens bien précis (voir [3]).

Intéressons-nous aux sous-suites *le long d'une progression arithmétique homogène*, c'est-à-dire à celles de la forme $(f(d), f(2d), f(3d), \ldots)$, où d désigne la raison (3) de la progression arithmétique considérée. Par exemple, pour $d = 2$, on obtient la sous-suite constante $(-1, -1, -1, \ldots)$; celle-ci donne lieu à cette égalité $|\sum_{j=1}^{n} f(2j)| = n$. Dans le cas général, on constate que les nombres en question $|\sum_{j=1}^{n} f(jd)|$ peuvent, pour des entiers d et n bien choisis, soit rester inférieurs à une constante donnée, soit devenir aussi grands que souhaité.

2.2. Cas général d'une suite dont les éléments sont $+1$ ou -1

Soit une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\{-1, +1\}$. Nous allons considérer la suite composée des différentes valeurs et l'assimilerons à nouveau à la fonction elle-même ; nous la noterons $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$, ou plus simplement f, ou de façon plus explicite $(f(1), f(2), f(3), \ldots)$. Considérons ses sous-suites *le long d'une progression arithmétique homogène*, c'est-à-dire les suites de la forme $(f(d), f(2d), f(3d), \ldots)$. Une somme partielle $\sum_{j=1}^{n} f(jd)$ est égale à la différence entre le nombre de ses termes égaux à $+1$ et celui de ses termes -1.

Erdös s'est demandé si de telles sommes partielles peuvent devenir très grandes en valeur absolue. En d'autres termes, il s'est intéressé à ce que l'on appelle la *discrépance* de la suite f : intuitivement, il s'agit de la plus grande « ampleur » prise par les sommes des éléments de f le long de progressions arithmétiques homogènes ; de façon formelle, la discrépance de f vaut par définition

$$\sup_{d,n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} f(jd) \right|.$$

(3) Il s'agit de la différence constante entre deux termes consécutifs.

2.3. La conjecture et le théorème

Moyennant ce qui précède, l'énoncé de la conjecture est simple :

Conjecture d'ERDÖS
Quelle que soit la suite infinie dont les éléments sont égaux à $+1$ ou à -1,
sa discrépance est infinie.

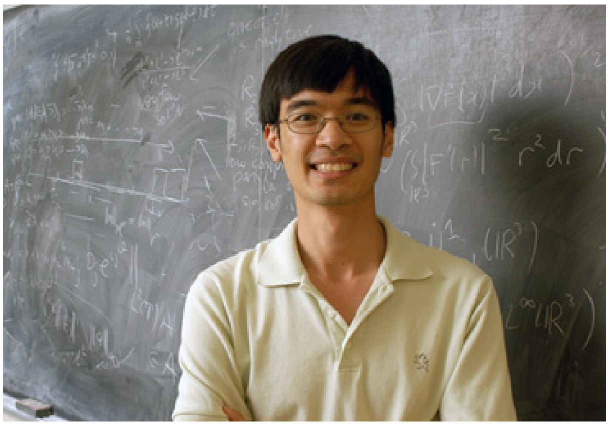
TAO vient de démontrer que cet énoncé, qui n'était auparavant qu'une supposition, est en réalité toujours vrai. Ainsi, la conjecture est désormais un théorème. Cet auteur a fourni de ce résultat une version équivalente lors d'un Colloque organisé le 9 octobre 2015 à l'Université de Californie (Los Angeles) [5] ; à cette occasion, il utilisait un symbolisme mathématique assez abstrait et présentait son théorème de la façon suivante :

Théorème de TAO
$\forall C \geqslant 0, \exists N > 0$ tels que pour toute suite [dont les éléments] $f(1), \ldots, f(N) \in \{-1, +1\}$
il existe $d, 2d, \ldots, nd \in \{1, \ldots, N\} \mid \sum_{j=1}^{n} f(jd)| \geqslant C$.

Revenons brièvement à notre jeu de départ pour interpréter un peu cet énoncé.

Comme nous avons pu le constater ci-dessus, la constante C est liée au réglage de la balance, tandis que le nombre N est en rapport avec le nombre de billes qui peuvent être déposées sur les plateaux.

Lors de sa conférence [5], TAO donna une autre interprétation de la constante C.



Terence TAO (4)

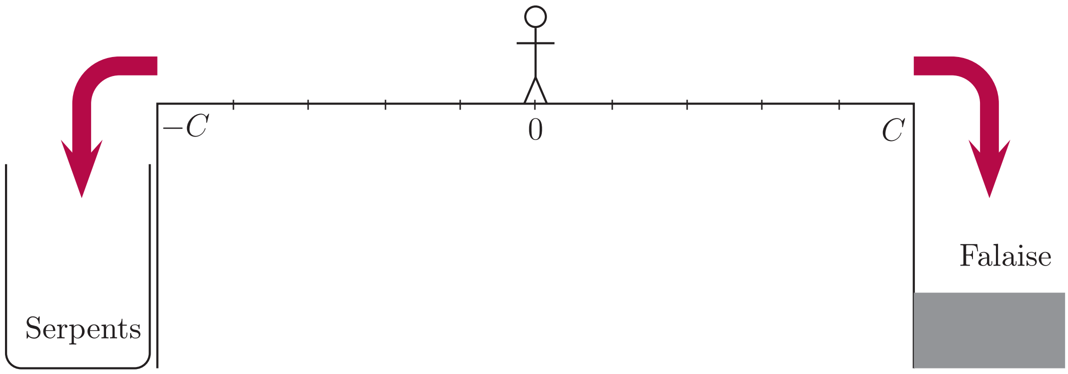
Paul ERDÖS et Terence TAO en 1985 (5)

2.4. Une présentation imagée

Une personne se déplace sur un chemin qui peut être représenté par un axe orienté ; elle part de l'origine de cet axe et peut se diriger vers la droite ou vers la gauche, en effectuant des pas

(4) Photo trouvée à l'adresse `http://en.wikipedia.org`
(5) Photo trouvée à l'adresse `http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/actu-terence-tao-demontre-la-conjecture-de-la-discrepance-de-paul-erdos-36013.php`

supposés tous de même longueur égale à une unité de l'axe. Si elle s'éloigne d'au moins C pas dans une même direction, elle effectue une chute mortelle : vers la droite, elle tombe dans le fond d'une profonde falaise, vers la gauche dans une fosse remplie de serpents venimeux.



Elle peut bien sûr alterner des pas dans l'une ou l'autre direction ; un pas vers la droite est noté D, tandis qu'un pas vers la gauche est désigné par G. De plus, elle a la possibilité de choisir la manière de tenir compte de ses pas : ceux-ci peuvent être retenus pas par pas, ou bien un pas sur deux, ou bien un pas sur trois et ainsi de suite. Par exemple, voici l'ébauche de solution acceptable (pour $C \geqslant 2$) dont une autre présentation a été donnée ci-dessus :

pas à pas	:	D	G	G	D	G	D	D	G	G	...
un pas sur deux	:		G		D		D		G		...
un pas sur trois	:			G			D			G	...

Le résultat de Tao certifie que, quelle que soit la configuration des lieux (c'est-à-dire quelle que soit la distance C séparant le point initial de la fin du chemin), cette personne finira toujours par connaître une fin tragique en tombant dans le précipice ou dans la fosse.

Conclusion

En résumé, la conjecture de la discrépance énoncée par Paul Erdös est morte... mais un nouveau théorème dû à Terence Tao est né. Dans un article ultérieur, nous reviendrons sur le problème de la discrépance pour réaliser une analyse épistémologique inspirée par cette question d'actualité.

Pour en savoir plus

[1] Bailly S., Terence Tao démontre la conjecture de la discrépance de Paul Erdös, *Pour la Science*, 12/10/2015.

[2] Bair J., Pensées (mathématiques) de Tao, *Losanges*, 23, 2013, pp. 33 - 41.

[3] Bair J., À propos de la série de Grandi, *Losanges*, 31, 2015, pp. 33 - 37.

[4] Grime J., New wikipedia sized proof explained with a puzzle ; vidéo accessible à l'adresse électronique : https ://www.youtube.com/watch ?v=pFHsrCNtJu4.

[5] Tao T., The Erdos Discrepancy Problem, conférence donnée le 9 octobre 2015 à l'IPAM de l'UCLA, disponible à l'adresse électronique : https ://www.youtube.com/watch ?v=QauoO0j9Y9Y ; référence du texte original : *arXiv* :1509.05363 ; article soumis à *Discrete Analysis*.

En complément : quelques renseignements sur Erdös

Paul Erdös en 1992 (6)

De nationalité hongroise, mais d'origine juive, Paul (né Pál et parfois prénommé Pavel) Erdös est né le 26 mars 1913 à Budapest et mort le 20 septembre 1996 à Varsovie. Il est initié aux mathématiques par ses parents, tous deux professeurs de cette discipline. Très vite, il montre des dispostions particulières pour résoudre des problèmes mathématiques ; ainsi, à 18 ans à peine, il donne une démonstration originale de ce que l'on nomme encore aujourd'hui le *postulat de Bertrand* (7).
Dans l'encyclopédie *Britannica*, il est présenté comme suit : « il fut un des plus grands mathématiciens de ce siècle, qui posa et résolut d'épineux problèmes en théorie des nombres et dans d'autres domaines, et qui fonda le champs des mathématiques discrètes, qui est maintenant la base de l'informatique. Ce fut un des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire, avec plus de 1500 articles à son nom. Ses amis disaient de lui que c'était quelqu'un de peu commun ».
Il n'est évidemment pas possible de développer ici toutes les contributions marquantes du Hongrois. Contentons-nous de mettre en évidence trois points généraux qui ont particulièrement retenu notre attention.

– Une des spécialités d'Erdös était assurément de trouver des conjectures qui ont été étudiées par de nombreux mathématiciens réputés. On dénombre plusieurs dizaines de conjectures associées à son nom, éventuellement formulées en collaboration avec un autre auteur (voir notamment à l'adresse : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_d'Erdos`) ; certaines d'entre elles ont été résolues (comme celle de la discrépance), mais d'autres constituent encore à l'heure actuelle des questions ouvertes. Pour l'anecdote, signalons que le Hongrois avait l'habitude de promettre une récompense pour celui qui démontrerait la véracité (ou la fausseté) de sa supposition. En ce qui concerne sa conjecture de la discrépance, il n'eut pas à payer cette prime puisque Tao a fait sa découverte alors qu'Erdös n'était plus en vie.

– Erdös s'intéressait particulièrement à l'aspect esthétique des démonstrations mathématiques. Selon lui, les preuves parfaites des théorèmes mathématiques avaient été écrites par « Dieu » dans ce qu'il appelait *The Book*. Il est à noter que Erdös était athée et avait précisé comme suit sa pensée lors d'une conférence (donnée en 1985) : « vous n'êtes pas obligé de croire en Dieu, mais vous devez croire à l'existence du Livre » .
Deux auteurs, Martin Aigner et Günter M. Ziegler ont rassemblé quelques-unes de ces jolies preuves dans un livre qui avait été rédigé pour fêter le 85e anniversaire du Hongrois (la première édition du livre datant de 1998). Cet ouvrage a connu de nombreuses éditions successives en anglais et est désormais traduit en français sous le titre *Raisonnements divins*

(6) Wikipedia.
(7) Ce postulat est encore appelé *théorème de Tchebychev*. Il affirme que, quel que soit l'entier n, il est possible de trouver un nombre premier p tel que $n < p < 2n$. Une preuve de ce résultat peut être trouvée à l'adresse suivante : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Postulat_de_Bertrand`.

(paru aux Éditions Springer). Il aborde des thèmes classiques : théorie des nombres, géométrie, analyse, combinatoire, théorie des graphes ; la plupart des cas traités sont fort abordables et ne demandent que des connaissances théoriquement acquises dans l'enseignement secondaire.

– Paul Erdös écrivait volontiers ses travaux en collaboration : il a publié avec plus de 500 co-auteurs ([8]). Cette particularité est vraisemblablement à l'origine de l'introduction de ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de *nombre d'Erdös* et que nous appellerons ici « E-nombre ». Ce dernier mesure en quelque sorte la « distance de collaboration » d'un chercheur avec le mathématicien hongrois. De façon précise, on définit ce concept de proche en proche de la manière suivante :
  - Paul Erdös s'est vu octroyer le E-nombre 0 ;
  - toute personne qui a cosigné un travail avec Erdös est gratifié d'un E-nombre 1 ;
  - on attribue le E-nombre 2 à tout chercheur qui n'a pas écrit de travail en collaboration avec Erdös, mais qui a rédigé un texte avec un mathématicien dont le E-nombre est égal à 1. C'est le cas, par exemple, pour T. Tao et A. Einstein, ainsi que pour notre compatriote J. Bourgain ;
  - le E-nombre 3 est adjugé à une personne qui n'a pas reçu un E-nombre 1 ou 2, mais qui a écrit avec un auteur dont le E-nombre est 2. Des exemples de ce type sont donnés par le médaillé Fields français C. Villani et par notre compatriote P. Deligne ;
  - et ainsi de suite, sachant que le E-nombre d'un mathématicien qui n'est pas un collaborateur direct ou indirect d'Erdös est infini.

  Pour l'anecdote, signalons l'existence de plus de 250 000 mathématiciens contemporains qui ont un E-nombre fini. Le E-nombre médian de ces derniers est égal à 5 seulement, ce qui met bien en évidence l'impact que Paul Erdös a pu exercer sur ses pairs.

Pour en savoir plus

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdos

[2] http://www.les-mathematiques.net/histoire/histoire_erd.php

[3] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Erdos.html

[4] http://iecl.univ-lorraine.fr/Gerald.Tenenbaum/maths-litt/In-memoriam-Erdos.pdf

[5] TheErdösNumberProject:http://wwwp.oakland.edu/enp/

[6] https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_personnes_par_nombre_d'Erdos

Jacques Bair est professeur émérite de l'Université de Liège. ✉ j.bair@ulg.ac.be

([8]) Le nombre exact de co-auteurs est de 511.