Propriétés multifractales de la divergence de séries d'ondelettes

Céline Esser
Celine.Esser@univ-lille1.fr

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

GDR Analyse multifractale
22 septembre 2016

Travail en collaboration avec S. Jaffard (Université Paris Est - Créteil)

Introduction

Notons $S_n f$ les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction de $L^p(\mathbb{T})$ $(1 < p < +\infty)$.
Pour tout $\beta \geq 0$, on considère les ensembles

$$\mathcal{E}(\beta, f) := \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} n^{-\beta} |S_n f(x)| > 0 \right\}$$

$$E(\beta, f) := \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |S_n f(x)|}{\log n} = \beta \right\}$$

Aubry (2006), Bayart, Heurteaux (2011)

- Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ et tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim \mathcal{E}(\beta, f) \leq 1 - \beta p.$$

- Pour quasi (resp. presque) toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ et tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim E(\beta, f) = 1 - \beta p.$$

Séries d'ondelettes

Aubry (2006)

- Pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ et tout $\beta \in [0, 1/p]$,

$$\dim \left\{ x : \limsup_{J \to \infty} 2^{-\beta J} \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j - 1} | < f, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k}(x)| > 0 \right\} \leq 1 - \beta p$$

- Dans le cas de l'ondelette de Haar, étant donné un ensemble E tel que $\dim E < 1 - \beta p$, il existe $f \in L^p(\mathbb{T})$ tel que

$$\limsup_{J \to \infty} 2^{-\beta J} \left| \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{2^j - 1} < f, \Psi_{j,k} > \Psi_{j,k}(x) \right| = +\infty \quad \forall x \in E.$$

Objectif du travail : Extension de ces résultats dans le cas des espaces de Besov et pour des ondelettes générales, et optimalité générique (points de vue Baire et prévalence)

Contexte

Point de vue adopté : On ne considère pas l'expansion en ondelettes d'une fonction dans un espace donné, mais plutôt des séries d'ondelettes où la suite des coefficients satisfait une propriété de convergence (type Besov).

$\rightarrow$ pas besoin de fortes hypothèses sur les ondelettes (régularité, base orthonormée,...)

Système d'ondelettes : collection de N fonctions $\psi^{(i)}$ définies sur $\mathbb{R}^d$ qui

- sont bornées et à décroissance rapide
- satisfont la propriété de recouvrement dyadique des ondelettes (satisfaite pour les bases d'ondelettes continues, pour la base de Haar,...)

Série d'ondelettes : série de la forme

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}^{(i)} \, \psi^{(i)}(2^j x - k) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\geq 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_{j,k}^{(i)} \, \psi_{j,k}^{(i)}(x)$$

Divergence des séries d'ondelettes

Considérons une collection de coefficients $\mathcal{C} = \left\{ c_{j,k}^{(i)} \right\}$.

Divergence de la série d'ondelettes à un taux $\gamma \in \mathbb{R}$ en x :

$$\mathcal{C} \in D^{\gamma}(x) \Leftrightarrow \exists C > 0,\ j_n \to +\infty, i_n, k_n \text{ tels que } \left| c_{j_n,k_n}^{(i_n)} \psi_{j_n,k_n}^{(i_n)}(x) \right| \geq C 2^{\gamma j_n}$$

Exposant de divergence en x :

$$\delta_{\mathcal{C}}(x) = \sup\{\gamma : \quad \mathcal{C} \in D^{\gamma}(x)\}$$

Ensembles de niveau :

$$E(\gamma, \mathcal{C}) = \{x : \quad \delta_{\mathcal{C}}(x) = \gamma\}$$

Spectre de divergence de la série d'ondelettes :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}} : \gamma \mapsto \dim E(\gamma, \mathcal{C})$$

Remarque : $\mathcal{C} \in D^\gamma(x)$ n'implique une divergence de la série que si $\gamma \geq 0$. Si $\gamma < 0$, la négation de $\mathcal{C} \in D^\gamma(x)$ exprime un taux de convergence des sommes partielles

$$P_{J,\mathcal{C}}(x) = \sum_{j \leq J} \sum_{i,k} c_{j,k}^{(i)} \ \psi_{j,k}^{(i)}(x).$$

En effet, supposons que

$$\exists a \in \mathbb{R} : \qquad |c_{j,k}^{(i)}| \leq C2^{aj}.$$

Si

$$\exists C > 0, \ \forall i, j, k \qquad |c_{j,k}^{(i)} \psi_{j,k}^{(i)}(x)| \leq C2^{\gamma j},$$

alors $P_{J,\mathcal{C}}(x)$ admet une limite $f_{\mathcal{C}}(x)$ quand $J \to +\infty$ et

$$\forall \gamma' > \gamma, \qquad |f_{\mathcal{C}}(x) - P_{J,\mathcal{C}}(x)| \leq C2^{\gamma' J}.$$

Espaces de Besov discrets

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in (0, +\infty]$. Une suite $\mathcal{C} = \left\{ c_{j,k}^{(i)} \right\}$ appartient à l'espace de Besov $b_p^{s,q}$ si elle satisfait

$$\left(\sum_{i,k} \left| c_{j,k}^{(i)} \, 2^{(s-\frac{d}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \epsilon_j \quad \text{avec} \quad (\epsilon_j)_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 \; : \; \forall j \quad \sum_{i,k} |c_{j,k}^{(i)} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \leq C \quad \Longrightarrow \boxed{|c_{j,k}^{(i)}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{d}{p}-s)j}}$$

Espaces de Besov discrets

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in (0, +\infty]$. Une suite $\mathcal{C} = \left\{ c_{j,k}^{(i)} \right\}$ appartient à l'espace de Besov $b_p^{s,q}$ si elle satisfait

$$\left(\sum_{i,k} \left| c_{j,k}^{(i)} \, 2^{(s-\frac{d}{p})j} \right|^p \right)^{1/p} = \epsilon_j \quad \text{avec} \quad (\epsilon_j)_j \in l^q$$

En particulier,

$$\exists C > 0 \, : \, \forall j \quad \sum_{i,k} |c_{j,k}^{(i)} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \leq C \quad \Longrightarrow \boxed{|c_{j,k}^{(i)}| \leq C^{\frac{1}{p}} 2^{(\frac{d}{p}-s)j}}$$

Conséquence : Si $\mathcal{C} \in b_p^{s,q}$, alors

$$\boxed{\delta_{\mathcal{C}}(x) \leq \frac{d}{p} - s, \quad \forall x \in \mathbb{R} \, .}$$

E., Jaffard (2016)

- Pour toute suite $\mathcal{C} \in b_p^{s,q}$ et tout $\gamma \in [-s, \frac{d}{p} - s]$,

$$\dim \left\{x : \ \delta_{\mathcal{C}}(x) \geq \gamma\right\} \leq d - sp - \gamma p.$$

- La série d'ondelettes de quasi (resp. presque) toute suite $\mathcal{C} \in b_p^{s,q}$ est maximally divergente dans $\mathbb{R}^d$.

Soit A un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$. Une suite $\mathcal{C} \in b_p^{s,q}$ a une série d'ondelettes "maximally" divergente dans A si

$$\forall x \in A, \qquad \delta_{\mathcal{C}}(x) \in \left[-s, \frac{d}{p} - s\right]$$

pour presque tout x dans A, $\delta_{\mathcal{C}}(x) = -s$,

et pour tout ouvert non-vide $B \subset A$

$$\dim \left\{x \in B : \delta_{\mathcal{C}}(x) = \gamma\right\} = d - sp - \gamma p.$$

Borne supérieure

Preuve. On pose

$$E_{j,\gamma} := \left\{ (i,k) : \left| c_{j,k}^{(i)} \right| \geq 2^{\gamma j} \right\}$$

$$E_{j,\gamma}^{\varepsilon} := \bigcup_{k : \exists i : (i,k) \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

$$E_{\gamma}^{\varepsilon} := \limsup_{j \to +\infty} E_{j,\gamma}^{\varepsilon}.$$

Puisque $\sum_{i,k} |c_{j,k}^{(i)} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \leq C$, on a

$$\# E_{j,\gamma} \leq C \cdot 2^{(d-sp-\gamma p)j},$$

et donc

$$\dim(E_{\gamma}^{\varepsilon}) \leq \frac{d - sp - \gamma p}{1 - \varepsilon}.$$

Montrons que

$$\boxed{x \notin E_\gamma^\varepsilon \Longrightarrow \delta_{\mathcal{C}}(x) \leq \gamma}$$

On estime $|c_{j,k}^{(i)} \psi_{j,k}^{(i)}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j \to +\infty} \bigcup_{k : \exists i : (i,k) \in E_{j,\gamma}} \left] k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j} \right[$$

Montrons que

$$\boxed{x \notin E_\gamma^\varepsilon \Longrightarrow \delta_{\mathcal{C}}(x) \leq \gamma}$$

On estime $|c_{j,k}^{(i)}\psi_{j,k}^{(i)}(x)|$. Rappelons que

$$E_\gamma^\varepsilon = \limsup_{j\to+\infty} \bigcup_{k:\exists i:(i,k)\in E_{j,\gamma}} \left]k2^{-j} - 2^{(\varepsilon-1)j}, k2^{-j} + 2^{(\varepsilon-1)j}\right[$$

1. $\underline{(i,k) \notin E_{j,\gamma} \text{ i.e. } \left|c_{j,k}^{(i)}\right| < 2^{\gamma j}}$, alors $|c_{j,k}^{(i)}\psi_{j,k}^{(i)}(x)| \leq C2^{\gamma j}$.
2. $\underline{(i,k) \in E_{j,\gamma} \text{ i.e. } \left|c_{j,k}^{(i)}\right| \geq 2^{\gamma j}}$ Vue la décroissance rapide des ondelettes,

$$\forall N,\ \exists C_N \ \text{ tel que } \quad |\psi^{(i)}(2^jx-k)| \leq \frac{C_N}{(1+|2^jx-k|)^N}.$$

Comme $x \notin E_\gamma^\varepsilon$ et $(i,k) \in E_{j,\gamma}$, on a $|2^jx-k| \geq 2^{\varepsilon j}$ si $j \gg$ et donc

$$|\psi^{(i)}(2^jx-k)| \leq C_N 2^{-\varepsilon N j}.$$

Rappelons que $|c_{j,k}^{(i)}| \leq C2^{-(s-d/p)j}$, d'où

$$|c_{j,k}^{(i)}\psi_{j,k}^{(i)}(x)| \leq C_N C 2^{-(s-d/p)j} 2^{-\varepsilon N j} \leq 2^{\gamma j} \ \text{ si } \ j \gg .$$

Propriété de recouvrement dyadique des ondelettes

Un système d'ondelettes $(\psi^{(i)})_{i=1,\ldots,N}$ satisfait la propriété de recouvrement dyadique s'il existe $C > 0$ et une collection finie de triplets (i_l, j_l, k_l), $l \in \{1, \ldots, L\}$, tels que $\forall l$, $j_l > 0$ et

$$\forall x \in [0,1]^d,\ \exists l \in \{1, \ldots, L\} : \quad \left| \psi^{(i_l)}(2^{j_l}x - k_l) \right| \geq C.$$

On note

$$M = \max_{l \in \{1,\ldots,L\}} j_l.$$

Remarque : Cette propriété est satisfaite pour

- le système de Haar (s'il est défini correctement aux points dyadiques, i.e. $\psi = 1_{[0,1/2)} - 1_{[1/2,0)}$),
- toute base d'ondelettes continue.

Pour tout $l \in \{1, \ldots, L\}$, on considère l'application affine μ^l définie par la relation

$$\mu^l\big([0,1)^d\big) = \lambda_l$$

où λ_l est le cube dyadique défini par (j_l, k_l).

Si λ est un cube dyadique arbitraire, on appelle la collection

$$\{\mu^l(\lambda)\}_{l=1,\ldots,L}$$

le recouvrement dyadique de λ.

Propriété : Pour tout $x \in \lambda$, il existe un $l \in \{1, \ldots, L\}$ tel que $|\psi^{(i_l)}_{\mu^l(\lambda)}(x)| \geq C$.

$\longrightarrow$ donne des sous-cubes à des échelles j' proches de l'échelle j de λ ($j < j' \leq j + M$) où les ondelettes sont grosses

Suites saturantes

Objectif : Construire une suite aléatoire qui appartient à $b_p^{s,q}$ et dont la série d'ondelettes est presque sûrement maximally divergente. On va travailler sur $(0,1)^d$.

Soient $j \geq 1$ et $k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}^d$. On considère la représentation irréductible

$$\frac{k}{2^j} = \frac{k'}{2^J} \quad \text{où} \quad k' = (k'_1, \ldots k'_d)$$

et $k'_1, \ldots k'_d$ ne sont pas tous pairs. On pose

$$\boxed{e_\lambda^{(i)} = e_{j,k}^{(i)} = 2^{-(\log j)^2} 2^{(\frac{d}{p} - s)j} 2^{-\frac{d}{p}J}}$$

Soit $m > 0$. Considérons un cube dyadique $\lambda \subset [0,1]^d$ d'échelle

$$j \in \{mM+1, \cdots (m+1)M\}.$$

S'il existe au moins un cube dyadique ν de taille mM tels que $\mu_l(\nu) = \lambda$, alors on pose

$$\boxed{f_\lambda^{(i)} = \sup e_\nu^{(i)}}$$

où le supremum est pris sur tous les $l \in \{1, \ldots, L\}$ et tous les cubes ν de taille mM tel que $\mu_l(\nu) = \lambda$; sinon $f_\lambda^{(i)} = 0$.

Remarque : Pour tout cube dyadique ν de taille mM, le recouvrement dyadique de ν a des coefficients de taille au moins égale à e_ν, i.e.

$$f_{\mu_l(\nu)}^{(i)} \geq e_\nu^{(i)}.$$

On pose

$$\boxed{c_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} f_\lambda^{(i)}}$$

où les $\xi_\lambda^{(i)}$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Résultat

La suite aléatoire $\mathcal{C} = \left\{ c_{j,k}^{(i)} \right\}$ est à valeurs dans un ensemble compact de $b_p^{s,q}$, et la série d'ondelettes correspondante est presque sûrement maximally divergente sur $(0, 1)^d$.

Appartenance à l'espace de Besov

Pour tout $J \leq j$, il y a 2^{dJ} coefficients tels que $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}$. Donc

$$\sum_k |e_{j,k}^{(i)} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p = 2^{-p(\log j)^2} \sum_{J=1}^{j} 2^{dJ} (2^{-\frac{dJ}{p}})^p = j 2^{-p(\log j)^2},$$

et

$$\sum_{j \geq 1} (j^{\frac{1}{p}} 2^{-(\log j)^2})^q < \infty.$$

$\Rightarrow$ ok pour la suite $\left\{ e_{j,k}^{(i)} \right\}$

d'où aussi pour la suite $\left\{ f_{j,k}^{(i)} \right\}$ (changement d'échelle de taille au plus M)

et donc pour la suite $\left\{ c_{j,k}^{(i)} \right\}$ (les v.a. $\xi_\lambda^{(i)}$ sont bornées)

Divergence en tout point

On doit montrer que presque sûrement, $\forall x \in (0,1)^d$, on a $\delta_{\mathcal{C}}(x) \geq -s$. Commençons par remarquer que les v.a. $\xi_\lambda^{(i)}$ ne peuvent pas être simultanément petites à beaucoup d'échelles successives.

Soit λ un cube d'échelle $j = mM$. On note $\mathfrak{C}_\lambda$ l'événement

$$\mathfrak{C}_\lambda = \left\{ \forall l \in \{1, \ldots, L\} \quad |\xi_{\mu_l(\lambda)}| \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Propriétés :

- $\mathbb{P}(\mathfrak{C}_\lambda) \geq 1 - \frac{L}{j}$
- si $\mathfrak{C}_\lambda$ a lieu, alors $\forall x \in \lambda$ il existe un cube $\mu_l(\lambda)$ d'échelle $j' \leq j + M$ et un indice i tel que
$$\left| c_{\mu_l(\lambda)}^{(i)} \psi_{\mu_l(\lambda)}^{(i)}(x) \right| \geq C \frac{e_\lambda}{j}$$
- les événements $\mathfrak{C}_\lambda$ qui correspondent à différents multiples de M sont indépendants.

Fixons une échelle $j = 2mM$ et considérons un cube dyadique λ d'échelle j. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les cubes dyadiques d'échelles respectives

$$2mM, (2m-1)M, \cdots, (m+1)M$$

qui contiennent λ. La probabilité qu'aucun des $\mathfrak{C}_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, m$, n'ait lieu est bornée par

$$\begin{aligned} \frac{L}{2mM} \frac{L}{(2mM-1)M} \cdots \frac{L}{(m+1)M} &\leq \left(\frac{L}{(m+1)M}\right)^m \\ &\leq e^{-Cm \log m} \\ &\leq e^{-Cj \log j} \end{aligned}$$

Donc, la probabilité qu'au moins un cube dyadique λ d'échelle $j = 2mM$ satisfasse la propriété "*aucun des* $\mathfrak{C}_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, m$, *n'a lieu*" est bornée par $2^{dj} e^{-Cj \log j}$.

Le lemme de Borel-Cantelli implique que presque sûrement, pour m suffisamment grand, pour tout cube λ d'échelle $j = 2mM$, il existe un cube λ' d'échelle j' tel que $\frac{j}{2} + M \leq j' \leq j$ qui contient λ et pour lequel $\mathfrak{C}_{\lambda'}$ a lieu.

Par conséquent, pour tout $x \in \lambda'$, il existe un cube λ'' d'échelle j'' tel que $j' < j'' \leq j' + M$ et tel que

$$\left|c_{\lambda''}^{(i)} \psi_{\lambda''}^{(i)}(x)\right| \geq C \frac{e_{\lambda'}}{j'} \geq C \frac{1}{j'} 2^{-(\log j')^2} 2^{-sj'}$$

Total : Pour tout $x \in [0,1)^d$, il existe une suite de cubes λ_n d'échelles croissantes j_n tels que

$$\left|c_{\lambda_n}^{(i)} \psi_{\lambda_n}^{(i)}(x)\right| \geq C' \frac{1}{j_n} 2^{-(\log j_n)^2} 2^{-sj_n},$$

et donc

$$\forall x \in [0,1]^d, \quad \delta_{\mathcal{C}}(x) \geq -s$$

Spectre de divergence

Idée :

- Raffinement du résultat précédent pour devoir remonter moins loin dans les échelles
- Par Borel-Cantelli, presque sûrement, pour tout $x \in [0,1]^d$, il existe une suite de cubes μ_n d'échelles j_n qui satisfont

$$j_n - j_{n-1} \leq 2([(\log j_n)^2] + 1),$$

et tels que

$$\left| c_{\mu_n}^{(i)} \psi_{\mu_n}^{(i)}(x) \right| \geq f_{\mu_n} 2^{-j_n / \log j_n} \geq e_{\lambda_n} 2^{-j_n / \log j_n},$$

où μ_n appartient au recouvrement dyadique de λ_n

- Lien entre l'ensemble $\{x : \delta_{\mathcal{C}}(x) \geq \frac{d}{p} - s - \frac{d}{p\alpha}\}$ et l'ensemble des points α-approximables par des dyadiques, d'où le calcul de la dimension de Hausdorff.

Généricité au sens de Baire

Idée de la construction : La série d'ondelettes de toute suite dont une infinité de coefficients sont suffisamment proches de ceux de la suite saturante $\mathcal{C}$ va avoir les mêmes propriétés de divergence.

- L'ensemble $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites finies à coefficients rationnels est dense dans $b_p^{s,q}$
- On considère une suite croissante $(N_n)_n$ telle que les coefficients de $\mathcal{A}_n$ sont nuls pour $j \geq N_n$
- $\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n + \frac{1}{N_n}\mathcal{C}$ a les mêmes propriétés de divergence que $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $b_p^{s,q}$
- On considère le G_δ dense

$$\mathcal{R} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} B(\mathcal{B}_n, r_n), \quad \text{où} \quad r_n = \frac{1}{2} 2^{-(\log N_n)^2} 2^{-\frac{N_n}{p}}$$

Prévalence

La notion de prévalence a pour but de généraliser le concept de "presque partout" (pour la mesure de Lebesgue) au cas des espaces de dimension infinie, en gardant certaines propriétés :

- Un ensemble négligeable a un intérieur vide (ie."presque partout" implique la densité).
- Tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable.
- Toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
- Tout translaté d'un ensemble négligeable est négligeable.

Néanmoins, il est apparu qu'il était impossible de définir une telle notion via une mesure spécifique : dans un espace métrique de dimension infinie, il n'existe pas de mesure σ-finie et invariante par translation.

Définition (Christensen 74, Hunt, Sauer, Yorke 92)

Soit E un espace vectoriel métrique complet. Un ensemble borélien $A \subset E$ est Haar-null s'il existe une mesure de probabilité à support compact μ telle que

$$\forall x \in E, \quad \mu(x + A) = 0.$$

Un sous-ensemble de E est Haar-null s'il est inclus dans un ensemble borélien Haar-null. Le complément d'un ensemble Haar-null est appelé un ensemble prévalent.

Remarque : Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vérifiée sur un ensemble Haar-null, il suffit de trouver un processus aléatoire X_t dont les trajectoires sont presque sûrement dans un compact de E et tel que pour tout $f \in E$, l'événement "$\mathcal{P}(X_t - f)$ est satisfait" a une probabilité nulle, i.e.

$$\forall f \in E, \ p.s. \quad \mathcal{P}(X_t + f) \text{ n'est pas satisfaite.}$$

La prévalence dans $b_p^{s,q}$ de l'ensemble des suites dont la série d'ondelettes est maximally divergente s'obtient directement grâce au résultat suivant.

Lemme

Soit $\mathcal{D}$ une suite de $b_p^{s,q}$. Alors presque sûrement, la série d'ondelettes de $\tilde{\mathcal{C}} + \mathcal{D}$ est maximally divergente.

Idée : Le raisonnement est le même que pour la suite saturante, mais les variables aléatoires ne sont plus centrées. Elles restent indépendantes et les estimations des probabilités des événements considérés $\mathfrak{E}_\lambda$ ne peuvent qu'augmenter (au vu de la densité des variables $\xi_\lambda^{(i)}$).

Références

J.M. Aubry.
On the rate of pointwise divergence of Fourier and wavelet series in L^p.
J. Approx. Theory, 538 :97–111, 2006.

F. Bayart and Y. Heurteaux.
Multifractal analysis of the divergence of Fourier series.
Ann. Sci. Ec. Norm. Supér., 45 :927–946, 2012. 22 :663–682, 2006.

S. Jaffard.
On the Frisch-Parisi conjecture.
J. Math. Pures Appl., 79(6) :525–552., 2000.

S.E. Kelly, M.A. Kon, and L.A. Raphael.
Local convergence for wavelet expansion.
J. Funct. Anal., 126 :102–138, 1994.

Y. Meyer.
Ondelettes et opérateurs.
Hermann, 1990.

G.G. Walter.
Pointwise convergence of wavelet expansions.
J. Approx. Theory, 80 :108–118, 1995.