Surprenante beauté des mathématiques

Jacques Bair

Mots clés : Beauté des mathématiques ; symptômes goodmaniens ; surprise

Le Congrès de la SBPMef, qui s'est tenu en août 2010 à Dinant, était consacré aux *mathématiques et mots*. A cette occasion, j'ai entendu ou lu différents mots qui peuvent être associés au terme *mathématiques*. Voici, par exemple, une liste non exhaustive d'adjectifs utilisés, dans des différents contextes et à des degrés divers ([1]) :

aisées, amusantes, belles, concrètes, efficaces, enthousiasmantes, esthétiques, étranges, discrètes, formatrices, générales, inattendues, indiscutables, indispensables, intemporelles, jubilatoires, mystérieuses, passionnantes, surprenantes, universelles, utiles, ...

Parmi tous les mots que l'on peut adjoindre au terme « mathématiques », celui que je préfère est fort simple, presque banal ; il comporte seulement quatre lettres au masculin singulier : c'est l'adjectif « beau ».

Oui, je pense que les mathématiques sont belles. Bien sûr, la beauté est subjective, probablement indicible et propre à chaque individu ([2]) ... même si certains philosophes et sémioticiens ont réussi à dégager des critères, tels les *symptômes de Goodman* ([3]), permettant de distinguer ce qui est beau de ce qui ne l'est pas. Le lecteur intéressé par cette problématique peut utilement consulter le livre [7] de C. Jullien sur les rapports entre l'esthétique et les mathématiques : il est fort intéressant et bien écrit, mais assez ardu pour un néophyte sur le sujet ([4]).

On peut évidemment s'intéresser à la beauté de certaines réalisations mathématiques, notamment en regardant des courbes ou de surfaces gracieuses ([5]), des images fractales étonnantes et agréables à regarder ([6]), ... Il est également possible de rechercher l'intervention, implicite ou explicite, de théories mathématiques dans des belles réalisations artistiques, notamment dans des photos, des peintures, des sculptures, mais aussi dans des œuvres architecturales, ..., et même, depuis peu, dans des vêtements de mode ([7]) : on peut en effet y rencontrer de la géométrie, notamment des propriétés de perspective ainsi que des symétries ou autres transformations géométriques (qui sont, par exemple, à la base de divers pavages), ou encore des propriétés des nombres (avec, par exemple, la présence de proportions spéciales, et en particulier du nombre d'or), ...

([1]) Au risque d'être traité d'apologiste », je ne mentionne que des qualificatifs à connotation positive.

([2]) Une anecdote célèbre va dans ce sens. Elle concerne le mathématicien hongrois Paul Erdös (1913 - 1996) qui déclara : « Pourquoi les nombres sont-ils beaux ? Cela revient à se demander pourquoi la neuvième symphonie de Beethoven est belle. Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne pourra vous l'expliquer. Je sais que les nombres sont beaux. S'ils ne sont pas beaux, rien ne l'est. »

([3]) Les symptômes goodmaniens pour reconnaître ce qui est esthétique sont au nombre de cinq. L'auteur a introduit les quatre suivants dans son ouvrage [5] : la *densité syntaxique*, la *saturation syntaxique relative*, la *densité sémantique* et l'*exemplification* ; dans son livre [6], il a complété cette liste par un dernier symptôme, à savoir la *référence multiple et complexe*.

([4]) Ce livre est le fruit de recherches menées par l'auteure à l'Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Techniques à Paris ; il est issu d'un doctorat en philosophie.

([5]) Voir, par exemple, le site *Arbelos* (`http://www.arbelos.co.uk`) qui propose une collection de posters baptisée *The Beauty of Mathematics Poster Collection*.

([6]) Voir notamment le livre [9]

([7]) Voir à ce sujet, l'article intitulé *Issey Miake, mathématiquement inspiré*, paru dans le Numéro 393 de *Pour la Science* en juillet 2010, pp. 86 - 87 : il est consacré à un couturier japonais qui exploite des résultats mathématiques (prouvant la conjecture de Poincaré) pour confectionner des vêtements.

Mais, ce qui m'intéresse particulièrement dans les liens entre les mathématiques et la beauté, c'est le fait que de nombreux développements mathématiques sont, selon moi, « beaux » : j'estime qu'il existe de fort jolis résultats mathématiques et surtout de très beaux raisonnements mathématiques. À l'instar de C. Jullien, je pense effectivement que « le raisonnement mathématique se nourrit d'un fonctionnement esthétique » ([7], dos de la couverture), ce qui conduit à ce que le réputé mathématicien (d'origine belge) David Ruelle appelle fort judicieusement *l'étrange beauté des mathématiques* [10] ([8]).

Ces propos peuvent être illustrés par un article paru dans le numéro 12 de Losanges à propos du *théorème de Mamikon* [1] : il s'agit d'un résultat récent qui débouche sur une théorie très séduisante que l'on nomme, en anglais le *visual calculus* et qui permet de calculer l'aire de régions planes sans faire intervenir les techniques du calcul intégral. En plus du fait que de bien jolies figures peuvent illustrer les résultats, les raisonnements sont tous très simples, voire élémentaires au point qu'ils peuvent être compris par de très jeunes élèves (même de l'école primaire) ; ils sont originaux, fort visuels, parfois astucieux, mais peuvent toujours être compris de manière immédiate ; ils sont donc particulièrement convaincants et s'appliquent à de nombreuses situations variées. Toutes ces qualités justifient, selon moi ([9]), le fait que « ces mathématiques sont belles ».

En plus d'être belles, les mathématiques peuvent paraître parfois un peu « mystérieuses » ou même « étranges » ... ce qui augmente encore leur attrait. En effet, il existe des argumentations surprenantes et astucieuses, qui ne viennent pas de suite à l'esprit, comme en témoigne notamment le raisonnement exploité pour démontrer le théorème de Mamikon. Par ailleurs, il est facile de démontrer des résultats inattendus ou même de faire apparaître des paradoxes ; de nombreux ouvrages sont consacrés à ce thème : citons, par exemple, les livres de Delahaye ([2], [3], [4]).

À ce sujet, je voudrais faire connaître un travail du mathématicien russe contemporain Félix Lazebnik qui présente [8] quelques jolies questions de mathématiques qui l'ont surpris. Voici une adaptation (libre) de trois d'entre elles qui sont variées et simples ; elles illustrent à mes yeux cette réflexion que l'auteur russe cite en introduction de son travail : *Perhaps the most surprising thing about mathematics is that it is so surprising* (E.C. Titchmarsh).

1. **Un problème fluvial surprenant**

En voici l'énoncé.

> Sur les rives d'un cours d'un fleuve se trouvent deux endroits A et B. Sachant qu'un bateau à moteur met trois heures pour aller de A vers B en naviguant dans le sens du courant, mais exécute le trajet de retour en quatre heures, combien de temps mettra un morceau de bois pour flotter de A jusqu'à B ?

Cet énoncé peut paraître en première lecture incomplet, car il y semble manquer des données : on ne connaît ni la distance AB, ni les vitesses (supposées constantes) du bateau et du courant. Dans ces conditions, il est surprenant que l'on puisse répondre de façon précise à la question posée.

Et pourtant, la résolution mathématique est aisée et limpide.

Désignons par v la vitesse, en kilomètres par heure, du bateau, par c celle du courant (toujours en kilomètres par heure), et par x le temps (en heures) cherché (c'est-à-dire le temps mis par le bois pour aller de A à B).

En considérant le trajet aller du bateau, puis son retour et enfin le trajet du bois, on doit avoir

$$AB = 3\,(v + c) = 4\,(v - c) = xc$$

En fixant son attention sur les deuxième et dernier termes de cette ligne, on trouve

$$x = \frac{3}{c}\,(v + c)$$

tandis que la comparaison des deux termes centraux de cette même ligne livre

$$3v + 3c = 4v - 4c \Leftrightarrow v = 7c$$

([8]) Ce livre est très bien écrit et d'un niveau très accessible ; il aborde de nombreux aspects de mathématiques anciennes et contemporaines ; j'en recommande chaleureusement la lecture fort instructive.

([9]) Mon jugement semble conforme aux critères généralement admis par les mathématiciens pour juger « élégante » une démonstration ; voir à ce propos le site de Wikipédia consacré à la *Beauté mathématique*.

On en déduit

$$x = \frac{3\,(7c + c)}{c} = 24$$

La réponse étant exprimée en heures, le bois mettra exactement un jour pour faire son trajet.

2. **Une propriété numérique étonnante**

> Montrer qu'il existe un nombre entier qui est composé de tous chiffres 1 et qui est divisible par 2009.

Posons $n_1 = 1$, $n_2 = 11$, $n_3 = 111$, $\ldots$, $n_{2009} = 111\ldots11$ (avec 2009 chiffres 1). Divisons chacun de ces 2009 nombres par 2009 précisément.

Ou bien l'une de ces divisions se fait exactement (en ce sens que le reste est nul), ce qui prouve le résultat.

Ou bien, en vertu du principe des tiroirs ([10]), il existe deux de ces nombres qui ont le même reste dans leur division par 2009 ; notons-les n_j et n_k avec $n_j > n_k$.

Dans ce cas, la différence $M = n_j - n_k$ est de la forme $111\ldots1100\ldots0$, c'est-à-dire peut se décomposer selon le produit suivant : $M = N10^n$, avec N composé de tous chiffres 1 et n désignant le nombre de chiffres 0 dans la différence M.

M étant divisible par 2009 et le nombre 2009 étant premier avec toute puissance de 10, il en résulte que 2009 divise N, ce qu'il fallait démontrer.

On peut remarquer qu'un raisonnement similaire permet de remplacer, dans l'énoncé, le chiffre 1 par toute succession de chiffres (en nombre quelconque) et le nombre 2009 par n'importe quel nombre dont le chiffre des unités est 1, 3, 7 ou 9. Par exemple, il existe un nombre de la forme $1357135713571357\ldots$ (et donc construit à l'aide d'une succession de 1357) qui est divisible par 9999 ou par 2011 ou ...

Surprenant, non ?

3. **Une belle preuve pour une formule surprenante**

> Prouver que
>
> $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

La preuve de cette étonnante égalité peut être menée simplement comme suit.

D'après le développement en série du sinus, on sait que pour tout x non nul, on a

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^j}{(2j+1)!}$$

Or, il est bien connu en algèbre que si un polynôme de degré n, de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, possède n racines non nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la somme des inverses des racines est l'opposé de la fraction dont le numérateur vaut le coefficient du terme du premier degré dans le polynôme tandis que le dénominateur est égal au terme indépendant ([11]) c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = -\frac{a_1}{a_0}$$

En effet, en identifiant les termes du premier degré puis les termes indépendants dans les deux formes additive et multiplicative de $P(x)$, on peut écrire le rapport suivant :

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} x_k}{\prod_{j=1}^{n} x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = -\frac{a_1}{a_0}$$

Ce résultat est quelquefois attribué au mathématicien français Fr. Viète (1540 - 1603).

En regardant $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ comme un polynôme (de « degré infini ») possédant les racines $x_j = \pi^2 j^2$ pour tout entier $j \geqslant 1$, on obtient par le résultat sur les polynômes rappelé ci-dessus (dont on peut démontrer qu'il est valable pour la série considérée)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 j^2} = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{-1/(3!)}{1} = \frac{1}{6}$$

([10]) Le principe des tiroirs (ou des casiers) est appelé en anglais *pigeonhole principle*. Il est attribué au célèbre mathématicien allemand P. Dirichlet (1805 - 1859) et peut être énoncé sous cette forme : « si vous possédez plus de pigeons que de casiers et si vous cherchez à placer les pigeons dans leurs casiers, vous constaterez qu'au moins un casier comprendra au moins deux pigeons ».

([11]) Le polynôme $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ peut encore s'écrire, avec les notations du texte, sous la forme $P(x) = a_n \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)$

d'où la thèse.

Ainsi, malgré la démonstration à la fois simple et jolie, cette formule (classique) me paraît magnifique mais toujours surprenante. Extraordinaire, non ?

Pour en savoir plus

[1] Bair J. - Henry V., Sur le théorème de Mamikon, *Losanges* 12, 2011, pp. 10 - 15.

[2] Delahaye J.P., *Logique, informatique et paradoxes*, Belin - Pour la Science, Paris, 1995.

[3] Delahaye J.P., *Les inattendus mathématiques*, Belin - Pour la Science, Paris, 2004.

[4] Delahaye J.P., *Au pays des paradoxes*, Belin - Pour la Science, Paris, 2008.

[5] Goodman N., *Langages de l'art*, traduction française, Editions Chambon, Nîmes, 1990.

[6] Goodman N., *Manière de faire des mondes*, traduction française, Editions Chambon, Nîmes, 1992.

[7] Jullien C., *Esthétique et mathématiques : une approche goodmanienne*, Presses Universitaires de Rennes, 2008.

[8] Lazebnik F., *Surprises, surprises, surprises.* Notes of the Lecture at the Graduate Student Seminar, University of Delaware, 2007. Adresse électronique : www.math.udel.edu/ lazebnik/paper/surprises.pdf.

[9] Peitgen H.O. - Richter P.H., *The Beauty of Fractals*, Springer - Verlag, 1986.

[10] Ruelle D., *L'étrange beauté des mathématiques*, Editions Odile Jacob, Paris, 2008.

Jacques Bair est Professeur à l'Université de Liège, Boulevard du Rectorat 7 Bât. B31, 4000 Liège.
✉ : J.Bair@ulg.ac.be.

Jeux de lettres

Trouver dans la grille les mots correspondants aux définitions ci-dessous. Bonnes cogitations !

1. Son crible est une manière efficace de trouver des nombres premiers
2. Le plus grand côté dans un triangle rectangle
3. Qualifie une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires
4. Se dit d'une fraction dont le PGCD du numérateur et du dénominateur vaut 1
5. En lettres, somme des quatre premiers nombres premiers
6. Dans l'espace, ensemble des points équidistants d'un point
7. Quand ses faces sont marquées de 1 à 6, on l'appelle dé
8. Nombre minimum de faces d'un polyèdre
9. Qualifie deux droites qui ne sont ni parallèles ni sécantes
10. La conique du jardinier
11. Section d'un cône par un plan
12. Quotient du produit de 2 nombres par leur PPCM
13. Possède souvent des précédents mais jamais de suivant
14. Point d'intersection des hauteurs d'un triangle
15. Dans le plan, crée une image dont l'orientation est celle de l'objet initial
16. Se dit de deux nombres premiers consécutifs dans la suite des impairs
17. Possède exactement deux diviseurs
18. Celui de Pythagore coince à partir de la racine de $\sqrt{18}$
19. Les mémoriser ne suffit pas, il faut les utiliser à bon escient
20. Le seul naturel qui est multiple de tous les naturels
21. Ellipse particulière
22. Celui de Dudeney est bien connu en mathématique

L	B	R	E	V	H	R	H	Q	U	A	T	R	E	H
I	D	P	R	P	U	Z	Z	L	E	Q	P	D	H	Y
R	I	S	A	M	N	U	D	E	R	N	I	E	R	O
R	X	P	T	H	Y	P	O	T	E	N	U	S	E	X
E	-	H	H	S	U	J	U	M	E	A	U	X	Y	M
D	S	E	O	A	P	L	C	U	B	E	I	T	V	K
U	E	R	S	B	G	M	E	S	C	A	R	G	O	T
C	P	E	T	V	C	O	N	I	Q	U	E	C	D	R
T	T	L	E	J	D	V	Z	Q	L	P	Z	E	R	O
I	C	L	N	D	E	P	L	A	C	E	M	E	N	T
B	E	I	E	Q	U	I	L	A	T	E	R	E	F	P
L	R	P	X	T	H	E	O	R	E	M	E	S	E	B
E	C	S	O	R	T	H	O	C	E	N	T	R	E	K
Y	L	E	Q	I	G	A	U	C	H	E	S	Q	K	G
C	E	L	S	L	E	O	V	P	R	E	M	I	E	R