Mémoires de la Société royale des sciences de Liège.

Liège [etc.],La Société.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/39398

2e sér.:t.3 (1873): http://www.biodiversitylibrary.org/item/87402

Article/Chapter Title: Exposition nouvelle...
Author(s): Brasseur
Page(s): Page 113, Page 114, Page 115, Page 116, Page 117, Page 118, Page 119, Page 120, Page 121, Page 122, Page 123, Page 124, Page 125, Page 126, Page 127, Page 128, Page 129, Page 130, Page 131, Page 132, Page 133, Page 134, Page 135, Page 136, Page 137, Page 138, Page 139, Page 140, Page 141, Page 142, Page 143, Page 144, Page 145, Page 146, Page 147, Page 148, Page 149, Page 150, Page 151, Page 152, Page 153, Page 154, Page 155, Page 156, Page 157, Page 158, Page 159, Page 160, Page 161, Page 162, Page 163, Page 164, Page 165, Page 166, Page 167, Page 168, Page 169, Page 170, Page 171, Page 172, Page 173, Page 174, Page 175, Page 176, Page 177, Page 178, Page 179, Page 180, Page 181, Page 182, Page 183, Page 184, Page 185, Page 186, Page 187, Page 188, Page 189, Page 190, Page 191, Page 192

This page intentionally left blank.

VI. — *Exposition nouvelle des principes du calcul différentiel et du calcul intégral,*

PAR

J. B. BRASSEUR.

AVANT-PROPOS.

Notre intention, en écrivant cet avant-propos, n'est pas de faire l'histoire du calcul différentiel et du calcul intégral, ni d'exposer les progrès que cette immense découverte a fait faire à toutes les sciences auxquelles s'applique l'analyse mathématique; nous voulons seulement essayer d'analyser brièvement les différents points de vue sous lesquels on peut envisager ces calculs, et montrer en quoi le nouveau point de vue, découvert par Brasseur, diffère de tous les précédents.

Comme il est des auteurs qui veulent retrouver le germe du calcul différentiel jusque dans la méthode d'exhaustion des anciens, nous citerons les principaux géomètres qu'on peut regarder comme ayant contribué à éveiller cette nouvelle idée, et nous indiquerons en quelques mots les progrès réels qu'ils ont fait faire à la science jusqu'à l'apparition de Newton et de Leibnitz.

KEPLER (1615) introduisit le premier l'idée de l'infini en mathématiques, et s'en servit avec succès pour déterminer des surfaces et des volumes de révolution qui avaient échappé à Archimède.

C'est lui également qui signala le principe des maxima et minima.

CAVALLERI (1635), par sa géométrie des indivisibles, étendit beaucoup plus encore le champ de la géométrie; mais sa méthode, bien que plus rapide et plus féconde que celle d'Archimède, se ramène au fond à celle-ci, comme il le fait voir lui-même dans ses *Exercitationes mathematicæ.* Il peut être considéré comme l'un des précurseurs de la méthode des limites.

ROBERVAL définit la tangente à une courbe : la direction du mobile qui la décrit, à chacun de ses points; et par la génération des courbes au moyen de mouvements composés, il détermine d'une manière très-aisée leurs tangentes; mais sa méthode était en défaut pour les courbes dont il ne connaissait pas une loi simple de génération.

TORRICELLI fait simultanément la même découverte.

FERMAT pose, dans sa méthode des tangentes et des maxima et minima, le principe des infiniment petits.

HUYGHENS et DE SLUSE, en simplifiant la méthode de Fermat, trouvent la règle des dérivées.

DESCARTES résout les mêmes problèmes au moyen de sa méthode des indéterminées.

Mais toutes ces méthodes, analogues à celle du calcul différentiel, ne s'appliquaient en général qu'aux courbes algébriques dont l'ordonnée est une fonction rationnelle et entière de l'abscisse.

C'est à WALLIS (1655) que revient l'honneur de leur avoir donné une extension plus grande par son Arithmétique des infinis, où il emploie l'interpolation pour trouver la quadrature des courbes dont l'ordonnée est une fonction irrationnelle de l'abscisse.

Enfin BARROW (1669), le maître de Newton, applique aux courbes algébriques la méthode des infiniment petits, d'une manière tellement analogue à celle du calcul différentiel, qu'il n'existe entre les deux qu'une simple différence de notations.

Jusqu'alors les recherches s'étaient bornées aux tangentes, aux maxima et minima, et aux quadratures. Wallis seul avait entrepris une rectification de courbe. Il était réservé à Newton et à Leibnitz de fonder réellement le nouveau calcul, de lui donner toute sa puissance, et de l'appliquer à toutes les sciences qui s'occupent de grandeurs continues. (1).

Ce court exposé suffit pour montrer qu'il n'a été trouvé, avant ces grands génies, aucune idée qui ne puisse se ramener à celle des infiniment petits, ou des limites, si l'on en excepte toutefois la méthode des mouvements composés de Roberval et Torricelli, qui présente plus d'analogie avec le calcul des fluxions, mais dont l'application, comme nous l'avons dit, s'était bornée à quelques cas particuliers ; et quant au calcul des différences finies, dont il semblerait, au premier abord, qu'il a dû précéder le calcul différentiel, il n'a été imaginé qu'en 1715 par Taylor.

Enfin Lagrange établit, le premier, sur l'analyse finie, les règles du calcul des dérivées et du calcul inverse, qui ne sont au fond que le calcul différentiel et le calcul intégral.

Les conceptions sur lesquelles ces calculs ont été fondés jusqu'à ce jour peuvent toutes se ramener à l'une des suivantes :

1° La conception des *infiniment petits* considérés comme doués d'une existence réelle. Quoique les idées de Leibnitz aient surtout servi à la propager sur le continent, il résulte clairement

---

(1) Il est universellement reconnu aujourd'hui que, quoique Newton ait été dès 1666 en possession de son *Calcul des Fluxions*, Leibnitz n'en avait pas eu connaissance lorsqu'il inventa, en 1677, son *Calcul différentiel*.

d'un passage de ce philosophe (1) qu'il ne l'a jamais envisagée sous cette forme absurde que Fontenelle a essayé de défendre, mais que pour lui cette conception revenait, au fond, à celle des limites. Aussi, ne citons-nous que pour mémoire ce procédé commode, sans doute, mais entièrement dépourvu de rigueur.

2° La conception des *limites*, dont Newton s'était déjà servi accessoirement, et que Mac-Laurin a prise pour base de son *Traité des Fluxions*. Elle a été développée par d'Alembert, et adoptée par la plupart des analystes modernes.

3° La conception des *fluxions*, qui est tout entière l'œuvre de Newton, et qui n'a jamais été développée sur le continent, sans doute parce que l'ouvrage de Newton n'a paru qu'après sa mort, et que les frères Bernoulli et l'Hôpital avaient déjà fait connaître en Allemagne et en France la méthode de Leibnitz.

Toutefois, cette conception profonde a été prise par M. Lamarle pour base de son *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante* (2).

4° Enfin la conception des dérivées, due à Lagrange.

Il serait trop long d'exposer en détail les principes de chacune

---

(1) Sentio autem et hanc et alias (methodos) hactenùs adhibitas omnes deduci posse ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, quòd figura curvilinea censenda sit æquipollere polygono infinitorum laterum; undè sequitur, quidquid de tali polygono demonstrari potest, sive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum respectus, sive ità, ut tantò magis verificetur, quantò major sumitur laterum numerus, ità ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curvâ posse pronuntiari. (Acta erudit. 1684, p. 585.)

(2) Tout en reconnaissant le mérite avec lequel M. Lamarle a su dégager le calcul des fluxions de toute idée étrangère à celle de la génération même d'une fonction, nous n'avons pas pensé que sa méthode différât assez de celle de Newton pour la classer en dehors de celle-ci. Depuis longtemps, du reste, on avait interprété la méthode des fluxions en en rejetant toute considération de mouvement, comme on le voit par différents passages de Montucla. (V. surtout t. II, p. 369 à 375).

de ces quatre méthodes; nous nous bornerons à en donner une idée, afin de pouvoir les comparer à la méthode de Brasseur; et pour que la comparaison soit plus aisée, nous ne les envisagerons qu'au point de vue géométrique, quoique ce ne soit évidemment pas de là qu'il faille partir dans l'exposition du calcul.

Soit donc donnée une fonction continue y d'une variable indépendante x :

$$y = f(x);$$

le calcul différentiel a pour objet l'étude de la génération de cette fonction, c'est-à-dire de la manière continue dont elle passe d'un état à un autre. Envisagée au point de vue géométrique, supposons que

$$y = f(x)$$

soit l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Si nous donnons à x l'accroissement Δx, y prendra un accroissement correspondant :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

et nous obtiendrons un autre point de la courbe; le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ représentera le coefficient angulaire de la droite qui unit ces deux points; mais il s'agirait de déterminer la direction qu'a suivie le point générateur à partir du point x, y pour décrire la courbe d'une manière continue.

Dans la première méthode, on suppose que Δx devienne infiniment petit, et on le représente par dx; Δy deviendra de même un infiniment petit dy; et les deux points x, y *et* $x + dx$, $y + dy$, appartiendront à la fois à la tangente, à l'arc et à la courbe qui se confondront. Cette méthode est en contradiction avec son principe, puisque ces deux points doivent se confondre en vertu de ce principe même, et par suite la génération de la courbe par infiniment petits est impossible.

Dans la deuxième méthode, on constate qu'à mesure que Δx et Δy décroissent, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers une limite qu'il ne peut jamais atteindre; cette limite est le coefficient angulaire de la tangente, puisque cette droite peut se définir la limite des positions d'une sécante qui tourne autour d'un de ses points d'intersection de manière que l'autre se rapproche indéfiniment du premier. Cette limite se trouvera en faisant, dans l'expression du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = 0$.

Il n'y a rien à reprocher à cette méthode, au point de vue de la rigueur, et elle est assez commode dans les applications. Toutefois, « on se demandera, sans doute, dit Lacroix, ce qu'on peut entendre par le rapport des quantités qui ont cessé d'exister » et cette objection, quoique spécieuse, se présente d'abord à l'esprit (1). Il en est une plus sérieuse à opposer à cette méthode : elle devrait commencer par montrer que c'est sur l'étude même de la limite de ce rapport que repose la génération de la fonction, et ceci nous semble assez malaisé à établir; car, pour rester dans l'exemple que nous traitons, il n'y a plus de génération si le second point vient se confondre avec le premier; à quoi tient dès-lors l'importance extrême de cette limite ? Nous pourrions ajouter que, si cette méthode donne une idée rigoureuse de la dérivée, il n'en est pas de même quant à la différentielle. On

(1) Lagrange fait également cette objection à la méthode des limites. Cette méthode, dit-il, a le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être des quantités ; car, quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités, tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ces termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois.

écrit $\frac{dy}{dx} = \lim.\frac{\Delta y}{\Delta x}$: que sont dy et dx? Pas nuls apparemment; sans quoi les équations différentielles n'auraient plus de sens. Nous ne dirons pas qu'ils sont infiniment petits, ce qui n'en a pas davantage. Ils sont donc finis, mais alors le point $x+dx, y+dy$ cesse d'appartenir à la courbe pour passer à sa tangente, et l'on se trouve en présence de la difficulté signalée plus haut : pourquoi l'étude d'une courbe doit-elle nécessairement commencer par celle de sa tangente? Enfin, nous dirons même que la méthode des limites, envisagée sous ce dernier point de vue, c'est-à-dire en laissant dx et dy finis, ce qui est le seul point de vue rigoureux, revient au fond à celle des fluxions, à part qu'elle est beaucoup moins philosophique et moins directe.

La conception de Newton, en effet, aborde directement le problème de la génération d'une fonction. Nous la supposerons débarrassée des idées étrangères de mouvement sur lesquelles Newton l'avait fondée, et nous continuerons, dans cet exposé sommaire, à ne traiter que l'exemple géométrique proposé. Si nous nous demandons comment le point x, y engendre la courbe, il est clair que c'est en suivant une direction variable à chaque instant ; pour nous former une idée claire de celle qu'il suit à un instant donné, nous supposerons que cette direction reste constante à partir de cet instant, et nous aurons la tangente à la courbe au point considéré. Or, si nous considérons deux positions successives x, y et $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ du point, la direction qu'il aurait suivie en passant en ligne droite de l'une à l'autre serait donnée par le coefficent angulaire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dont l'expression se compose d'une fonction de x indépendante de Δx, et d'une autre fonction de x affectée du facteur Δx. Cette direction varie donc avec l'intervalle Δx; la direction indépendante de cet intervalle est celle qui a pour coefficient angulaire le premier terme de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Si nous représentons ce premier terme par $\frac{dy}{dx}$, pour nous conformer à la notation en usage, dx et dy seront ce que Newton appelle les fluxions de x et de y ; et ces quantités, comme on le voit, peuvent être aussi grandes que l'on voudra. Comme dx est tout-à-fait arbitraire, la détermination de dy reviendra à celle du rapport $\frac{dy}{dx}$, rapport que l'on peut trouver, si l'on veut, en prenant la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, comme Newton l'a souvent fait lui-même.

Cette méthode peut s'appliquer avec la même rigueur à l'étude purement analytique des fonctions, comme à la mécanique, et part toujours de l'idée même de la génération d'une fonction continue.

Nous ne nous arrêterons pas à la méthode de Lagrange, qui a présenté à son auteur des difficultés telles dans l'application, que lui-même l'a abandonnée dans sa *Mécanique analytique* pour y substituer celle des infiniment petits.

De toutes les manières d'envisager le calcul différentiel, nous n'en connaissons pas de plus philosophique que celle de Newton. Mais elle exige, pour être bien comprise, des esprits préparés aux spéculations métaphysiques; nous avons connu en effet de bons analystes qui ne l'ont jamais saisie, quoiqu'ils eussent étudié aux meilleures sources.

La grande difficulté du calcul différentiel, c'est qu'il essaie d'analyser l'idée de continuité ; il cherche à exprimer comment une fonction passe d'une manière continue d'un état à un autre ; et c'est ce passage qui a donné naissance à l'idée contradictoire des infiniment petits, à l'idée indirecte des limites, enfin à l'idée philosophique de Newton.

Brasseur a évité cette grande difficulté; il a réussi à rendre la méthode de Lagrange, qui n'emploie que l'analyse finie, aussi commode dans les applications et aussi rigoureuse que celle des limites ou des fluxions. Nous dirons même que sa méthode a, au point de vue de l'enseignement, sur celle des fluxions l'avantage de n'exiger aucune notion métaphysique, et sur les limites, celui d'être beaucoup plus directe et de ne donner prise à aucune attaque, même spécieuse.

Au lieu d'analyser l'idée de continuité, il étudie deux états successifs d'une fonction continue; et la continuité n'intervient qu'en ce que la différence entre ces deux états peut devenir aussi petite que l'on voudra, sans qu'elle devienne jamais nulle, comme il semble que cela a lieu dans les limites, ni infiniment petite dans l'ancienne signification du mot, signification tout simplement absurde.

Si nous reprenons notre exemple, en appelant $f'(x)$ la dérivée de $y = f(x)$, nous aurons, suivant la conception des fluxions (ou suivant celle des limites en y regardant dx et dy comme finis) :

$$dy = f'(x)\,dx,$$

où $x + dx$ et $y + dy$ sont les coordonnées du point pris sur la tangente en x, y à la courbe, et correspondant au point de la courbe qui a pour abscisse $x + dx$ et pour ordonnée $y + \Delta y$, Δy étant nécessairement différent en général de dy.

Brasseur écrit, au contraire, immédiatement :

$$\Delta y = f'(x)\,dx + \text{etc.}$$

où $x + dx$, $y + \Delta y$ sont les coordonnées d'un second point de la courbe. On le voit, il étudie deux états successifs quelconques de la fonction y : celui qui répond à la valeur x de la variable, et celui qui répond à la valeur $x + dx$, dx étant arbitraire, et pouvant, en vertu de la continuité, devenir plus petit que toute quantité donnée.

Pour les commençants, c'est là un avantage très-précieux. Dans les applications, en effet, les différentielles, considérées au point de vue des limites, ou les fluxions paraissent se former par des procédés essentiellement différents pour chaque fonction. C'est ainsi que la différentielle ou la fluxion de l'arc d'une courbe plane se compte sur la tangente, tandis que celle de l'aire se prend en transportant l'ordonnée, prise comme constante, parallèlement à elle-même, etc. Dans la méthode de Brasseur, au contraire, le procédé est toujours uniforme, il forme la *différence* de l'arc, de l'aire, etc., en leur donnant un accroissement arbitraire; si nous reprenons en effet l'équation

$$\Delta y = f'(x)\, dx + \text{etc.}$$

nous voyons que Δy est l'accroissement de la fonction correspondant à l'accroissement quelconque dx de la variable; or, comme on le verra dans l'*Exposition*, il n'est nécessaire dans les applications que de connaître le premier terme $f'(x)\,dx$ du développement, terme qui s'appelle la *différentielle* de y; et la connaissance de ce seul terme permet de remonter à la fonction y sans qu'il soit nécessaire d'écrire le reste du développement.

La lucidité avec laquelle Brasseur a développé cette idée nous dispense d'entrer, à ce sujet, dans de plus grands détails; nous en avons été vivement frappé, et nous sommes convaincu que celui qui lira sans préjugé cette *Exposition* devra reconnaître qu'il n'en est pas de plus simple et de plus rigoureuse à la fois; nous ajouterons même qu'aucune des méthodes connues n'a donné d'une manière bien nette la signification de l'équation différentielle d'une courbe, signification que Brasseur met dans tout son jour (1).

Si, cherchant à nous rappeler les entretiens dont nous avons eu le bonheur de jouir avec ce géomètre éminent, nous nous demandons quelle est la voie par laquelle il est arrivé à cette conception, il nous semble que nous pourrons en indiquer au moins les principaux jalons, et donner quelque apaisement à la curiosité légitime de ceux qu'intéresse le développement de la science.

Son esprit, d'une rigueur toute géométrique, n'avait pas été satisfait des différentes méthodes par lesquelles on avait cherché à établir l'exactitude du calcul différentiel.

Profondément philosophe, comme le témoignent tous ses travaux, il allait toujours au fond des choses, et il s'était dit que, si l'invention du calcul différentiel a sa source dans une idée métaphysique, le calcul en lui-même doit pouvoir être débarrassé de toute notion étrangère. Il nous répétait souvent qu'il n'y avait pour lui qu'une théorie parfaitement irréprochable, sous ce rapport, en calcul différentiel, celle des maxima et minima. Aussi avait-il fait table rase, ce sont ses propres expressions, des idées qui lui étaient venues du dehors, pour fonder la science sur de toutes nouvelles bases. Cette science lui apparut alors comme dédoublée : une partie, le calcul pur, ou l'algorithmie, avait été établie par Lagrange sur l'algèbre seule; cette partie ne laissait rien à désirer; l'autre était à refaire : il s'agissait de trouver, dans les applications de ce calcul, la signification précise des opérations qu'on y effectue; ça été pour lui le sujet de longues

---

(1) Pour ne pas anticiper, nous renverrons à la note que nous avons ajoutée à l'article premier des applications géométriques.

méditations ; il a été frappé du terme *d'équations imparfaites* dont s'est servi Carnot pour désigner les équations différentielles, et il a vu dans cette idée un premier pas vers la vérité. Il ne s'agissait plus dès lors que d'établir clairement ce que Carnot n'avait fait qu'entrevoir d'une manière assez vague, c'est-à-dire de rétablir l'exactitude de ces équations imparfaites. Habitué à méditer sur les rapports des sciences entre elles, il avait vu une grande analogie entre le développement de l'accroissement d'une fonction suivant les puissances croissantes de l'accroissement de la variable, et les fractions périodiques : celles-ci, en effet, ne peuvent jamais s'écrire que sous forme imparfaite, et cette forme, toutefois, permet de retrouver exactement la génératrice. C'est cette idée simple et lumineuse qu'il a fait passer dans le calcul différentiel ; l'exactitude de ce calcul ne provient donc pas, comme le croyait Carnot, de ce qu'il y a compensation d'erreurs dans les termes qu'on néglige, mais au contraire de ce qu'on sous-entend simplement ces termes au lieu de les négliger.

La nouvelle idée sur laquelle devaient se fonder les applications du calcul était dès lors trouvée : il fallait maintenant ramener toutes les questions d'application à une méthode uniforme.

Cette méthode repose entièrement sur quelques principes fort simples, relatifs surtout aux indéterminées, et se rapprochant pour la forme de ceux de la méthode des limites. Cependant, Brasseur a eu soin d'éviter de tomber, soit dans cette méthode, soit dans celle des infiniment petits.

Il est un de ces principes surtout auquel il attachait la plus grande importance, et qui est peut-être le germe de sa méthode : c'est le principe VI, dont il s'est servi pour démontrer tous les théorèmes de géométrie pour lesquels on a recouru successivement à la méthode d'exhaustion, à la réduction à l'absurde, aux limites et aux infiniment petits. Nous avons trouvé dans ses manuscrits les développements de ce principe et de ses applications, et nous les avons insérés en appendice à la suite de *l'Exposition.*

Nous sera-t-il permis d'entrer dans quelques détails historiques, si l'on peut ainsi dire, sur la publication de cet ouvrage, détails qui nous permettront, du reste, d'expliquer les quelques légères modifications que nous avons cru devoir lui faire subir.

Brasseur avait conçu son idée dès 1829. Il étudiait alors à Paris. Un jour il exposa à un célèbre professeur d'analyse ce qu'il entendait par infiniment petit (1), et celui-ci lui répondit que telle était aussi sa manière de voir; Brasseur craignit alors que cet analyste n'eût d'un bout à l'autre les idées mêmes qu'il lui développerait, et se proposa de se taire.

Pendant de longues années il médita son ouvrage. Feu M. Pagani, l'un de nos meilleurs analystes, lui conseillant un jour de publier, Brasseur lui communiqua son manuscrit, que Pagani approuva et désira voir imprimer dans les Mémoires de l'Académie. Mais ce n'était là qu'un premier jet dont l'auteur se proposait alors de faire sortir un traité complet de calcul différentiel et intégral. Jamais Pagani n'a rien laissé transpirer de son secret, et Brasseur, préoccupé de ses découvertes en géométrie supérieure, l'ensevelit de nouveau pour longtemps. Une circonstance peu connue explique ce silence presque absolu qu'il a gardé sur sa découverte : il existe telle édition récente d'un ouvrage admirable à laquelle il a contribué plus que tout autre peut-être, et qui ne porte cependant pas son nom.

Les manuscrits des différents chapitres qui forment le présent ouvrage sont tous d'une main différente; ayant une grande peine

---

(1) Il a remplacé depuis lors cette expression par celle *d'indéfiniment petit*, qui a l'avantage de ne donner lieu à aucune confusion.

matérielle à écrire, il se faisait aider par ceux de ses élèves en qui il avait le plus de confiance, et il n'était pas bien sûr qu'involontairement peut-être il ne fût échappé à l'un d'eux un mot qui pouvait mettre un analyste sur la voie.

Nous l'avons vu se repentir plus d'une fois de n'avoir pas publié sa découverte, lorsque l'apparition d'un nouveau traité de calcul différentiel lui faisait craindre que l'auteur n'eût deviné son idée à demi-mot; et nous saisissions toutes les occasions pour l'engager vivement à la mettre au jour.

Ce n'est que cette année toutefois qu'il se décida à nous la développer tout entière, en nous priant de lui faire les observations que sa méthode pourrait nous suggérer.

Il en est une capitale que nous lui fîmes relativement à la notation et à la terminologie; le manuscrit porte même des indications qui se rapportent à cette observation. La maladie l'empêcha malheureusement de donner suite à l'exécution de son projet, et il nous a été impossible de savoir quel est le parti qu'il aurait pris quant aux modifications que nous lui avions proposées. Que ne lui a-t-il été donné de pouvoir mettre lui-même au jour cette œuvre qu'il avait méditée pendant quarante ans, et qu'il avait toujours réservée comme son œuvre de prédilection, ainsi qu'il le disait à Pagani! Nous eussions échappé à cette perplexité où nous nous trouvons plongé par la crainte de ne pas rendre son idée avec tous les développements que lui seul était capable de lui donner. Dans cette triste circonstance, nous avons agi sous l'inspiration de nos sentiments d'affectueuse vénération, ainsi que des conseils d'hommes éclairés, dévoués comme nous à sa mémoire; et nous avons apporté au texte quelques modifications et quelques additions qui nous ont été indiquées et que nous avons crues utiles au succès de l'ouvrage. Nous avons fait en sorte toutefois que le lecteur pût avec facilité restituer le texte primitif: toutes les modifications que nous avons faites sont entre parenthèses, toutes les additions et les notes destinées à éclaircir le texte sont de nous.

La seule modification un peu importante, comme nous l'avons dit, est relative à la notation et à la terminologie; nous allons l'expliquer en quelques mots.

Brasseur, en donnant à la variable x l'accroissement arbitraire dx, appelait *différentielle* l'accroissement correspondant de la fonction y, et le dénotait par dy; il posait donc :

$$y = \varphi(x)\,;\ dy = \varphi' \cdot dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

et il dénotait φ', φ'', etc., qu'il appelait dérivées avec Lagrange, par

$$\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \text{etc.}$$

pour les distinguer des rapports complets

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \text{etc.}$$

Mais, comme nous le lui faisions remarquer, c'était là renverser toutes les notations et toute la terminologie adoptées depuis Leibnitz; et ce qui paraît établir que lui-même en voyait le danger, c'est que nous avons trouvé souligné, probablement de sa main, le paragraphe suivant de Carnot (1) :

« Il paraîtrait bien difficile maintenant de quitter la route qui » nous a été ouverte par ces illustres géomètres; de se rompre à

---

(1) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, p. 207, § 166.

» une nouvelle manière de voir, à une nouvelle notation, à de » nouvelles locutions. »

Aussi n'avons-nous pas voulu exposer son œuvre à une critique (1) qu'il eût sans doute évitée lui-même au moyen d'une légère modification de forme, en écrivant comme nous l'avons fait :

$$\Delta y = \varphi' dx + \varphi'' dx^2 + \cdots$$

$$\frac{\Delta y}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{1.x} + \cdots$$

On comprend aisément pourquoi nous avons laissé partout dx, sans le changer en Δx; cette modification non-seulement eût été superflue, mais eût même contribué à allonger l'exposition et à la rendre moins claire par cela seul.

Il ne nous reste plus qu'à expliquer pourquoi cette œuvre a paru dans les Mémoires de la Société royale des sciences de Liége. Brasseur avait d'abord eu l'intention de la publier à la suite de son *Précis de Mécanique appliquée*. Il nous fit l'honneur de nous con-

---

(1) Nous pourrions citer à l'appui de notre manière de voir celle de Lacroix, qui a analysé avec beaucoup de sagacité les différentes notations successivement proposées en calcul différentiel ; nous nous bornerons à extraire de son grand traité les passages suivants :

« Je demande la permission de faire observer que c'est un principe avoué de » tout le monde, qu'il ne faut changer les signes reçus que lorsqu'ils sont en » contradiction manifeste avec les idées qu'ils doivent représenter, ou lorsqu'on » peut les abréger notablement, ou enfin lorsqu'en les modifiant, on les rend » propres à développer de nouveaux rapports qu'on n'aurait pas aperçus sans cela.

. . . .

« Avant donc d'innover dans les signes déjà si multipliés en analyse, que l'on » veuille bien penser à l'embarras qu'éprouvent ceux qui l'étudient et qui vou- » draient en embrasser l'ensemble, d'avoir sans cesse à rapprocher des formules » et des opérations analogues rendues par des caractères différents. C'est la crainte » de voir ouvrir cette nouvelle source de difficultés qui m'a engagé dans des détails sulter à ce sujet, et nous lui conseillâmes de la faire paraître dans les Mémoires de l'une de nos Sociétés savantes. Des raisons de convenance personnelle le décidèrent en faveur de la Société de Liége, et nous nous sommes fait un devoir de respecter sa volonté.

F. Folie.

Liége, juillet 1868.

» dont la longueur sera justifiée par l'influence que ne peut manquer d'exercer
» l'homme célèbre (Lagrange) qui semblait avoir projeté une révolution à cet
» égard, et l'on trouvera tout simple qu'en attendant l'époque où des progrès bien
» caractérisés légitiment d'une manière incontestable l'emploi de signes nouveaux,
» on tâche de défendre ceux avec lesquels la *Mécanique analytique* et la *Méca-*
» *nique céleste* sont écrites. » (Lacroix, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, p. 248, n° 83).

CHAPITRE Ier.

Du calcul proprement dit, ou de l'algorithme.

1. Soit la fonction

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

En donnant à la variable x un accroissement arbitraire représenté par dx, la fonction y prendra un accroissement représenté par Δy et fourni par l'équation

$$\Delta y = \varphi(x + dx) - \varphi(x) \qquad (2)$$

Si l'on y fait $dx = 0$, on aura en même temps $\Delta y = 0$; ainsi l'accroissement de la fonction et celui de la variable s'annulent en même temps. Nous concluons seulement de là qu'ils décroissent ensemble, et *nous prévenons déjà ici d'avance que jamais, ni dans le calcul, ni dans les applications, nous ne ferons* dx *égal à zéro.*

Lagrange démontre, par de pures considérations d'algèbre, que $\varphi(x + dx)$ peut se développer en une série de la forme

$$\varphi(x) + pdx + qdx^2 + rdx^3 + \text{etc.}$$

où p, q, r, etc., sont de nouvelles fonctions de x. Cela étant l'équation (2) donne pour l'accroissement Δy

$$\Delta y = pdx + qdx^2 + rdx^3 + \text{etc.} \qquad (3)$$

donc l'accroissement d'une fonction, ou la (différence) de cette fonction, peut toujours être développé suivant les puissances ascendantes et entières de l'accroissement attribué à la variable de la fonction.

(Le premier terme du développement s'appelle différentielle, et se représente par dy; et le développement Δy lui-même s'appelle différence ; ainsi l'on écrira :

$$dy = pdx. \qquad \Delta y = dy + \text{etc.}) \tag{3 bis}$$

Les règles qui apprennent à déduire, de toute fonction primitive, le premier coefficient p de ce développement, constituent les règles de la différentiation, et la démonstration de ces règles est un premier objet du calcul différentiel.

Différentier une fonction, c'est trouver (sa différentielle, c'est-à-dire) le premier terme de sa (différence). Celle-ci s'écrira en représentant l'ensemble des termes qui suivent le premier, par les mots *plus et cœtera*, écrits en abrégé. D'après cela, la (différence) Δy donnée par l'équation (3) s'écrira :

$$\Delta y = pdx + \text{etc.}$$

où les termes qui suivent le premier ont pour facteurs respectifs dx^2, dx^3, etc.

Comme le coefficient p dérive de la fonction primitive $\varphi(x)$, il est appelé pour cette raison dérivée première de la fonction primitive, et on le représente par la fonction primitive surmontée d'un accent; ainsi $\varphi'(x)$ signifie dérivée première de la fonction primitive $\varphi(x)$.

Le même coefficient p est aussi appelé premier coefficient différentiel de la fonction primitive, ou coefficient différentiel du premier ordre.

D'après cette convention l'équation précédente s'écrira :

$$\Delta y = \varphi'(x)\, dx + \text{etc.}$$

2. Désignons par $\Delta^2 y$ l'accroissement que prend Δy, lorsque, dans tous les termes du second membre de cette équation, on donne à x le même accroissement dx. Nous ferons remarquer que si nous voulons encore ici ne conserver que le premier terme de la valeur de $\Delta^2 y$, il suffira de donner à x simplement dans le premier terme, l'accroissement dx, et on aura un résultat de la forme

$$\Delta^2 y = p' dx^2 + \text{etc.}$$

où les termes qui suivent le premier ont pour facteurs respectifs dx^3, dx^4, etc.

$\Delta^2 y$, (différence) de Δy, est appelée (différence) seconde de y, ou de la fonction primitive. (Le premier terme de ce développement s'appellera différentielle seconde et s'écrira :

$$d^2 y = p' dx^2.)$$

Le coefficient p' se déduit de $\varphi'(x)$ par les mêmes règles de différentiation que le coefficient $\varphi'(x)$ a été déduit de la fonction primitive; il est appelé dérivée seconde de la fonction primitive; et on le représente par la fonction primitive surmontée de deux accents, c'est-à-dire par $\varphi''(x)$.

Le même coefficient est encore appelé second coefficient différentiel ou coefficient différentiel du second ordre. L'équation précédente devient en écrivant $\varphi''(x)$ à la place de p' :

$$\Delta^2 y = \varphi''(x)\, dx^2 + \text{etc.}$$

(D'où :

$$d^2 y = \varphi''(x)\, dx^2.)$$

3. Ainsi de l'équation primitive

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

on déduit par les règles de la différentiation les équations successives :

$$\begin{array}{lll} \Delta y = dx\varphi'(x) + \text{etc.} & (\text{d'où } dy = dx.\varphi'(x) & (2) \\ \Delta^2 y = dx^2\varphi''(x) + \text{etc.} & \text{»} \quad d^2y = dx^2.\varphi''(x) & (3) \\ \Delta^3 y = dx^3\varphi'''(x) + \text{etc.} & \text{»} \quad d^3y = dx^3.\varphi'''(x) & (4) \\ \quad\text{etc.} & \quad\text{etc.} & \\ \Delta^n y = dx^n\varphi^{(n)}(x) + \text{etc.} & \text{»} \quad d^ny = dx^n.\varphi^{(n)}(x) & (n+1).) \end{array}$$

(La première équation de chaque couple est nommée équation aux différences du 1er, 2me, etc., ordre; la seconde, équation différentielle du 1er, 2me, etc., ordre.) (1).

4. Les règles qui apprennent à remonter de l'une quelconque des équations ci-dessus à celle qui précède immédiatement constituent ce que l'on appelle le calcul intégral.

Or, on remarquera que *pour remonter de l'une de ces premières équations à celle qui précède immédiatement, il suffira simplement de remonter du 1er terme du 2me membre de l'une au 1er terme du 2me membre de celle qui précède immédiatement.* Et puisque la loi que suit le multiplicateur dx, d'une équation à la suivante est évidente, tout se réduit à savoir remonter d'un coefficient différentiel au coefficient différentiel qui précède (ou d'une différentielle à celle qui précède, ce qui constitue à proprement parler le calcul intégral.)

Nous ferons remarquer de plus que le multiplicateur dx, lorsqu'il s'agit d'intégrer, n'est là que pour mémoire; il ne sert réellement qu'à marquer par son exposant le nombre d'intégrations successives à effectuer pour arriver à la fonction primitive.

5. Pour marquer qu'il faut remonter de $\Delta^3 y$ à $\Delta^2 y$ (ou de d^3y à d^2y), on met devant $\Delta^3 y$ (ou d^3y) le signe $\int$, qui signifie

(1) Brasseur n'avait écrit que la première équation de chaque couple avec la caractéristique d au lieu de Δ, et l'avait appelée équation différentielle. Il s'ensuivait que la seconde était imparfaite. Mais comme toutes deux sont exactes, et qu'elles ont un sens différent, nous les avons écrites simultanément en conservant les dénominations universellement adoptées.

intégrale de . . . Ainsi $\int \Delta^3 y$ (ou $\int d^3 y$) s'énonce intégrale de $\Delta^3 y$ (ou de $d^3 y$.)

On a donc :

$$\int \Delta^3 y = \Delta^2 y \qquad \left(\text{et} \quad \int d^3 y = d^2 y\right)$$

$$\int \Delta^2 y = \Delta y \qquad \left(\text{»} \quad \int d^2 y = dy\right)$$

$$\int \Delta y = y \qquad \left(\text{»} \quad \int dy = y, \right)$$

de même :

$$\int dx^3 \varphi'''(x) = dx^2 \varphi''(x)$$

$$\int dx^2 \varphi''(x) = dx \varphi'(x)$$

$$\int dx \varphi'(x) = \varphi(x).$$

6. D'après cette convention, pour marquer qu'il faut remonter de l'équation (4) à (3), on écrit :

$$\int \Delta^3 y = \left(\int d^3 y + \text{etc.}\right) = \int dx^3 \varphi'''(x) + \text{etc.}$$

Les opérations indiquées par le signe $\int$ étant effectuées, l'équation précédente devient :

$$\Delta^2 y = dx^2 \varphi''(x) + \text{etc.}$$

Pour marquer qu'il faut encore remonter de celle-ci à celle qui précède immédiatement, on écrira :

$$\int \Delta^2 y = \left(\int d^2 y + \text{etc.}\right) \quad \int dx^2 \varphi'(x) + \text{etc.},$$

et les opérations indiquées par le signe $\int$ étant effectuées il vient :

$$\Delta y = dx \varphi'(x) + \text{etc.},$$

et finalement, si l'on demande de remonter de celle-ci à celle qui précède immédiatement, on écrira :

$$\int \Delta y = \int dx\varphi'(x)$$

sans placer à la suite du second membre + *etc.*, puisque cette intégrale doit reproduire l'équation primitive $y = \varphi(x)$, dans laquelle tous les termes étaient en évidence.

7. Constatons maintenant ce fait : que si l'on donne le premier terme de la (différence ou la différentielle) d'un ordre quelconque d'une fonction, on pourra remonter de ce terme par une série d'intégrations à la forme de cette fonction.

Remarquons aussi que dans toutes les questions où il s'agit uniquement de déterminer la forme d'une fonction, au moyen d'une quelconque de ses (différences), les mots + *etc.* qui complètent les équations par lesquelles il faut passer pour arriver à l'équation primitive ne servent nullement. De sorte que nous pourrions nous dispenser d'écrire les mots + *etc.* et les sous-entendre seulement. Mais en ne les écrivant pas et en les sous-entendant simplement, nous donnons uniquement pour raison : qu'ils ne servent pas au but que l'on se propose, lequel est de remonter à la forme d'une fonction primitive dont on donne l'une quelconque des (différences).

Mais, dira-t-on, puisque les mots + *etc.* ne servent ni dans les différentiations successives, ni dans les intégrations successives, on peut les omettre et écrire à la place de

$$\Delta y = \varphi'.dx + \text{etc.}$$

simplement

$$dy = \varphi'.dx.$$

Sans doute on pourrait faire cette convention, de considérer cette dernière égalité comme une véritable équation; mais alors en supposant à dx la même valeur dans les deux équations, dy dans la dernière n'aurait pas la signification d'être l'accroissement que prend y lorsque x prend l'accroissement dx dans l'équation $y = \varphi(x)$.

Or, dans les applications on a besoin de connaître la signification des quantités, pour pouvoir raisonner et opérer sur elles (1).

8. *Autres conventions pour dénommer et représenter ce qu'on a nommé dérivée première, dérivée seconde, dérivée troisième, etc.*

En écrivant de nouveau les équations (2), (3), etc. $(n+1)$, après les avoir divisées respectivement par

$$dx,\ dx^2,\ dx^3,\ \text{etc.},\ dx^n,$$

on a :

$$\frac{\Delta y}{dx} = \varphi'(x) + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^2 y}{dx^2} = \varphi''(x) + \text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^3 y}{dx^3} = \varphi'''(x) + \text{etc.}$$

$$\text{etc.}$$

$$\frac{\Delta^n y}{dx^n} = \varphi^{(n)}(x) + \text{etc.}$$

Dans cette suite d'égalités, les termes représentés par $+$ *etc.* restent tous affectés du multiplicateur dx. On connaît les désavantages d'annoter par des accents les dérivées successives d'une fonction, lorsqu'elle renferme plusieurs variables, et qu'il faut prendre les dérivées successivement

(1) On pourrait répondre à ceci que le calcul différentiel cherche en effet la signification de la différentielle $dy = \varphi'.dx$; mais on devra reconnaître que cette signification est plus difficile à saisir que celle de Δy, et qu'en partant de cette dernière, le calcul gagne beaucoup en simplicité.

par rapport à chaque variable. Or la convention suivante obvie à ces inconvénients : pour marquer le premier terme $\varphi'(x)$, de la valeur du rapport $\frac{\Delta y}{dx}$, nous conviendrons d'écrire $\frac{dy}{dx}$; ainsi $\frac{dy}{dx}$ signifie 1° premier terme du rapport $\frac{\Delta y}{dx}$; 2° dérivée première d'une fonction y dont la variable est x ; 3° premier coefficient différentiel d'une fonction y dont la variable est x ; ou simplement premier coefficient différentiel de y par rapport à x.

Il en est de même de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. (1).

Par cette convention les équations précédentes peuvent donc s'écrire comme suit :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{dx} &= \frac{dy}{dx} + \text{etc.},\\
\frac{\Delta^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.},\\
&\text{etc.}\\
\frac{\Delta^n y}{dx^n} &= \frac{d^ny}{dx^n} + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}$$

ou bien encore :

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{dy}{dx}\,dx + \text{etc.} = (dy + \text{etc.})\\
\Delta^2 y &= \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 + \text{etc.} = (d^2y + \text{etc.})\\
&\text{etc.}\\
\Delta^n y &= \frac{d^ny}{dx^n}\,dx^n + \text{etc.} = (d^ny + \text{etc.})
\end{aligned}\right\}$$

(1) Le manuscrit portait $\frac{dy}{dx}$ au lieu de $\frac{\Delta y}{dx}$, et $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$; en le lisant avec M. Brasseur, nous avions écrit en marge la modification que porte le texte. (Voir l'Avant-Propos).

Cette convention nous donne : 1° l'avantage de rappeler la fonction qui a été différentiée et la variable qui a reçu l'accroissement; 2° de rappeler tant par l'indice de la lettre d qui précède y, que par l'exposant de dx, l'ordre du coefficient différentiel, et enfin 3° de rappeler le nombre d'intégrations à effectuer pour arriver à la fonction primitive.

Ainsi si l'on a la fonction

$$y = x^m$$

et que l'on demande les (différences et les différentielles) successives de cette fonction, on aura :

$$\Delta y = mx^{m-1}\,dx + \text{etc.} \quad \text{et} \quad (dy = mx^{m-1}\,dx)$$

$$\Delta^2 y = m(m-1)x^{m-2}\,dx^2 + \text{etc.} \quad \text{et} \quad (d^2y = m(m-1)x^{m-2}\,dx^2)$$

$$\text{etc.}$$

et pour les coefficients différentiels successifs, ou les dérivées :

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$$

9. Nous avons indiqué qu'un premier objet du calcul différentiel était de faire connaître le premier terme d'une (différence) quelconque (ou une différentielle quelconque) d'une fonction donnée. Un second objet du calcul différentiel est de donner le moyen de compléter cette (différence), c'est-à-dire de trouver autant de termes de la (différence) que l'on veut. Cette loi est donnée par le théorème de Lagrange, théorème qui est démontré par ce célèbre mathématicien par de pures considérations d'algèbre, sans considérations de limites, ni d'infiniment petits, et qui n'est autre au fond que le théorème de Taylor. Il sert à compléter la (différence) d'un ordre quel-

conque d'une fonction, au moyen de tous les coefficients différentiels de la fonction proposée.

En écrivant les (différences) successives d'une même fonction

$$y = \varphi(x)$$

on a d'une manière : De l'autre manière :

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \Delta y = dx\varphi'(x) + \text{etc.} \\ 2) & \Delta^2 y = dx^2\varphi''(x) + \text{etc.} \\ 3) & \Delta^3 y = dx^3\varphi'''(x) + \text{etc.} \\ 4) & \Delta^n y = d^n x\varphi^n(x) + \text{etc.} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \Delta y = \frac{dy}{dx}\,dx + \text{etc.} \\ \Delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2 + \text{etc.} \\ \Delta^3 y = \frac{d^3y}{dx^3}\,dx^3 + \text{etc.} \\ \Delta^n y = \frac{d^n y}{dx^n}\,dx^n + \text{etc.} \end{array}\right.$$

D'après le théorème de Lagrange, la (différence) première d'une fonction $y = \varphi(x)$ est donnée par la formule :

$$\Delta y = dx\varphi'(x) + \frac{dx^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{dx^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \text{etc.}$$

ou bien :

$$\Delta y = dx \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dx^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

(ou encore :

$$\Delta y = dy + \frac{1}{1.2}d^2y + \frac{1}{1.2.3}d^3y + \text{etc.})$$

On conclut de ce développement, dont la loi est manifeste, que pour la (différence) seconde on a également

$$\Delta^2 y = dx^2\varphi''(x) + \frac{dx^3}{1.2}\varphi'''(x) + \text{etc.}$$

ou bien :

$$\Delta^2 y = dx^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dx^3}{1.2} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

(ou encore :

$$\Delta^2 y = d^2y + \frac{1}{1.2}\, d^3y + \text{etc.})$$

et ainsi de suite.

Ce théorème sert donc à trouver tous les termes de la (différence) d'une fonction pour laquelle l'opération de la différentiation se termine.

On verra plus loin que le théorème de Taylor est indispensable pour appliquer le calcul différentiel et intégral.

CHAPITRE II.

Définitions et principes sur lesquels est basée l'application du calcul précédent.

DÉFINITIONS.

1. Une quantité variable est dite *indéfiniment petite* lorsqu'ayant un maximum, assignable ou non, elle a pour limite zéro.

2. Une quantité variable est dite *indéfiniment grande*, lorsqu'elle jouit de la propriété de pouvoir devenir plus grande que toute quantité donnée, et qu'elle a un minimum assignable.

3. Une quantité variable est à la fois *indéfiniment grande* et *indéfiniment petite*, lorsqu'elle peut devenir plus grande que toute quantité donnée, et qu'elle peut aussi devenir plus petite que toute quantité donnée.

PREMIER PRINCIPE.

L'accroissement Δy, que prend une fonction $y = \underset{1}{\varphi}(x)$ lorsqu'on attribue à la variable l'accroissement quelconque dx, est d'après le théorème de Taylor, notation de Lagrange,

$$\Delta y = \underset{1}{\varphi'} . dx + \underset{1}{\varphi''} . \frac{dx^2}{1.2} + \underset{1}{\varphi'''} \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.} \qquad (1)$$

Dans ce développement l'accroissement étant quelconque, peut toujours être pris assez petit, pour qu'un terme quelconque du développement soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. Dans ce cas, le signe de la valeur du développement précédent sera toujours le signe du premier terme; et lorsque le premier terme renferme le facteur dx *à une puissance impaire, le signe du développement changera avec le signe de* dx.

Pour connaître toutes les valeurs de dx qui rendent le premier terme plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent, il suffit de chercher la plus grande valeur de dx capable de vérifier l'inégalité :

$$\varphi' > \varphi'' \cdot \frac{dx}{1.2} + \varphi''' \cdot \frac{dx^2}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si λ est cette plus grande valeur, nous pouvons dire que pour toutes les valeurs de dx comprises entre o et λ, le premier terme du développement (1) est toujours plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

DEUXIÈME PRINCIPE.

Soient deux fonctions d'une même variable

$$Y = \varphi(x)$$

et

$$y = \psi(x).$$

Donnons à la variable x dans les deux fonctions, le même accroissement dx; et désignons par ΔY l'accroissement que prend Y dans la première, et par Δy l'accroissement que prend y dans la seconde; il viendra :

$$\Delta Y = \varphi' dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\Delta y = \psi' dx + \psi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

La différence entre les deux accroissements ΔY et Δy sera :

$$\Delta Y - \Delta y = (\varphi' - \psi')\, dx + (\varphi'' - \psi'')\frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Supposons que par la nature de la question à laquelle se rapporte cette dernière équation, la différence $\Delta Y - \Delta y$ *doive toujours conserver le même signe, quels que soient le signe et la petitesse de* dx*; il résultera nécessairement du principe que le premier terme* $(\varphi' - \psi')$ dx *devra disparaître ; et pour cela, il faut qu'on ait :*

$$\varphi' - \psi' = 0$$

ou bien

$$\varphi' = \psi'.$$

TROISIÈME PRINCIPE.

Soient, comme dans le cas précédent, deux fonctions d'une même variable :

$$\left.\begin{array}{l} Y = \varphi(x) \\ \text{et} \\ y = \psi(x). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Donnons à x dans les deux fonctions le même accroissement dx ; et représentons par ΔY et Δy les accroissements que prennent respectivement les deux fonctions, il viendra :

$$\Delta Y = \varphi' dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\Delta y = \psi' dx + \psi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

et la différence entre les deux accroissements sera :

$$\Delta Y - \Delta y = (\varphi' - \psi')\,dx + (\varphi'' - \psi'')\,\frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si par la nature de la question à laquelle se rapporte cette dernière équation, la différence ΔY — Δy *doit être la plus petite possible, indépendamment des valeurs indéfiniment petites que peut prendre* dx, *il faudra, vu que chaque terme peut surpasser la somme de tous ceux qui le suivent, que le plus grand nombre de coefficients, à partir du premier, s'anéantissent; ce qui donne :*

$$\varphi' - \psi' = 0, \qquad \varphi'' - \psi'' = 0, \text{ etc.} \tag{2}$$

Si les formes des deux fonctions (1) sont connues, et si on laisse invariables les constantes qui entrent dans l'une de ces fonctions, et dans ses dérivées, on ne pourra satisfaire aux égalités (2) qu'en faisant varier les constantes arbitraires qui entrent dans l'autre fonction et ses dérivées; et le nombre de coefficients qu'on peut ainsi annuler, dépend essentiellement du nombre des constantes arbitraires qui entrent dans cette fonction.

QUATRIÈME PRINCIPE.

Si dans une fonction $y = \varphi(x)$ dont la forme est inconnue, on donne à x l'accroissement dx, y prendra l'accroissement Δy, lequel sera donné par le développement :

1) $$\Delta y = \varphi' dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \varphi''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si par la nature de la question, on a pour le même accroissement Δy *:*

2) $$\Delta y = \psi(x)\,dx + \text{une quantité} < A dx^2 + B dx^3 + \text{etc.}$$

ψ (x) *étant une fonction dont la forme est donnée, et* A, B, *etc., étant des constantes, ou pouvant être considérées comme telles; alors quoique le développement du second membre* (2) *ne soit pas donné sous une forme explicite complète, on peut toujours conclure de la théorie des coefficients indéterminés, que les premiers termes de ces deux développements sont égaux, et que l'on a :*

$$\varphi' \, dx = \psi\,(x)\, dx\,,$$

et par suite

$$\varphi' = \psi\,(x).$$

CINQUIÈME PRINCIPE.

Si dans une fonction $y = \varphi\,(x)$ dont la forme est à déterminer, on donne à x l'accroissement dx, l'accroissement Δy sera fourni par l'équation

$$\Delta y = \varphi' dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \tag{1}$$

et si dans la même fonction on attribue à x le *décroissement* — dx, *décroissement* de y (c'est-à-dire l'accroissement correspondant de y, pris en signe contraire) que nous désignerons par $\Delta' y$, en accentuant la caractéristique Δ, sera donné par l'équation

$$\Delta' y = \varphi' dx - \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Cela posé, *si par la nature d'une question, on a à la fois les deux inégalités*

$$\psi\,(x)\, dx < \textit{l'accroissement}\ \varphi' dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$\psi\,(x)\, dx > \textit{le décroissement}\ \varphi' dx - \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

ψ (x) *étant une fonction connue, on en conclura que*

$$\varphi' = \psi x,$$

et par suite

$$\varphi' dx = \psi(x)\, dx\,;$$

connaissant ainsi le premier terme du développement (1), c'est-à-dire la dérivée première φ' de la fonction inconnue $\varphi(x)$, on pourra déterminer la forme de cette dernière par le calcul intégral, et l'on aura :

$$y = \int \varphi' dx = \int \psi(x)\, dx.$$

SIXIÈME PRINCIPE.

Si l'on a un rapport de la forme

$$\frac{a + \alpha}{b + \beta} = c,$$

a, b, c *étant des constantes*, α, β, *des quantités variables*, *indéfiniment petites*, *décroissant ensemble*, *ce rapport se partage en deux autres égaux entre eux et égaux au rapport proposé ; c'est-à-dire qu'on aura :*

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = c,$$

ou que le rapport proposé est égal au rapport des constantes a *et* b, *et au rapport des variables indéfiniment petites* α *et* β.

(Pour la démonstration voir l'appendice).

SEPTIÈME PRINCIPE.

Si l'expression

$$A + Bdx + Cdx^2 + \text{etc.}$$

dans laquelle A, B, C *etc. sont des constantes, est indéfiniment petite, c'est-à-dire doit pouvoir devenir plus petite que toute quantité donnée, il faudra nécessairement que l'on ait :*

$$A = 0.$$

(Ce principe est une conséquence immédiate du premier) (*).

HUITIÈME PRINCIPE.

Si, dans une application, on est conduit à l'inégalité

$$A dx + B dx^2 + \text{etc.} < A' dx^2 + B' dx^3 + \text{etc.}$$

(*) (*Addition.*)

Corollaire I. *Si l'on a l'égalité*

$$\varphi + \varphi_1 dx + \text{etc.} = \psi + \psi_1 dx + \text{etc.}$$

dans laquelle φ, ψ, *etc., peuvent être considérés comme des constantes, tandis que* dx *est indéfiniment petit*, on en conclura :

$$\varphi = \psi.$$

En effet, si l'on fait passer toutes les quantités dans le premier membre, ce corollaire se ramène au principe précédent.

Corollaire II. *Si, les mêmes conditions étant remplies, on a l'égalité :*

$$f(x + dx) = \frac{\varphi + \varphi_1 dx + \text{etc.}}{\psi + \psi_1 dx + \text{etc.}}$$

on en conclura :

$$f(x) = \frac{\varphi}{\psi}.$$

En effet, si l'on développe le premier membre, et qu'on chasse le dénominateur, on aura :

$$\psi . f(x) + (\psi f' + f\psi_1) dx + \text{etc.} = \varphi + \varphi_1 dx + \text{etc.}$$

d'où, en vertu du corollaire précédent :

$$\psi . f(x) = \varphi,$$

ou

$$f(x) = \frac{\varphi}{\psi}.$$

dans laquelle les coefficients A, B, *etc.*, A′, B′, *etc. sont des constantes ou peuvent être considérés comme telles; cette inégalité ne pourra subsister, à moins que l'on n'ait :*

$$A = 0;$$

ce qui devient évident, si l'on divise les deux membres de l'inégalité par dx.

(En effet, ce principe se ramène alors au précédent).

NEUVIÈME PRINCIPE.

Si l'on a deux développements

$$Adx + Bdx^2 + Cdx^3 + \text{etc.}$$

$$A'dx + B'dx^2 + Cdx^3 + \text{etc.}$$

et que par la nature de la question, on sache ou l'on puisse prouver que la différence entre ces deux développements doit pouvoir être plus petite qu'un indéfiniment petit du second ordre, tel que Mdx^2, *on en conclura que le premier terme des deux développements a la même valeur, c'est-à-dire qu'on a :*

$$A = A'.$$

En effet puisqu'on donne :

$$(A - A')\,dx + (B - B')\,dx^2 + (C - C')\,dx^3 + \text{etc.} < Mdx^2,$$

en divisant par dx les deux membres de cette inégalité, on conclura du principe VIII que

$$A - A' = 0,$$

ou

$$A = A'.$$

De même si la différence entre les deux développements devait pouvoir devenir plus petite qu'une indéfiniment petit du troisième ordre Mdx^3, on conclurait que les deux premiers termes des deux développements sont respectivement égaux, et que l'on a en même temps

$$A = A'$$

et

$$B = B'.$$

Et ainsi de suite.

DIXIÈME PRINCIPE.

Si l'on a les trois développements

$$dy = Adx + Bdx^2 + \text{etc.}$$
$$\delta y = A'dx + B'dx^2 + \text{etc.}$$
$$\Delta y = A''dx + B''dx^2 + \text{etc.}$$

dans lesquels on a :

$$dy > \delta y > \Delta y,$$

et qu'on sache prouver, par la nature de la question, que la différence $dy - \Delta y$ *est du second ordre, à plus forte raison les différences* $dy - \delta y$ *et* $\delta y - \Delta y$ *seront-elles du second ordre; et l'on aura, d'après le principe* IX :

$$A = A' = A''.$$

(Addition.)

ONZIÈME PRINCIPE.

Si l'on a à la fois les deux inégalités :

$$\psi + \psi_1 dx + \text{etc.} > \varphi + \varphi_1 dx + \text{etc.} > \psi + \psi_2 dx + \text{etc.},$$

ψ, φ, *etc., peuvent considérés comme des constantes, et* dx *étant indéfiniment petit, on en conclura ;*

$$\varphi = \psi ;$$

en effet, si l'on fait passer les termes finis dans un membre, et les indéfiniment petits dans l'autre, ce principe se ramènera au huitième.

COROLLAIRE. *Si une fonction φx doit satisfaire à la fois aux deux inégalités*

$$\frac{\mathrm{F}x + \mathrm{F}'xdx + \text{etc.}}{fx + f'xdx + \text{etc.}} > \varphi x > \frac{\mathrm{F}x - \mathrm{F}'xdx + \text{etc.}}{fx - f'xdx - \text{etc.}},$$

les fonctions F, φ, *pouvant être considérées comme constantes, et* dx *étant indéfiniment petit, il en résultera :*

$$\varphi x = \frac{\mathrm{F}x}{fx}.$$

En effet, comme on peut attribuer à dx une valeur telle que les dénominateurs aient le signe de leur premier terme, on pourra chasser les dénominateurs, et l'inégalité subsistera dans le même sens ou en sens contraire suivant que fx sera positif ou négatif; on aura ainsi :

$$\mathrm{F}xfx + \text{etc.} \gtrless \varphi x (fx)^2 + \text{etc.} \gtrless \mathrm{F}xfx + \text{etc.}$$

d'où en vertu du principe précédent :

$$\varphi x = \frac{\mathrm{F}x}{fx}.$$

CHAPITRE III.

(Addition).

Applications analytiques.

1. *Déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction d'une seule variable* (*).

Soit φx cette fonction, x la valeur pour laquelle elle est un maximum ou un minimum; il en résultera que l'on devra avoir à la fois :

$$\begin{cases} \varphi x > \varphi(x+dx) \\ \varphi x > \varphi(x-dx) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \varphi x < \varphi(x+dx) \\ \varphi x < \varphi(x-dx) \end{cases}$$

dx étant indéfiniment petit. Ou bien :

$$\begin{cases} 0 > \varphi' x dx + \varphi'' x \dfrac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \\ 0 > -\varphi' x dx + \varphi'' x \dfrac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 < \varphi' x dx + \varphi'' x \dfrac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \\ 0 < -\varphi' x dx + \varphi'' x \dfrac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \end{cases}$$

Or comme dx, en vertu du principe I, peut être pris assez petit pour que les seconds membres aient le signe de leur

---

(*) Ainsi que nous l'avons dit dans l'Avant-propos, Brasseur regardait la théorie des maxima et minima comme la seule exacte en calcul différentiel ; c'est pourquoi il ne l'avait pas refaite. Comme il l'invoque plus bas, nous avons cru utile d'y suppléer.

Nous avons également ajouté l'application suivante, parce que plusieurs auteurs la traitent encore en y faisant dx nul ou infiniment petit.

premier terme, ces inégalités ne pourront être satisfaites que si

$$\varphi' x = 0,$$

condition commune au maximum et au minimum.

Pour le maximum, auquel convient le premier système d'inégalités, il faudra en outre, en vertu du même principe, que $\varphi'' x$ soit négatif, pour le minimum, que $\varphi'' x$ soit positif.

Si $\varphi'' x$ était lui-même nul, il faudrait, pour qu'il y eût maximum ou minimum, que φ''' le fût également; le maximum et le minimum se distingueraient en ce que $\varphi'''' x$ serait négatif ou positif.

S'il était également nul, $\varphi^{\text{v}} x$ devrait l'être aussi, etc.

2. *Déterminer la vraie valeur des expressions qui se présentent sous la forme* $\frac{0}{0}$.

Soit $\varphi(x) = \frac{Fx}{fx}$ une fonction qui affecte la forme $\frac{0}{0}$ pour une valeur x de la variable. Nous aurons :

$$\varphi(x + dx) = \frac{F(x + dx)}{f(x + dx)} = \frac{Fx + dx F'x + \frac{dx^2}{1.2} F''x + \text{etc.}}{fx + dx f'x + \frac{dx^2}{1.2} f''x + \text{etc.}}.$$

Supposons que $n - 1$ dérivées successives de F et de f s'annulent à la fois pour la même valeur x; nous aurons, en divisant haut et bas par $\frac{dx^n}{1.2\ldots n}$:

$$\varphi(x + dx) = \frac{F^{(n)} x + \frac{dx}{n+1} F^{(n+1)} x + \text{etc.}}{f^{(n)} x + \frac{dx}{n+1} f^{(n+1)} x + \text{etc.}}$$

D'où l'on conclut, en vertu du corollaire II du principe VII :

$$\varphi(x) = \frac{F^{(n)} x}{f^{(n)} x}.$$

CHAPITRE IV.

Applications géométriques.

Interprétation géométrique d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables.

1. Si l'on substitue dans une fonction

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

$y + \Delta y$ à la place de y, et $x + dx$ à la place de x, ce qui donne :

$$y + \Delta y = \varphi(x + dx)$$

et en développant et réduisant :

$$\Delta y = \varphi'.dx + \varphi''.\frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \qquad (2)$$

les équations (1) et (2) représentent chacune la même courbe, avec cette différence que dans l'équation (2) les coordonnées variables de chaque point sont $(dx, \Delta y)$, et que l'origine est en un point quelconque (x, y) de la courbe ; tandis que l'origine, pour la courbe représentée par (1), est en un point quelconque du plan de la courbe, et que les coordonnées courantes sont x, y (*).

(*) Au moyen de l'intégration, nous pourrons remonter de l'équation (2) à

Pour construire celle-ci d'après l'équation (2), il faut assigner l'origine en donnant à x une certaine valeur telle que, substituée dans (1), on retrouve une valeur réelle pour y.

---

l'équation (1).

Or, au lieu de l'équation

$$\Delta y = \varphi'.dx + \text{etc.} \tag{2}$$

nous pouvons écrire, d'après une convention précédente(chap. I, art. 1),

$$dy = \varphi'.dx. \tag{3}$$

Dans cette équation, dx et dy ne sont plus les coordonnées variables d'un point de la courbe rapportées au point x, y pris pour origine, comme le sont dx et Δy ; mais, au contraire, celles d'un point situé au-dehors de la courbe, et qui appartient à la tangente, comme on le verra à l'article suivant.

Il serait donc inexact d'appeler l'équation (1) équation différentielle de la courbe, si l'on entendait par cette expression que l'équation (3) serait une relation entre les coordonnées dx, dy d'un point de la courbe rapportées à l'origine x, y. Il n'y a que la conception absurde des infiniment petits qui puisse conduire à cette manière de voir.

L'équation (3) est simplement la différentielle de l'équation de la courbe ; tandis que l'équation (2) est, comme il a été dit plus haut, la véritable équation différentielle de la courbe, ou plutôt son équation aux différences, pour nous servir de la terminologie adoptée.

C'est ici surtout qu'apparaît dans toute sa lumière la supériorité de la méthode de Brasseur.

On a vu, en effet, chapitre I, art. 4, que l'intégrale de l'équation (2) de la courbe est la même que l'intégrale de la différentielle (3) de son équation ; nous savons de plus que l'équation (2) et son intégrale représentent la même courbe, à l'origine près : il est évident par suite qu'en intégrant l'équation (3), on obtiendra l'équation de la courbe.

La conception de Brasseur explique donc ce résultat avec la plus grande lucidité au point de vue géométrique. Il n'en est pas de même, pensons-nous, dans la méthode des fluxions ou dans celle des limites.

Nous savons, en effet, que, dans l'équation (3), dx et dy ne sont pas les coordonnées d'un point de la courbe rapportées au point x, y pris pour origine, mais bien celles d'un point quelconque pris sur la tangente. Il s'en suit immédiatement qu'en appelant X, Y les coordonnées du même point de la tangente rapportées à

Cette origine étant supposée connue, on pourra construire tous les points de la courbe, et de là on conclut que dx peut

---

l'origine primitive, nous pourrons écrire :

$$dx = X - x, \quad dy = Y - y,$$

l'équation (3) deviendra ainsi :

$$Y - y = \varphi'.(X - x),$$

et sera l'équation de la tangente à la courbe au point x, y ; mais comme cette équation n'est autre que l'équation (3), celle-ci ne représente pas autre chose que la tangente à la courbe en un point quelconque x, y.

Or, pour revenir géométriquement de la tangente à la courbe elle-même, il faut considérer celle-ci comme l'enveloppe de ses tangentes. Cherchons donc cette enveloppe. On la trouvera, voir chapitre IV, art. 11, en éliminant x entre l'équation de la tangente et sa dérivée prise par rapport à x.

L'équation de la tangente étant

$$Y - \varphi(x) = (X - x)\varphi'(x),$$

sa dérivée par rapport à x sera :

$$-\varphi' x = -\varphi' x + (X - x)\varphi''(x)$$

ou

$$0 = (X - x)\varphi''(x).$$

Mais $\varphi''(x)$ ne peut pas être nul, sans quoi $\varphi(x)$ serait une fonction linéaire, et $y = \varphi(x)$ représenterait une droite, ce qui est contre l'hypothèse ; il en résulte que

$$X - x = 0.$$

Et si nous éliminons x entre cette équation et celle de la tangente, nous obtiendrons

$$Y - \varphi(X) = 0.$$

pour l'équation de l'enveloppe.

Cette dernière équation est l'intégrale de l'équation (3) ; cette intégrale représente donc la courbe.

On voit combien cette démonstration est laborieuse, et combien l'interprétation de Brasseur l'emporte en simplicité. Les applications suivantes présenteront le même caractère ; nous appellerons surtout l'attention du lecteur sur la théorie des enveloppes, et nous le prierons de la comparer, sous le rapport de la rigueur, à celle que donnent les autres méthodes.

prendre une infinité de valeurs depuis $dx = 0$ jusqu'à dx égal à un maximum, lequel dépendra de la nature de la courbe ; ce maximum peut même n'être pas assignable, si la courbe va à l'infini dans le sens de l'axe des dx.

Dans tous les cas, dx et Δy sont indéfiniment petits ensemble.

ÉQUATION DE LA TANGENTE.

2. Pour que le calcul puisse être appliqué à un objet, il faut que cet objet soit défini : il s'agit donc, dans le cas actuel, de dire, avant tout, ce qu'on entend par *tangente.*

Première définition. La tangente en un point d'une courbe, est une droite qui passe par ce point et qui laisse d'un même côté, soit toute la courbe, soit une portion finie à droite et une portion finie à gauche du point proposé.

Quoique cette définition ne convienne pas à tous les points de la courbe, nous allons néanmoins la traduire en analyse. Nous vérifierons ensuite quels sont les points de la courbe auxquels cette définition ne satisfait pas.

Soient x, y les cordonnées d'un point de la courbe donnée par l'équation

$$y = \varphi(x) \tag{1}$$

et soit

$$Y = aX + b \tag{2}$$

l'équation d'une droite qui passe par ce point (x, y). Il s'agit de déterminer a de manière que la droite (2) satisfasse à la définition que nous venons de donner de la tangente.

Or, de cette définition résulte que tous les points de la courbe compris entre les abscisses x et $x + \lambda$, et ceux compris entre les abscisses x et $x - \lambda'$, λ et λ' étant des constantes, ces points, disons-nous, sont tous au-dessus ou tous au-dessous de la tangente, sauf les deux points correspondants aux abscisses $x + \lambda$, et $x - \lambda'$, lesquels pourraient se trouver sur la courbe.

De là résulte encore que pour une même abscisse $x + dx$, dx étant plus petit que λ et que λ', la différence entre l'ordonnée de la tangente et l'ordonnée de la courbe est ***toujours positive*** ou *toujours négative*, quel que soit le signe de dx.

Cette différence, pour l'abscisse $x + dx$, est

$$\left.\begin{array}{l} a(x+dx)+b-\varphi(x+dx) \\ \text{elle sera, pour l'abscisse } (x-dx) : \\ a(x-dx)+b-\varphi(x-dx) \end{array}\right\} \quad (3).$$

En développant et réduisant ces deux expressions (3), elles deviennent respectivement :

$$(a-\varphi')\,dx - \varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} - \text{etc.}$$

et

$$-(a-\varphi')\,dx - \varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} - \text{etc.}$$

et pour que le signe des valeurs de ces deux expressions soit le même, indépendamment des valeurs indéfiniment petites que peut prendre dx, il faut, d'après le principe II, que l'on ait :

$$a - \varphi' = 0$$

d'où

$$a = \varphi'.$$

L'équation de la tangente est donc :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}.\varphi' + b,$$

x et y étant des coordonnées du point de contact.

3. Voyons maintenant s'il peut exister des points de la courbe auxquels la définition précédente de la tangente ne convienne pas. Si du point de contact x, y on passe, *sur la tangente*, au point qui a pour abscisse $x + dx$, on aura pour l'ordonnée qui répond à cette abscisse :

$$y + dy = (x + dx)\,\varphi' + b.$$

Si *sur la courbe*, on passe du point x, y au point qui a également pour abscisse $x + dx$, l'ordonnée de ce dernier sera :

$$y + \Delta y = \varphi(x) + \varphi' \cdot \frac{dx}{1} + \varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.}$$

ces deux égalités donnent respectivement pour les accroissements dy et Δy :

$$dy = \varphi'.dx$$

et

$$\Delta y = \varphi'.dx + \varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \varphi''' \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La différence entre ces deux accroissements sera :

$$dy - \Delta y = -\varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} - \varphi''' \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Tant que φ'' n'est pas nul, cette différence conserve le même signe pour $\pm dx$. D'où nous concluons que pour tous les points de la courbe, pour lesquels la dérivée seconde, ou second coefficient différentiel, n'est pas nulle, la courbe sur une étendue finie, à droite et à gauche du point de contact, est d'un même côté de la tangente ; et partant la définition de cette dernière satisfait à tous ces points de la courbe.

Mais si, pour le point de contact (x, y), $\varphi''=0$ et que φ''' soit réel, la différence précédente devient :

$$dy - \Delta y = - \varphi''' \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} - \text{etc.}$$

Cette différence changeant de signe avec dx, il en résulte que pour tout point de la courbe pour lequel $\varphi''=0$, la tangente est :

D'un côté de l'ordonnée de ce point, *au-dessus de la courbe* ;

De l'autre côté de la même ordonnée, *au-dessous de la courbe.*

Les points de la courbe pour lesquels $\varphi''=0$, sont donc les seuls auxquels la définition ne convienne pas.

4. *Seconde définition.* Appelons tangente en un point d'une courbe, ce que devient une sécante tournant autour d'un point, quand son second point de section avec la courbe vient coincider avec le point proposé.

Dans l'application de cette définition, il s'agit d'arriver à l'équation de la tangente sans exprimer analytiquement la coïncidence de la sécante avec cette dernière; ainsi, il nous suffira d'exprimer analytiquoment que le second point de section de la sécante peut approcher aussi près que l'on veut du premier; car de ce fait il résulte que : la différence entre entre la direction de la tangente et la direction de la sécante peut devenir plus petite que toute la quantité donnée. Cela posé,

Soit a la direction ou le coefficient angulaire de la tangente au point x, y de la courbe dont l'équation est :

$$y = \varphi(x).$$

En outre, observons que : la direction de la sécante passant par le point x, y et par le point $x + dx$, $y + \Delta y$, lequel peut s'approcher du premier x, y autant qu'on veut, sera :

$$\frac{y+\Delta y-y}{x+dx-x}=\frac{\Delta y}{dx}=\varphi'+\varphi''\frac{dx}{1.2}+\text{etc.}$$

La différence entre cette direction de la sécante, et celle de la tangente est :

$$(\varphi'-a)+\varphi''\cdot\frac{dx}{1.2}+\text{etc.}$$

Cette différence étant indéfiniment petite, il faut, d'après le principe VII, qu'on ait :

$$\varphi'-a=0,$$

d'où

$$a=\varphi'.$$

Nous ferons remarquer qu'on trouve la même valeur pour a si l'on considère la sécante qui passe par le point x, y et par le point $x-dx$, $y-dy$.

5. *Troisième définition.* La tangente en un point d'une courbe est de toutes les droites qui passent par ce point, celle qui s'approche le plus possible de la courbe, tant à droite qu'à gauche du point proposé. Soient x, y les coordonnées d'un point donné sur la courbe

$$y=\varphi(x). \qquad (1)$$

Soit l'équation d'une droite qui passe par le même point

$$Y=aX+b. \qquad (2)$$

Pour que cette droite s'approche le plus possible de la courbe, il faut que pour une même abscisse, $x\pm dx$, la différence entre l'ordonnée correspondante de la courbe, et l'ordonnée correspondante de la droite, soit la plus petite possible.

Or, les ordonnées qui correspondent à l'abscisse $x \pm dx$, sur la courbe et sur la droite, ont respectivement pour valeur :

$$\varphi(x \pm dx) \qquad \text{et} \qquad a(x \pm dx) + b.$$

Leur différence, après réduction des développements, sera :

$$(\varphi' - a)\,dx + \varphi'' \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \varphi''' \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Pour que la valeur de cette expression devienne la plus petite possible, il faut que la quantité a, la seule dont on puisse disposer ici, annule le premier terme, c'est-à-dire que l'on ait :

$$a = \varphi', \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons donné plusieurs définitions de la tangente, pour faire voir que les principes posés au commencement de ce travail, conduisent dans chaque cas avec une égale facilité à l'équation de cette droite.

5 bis. On pourrait encore, en se donnant l'équation d'une droite qui passe par un point x, y de la courbe $y = \varphi(x)$, et dont la direction soit exprimée par $\varphi'(x)$, démontrer que cette droite jouit des propriétés énoncées dans les définitions précédentes.

Concavité et convexité. (Addition).

6. Une courbe est dite concave ou convexe par rapport à l'axe des x en un point donné lorsque, sur une étendue finie à droite et à gauche de ce point, elle est située, par rapport à cet axe, en-deçà ou au-delà de la tangente en ce point.

Soit $y = \varphi(x)$ l'équation de la courbe. Commençons par supposer que le point x, y se trouve au-dessus de l'axe des x.

Si nous donnons à x l'accroissement $x \pm d\,x$, y prendra un accroissement

$$\Delta y = \pm \varphi'.dx + \varphi'' \frac{dx^2}{1.2} \pm \varphi''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

L'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente au point x, y sera :

$$dy = \pm \varphi'.dx;$$

d'où la différence :

$$\Delta y - dy = \varphi''.\frac{dx^2}{1.2} \pm \varphi''' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Selon que cette différence sera positive ou négative, quel que soit le signe de dx, la courbe sera convexe ou concave ; or, en vertu du principe I, on peut prendre dx assez petit pour que cette différence ait le signe de son premier terme, signe qui ne dépend pas de celui de dx. Donc la courbe sera convexe ou concave au point x, y selon que

$$\varphi'' \text{ ou } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ sera } \gtrless 0,$$

lorsque y est positif.

Si le point x, y était situé au-dessous de l'axe des x, la différence $\Delta\,y - d\,y$ devait être positive dans le cas de la concavité, négative dans le cas de la convexité, donc puisque y est négatif, $y\,.\,\varphi''$ sera < 0 dans le 1[er] cas, et > 0 dans le second.

En rapprochant ces deux caractères, on peut énoncer la règle suivante : une courbe trouve sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x en un point x, y, selon que

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} \text{ sera } \gtrless 0.$$

6 bis. Si $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ pour les valeurs x, y des coordonnées, la différence $\Delta y - d y$ changera de signe avec $d x$, pourvu que $\frac{d^3 y}{d x^3}$ ne soit pas nul ; elle sera donc positive d'un côté du point x, y, et négative de l'autre.

Donc $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ est le caractère d'un point d'inflexion.

Il en est de même de $\frac{d^2 y}{d x^2} = \infty$, puisqu'une quantité peut changer de signe, soit en passant par zéro, soit en passant par l'infini.

REMARQUE. Les valeurs tirées de $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$ ou $= \infty$ ne doivent pas annuler $\frac{d y}{d x}$, $\frac{d^3 y}{d x^3}$, etc., sans quoi le point x, y, au lieu d'être un point d'inflexion, serait un point dont l'ordonnée est un maximum ou un minimum, comme on l'a vu au ch. III, art. 1.

Rectification.

7. Soit $y = \varphi(x)$, l'équation d'une courbe, (a)

» $\lambda = \psi(x)$, la longueur d'une portion quelconque de la courbe;

L'accroissement que prend la longueur de la courbe lorsque x croît de dx est :

$$\Delta\lambda = \psi'(x)\, dx + \psi''(x) \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \qquad (1)$$

Pour trouver λ, ou la forme de la fonction ψ, il suffira de déterminer la forme de $\psi'(x)$, c'est-à-dire de déterminer le premier terme du développement précédent, qui est la (différentielle) de la fonction ψ.

Menons deux tangentes à la courbe : l'une par le point correspondant à l'abscisse x, l'autre par le point correspondant à l'abscisse $x + dx$. Cela fait, cherchons la somme de ces deux tangentes, prises chacune depuis leur point d'intersection, jusqu'à leurs points de contact respectifs. La direction de la première est $\varphi'(x)$, et sa longueur :

$$u\sqrt{1+\overline{\varphi'(x)}^2},$$

u étant la projection de la première tangente sur l'axe des x.

La direction de la seconde tangente est

$$\varphi' + \varphi'' \cdot dx + \varphi''' \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.},$$

et sa longueur

$$u'\sqrt{1+(\varphi'+\text{etc.})^2}$$

u' étant la projection de la seconde tangente sur l'axe des x (*).

La somme de ces deux tangentes sera, si l'on observe que $u + u' = dx$,

$$dx\sqrt{1+\varphi'^2} + \text{etc.} \qquad (2)$$

Or, la somme de ces deux tangentes est évidemment plus grande que l'arc compris entre leurs points de contacts respectifs, parce que l'on peut prendre l'arc, dont la projection

(*) Si l'on développe ce radical, on obtient :

$$\sqrt{1+(\varphi'+\varphi'' dx+\text{etc.})^2} = (1+\varphi'^2+2\varphi'\varphi'' dx+\varphi''^2 dx^2+\text{etc.})^{\frac{1}{2}}$$
$$= (1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1+\varphi'^2)^{-\frac{1}{2}}(2\varphi'\varphi'' dx + \varphi'' dx^2 + \text{etc.})$$

Les termes qui suivent le premier sont tous affectés de dx ; or, comme on peu poser $u' = \varepsilon dx$, ε étant une fraction, il s'ensuit que $u'\sqrt{1+(\varphi'+\text{etc.})^2}$ pourra s'écrire :

$$u'\sqrt{1+\varphi'^2} + \text{etc},$$

tous les termes à partir du premier étant affectés de dx^2.

est dx, assez petit pour qu'il soit entièrement concave ou entièrement convexe; d'un autre côté, la corde qui soustend l'arc $\Delta\lambda$ est toujours plus petite que cet arc lui-même. Or, la valeur de cette corde est $\sqrt{dx^2 + \Delta y^2}$; ou bien, en mettant pour Δy sa valeur tirée de l'équation (a) qui représente la courbe

$$dx \sqrt{1 + \varphi'^2} + \text{etc.} \qquad (3)$$

En comparant les trois expressions (1), (2), (3), il en résulte, d'après le principe V, que

$$\psi' dx = dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}.$$

Et par suite

$$\Delta\lambda = dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} + \text{etc.}$$

d'où

$$\lambda = \int dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}.$$

RÈGLE. *Le premier terme de l'accroissement (ou la différentielle) d'un arc est égal (au premier terme de) la corde de cet accroissement, (ou à la portion de tangente comprise entre l'extrémité de cet arc et l'ordonnée qui passe par l'extrémité de l'accroissement).*

Quadrature.

8. Soit $y = \varphi(x)$ l'équation de la courbe, et

» $S = \psi(x)$ l'aire de la surface (limitée entre cette courbe et deux ordonnées rectangulaires dont la première est arbitraire, et dont la seconde passe par le point x, y de la courbe).

L'accroissement de la surface pour un accroissement dx de l'abscisse sera :

$$\Delta S = \psi'(x)\,dx + \psi''(x) \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} \tag{1}$$

L'aire du rectangle inscrit à l'élément ΔS a pour expression:

$$\varphi(x)\,.\,dx. \tag{2}$$

L'aire du rectangle circonscrit à l'élément ΔS a pour expression :

$$\varphi(x)\,dx + \Delta y\,.\,dx \tag{3}$$

(ou

$$\varphi(x)\,.\,dx + \varphi' dx^2 + \varphi'' \frac{dx^3}{1.2} + \text{etc.}$$

en remplaçant Δy par son développement).

La différence entre (1) et (2), devant toujours être plus petite que la différence entre (3) et (2) on a l'inégalité :

$$(\psi' - \varphi)\,dx + \psi'' \frac{dx^2}{1.2} + \text{etc.} < \varphi'\,.\,dx^2 + \varphi'' \cdot \frac{dx^3}{1.2} + \text{etc.}$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par dx, on reconnaîtra, d'après le principe III, qu'elle ne peut subsister à moins qu'on n'ait

$$\psi' - \varphi = 0.$$

ou

$$\psi' = \varphi.$$

Et l'équation (1) devient

$$\Delta S = \varphi dx + \text{etc.}$$

d'où

$$S = \int \varphi . dx.$$

Donc le premier terme de l'accroissement (ou la différentielle) d'une aire plane est égal au rectangle inscrit à l'accroissement de cette aire.

9. Nous venons de prouver que le premier terme de l'accroissement (ou la différentielle) d'une aire plane est égal au rectangle inscrit à l'accroissement de cette aire. On peut également trouver la signification géométrique du second terme du même accroissement. En mettant en évidence un certain nombre de termes, de l'accroissement, on a :

$$\Delta S = \varphi dx + \varphi' \frac{dx^2}{1.2} + \varphi'' \frac{dx^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

La direction de la tangente à la courbe au point (x, y) étant φ', l'accroissement de l'ordonnée de la tangente, en passant du point x, y au point qui a pour abscisse $x + dx$ sera, en désignant par dy cet accroissement,

$$dy = \varphi' . dx.$$

multipliant par dx et divisant par deux les deux membres de cette égalité, on a

$$\frac{dy . dx}{2} = \varphi' \frac{dx^2}{1.2},$$

dont le second membre est précisément égal au second terme de l'accroissement ΔS de la surface. Or, on reconnaît que $\frac{dy . dx}{2}$ est l'expression de l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont dy et dx, et qui a pour hypothénuse la portion de la tangente dont les extrémités ont respectivement pour abscisses x et $x + dx$.

(La somme des deux premiers termes de l'accroissement d'une aire plane est donc égal au trapèze qui a pour base dx, et pour côté opposé le portion de tangente dont dx est la projection).

10. Supposons maintenant que la courbe soit représentée par son équation polaire

$$\rho = \varphi(\omega).$$

Pour un accroissement $d\omega$ donné à l'angle ω, l'accroissement du rayon vecteur sera

$$\Delta\rho = \varphi' \cdot d\omega + \varphi'' \cdot \frac{d\omega^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Soit

$$S = \psi(\omega)$$

l'aire de la surface (limitée entre deux rayons vecteurs dont le premier est arbitraire et dont le second passe par le point ρ, ω), la forme de la fonction $\psi(\omega)$ étant à déterminer.

Pour un accroissement $d\omega$, l'accroissement de la surface sera :

$$\Delta S = \psi' \, d\omega + \psi'' \cdot \frac{d\omega^2}{1.2} + \text{etc.} \tag{1}$$

où ψ' est à déterminer; cet accroissement ΔS est compris entre deux rayons vecteurs ρ et $\rho + \Delta\rho$, faisant entre eux l'angle $d\omega$.

De l'origine comme centre, décrivons avec le rayon ρ, l'arc opposé à $d\omega$; la longueur de cet arc sera $\rho\, d\omega$;

Et la surface du secteur circulaire qui a cet arc pour base, sera :

$$\frac{1}{2}\rho \cdot \rho d\omega = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot d\omega. \tag{2}$$

Cette surface est inscrite à l'élément ΔS. De même le secteur circulaire qui a pour base l'arc décrit de l'origine comme centre, avec le rayon $\rho + \Delta\rho$ a pour expression

$$\frac{1}{2}\rho^2 \cdot d\omega + \frac{\rho \,.\, d\omega \,.\, \Delta\rho}{2}. \qquad (3)$$

Cette surface est circonscrite à l'élément ΔS.

Comparons à l'accroissement ΔS, les deux secteurs circulaires dont l'un lui est circonscrit, et l'autre inscrit, ces trois aires ayant respectivement pour mesure les expressions (1), (2) et (3).

La différence entre (1) et (2) devant toujours être plus petite que celle entre (3) et (2) on a l'inégalité

$$\left(\psi - \frac{1}{2}\rho^2\right)d\omega + \psi''\frac{d\omega^2}{1.2} + \text{etc.} < \frac{1}{2}\rho d\omega \cdot \Delta\rho,$$

qui devient, en mettant à la place de $\Delta\rho$ sa valeur :

$$\left(\psi' - \frac{1}{2}\rho^2\right)d\omega + \psi'' \cdot \frac{d\omega^2}{1.2} + \text{etc.} < \frac{1}{2}\rho.\varphi'.d\omega^2 + \frac{1}{2}\rho \,.\, \varphi'' \cdot \frac{d\omega^3}{1.2} + \text{ etc.}$$

d'où l'on conclut en vertu du principe III :

$$\psi' - \frac{1}{2}\rho^2 = 0$$

et

$$\psi' = \frac{1}{2}\rho^2.$$

Donc l'accroissement ΔS de la surface pour l'accroissement $d\omega$ devient :

$$\Delta S = \frac{1}{2}\rho^2 . d\omega + \text{etc.}$$

d'où

$$S = \frac{1}{2} \int \rho^2 . d\omega.$$

RÈGLE. *Le premier terme de l'accroissement (ou la différentielle) d'une aire plane (limitée par deux rayons vecteurs) est égale au secteur circulaire inscrit à cet élément.*

Théorie des enveloppes.

11. Supposons qu'on demande l'équation de la courbe à laquelle la droite

$$y = x . \varphi(\alpha) + \alpha \tag{1}$$

variable de position, en vertu de la variation du paramètre α, est continuellement tangente, x, y étant les coordonnées courantes de la droite.

Pour une seconde position de cette droite, on aura (en changeant α en $\alpha + d\alpha$) l'équation

$$y = x . \varphi(\alpha + d\alpha) + (\alpha + d\alpha) \tag{2}$$

dans laquelle $d\alpha$ est un accroissement arbitraire attribué à la variable α. En développant, l'équation (2) devient :

$$y = x . \varphi(\alpha) + \alpha + d\alpha \left\{ x . \varphi'(\alpha) + 1 \right\} +$$

$$x \left\{ \varphi''(\alpha) \frac{d\alpha^2}{1.2} + \varphi'''(\alpha) \cdot \frac{d\alpha^3}{1.2.3} + \text{etc.} \right\}.$$

ou bien encore, en représentant par M le multiplicateur de $d\alpha^2$,

$$y = x . \varphi(\alpha) + \alpha + d\alpha \left\{ x\varphi'(\alpha) + 1 \right\} + M d\alpha^2 \tag{2}$$

où M est fonction de x, de α et de $d\alpha$.

Remarquons en passant que les deux droites (1), (2) interceptent respectivement sur l'axe des y, et à partir de l'origine, les longueurs α et $(\alpha + d\alpha)$, et qu'elles interceptent entre elles, sur le même axe, la longueur $d\alpha$.

Si l'on fait subsister ensemble les équations (1) et (2), les coordonnées x, y ne conviendront qu'au point d'intersection des deux positions de la tangente, et ce point d'intersection est toujours hors de la courbe.

On sait aussi par l'algèbre que, si l'on combine les équations (1) et (2) de manière à en déduire une ou plusieurs équations nouvelles, les valeurs de x, y dans celles-ci seront les mêmes que dans les deux proposées. D'après cela le système des équations (1) et (2) pourra être remplacé par le système des deux suivantes :

$$y = x.\varphi(\alpha) + \alpha, \tag{3}$$

$$0 = x.\varphi'(\alpha) + 1 + \mathrm{M}d\alpha, \tag{4}$$

dont la première est la même que (1), et dont la seconde est le résultat de la soustraction de (1) hors de (2) et qui, au terme $\mathrm{M}d\alpha$ près, est la dérivée de (3) par rapport à α considéré comme seule variable.

Si nous combinons maintenant ensemble les équations (3) et (4) de manière à en éliminer la quantité α, de laquelle dépend la direction de la droite mobile, le résultat restera affecté de $d\alpha$ et pourra être mis sous la forme

$$y = \mathrm{F}(x) + \mathrm{K}d\alpha, \tag{5}$$

K étant fonction de x et de $d\alpha$.

L'équation (5) ne renfermant plus α satisfait aux coordonnées du point d'intersection de deux tangentes dont les directions sont arbitraires, et qui comprennent entre elles sur l'axe des y, une longueur $d\alpha$.

Mais comme $d\alpha$ est lui-même arbitraire, l'équation (5), en y considérant $d\alpha$ comme variable, convient à tous les points du plan de la courbe, à l'exception de ceux qui sont situés sur la courbe, et dans l'intérieur de la courbe.

Pour déduire de l'équation (5) celle de la courbe, nous ferons remarquer que le point d'intersection des deux positions (1) et (2) de la tangente s'approchera d'autant plus des points de contact des deux tangentes, que $d\alpha$ est plus petit, c'est-à-dire s'approchera d'autant plus de la courbe, que $d\alpha$ est plus petit. Mais remarquons aussi que tant que $d\alpha$ a une valeur réelle, les coordonnées (x, y) dans (3, 4) et dans (5) ne pourront jamais devenir celles d'un point de la courbe. Cela posé, soit :

$$Y = \psi(x) \tag{6}$$

l'équation de la courbe; d'après ce qui vient d'être dit, pour une même abscisse x, la différence entre les ordonnées fournies par (5) et (6) doit être une quantité indéfiniment petite dans le sens de la définition donnée plus haut (chap. I, art. 1).

Or, cette différence est

$$y - Y = F(x) - \psi(x) + K d\alpha$$

et en représentant par β la différence indéfiniment petite $y - Y$, la dernière égalité peut être mise sous la forme :

$$\frac{\psi(x) + \beta}{F(x) + K d\alpha} = 1,$$

de laquelle on tire, d'après le principe VI.

$$\psi(x) = F(x)$$

et

$$\beta = K d\alpha ;$$

et l'équation (6) de la courbe devient :

$$Y = F(x), \tag{7}$$

qui n'est autre chose que l'équation (5) dans laquelle on aurait négligé d'écrire le terme $Kd\alpha$.

Voici donc la signification géométrique de la suppression du terme $Kd\alpha$ dans l'équation (5) : en effaçant ce terme $Kd\alpha$ dans l'équation (5), on diminuera le second membre de $Kd\alpha$, et pour que l'égalité soit maintenue, il faut que le premier membre y diminue de la même quantité; mais alors y devient l'ordonnée de la courbe, tandis qu'avant la suppression de $Kd\alpha$, il était l'ordonnée d'un point situé hors de la courbe.

Sachant d'avance que, dans les questions analogues, il faut négliger les termes en $d\alpha$, dans le résultat de l'élimination de α entre les équations (3) et (4), on pourra déjà se dispenser d'écrire le terme en $d\alpha$ dans l'équation (4). La règle pratique pour obtenir l'équation de la courbe consisterait donc à dire qu'il faut éliminer α entre les deux équations

$$y = x.\varphi(\alpha) + \alpha \tag{7}$$

$$0 = x.\varphi'(\alpha) + 1, \tag{8}$$

dont la dernière provient de (4), en négligeant $Kd\alpha$. Et c'est ainsi que la théorie ordinaire présente cette recherche.

12. *Autrement.* Reprenons l'équation

$$y = x\varphi(\alpha) + \alpha \tag{1}$$

qui représente, en donnant à α une valeur convenable, la position d'une tangente quelconque à la courbe cherchée. Coupons la courbe par une droite d, parallèle à l'axe des y et distante de cet axe de la quantité x'. Imaginons que la tangente tourne autour de la courbe, en vertu de la variation de α ; en tournant elle rencontrera successivement la droite d en des points différents, qui ont tous même abscisse x', et dont les ordonnées sont fournies par l'équation (1) en y substituant x' à la place de x, ce qui donne

$$y = x'\varphi(\alpha) + \alpha. \qquad (2)$$

En attribuant à α successivement toutes les valeurs possibles, il est évident que lorsque l'ordonnée fournie par cette équation deviendra un minimum pour une certaine valeur de α, elle sera l'ordonnée d'un point de la courbe, lequel a pour abscisse x'. Car parmi tous les points de la droite d il n'y en a qu'un, celui de rencontre de la droite d avec la courbe, dont l'ordonnée soit un minimum. Or, d'après ce que nous avons vu, pour avoir la valeur de α qui rend y un minimum, il faut égaler à zéro le premier coefficient différentiel (ou la dérivée) de y par rapport à α ; on a donc :

$$\frac{dy}{d\alpha} = x'\varphi'(\alpha) + 1 = 0; \qquad (3)$$

ainsi en faisant subsister ensemble les équations (2) et (3), elles donnent l'ordonnée y d'un point de la courbe, lequel a pour abscisse x' ; et comme x' peut être l'abscisse d'un point quelconque de la courbe, on peut remplacer x' par x, et les deux équations

$$y = x\varphi(\alpha) + \alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = x\varphi'(\alpha) + 1 = 0$$

donneront successivement par la variation de α les coordonnées de tous les points de la courbe. Le résultat de l'élimination de α entre les deux équations sera donc l'équation de la courbe cherchée.

Application.

13. Une droite se meut de manière à être toujours normale à la courbe

$$y = \varphi(x); \qquad (1)$$

on demande de trouver l'équation de la courbe à laquelle la normale mobile est toujours tangente.

L'équation de la normale à la courbe (1) au point (x, y) est

$$y - \mathrm{Y} = -\frac{1}{\varphi'(x)}(x - \mathrm{X}),$$

dans laquelle X, Y sont les coordonnées courantes de la normale.

Cette équation devient, si l'on substitue à la place de y sa valeur tirée de (1)

$$\varphi(x) - \mathrm{Y} = -\frac{1}{\varphi'(x)}(x - \mathrm{X}), \qquad (2)$$

et elle représentera successivement toutes les positions possibles de la normale en donnant à la variable x successivement toutes les valeurs possibles. Pour que, dans une position quelconque de la normale, les coordonnées courantes X, Y deviennent les coordonnées du point dans lequel la normale touche la courbe cherchée, il faut, d'après le paragraphe précédent, que dans l'équation (2) la dérivée de Y prise par rapport à x considéré comme seule variable, soit nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = 0.$$

Or (en chassant le dénominateur de (2) et dérivant, l'on aura) :

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \frac{1 + \varphi' + \varphi^{\cdot 2}(\varphi - \mathrm{Y})}{\varphi'};$$

égalant à zéro ce coefficient différentiel, on a l'équation

$$1 + \varphi'^2 + \varphi''(\varphi - \mathrm{Y}) = 0, \qquad (3)$$

et le résultat de l'élimination de x entre (2) et (3) sera l'équation de la courbe cherchée.

14. Des équations (2) et (3) on déduit les deux suivantes :

$$x - X = \frac{(1 + \varphi'^2)}{\varphi''}\varphi'$$

$$y - Y = -\frac{(1 + \varphi'^2)}{\varphi''};$$

et en désignant par ρ la distance du pied x, y de la normale au point X, Y de tangence, on aura pour le carré de la distance entre ces deux points :

$$\rho^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 = \frac{(1 + \varphi'^2)^3}{\varphi''^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''}.$$

CHAPITRE V.

Applications mécaniques.

Expression de la vitesse dans le mouvement varié.

1. Soit v la vitesse acquise au bout du temps t par un point animé d'un mouvement varié; et e le chemin décrit par ce point pendant le même temps t; on aura :

$$e = \varphi(t).$$

Le chemin Δe, décrit pendant le temps dt qui suit immédiatement t, sera :

$$\Delta e = \varphi' \, dt + \varphi'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.} \tag{I}$$

le chemin décrit pendant le temps dt qui a précédé immédiatement t, chemin que nous représentons par δe, sera :

$$\delta e = \varphi' dt - \varphi'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si la vitesse v restait constante pendant l'instant dt, le chemin décrit en vertu de cette vitesse serait vdt; et en comparant ce chemin à Δe et à δe, on a les deux inégalités :

$$vdt < \varphi' dt + \varphi'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$vdt > \varphi'.dt - \varphi'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.} \;(*)$$

D'après le principe V. on conclut de ces deux inégalités, après avoir divisé les deux membres de chacune par dt, que

$$\varphi' = v.$$

L'équation (I) devient donc

$$\Delta e = vdt + \text{etc.}$$

d'où

$$\frac{\Delta e}{dt} = v + \text{etc.} \left(\text{ou} \quad \frac{de}{dt} = v. \right)$$

RÈGLE. *Le premier terme du développement de* $\frac{\Delta e}{dt}$ *est égal à la vitesse (ou la vitesse est la dérivée première de l'espace par rapport au temps).*

La démonstration suppose que l'on prenne dt assez petit pour que le mouvement soit toujours accéléré, tant pendant le temps dt qui précède immédiatement t que pendant le temps dt qui suit immédiatement t. Or, on peut toujours disposer de dt de manière qu'il en soit en général ainsi. Le cas où le mouvement, au bout du temps t, commencerait à devenir retardé, d'accéléré qu'il était avant, ou réciproquement, ce cas accuserait un maximum ou un minimum de vitesse. Et nous savons que, pour cette circonstance, la dérivée première ou le premier coefficient différentiel de la vitesse doit être

(*) Ces deux inégalités supposent la vitesse croissante depuis l'instant $t - dt$ jusqu'à l'instant $t + dt$; si elle était décroissante, il suffirait de changer le se s de ces inégalités, ce qui ne changerait rien à la démonstration.

nulle. La démonstration donne donc la valeur de la vitesse d'un maximum à un minimum, ou vice-versa. La démonstration est donc générale, puisque nous connaissons la modification que subit une fonction lorsqu'elle passe soit par un maximum, soit par un minimum, modification qui consiste en ce que la dérivée première de la fonction devient nulle.

Expression d'une force accélératrice constante ou variable.

2. Sachant que deux forces accélératrices constantes sont entre elles comme les vitesses qu'elles communiquent à un même corps pendant le même temps quelconque; on demande de trouver le rapport entre deux forces accélératrices dont l'une est constante et l'autre variable.

Soit φ la force accélératrice variable, et v la vitesse qu'elle aura communiquée à un corps au bout du temps t.

L'augmentation de vitesse pendant le temps dt qui suit t, sera Δv; et comme v est une fonction du temps t, on a, d'après la notation de Lagrange :

$$\Delta v = v'dt + \frac{v''dt^2}{1.2} + \frac{v'''dt^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Soit p une force accélératrice constante, et gt la vitesse qu'elle aura communiquée au même corps, au bout du temps t, g étant la vitesse communiquée dans l'unité de temps. L'augmentation de vitesse pendant le temps dt qui suit t sera gdt.

Supposons maintenant que la force accélératrice φ reste constante pendant le temps dt, et représentons par u l'augmentation de vitesse communiquée dans cette hypothèse pendant ce temps; nous aurons, d'après le principe cité au commencement, l'égalité de rapports :

$$\frac{\varphi}{p} = \frac{u}{gdt}. \tag{1}$$

Il est évident que u est plus petit que Δv et qu'on peut écrire l'inégalité

$$u < v'dt + v'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.}$$

D'un autre côté, il n'est pas moins évident que u est plus grand que l'augmentation de vitesse

$$v'dt - v'' \frac{dt^2}{1.2} + \text{etc.}$$

communiquée pendant le temps dt qui a précédé; et l'on peut écrire

$$u > v'dt - v'' \frac{dt^2}{1.2} + \frac{v'''dt^3}{1.2.3.4} - \frac{v^{\text{IV}}dt^4}{1.2.3.4} + \text{etc. } (^*)$$

Si dans ces inégalités on met à la place de u sa valeur tirée de l'équation (1), elles deviendront :

$$\frac{\varphi}{p} < \frac{v'dt + v'' \frac{dt^2}{1.2} + v''' \frac{dt^3}{1.2.3} + \text{etc.}}{gdt}$$

$$\frac{\varphi}{p} > \frac{v'dt - v'' \frac{dt^2}{1.2} + v''' \frac{dt^3}{1.2.3} - \text{etc.}}{gdt}$$

Divisant par dt les deux termes de chaque second membre, on aura :

$$\frac{\varphi}{p} < \frac{v'}{g} + \frac{v'' \frac{dt}{1.2}}{g} + \text{etc.}$$

$$\frac{\varphi}{p} > \frac{v'}{g} - \frac{v'' \frac{dt}{1.2}}{g} + \text{etc.}$$

(*) Les deux inégalités précédentes supposent la force φ croissante depuis l'instant $t - dt$ jusqu'à l'instant $t + dt$. Si elle était décroissante, il suffirait de changer le sens de ces inégalités, ce qui ne changerait rien à la démonstration.

et l'on conclut d'après le principe V. que

$$\frac{\varphi_1}{p} = \frac{v'}{g}, \text{ d'où } \varphi_1 = \frac{p}{g} v';$$

et en faisant $p = 1$, $g = 1$, il vient :

$$\varphi_1 = v';$$

mais d'après le paragraphe précédent, on a, en désignant par e le chemin décrit par le corps au bout du temps t :

$$\frac{\Delta e}{dt} = v + \text{etc.} \left(\text{ou } \frac{de}{dt} = v \right)$$

et de là on tire :

$$\frac{\Delta^2 e}{dt^2} = v' + \text{etc.} \left(\text{ou } \frac{d^2 e}{dt^2} = v' = \varphi_1 \right).$$

RÈGLE. *Le premier terme du développement de* $\frac{\Delta^2 e}{dt^2}$ *(c'est-à-dire* $\frac{d^2 e}{dt^2}$*) est égal à la force accélératrice ; (celle-ci est donc la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps).*

La démonstration suppose que l'on prenne dt assez petit pour que la force accélératrice soit toujours croissante ou toujours décroissante, tant pendant le temps dt qui précède immédiatement t, que pendant le temps dt qui suit immédiatement t. Or, dans toute autre hypothèse la force accélératrice serait, au bout du temps t, à son maximum ou à son minimum. Ainsi la démonstration donne la valeur de la force accélératrice d'un maximum à un minimum ou vice-versa; elle est donc générale, puisque nous connaissons la modification que subit toute fonction, lorsqu'elle passe par un maximum ou un minimum, modification qui consiste en ce que la dérivée première de la fonction devient nulle.

(Les applications qui précèdent suffisent pour montrer quel est l'esprit de la méthode de Brasseur; et il sera facile à celui qui l'a saisie de l'étendre à toutes les autres applications.

Nous nous sommes borné, dans les quelques additions que nous avons faites, aux points que Brasseur avait eu l'intention de traiter, ainsi que le témoignent des fragments qui accompagnent le manuscrit. Il est quelques autres applications que nous lui avions indiquées comme pouvant offrir de l'intérêt, et dont il avait exposé les principes : nous citerons entre autres la théorie des osculations, dont le principe III donne la clef. Nous n'avons pas cru toutefois devoir les ajouter, de crainte de donner à l'œuvre de notre maître plus d'extension qu'il n'aurait voulu peut-être en donner lui-même.)

APPENDICE.

Théorème premier.

Si dans la solution d'une question on est conduit à un rapport de la forme

$$\frac{a+x}{b+y}=c \qquad (1)$$

où a, b, c sont des constantes absolues, x et y des variables affectées du même signe, qui jouissent de la propriété de diminuer ensemble de manière que toutes les deux puissent devenir à la fois plus petites chacune que toute quantité donnée, quelque petite que l'on suppose cette dernière quantité ; dans ce cas, ce rapport se partage en deux, à savoir :

$$\frac{a}{b}=c \quad \text{et} \quad \frac{x}{y}=c.$$

Première démonstration, *par l'algèbre.* En chassant le dénominateur, l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$a+x=bc+cy,$$

d'où l'on déduit :

$$a-bc=cy-x. \qquad (2)$$

Le premier membre étant une quantité constante, le second membre doit aussi être une quantité constante. Si nous représentons par k la valeur constante du premier membre de l'équation (2), elle devient

$$k=cy-x. \qquad (3)$$

Les trois hypothèses que l'on peut faire sur le second membre de cette équation sont :

$$cy > x, \qquad cy < x, \qquad cy - x = 0.$$

Si nous parvenons à prouver que les deux premières hypothèses conduisent à l'absurde, il en résultera que la troisième seule est vraie.

Or, d'après la première hypothèse, la constante k est positive et l'on a

$$+k = cy - x. \qquad (a)$$

D'après la seconde hypothèse, la constante k est négative, et l'on a, en changeant les signes de l'équation (3),

$$+k = x - cy. \qquad (b)$$

D'après la définition des variables x et y, nous pouvons dans l'équation (a) prendre y assez petit pour que le produit cy soit plus petit que la constante k, quelque petite que soit cette dernière.

Dès lors, cy diminué de x sera à plus forte raison plus petit que k.

Donc l'équation (a) provenant de la première hypothèse ne peut pas subsister.

Il en est de même de la deuxième équation (b) dans laquelle, en prenant x plus petit que k, on conclut qu'à plus forte raison x diminué de cy est plus petit que k.

La troisième hypothèse, que $cy - x$ est égal à zéro, est donc la seule vraie, et l'on en déduit que

$$\frac{x}{y} = c\,; \text{ d'où par (1) : } \frac{a}{b} = c.$$

On voit que le rapport des variables x et y, que l'on néglige dans la manière ordinaire de faire, comme pouvant devenir aussi petites que l'on veut relativement aux constantes a et b, est aussi grand que le rapport des constantes a et b que l'on conserve.

Comme dans le rapport $\frac{a+x}{b+y}=c$, le numérateur est une variable qui a pour limite a, et le dénominateur, une variable qui a pour limite b, on peut énoncer la propriété de ce rapport en disant :

Quand le rapport de deux variables est égal à une constante, le rapport des limites des mêmes variables est égal à la même constante.

Deuxième démonstration, *par la géométrie.* Sur deux droites fixes qui se coupent, et à partir de leur point d'intersection, prenons sur la première une longueur égale à $a+x$, et sur la seconde une longueur égale à $b+y$.

Soit D la droite qui unit les extrémités de a et de b; et soit d la droite qui unit les extrémités de x et y. Si l'on fait décroître x, y décroîtra aussi, et la droite d changera de position. Mais comme le rapport $\frac{a+x}{b+y}$ reste constant, il en résulte que la droite d se déplace parallèlement à elle-même. Si nous prouvons que la droite d est dans toutes ses positions parallèle à la droite fixe D, il en résultera que le rapport $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$ et par suite que

$$\frac{a}{b}=c \quad \text{et} \quad \frac{x}{y}=c.$$

D'après la définition de x et y, les extrémités de la droite mobile d doivent pouvoir chacune approcher des extrémités de la droite fixe D d'une quantité plus petite que toute quantité donnée. Or, cela exige que la droite d se meuve parallèlement à la droite fixe D. Car si d n'est pas parallèle à D, par les extrémités de D menons deux parallèles à d; l'une ou l'autre de ces parallèles interceptera avec la droite D un segment fixe sur x ou sur y, et il en résultera que l'une des extrémités de d ne pourra pas approcher de l'une des extrémités de la droite D, d'une quantité plus petite que ce segment, ce qui est contraire à la définition de x et de y.

Donc d se meut parallèlement à D.

C. Q. F. D.

Cette démonstration fait image; elle montre la loi suivant laquelle les variables x et y décroissent.

Troisième démonstration, *par la géométrie analytique.* L'équation $\frac{a+x}{b+y} = c$ mise sous la forme $y + b = c(x + a)$ est celle d'une droite entièrement déterminée, puisqu'elle passe par le point $(-a, -b)$ et que sa direction est déterminée par la constante c.

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque de cette droite, il résulte de la définition de x et y que cette droite doit passer par l'origine.

Car si elle n'y passe pas, en nommant A l'abscisse du point où la droite rencontre l'axe de x, si l'on fait décroître x à partir de sa valeur A, y augmentera, contrairement à l'hypothèse qui veut que les deux variables x et y décroissent ensemble.

La droite représentée par l'équation $y + b = c(x + a)$, passant par l'origine, il en résulte que l'on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = c. \text{ (*)}$$

(*) Peut-être trouvera-t-on dans cette démonstration une difficulté inhérente à l'intervention des signes. On l'éviterait, nous semble-t-il, au moyen du raisonnement suivant.

a, b, c étant des constantes absolues, x et y sont toujours de même signe, quelque grands ou quelque petits qu'on les suppose; car, s'il n'en était pas ainsi, le numérateur de la fraction constante $\frac{a+x}{b+y}$ augmenterait, tandis que son dénominateur diminue, ou vice-versâ, ce qui serait absurde. x et y ayant toujours le même signe, la droite doit passer par l'origine, et de plus, être située dans l'angle des coordonnées positives et dans son opposé.

Règle pour appliquer le théorème ci-dessus. Pour trouver l'expression analytique de la mesure d'une quantité constante, il faut chercher l'expression analytique de la mesure d'une quantité variable ayant pour limite la quantité proposée, c'est-à-dire pouvant différer de la quantité proposée d'une quantité plus petite que toute quantité donnée, quelque petite que soit cette dernière.

Application. Pour trouver la surface S d'un cercle dont la circonférence est C et le rayon r, on cherchera la surface d'un polygone régulier circonscrit d'un nombre indéfini de côtés. x étant la quantité qu'il faut ajouter à la surface du cercle pour avoir celle du polygone, et y la quantité qu'il faut ajouter à la circonférence pour avoir le périmètre du polygone, la surface du polygone sera $S + x$, et son périmètre sera $C + y$. Or, on sait que l'on a :

$$S + x = (C + y)\frac{r}{2}.$$

Divisant les deux membres par $C + y$, il vient :

$$\frac{S + x}{C + y} = \frac{r}{2}.$$

Dans ce rapport, x et y ont autant de valeurs différentes qu'il existe de polygones réguliers circonscrits au cercle.

Or, on peut toujours prendre le nombre des côtés tel que les variables x et y soient à la fois plus petites chacune que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit. D'après cela, le rapport ci-dessus se partage dans les deux suivants :

$$\frac{S}{C} = \frac{r}{2} \qquad \text{d'où} \qquad S = C\frac{r}{2}$$

et

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{2} \qquad \text{d'où} \qquad x = y\frac{r}{2}.$$

Théorème second.

Si l'on a à la fois les deux inégalités

$$S < A + x$$
$$S > A - y,$$

S et A étant des constantes absolues, x et y des variables qui décroissent ensemble et qui doivent pouvoir devenir à la fois plus petites chacune que toute quantité donnée, quelque petite que l'on suppose cette dernière, alors on en conclut que

$$S = A.$$

En effet, A mis à la place de S vérifie à la fois les deux inégalités ; et toute constante différente de A ne saurait pas les vérifier à la fois.

Car en mettant A + K, K étant une constante, à la place de S, on a :

$$\left.\begin{array}{l} A + K < A + x \\ B + K > A - y \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \begin{array}{l} K < x \\ K > -y. \end{array}$$

La seconde des deux dernières égalités est toujours vérifiée pour toutes les valeurs de y ; mais la première ne l'est pour aucune valeur de x plus petite que K. Donc, etc.

Règle pour appliquer le théorème qui précède.

Pour trouver l'expression analytique de la mesure d'une quantité constante, il faut chercher les expressions analytiques de la mesure de deux quantités variables, l'une plus grande, l'autre plus petite que la proposée et ayant chacune pour limite cette dernière. Si ces deux expressions ont un terme constant commun indépendant des variables indéfiniment petites qui entreront nécessairement dans ces expressions, puisque la mesure d'une quantité variable ne saurait être représentée par une constante, dans ce cas, le terme constant sera l'expression de la mesure de la quantité proposée.

Remarque. Mais comme dans chaque cas particulier, on peut vérifier que le terme constant est le même dans les deux expressions, il en résulte qu'il suffit de chercher l'expression analytique de la mesure d'une seule quantité variable ayant pour limite la quantité proposée : le terme constant dans cette expression sera la mesure de la quantité proposée.

Application. Pour trouver la surface T d'un triangle dont le pied de la hauteur h tombe sur la base b, je divise la hauteur h en un nombre indéfini n de parties égales à u. En menant par les divers points de division des parallèles à la base, il sera facile de construire n rectangles de hauteur u dont chacun est circonscrit au triangle et $(n - 1)$ rectangles de hauteur u dont chacun est inscrit au triangle. On trouvera pour la somme des n rectangles circonscrits :

$$\frac{bh}{2} + \frac{bu}{2}$$

et pour la somme des $(n - 1)$ rectangles inscrits :

$$\frac{bh}{2} - \frac{bu}{2}.$$

On a donc à la fois les deux inégalités suivantes, dans lesquelles u est une quantité variable indéfiniment petite :

$$\left.\begin{array}{l} T < \dfrac{bh}{2} + \dfrac{bu}{2} \\ T > \dfrac{bh}{2} - \dfrac{bu}{2} \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad T = \frac{bh}{2}.$$

En géométrie, toutes les démonstrations par la réduction à l'absurde peuvent se faire par l'un ou l'autre des deux théorèmes ci-dessus. Mais comme ces théorèmes sont eux-mêmes démontrés par la réduction à l'absurde, on ne doit pas croire, en les employant, donner des démonstrations directes.