This page intentionally left blank.

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A LA RECHERCHE

DES PROPRIÉTÉS DE L'ÉTENDUE,

PAR

J.-B. BRASSEUR,

CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE.

(Lu à la séance du 3 décembre 1853.)

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE MÉTHODE D'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A LA RECHERCHE

DES PROPRIÉTÉS DE L'ÉTENDUE.

INTRODUCTION.

Tout le monde sait que la géométrie descriptive fournit des méthodes variées pour transformer graphiquement une figure qui réunit les trois dimensions en une figure plane, et qu'elle fait connaître les dépendances qui existent entre la figure primitive et la figure transformée. Par cela seul, elle constitue une science propre à rechercher et à démontrer les propriétés de l'étendue; car tout moyen de démonstration se réduit, en dernière analyse, à transformer une difficulté en une autre que l'on sache résoudre.

Aussi, en examinant attentivement une épure de géométrie descriptive, construite en vue d'un résultat particulier, il est presque toujours possible d'en déduire, par cette comparaison, des propriétés géométriques dont l'importance scientifique est à celle de ce résultat particulier comme un résultat algébrique est à un résultat arithmétique.

Quant à la démonstration de ces mêmes propriétés, soit par la géométrie élémentaire, soit par la géométrie analytique, elle serait le plus souvent, si pas impossible, du moins excessivement difficile, et, dans tous les cas, très-compliquée. Or, de grandes difficultés ou de grandes complications dans la solution d'une question sont, presque toujours, la preuve que cette question n'est pas du domaine de la science par laquelle on a cherché à la résoudre.

Le domaine de la géométrie descriptive, ainsi que l'indique le titre que le célèbre Monge lui a donné, embrasse les propriétés descriptives ou de position, et l'on peut dire, avec le savant M. Olivier, que la géométrie descriptive est toute-puissante lorsqu'il ne s'agit que de démontrer des propriétés de cette espèce.

Ajoutons ici que les propriétés descriptives ou de position, par cela même qu'elles forment image, sont en général plus faciles à énoncer et à retenir, et que, par ce motif, leur exposition, quand la chose est possible, devrait précéder celle des propriétés métriques; d'ailleurs, les propriétés descriptives une fois connues, faciliteront la recherche de ces dernières.

En général, la discussion d'une épure conduira toujours à une propriété géométrique, lorsque l'une des deux ou toutes les deux projections du résultat cherché ne varient pas, en faisant varier d'une certaine manière, dans l'espace, soit tout ou partie des données de la question, soit les quantités auxiliaires dont on s'est servi pour la résoudre.

C'est ainsi que, par un examen attentif de l'épure de l'intersection de deux cônes, on reconnaît que les sommets de ces cônes peuvent tous deux changer d'une certaine manière de position dans l'espace, sans que la projection horizontale de cette intersection soit affectée de ce changement. Ce fait conduit à la propriété géométrique suivante :

« Si les sommets de deux cônes à traces horizontales constantes se meuvent sur deux verticales respectivement, de manière que la trace horizontale de la droite qui unit ces sommets reste fixe, alors la courbe à double courbure, intersection des deux cônes, décrira un cylindre vertical. »

C'est ainsi encore que dans l'épure du point de rencontre d'une droite avec un plan, les deux projections de ce point restent les mêmes pour toutes les positions du plan auxiliaire que l'on doit mener par la droite. Ce fait conduit également à une propriété très-générale que nous croyons inutile d'énoncer ici.

Sans vouloir multiplier ces exemples, ce qui serait facile, nous insisterons sur cette considération importante : que la variation des données d'une question, alors que l'une ou l'autre projection du résultat n'est pas affectée de cette variation, est, en géométrie descriptive, aussi féconde en propriétés utiles que la variation des constantes arbitraires l'est en géométrie analytique.

Dans l'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue, deux difficultés se présentent : la première, c'est d'expliquer les constructions de l'épure ; la seconde, c'est d'énoncer la proposition qui en découle.

Pour éviter les longueurs auxquelles entraîne l'explication d'une épure, il faut nécessairement supposer le lecteur familiarisé avec les constructions graphiques de la géométrie descriptive, et se borner à donner la solution de la question dans l'espace, en indiquant la manière dont les plans de projection doivent être disposés par rapport aux données, pour que l'épure mette en évidence la propriété que l'on a en vue de démontrer.

Quant à la difficulté d'énoncer cette propriété, difficulté qui naît du grand nombre de lignes de l'épure, on ne peut y obvier, dans la plupart des cas, qu'en classant par *systèmes* les lignes qui entrent dans l'épure, et en définissant ces mêmes systèmes. Et si nous avons réussi à revêtir les propriétés démontrées dans le présent mémoire de la forme simple et laconique des énoncés de la géométrie élémentaire, c'est à cette classification par systèmes que nous le devons. Enfin, pour nous résumer sur l'importance que nous attachons aux mots *systèmes*, *transformations*, et *énoncés*, nous dirons que ces mots impliquent, à nos yeux, toute une géométrie supérieure.

Quoi qu'il en soit, et malgré les belles applications qui ont été faites de la géométrie descriptive par ce que nous nommerons la discussion d'une épure, les propriétés qu'elle conduit à démontrer sont en général isolées et sans corrélation, et l'on voit difficilement comment il faudrait s'y prendre pour arriver à la déduction d'un ensemble de propriétés descriptives de l'étendue ayant entre elles un enchaînement.

Or, si l'on considère qu'une propriété descriptive n'est en réalité que la définition d'un lieu géométrique, on comprendra qu'une règle générale qui enseignerait à définir, par des relations descriptives, des lieux géométriques de tous les degrés, constituerait déjà une méthode puissante dans l'étude des propriétés de l'étendue.

Le but que nous nous sommes proposé d'atteindre dans ce mémoire est de faire connaître un ensemble de nouvelles propriétés projectives du point, de la droite et du plan, et de déduire de ces propriétés, entre autres applications dont elles sont susceptibles, la règle générale dont il vient d'être question pour la définition d'un lieu géométrique.

Nous divisons ce mémoire en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous exposons les propriétés des plans bissecteurs; nous développons ensuite les théorèmes fondamentaux conduisant à la définition de lieux géométriques de tous les degrés, soit par l'intersection de deux systèmes de lignes, soit par un seul système de lignes considérées comme enveloppées de ces lieux.

Dans le second chapitre, nous définissons par des considérations descriptives, certains systèmes de lignes, principalement ceux que l'on peut former avec la droite, et nous énonçons les surfaces que ces lignes, considérées comme projections, peuvent représenter dans l'espace. Enfin, nous donnons des applications à la définition de lieux géométriques de tous les degrés.

Dans le troisième chapitre, nous examinons les systèmes de lignes droites que l'on peut définir par la relation métrique la plus simple, la proportion. Nous indiquons de même les surfaces que ces lignes représentent dans l'espace, d'où nous concluons quels sont les lieux géométriques formés par l'intersection de ces mêmes systèmes de lignes.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIÈRE SECTION.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DÉDUITES DE LA CONSIDÉRATION DES PLANS BISSECTEURS.

1. — Nous conviendrons de nommer *plan bissecteur* B′ celui qui divise en deux parties égales l'angle de deux plans de projection, et *plan bissecteur* B celui qui divise en deux parties égales le supplément de cet angle.

Ces deux plans bissecteurs se coupent toujours à angle droit, quel que soit l'angle que forment les deux plans de projection, et ils sont les plans diamétraux principaux de l'ensemble des deux plans de projection, considérés comme surface du second degré.

Nous prévenons qu'il s'agit toujours dans ce mémoire de projections orthogonales, quel que soit l'angle des plans de projection; et qu'il faut toujours considérer le plan vertical rabattu, de l'avant en arrière, sur le plan horizontal.

§ I.

Propriétés projectives du plan bissecteur B.

2. — Tout point de l'espace dont les deux projections coïncident sur une épure, est situé dans le plan bissecteur *B*, et réciproquement.

D'où l'on déduit que tous les points de l'espace dont les deux projections de chacun coïncident sur une épure, sont tous situés dans le plan bissecteur *B*.

3. — Nous nommerons quelquefois les deux projections coïncidentes d'un point situé dans le plan bissecteur *B*, la projection double de ce point.

4. — Il suit de (2) que le point de rencontre des deux projections d'une droite ou d'une ligne quelconque sur une épure, est la projection double du point de rencontre de cette droite ou de cette ligne avec le plan bissecteur *B*.

5. — Si une droite est perpendiculaire à un plan de projection, le point dans lequel se projette la droite est la projection double du point où cette droite rencontre le plan bissecteur *B*.

Nous nommerons quelquefois la projection double du point de rencontre d'une droite avec le plan bissecteur *B*, la trace principale de cette droite.

6. — Toute droite de l'espace dont les deux projections coïncident sur une épure, est située dans le plan bissecteur *B*, et réciproquement. Cependant une droite dont les deux projections coïncident avec une perpendiculaire à la ligne de terre, peut ne pas être située dans le plan bissecteur *B*; ce cas sera examiné plus loin.

7. — Pour qu'une droite de l'espace rencontre une autre droite, située dans le plan bissecteur *B*, il faut que les deux projections de la première se coupent en un point de la projection double de la seconde. Autrement, il faut que la trace principale de la première droite se trouve sur la projection double de la seconde droite.

8. — Toute droite de l'espace dont les deux projections sont parallèles entre elles sur une épure, est parallèle au plan bissecteur *B*, et réciproquement.

9. — L'intersection d'un plan quelconque avec le plan bissecteur *B*, est une droite dont la projection double passe par le point d'intersection des deux traces du plan proposé.

Nous nommerons quelquefois cette projection double, la trace principale de ce plan.

10. — Il est évident que la trace principale d'un plan renferme les traces principales de toutes les droites situées dans ce plan.

11. — Lorsqu'un plan se projette suivant sa trace sur l'un des plans de projection, son intersection avec le plan bissecteur *B* se projette suivant la même trace.

12. — Les deux projections de chaque point d'une courbe située dans le plan bissecteur B coïncident, et partant les deux projections d'une courbe située dans le plan bissecteur B coïncident également.

Nous nommerons les deux projections coïncidentes d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur B, la projection double de cette courbe.

Le degré de cette projection double est le même que celui de la courbe de l'espace.

c étant la projection double d'une courbe située dans le plan bissecteur B, nous représenterons cette courbe de l'espace par la notation (c, c), qui fait voir assez bien que les deux projections de la courbe de l'espace sont les mêmes.

Réciproquement, toute courbe de l'espace dont les deux projections de chaque point coïncident, est située dans le plan bissecteur B.

§ II.

Propriétés projectives du plan bissecteur B'.

13. — Tout point de l'espace dont les deux projections sont à égale distance de la ligne de terre, c'est-à-dire symétriquement placées par rapport à cette ligne, est situé dans le plan bissecteur B', et réciproquement.

14. — Si une droite est située dans le plan bissecteur B', ses deux projections se coupent en un même point de la ligne de terre et sont symétriques par rapport à cette ligne.

Réciproquement, toute droite de l'espace dont les deux projections passent par un même point de la ligne de terre et sont symétriques par rapport à cette ligne, est située dans le plan bissecteur B'.

15. — Toute droite de l'espace, dont les deux projections sont également inclinées sur la ligne de terre, sans se rencontrer en un point de cette ligne, est parallèle au plan bissecteur B', et réciproquement.

16. — Les deux projections de l'intersection d'un plan quelconque

2

avec le plan bissecteur B', passent par le point d'intersection des deux traces du plan proposé, et sont également inclinées ou symétriques par rapport à la ligne de terre.

17. — Les deux projections d'une courbe située dans le plan bissecteur B', sont deux autres courbes symétriques par rapport à la ligne de terre. Ces deux courbes sont du même degré et du même genre que la courbe proposée.

Réciproquement, si les deux projections d'une courbe de l'espace sont symétriques par rapport à la ligne de terre, cette courbe sera située dans le plan bissecteur B'.

18. — Il suit de cette dernière propriété que, si deux courbes tracées sur un plan sont symétriques par rapport à une droite D située dans ce même plan, elles seront les projections d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur B', à la condition de prendre la droite D pour ligne de terre et chaque paire de points symétriques des deux courbes pour les deux projections d'un point de l'espace.

19. — Une courbe c qui a un diamètre principal, sera les deux projections d'une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur B', si l'on prend le diamètre pour ligne de terre, et chaque paire de points symétriques de la courbe proposée pour les projections de deux points de l'espace. Ainsi, a, a' étant les deux extrémités d'une corde conjuguée au diamètre, les deux points de l'espace (a, a'), (a', a) appartiennent chacun à la courbe de l'espace mentionnée [1].

20. — Nous représentons une courbe de l'espace située dans le plan bissecteur B', par la notation $(c, \text{ɔ})$, qui rappelle assez bien que les deux projections c et ɔ d'une telle courbe sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

[1] Dans cette notation, la première lettre entre parenthèses représente la projection horizontale et la seconde, la projection verticale.

§ III.

Propriétés projectives d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

21. — Quand nous représentons une droite de l'espace par la notation (abc ..., $a'b'c'$ ...), cela signifie que a, b, c ..., sont les projections horizontales d'un certain nombre de points consécutifs de cette droite, et a', b', c' ..., les projections verticales correspondantes de ces mêmes points. Cela posé, si une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...) est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, alors ses deux projections coïncident avec une même perpendiculaire à cette ligne et l'on aura toujours la proportion $ab : a'b' = bc : b'c' =$ etc.; réciproquement, si cette proportion existe pour un certain nombre de points situés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, ces points seront en ligne droite dans l'espace.

22. — Soit une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...), située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et parallèle au plan bissecteur B, cette droite est alors également inclinée sur les deux plans de projection et jouit des propriétés suivantes :

1° Les deux projections de chacun de ses segments sont égales, c'est-à-dire que l'on a : $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $cd = c'd'$, etc.;

2° Les projections horizontales a, b, c ..., et les projections verticales correspondantes a', b', c' ..., se succèdent dans le même sens sur l'épure.

Ces propriétés subsistent à l'évidence si la droite est située dans le plan bissecteur B, au lieu de lui être parallèle.

23. — Soit une droite de l'espace (abc ..., $a'b'c'$ ...), située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et parallèle au plan bissecteur B'; cette droite est, comme dans le cas précédent, également inclinée sur les deux plans de projection, et jouit des quatre propriétés suivantes :

1° Les deux projections d'un segment quelconque de cette droite sont égales, c'est-à-dire que l'on a : $ab = a'b'$, $bc = b'c'$, $cd = c'd'$, etc.;

2° Les projections horizontales a, b, c, ..., se succèdent sur l'épure en sens inverse des projections verticales a', b', c', ...;

3° Les deux projections d'un point quelconque de cette droite, étant prises l'une pour l'autre, représentent un autre point de l'espace qui appartient toujours à la même droite.

Nous ferons voir une autre fois qu'une perspective quelconque des projections horizontales et verticales de trois points quelconques, pris sur une telle droite, sont six points en involution.

4° Les deux traces, horizontale et verticale de cette droite, coïncideront sur l'épure; d'où il suit :

Que si les génératrices d'un cylindre sont perpendiculaires à la direction de la ligne de terre et parallèles au plan bissecteur B', les deux traces de ce cylindre coïncideront sur l'épure; de plus, d'après (25), les deux traces d'un plan tangent quelconque à ce cylindre coïncideront également.

Les propriétés qui précèdent subsistent également si la droite est située dans le plan bissecteur B' au lieu de lui être parallèle.

24. — Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B, aura ses deux traces également inclinées sur la ligne de terre, sans toutefois coïncider sur l'épure, et réciproquement.

25. — Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B', aura ses deux traces en ligne droite sur l'épure.

26. — Réciproquement, tout plan dont les deux traces coïncident sur une épure, coupe le plan bissecteur B' suivant une droite perpendiculaire à la ligne de terre; d'où suit :

1° Que la droite qui relie, sur une épure, les deux traces d'une droite quelconque de l'espace, est à la fois la trace horizontale et la trace verticale d'un plan qui passe par cette droite de l'espace et qui coupe le plan bissecteur B' suivant une perpendiculaire à la ligne de terre;

2° Que tous les plans de l'espace ayant leurs deux traces en ligne droite sur l'épure, sont tous parallèles à une même droite, perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B'.

27. — Nous terminerons ces considérations générales par la solution du problème suivant, dont nous aurons besoin par la suite :

Problème. — *Étant données les projections de deux points d'une droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, construire la projection double du point où elle rencontre le plan bissecteur* B, *ou, en d'autres mots, construire la trace principale de cette droite.*

Solution. — Soient (a, a'), (b, b'), deux points d'une droite $(ab, a'b')$ située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Par cette droite $(ab, a'b')$ et par un point (p, p'), pris arbitrairement dans l'espace, imaginons un plan. Comme les trois droites $(ab, a'b')$, $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$ appartiennent à ce même plan, il s'ensuit que leurs traces principales sont en ligne droite. D'après cela, la droite qui unit les traces principales des deux droites $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$, coupera la droite ab ou son prolongement en un point qui sera la trace principale de la droite $(ab, a'b')$, c'est-à-dire la projection double du point de rencontre de la droite $(ab, a'b')$ avec le plan bissecteur B.

28. — Le résultat de ce problème étant indépendant de la position du point (p, p'), il en résulte cette proposition :

Proposition. — Dans deux triangles, dont les bases sont sur une même droite D et dont les sommets opposés aux bases se meuvent sur une droite quelconque parallèle à D, les deux côtés de l'un des deux triangles forment, avec les deux côtés de l'autre, un quadrilatère dont les diagonales passent respectivement par deux points fixes de la droite D.

DEUXIÈME SECTION.

APPLICATION A LA DÉFINITION DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS.

29. — Théorème fondamental. — *Étant donnée une surface d'un degré quelconque, si l'on trace sur cette surface des lignes arbitraires et qu'on les projette orthogonalement sur deux plans, rectangulaires ou non, les points, s'il y en a, où*

les deux projections de chacune de ces lignes se rencontreront sur l'épure, appartiendront à un lieu géométrique dont le degré sera le même que celui de la surface proposée.

Démonstration. — Il résulte, en effet, de la propriété (4) que chaque point du lieu géométrique mentionné dans l'énoncé, est à la fois la projection horizontale et la projection verticale d'un point de la section faite dans la surface proposée par le plan bissecteur *B*. Or, le degré de cette section, qui est le même que celui de sa projection, est aussi celui de la surface.

Pour que les deux systèmes de lignes dont il est question puissent se couper, il faut donc que les plans de projection soient disposés de manière que leur plan bissecteur *B* coupe la surface.

Construction de la tangente. — *A chaque point du lieu géométrique correspond un point de la surface; cela posé, la tangente en un point de ce lieu et les deux traces du plan tangent au point correspondant de la surface, doivent concourir en un même point de la ligne de terre. Il suffit donc, dans chaque cas, de construire une seule des deux traces de ce plan tangent et de la prolonger jusqu'à sa rencontre avec la ligne de terre pour avoir un second point de la tangente.*

30. — Pour appliquer ce théorème à la définition de lieux géométriques d'un degré donné, tout consiste à tracer, sur une surface du même degré, un système de lignes suivant une certaine loi; à définir les deux systèmes de projections qui résultent du système proposé; et, enfin, à énoncer que ces deux systèmes de lignes se coupent, deux à deux, sur un lieu géométrique du même degré.

Il ressort du même théorème que si l'on veut obtenir un lieu géométrique d'un degré quelconque par l'intersection de deux systèmes de droites, il faudra connaître une surface réglée du même degré.

La définition de ces deux systèmes de lignes et l'énoncé du degré du lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes, constituent, dans chaque cas, un véritable théorème et pour la forme et pour le fond.

31. — Théorème réciproque. — *Si l'on a, sur un même plan, deux systèmes de lignes qui se correspondent deux à deux d'après une loi quelconque, pour connaître le degré du lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes de lignes,*

on doit chercher si, en considérant ces deux systèmes de lignes comme les deux projections d'un système unique de lignes de l'espace, ces dernières ne peuvent pas faire partie d'une certaine surface dont le degré serait connu; dès lors, le lieu géométrique, intersection des deux systèmes de lignes proposés, sera du même degré que la surface, et l'on saura lui mener une tangente, si l'on sait construire le plan tangent à cette surface.

32. — Dans le cas où un lieu géométrique étant déterminé par l'intersection de deux systèmes de lignes, l'on ne trouve pas dans l'espace un système unique de lignes appartenant à une même surface, et dont les systèmes proposés seraient respectivement les projections horizontales et les projections verticales, on pourra recourir à la règle suivante, laquelle, à défaut de faire connaître le degré du lieu géométrique, donnera au moins le moyen d'y mener une tangente.

Théorème. — *Si deux systèmes de lignes se correspondent deux à deux sur un plan, pour construire la tangente au lieu géométrique, intersection de ces deux systèmes de lignes, on doit chercher si ces systèmes ne peuvent pas être les projections, sur le plan, des sections faites dans deux surfaces de l'espace par une série de surfaces auxiliaires; dès lors, le lieu géométrique, intersection des deux systèmes de lignes, serait une projection de l'intersection de ces deux surfaces et la tangente à ce lieu serait la projection de l'intersection de deux plans tangents à ces surfaces.*

33. — Remarque. — Dans la construction d'un lieu géométrique par points, si l'on conserve toutes les lignes auxiliaires qui servent à construire chaque point, et que nous nommerons *lignes correspondantes*, on mettra en évidence autant de systèmes que l'on aura tracé de lignes pour déterminer un premier point. A chaque ligne, dans un de ces systèmes, en correspondra toujours une dans chacun des autres systèmes, et le lieu géométrique se trouvera être l'intersection de deux de tous ces systèmes. Dès lors, il y a lieu de chercher à appliquer les règles précédentes à ces deux systèmes de lignes pour connaître le degré de ce lieu géométrique et lui mener une tangente.

Citons un exemple :

Si l'on construit une ellipse par points en s'appuyant sur la propriété des foyers, l'on mettra en évidence deux systèmes de circonférences concentriques, ayant respectivement pour centres les deux foyers; et si l'on fait en sorte que les rayons de l'un de ces systèmes de circonférences procèdent suivant une progression arithmétique croissante dont la raison soit r, les rayons de l'autre système de circonférences procéderont suivant une progression arithmétique décroissante dont la raison sera la même. De là une nouvelle définition des courbes du second degré par l'intersection de deux systèmes de circonférences concentriques.

Le degré de la courbe étant connu, il s'agit seulement de lui construire une tangente. Or, dans le cas actuel, le théorème (32) n'est pas applicable, car il n'existe pas dans l'espace un système de lignes, appartenant à une même surface, et dont les deux systèmes de circonférences seraient, respectivement, les projections horizontales et verticales. Il faut donc essayer le théorème (33) qui conduit effectivement au résultat cherché; car si l'on donne à chaque circonférence du premier système, une cote de hauteur égale au rayon de cette circonférence, et si l'on attribue la même cote à la circonférence correspondante du second système [1], les deux systèmes de circonférences pourront être considérés comme les projections cotées de toutes les sections faites, par des plans horizontaux, dans deux cônes de révolution dont les axes se projettent aux centres des deux systèmes de circonférences et dont les génératrices sont inclinées à 45°; l'ellipse, intersection de ces deux systèmes de circonférences, est donc la projection horizontale de l'intersection de ces deux cônes. — Au moyen de deux plans tangents à ces cônes, on aura la tangente à l'ellipse, ce qui conduit à la règle connue pour mener une tangente à cette courbe.

34. — Les considérations qui précèdent servent à définir un lieu géométrique par l'intersection de deux systèmes de lignes. — Le théorème suivant donne le moyen de définir un lieu géométrique, considéré comme enveloppe, par un seul système de lignes, ses enveloppées.

Théorème. — *La perspective du contour apparent d'une surface courbe quelconque est tangente aux perspectives de toutes les lignes qui, sur la surface, touchent*

[1] Deux circonférences appartenant respectivement aux deux systèmes sont dites correspondantes lorsque la somme de leurs rayons est constante.

ou coupent le contour apparent; et si le contour apparent est une courbe plane du degré n, *sa perspective sera une courbe du même degré. Si la ligne coupe ou touche le contour apparent en* m *points, la perspective de la ligne touchera la perspective du contour apparent en* m *points.*

35. — De ce théorème on peut déduire le corollaire suivant, dont nous ferons un usage fréquent par la suite et dont nous avons donné une démonstration directe, dans le *Bulletin de l'Académie*, en partant de la double génération rectiligne de l'hyperboloïde à une nappe :

Corollaire I. — *Les projections orthogonales sur un plan quelconque des deux systèmes de génératrices rectilignes dont sont composés le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe, sont tangentes à une même courbe du second degré.*

D'où l'on peut déduire :

Corollaire II. — *Si deux droites tracées sur un plan sont divisées en parties respectivement proportionnelles, ces deux droites, et toutes celles qui relient les points de divisions correspondants, sont tangentes à une même courbe du second degré.*

36. — Le théorème fondamental (29) est susceptible d'être énoncé sous une autre forme que nous croyons utile d'indiquer ici :

Théorème. — *Si une courbe plane ou à double courbure, constante ou variable de forme et de grandeur, se meut dans l'espace de manière à engendrer une surface du degré* n, *le point d'intersection des deux projections de la courbe mobile décrira sur l'épure un lieu géométrique du degré* n, *auquel appartiendra le point d'intersection des deux projections de chacune des directrices de la surface.*

Ce lieu géométrique n'est autre, en effet, que la projection double de l'intersection de la surface avec le plan bissecteur B.

Si les deux projections de la courbe génératrice, pour une ou plusieurs positions de celle-ci, se rencontrent à l'infini, le lieu géométrique aura un même nombre de points à l'infini.

Si la génératrice est une droite, le lieu géométrique fourni par le point d'intersection des deux projections de la droite mobile, aura autant de points à l'infini que la droite mobile aura pris de positions parallèles au plan bissecteur B.

Car chaque fois que la droite devient parallèle au plan bissecteur *B*, ses deux projections sont parallèles, et leur point d'intersection est à l'infini.

Si une droite se meut dans l'espace de manière à décrire un plan, le point d'intersection des deux projections de la droite mobile décrira une droite. Donc, si une droite tourne tangentiellement à une même courbe plane, les deux projections de la tangente mobile se couperont sans cesse sur une même droite.

Réciproquement, pour démontrer qu'une courbe de l'espace dont on connaît la définition des projections est plane, il suffit de prouver que le lieu du point d'intersection des deux projections d'une tangente quelconque à la courbe est une ligne droite.

Dans d'autres cas, pour prouver qu'une courbe n'est pas plane, on peut recourir au principe suivant : *Une courbe est à double courbure, lorsque ses deux projections orthogonales sur deux plans qui se coupent ne sont pas des courbes à la fois de même degré et de même genre.*

Si une droite décrit dans l'espace une surface gauche du second degré, alors les deux projections de cette droite se mouvront, sur l'épure, tangentiellement à deux courbes du second degré respectivement (35, coroll. 2), *tandis que leur point d'intersection décrira une troisième courbe du second degré.*

37. — Indiquons, en passant, quelques cas particuliers de l'emploi des plans bissecteurs.

Le plan bissecteur B étant pris pour tableau, la perspective d'un objet dont on a les deux projections s'obtiendra par l'intersection de deux systèmes de droites. En effet, la perspective de chaque point se trouve à l'intersection des deux projections du rayon visuel de ce point. Il est vrai que ce moyen ne donne que la projection double de la perspective d'un objet et qu'il reste, pour construire le rabattement de la perspective, à réduire dans un même rapport toutes les ordonnées de cette projection double (ordonnées perpendiculaires à la ligne de terre) [1].

Les deux projections d'une courbe plane ou d'un polygone plan sont deux figures homologiques, dont le centre d'homologie est à l'infini sur une perpendiculaire à la ligne de terre; l'axe d'homologie est la projec-

[1] Ne serait-ce pas là la méthode nouvelle de perspective attribuée à Pascal, de laquelle il est dit que chaque point du tableau se construisait par l'intersection de deux lignes droites? (*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, t. XI des *Mémoires couronnés par l'Académie royale*, p. 73, § 19.

tion double de l'intersection du plan du polygone ou de la courbe plane avec le plan bissecteur *B*.

La même droite d'intersection est une sécante réelle ou idéale des deux projections de la courbe plane, selon que les deux projections se coupent ou ne se coupent pas.

En disant que les deux projections d'une courbe plane sont deux figures homologiques dont l'axe d'homologie est la trace principale du plan de la courbe, nous disons implicitement que la considération des plans bissecteurs peut apporter de grandes simplifications dans la construction d'une épure de géométrie descriptive.

Ainsi trois points de l'espace et les trois droites qui les unissent étant toujours dans un même plan, la considération des traces principales de ces droites et de leur plan donnent sur-le-champ la solution du problème :

« Étant données les projections horizontales et verticales de trois points de l'espace et la projection horizontale d'un quatrième point du même plan, construire la projection verticale du quatrième point, en n'employant que la règle. »

C'est ainsi encore que la solution du problème : « Par un point mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan, » n'exige, à part le tracé des données, que la construction de huit lignes droites.

38. — Terminons par quelques réflexions générales :

Les systèmes de lignes mentionnés dans les théorèmes précédents font, en géométrie synthétique, le même office que les systèmes de coordonnées rectilignes en géométrie analytique et l'on voit que la géométrie synthétique est beaucoup plus riche en systèmes de coordonnées que ne l'est la géométrie analytique.

En outre, la géométrie synthétique sait tirer un plus grand parti d'un même système de lignes considérées comme ordonnées. C'est ainsi qu'en n'ayant recours qu'à des systèmes de lignes droites, pour définir par des relations descriptives les courbes du second degré, on pourra le faire : 1° par l'intersection de deux systèmes de droites respectivement parallèles à deux droites fixes; 2° par l'intersection de deux systèmes de droites qui concourent respectivement en deux points fixes ; 3° par l'intersection d'un système de droites parallèles avec un système de droites qui concourent en un même point ; 4° par un seul système de droites tangentes à une même courbe du second degré. A cela nous ajouterons que parmi les divers systèmes de lignes qui, par leurs intersections, produisent un même lieu géométrique, on pourra remarquer que plus le degré de ces lignes (ordonnées) est élevé, et plus est simple l'énoncé des conditions auxquelles doivent satisfaire ces deux systèmes de lignes pour produire ce lieu géométrique. La définition des courbes du second degré, donnée à l'article (33) vient à l'appui de cette observation [1].

Sans doute la géométrie analytique sait donner la condition pour que deux systèmes de lignes définies se coupent sur une courbe également définie ; mais l'équation qui exprime ces conditions est rarement susceptible d'être énoncée géométriquement et la construction de la tangente, au moyen de son équation, approche rarement de la simplicité des constructions auxquelles conduisent les considérations géométriques.

Les théorèmes précédents énonçant des propriétés descriptives, toutes celles que nous en déduisons sont nécessairement des propriétés descriptives aussi ; mais comme la plupart n'ont été démontrées que par la théorie des transversales ou par les propriétés soit du rapport harmonique, soit du rapport anharmonique, nous dirons qu'il nous semble plus conforme à l'esprit de la science d'établir des propriétés descriptives par des considérations descriptives, que de les démontrer par des considérations métriques ; mais nous ajoutons que la science ne sera entière que lorsque ces mêmes propriétés pourront être démontrées par l'un et l'autre moyen.

[1] A l'appui de la même considération, nous citerons encore la définition suivante, que nous avons démontrée ailleurs :

Si un système de parallèles interceptent sur une tranversale, qui leur est perpendiculaire, des parties respectivement proportionnelles aux parties qu'un système de circonférences concentriques interceptent sur une transversale menée par leur centre, alors le système de parallèles rencontrera le système de circonférences sur une section conique (*applications des projections cotées*).

DEUXIÈME CHAPITRE.

PREMIÈRE SECTION.

DÉFINITIONS DE SYSTÈMES DE LIGNES ; LEUR SIGNIFICATION DANS L'ESPACE.

§ I.

Définitions des systèmes de lignes les plus simples que l'on peut former avec la droite : systèmes de polaires, systèmes de parallèles.

39. — Par système de polaires, nous comprenons un ensemble quelconque de droites tracées dans un même plan et partant d'un même point, que nous nommerons pôle.

40. — Par système de parallèles, nous comprenons un ensemble de droites parallèles entre elles et tracées dans un même plan. Un système de parallèles est donc un système de polaires dont le pôle est à l'infini.

41. — Par transversale d'un système de polaires, nous comprenons une droite qui coupe toutes les polaires de ce système, sauf une polaire à laquelle la transversale, dans des cas donnés, pourra être parallèle.

42. — Deux systèmes de polaires, qui dépendent l'un de l'autre, sont définis lorsque, à une polaire quelconque donnée dans l'un des deux systèmes, on peut toujours construire la ou les polaires correspondantes dans l'autre système.

43. — On dit que deux systèmes de polaires se coupent sur une droite ou sur une courbe, lorsque toutes les polaires du premier système rencontrent respectivement les polaires du second système en des points situés sur cette droite ou sur cette courbe. Les polaires qui, deux à deux, se coupent sur cette droite ou sur cette courbe, sont dites polaires correspondantes.

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, il y a deux polaires correspondantes qui sont parallèles à la droite proposée et deux autres polaires correspondantes qui coïncident avec la droite unissant les deux pôles.

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, les polaires de l'un des systèmes se suivent dans le même sens ou en sens contraire des polaires correspondantes de l'autre système, selon que les deux pôles sont situés d'un même côté ou de part et d'autre de la droite proposée.

44. — Deux systèmes de polaires sont dits parallèles lorsque les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second système.

Chaque paire de polaires parallèles sont nommées polaires correspondantes.

Dans deux systèmes de polaires parallèles il y a deux polaires correspondantes qui coïncident avec la droite unissant les deux pôles.

45. — Deux systèmes de polaires situées dans un même plan ou dans deux plans différents, étant coupés chacun par une transversale, si les points d'intersection a, b, c,... etc., des polaires du premier système par leur transversale, et les points d'intersection a', b', c',... etc., des polaires correspondantes du second système par leur transversale, se trouvent deux à deux sur des droites parallèles entre elles, nous dirons que ces deux transversales sont reliées par un système de parallèles ou bien que les droites qui relient les deux transversales constituent un système de parallèles.

46. — On comprendra, sans qu'il soit nécessaire de les définir, ce que l'on doit entendre par deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires.

47. — Dans deux systèmes de polaires coupés chacun par une transversale, le point d'intersection des deux transversales sera souvent nommé sommet des deux transversales.

Et généralement lorsqu'il ne s'agira que du point d'intersection de deux droites, nous nommerons ce point d'intersection sommet des deux droites.

48. — Dans deux systèmes de polaires nous entendons par ligne des pôles, la droite qui unit les deux pôles.

49. — Nous désignerons un système de polaires, tantôt par la lettre

placée à son pôle, tantôt par deux lettres dont la première indiquera le pôle et la seconde la transversale. Ainsi le système de polaires p signifie le système de polaires dont le pôle est en p et le système de polaires pt signifie le système de polaires qui a pour pôle p, et pour transversale t.

§ II.

Signification géométrique dans l'espace de points et de droites situés dans un même plan.

50. — Deux points a, a', marqués sur un même plan, peuvent représenter les projections horizontale et verticale d'un point de l'espace, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire quelconque à la droite qui unit ces deux points. Nous désignerons ce point de l'espace par la notation connue (a, a'), en convenant que la première lettre entre parenthèses représente toujours la projection horizontale et la seconde la projection verticale; de sorte que (a, a') et (a', a) représentent, dans l'espace, deux points distincts qui jouissent de la propriété d'être situés dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Si la ligne de terre passe par le milieu de la droite aa', alors les deux points de l'espace (a, a') et (a', a) sont situés dans le plan bissecteur B'.

Un seul point a marqué sur un plan peut être considéré comme les deux projections coïncidentes d'un point de l'espace. Nous représenterons un tel point de l'espace par la notation (a, a), en rappelant qu'il est toujours situé dans le plan bissecteur B.

51. — Deux droites d, d', tracées sur un plan, peuvent toujours être prises pour les projections d'une droite de l'espace, quelle que soit la droite que l'on choisisse pour ligne de terre. Nous désignerons une telle droite de l'espace par la notation (d, d'). Ici encore nous conviendrons que la première lettre entre parenthèses représente toujours la projection horizontale et la seconde la projection verticale. De sorte que (d, d') et (d', d) représentent deux droites distinctes dans l'espace, qui ont cela de particulier, qu'elles rencontrent le plan bissecteur B au même point. De

plus, le plan conduit suivant ces deux droites a ses deux traces en ligne droite sur l'épure.

REMARQUE. — En faisant mouvoir le plan vertical de projection parallèlement à lui-même, la ligne de terre se mouvra aussi parallèlement à elle-même ainsi que le plan bissecteur B, et alors d, d' seront les projections d'une droite différente pour chaque position de la ligne de terre. Toutes ces droites sont parallèles entre elles et situées dans un même plan vertical élevé suivant d; de plus, toutes ces droites rencontrent le plan bissecteur B, lequel varie pour chaque ligne de terre, sur une même verticale qui a pour projection le point de rencontre de d avec d'.

52. — Si l'on prend pour ligne de terre la bissectrice de l'angle de deux droites d, d', les deux droites de l'espace (d, d') et (d', d) sont situées dans le plan bissecteur B'.

53. — Une seule droite D, tracée sur un plan, peut représenter, pour une ligne de terre quelconque, les deux projections coïncidentes d'une droite de l'espace, que nous désignerons par (D, D), en rappelant qu'elle est toujours située dans le plan bissecteur B.

§ III.

Diverses représentations du plan.

54. — En disant que deux systèmes de lignes représentent un plan ou une surface, nous entendons par là que les lignes d'un système sont les projections horizontales et les lignes de l'autre système les projections verticales des lignes de l'espace appartenant à un même plan ou à une même surface courbe.

55. — Deux systèmes de polaires pt, $p't'$, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, représentent un plan passant par le point (p, p') et par la droite (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

56. — Deux systèmes de parallèles dont les transversales t, t' sont reliées par un troisième système de parallèles, représenteront respective-

ment les projections horizontales et verticales de droites de l'espace, parallèles entre elles, et qui s'appuient toutes sur la droite de l'espace (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire quelconque au troisième système de parallèles. Toutes ces droites de l'espace sont donc situées dans un même plan.

57. — Deux systèmes de polaires pt, pt' qui ont même pôle p et dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace qui passent toutes par le point (p, p) situé dans le plan bissecteur B, et qui s'appuient sur la droite (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la direction des parallèles.

Ces deux systèmes ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident avec la droite qui unit le pôle commun au sommet des deux transversales; cette droite est la trace principale du plan mentionné ci-dessus.

58. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace qui passent toutes par le point (p, p') et s'appuient sur la droite (D, D), située dans le plan bissecteur B, si on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

59. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui se coupent sur une droite D, représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles entre elles, et s'appuyant sur la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B, et cela a lieu, quelle que soit la droite que l'on prenne pour ligne de terre.

60. — Deux systèmes de polaires p, p' respectivement parallèles représenteront un plan, c'est-à-dire les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles au plan bissecteur B, et passant toutes par le point (p, p'), si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.

61. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représenteront un système de plans de l'espace, si l'on prend la droite D pour ligne de terre et chaque paire de polaires correspondantes pour les traces horizontale et verticale d'un même plan ; tous ces plans passent par une même droite de l'espace qui a pour traces les deux pôles p, p'.

§ IV.

Différentes représentations des surfaces réglées du second degré.

62. — Deux systèmes de polaires pt, $p't'$, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles ayant une direction autre que celle de la ligne des pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la direction des parallèles. Cet hyperboloïde a pour directrices : 1° la verticale (p); 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (t, t').

Les deux polaires respectivement parallèles aux deux transversales sont deux polaires correspondantes; car ces deux polaires sont les projections horizontale et verticale de la génératrice parallèle à la directrice (t, t').

Projetons, par des perpendiculaires à la ligne de terre, le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système; désignons par π' (*fig.* 25) la projection du pôle p sur la transversale t' et par π la projection du pôle p' sur la transversale t. Il est facile de voir que la verticale (π) et la perpendiculaire (π') au plan vertical sont deux génératrices de l'hyperboloïde. Ces deux génératrices, que nous nommerons génératrices principales, étant prises pour deux directrices dans le second mode de génération, il en résulte que les deux projections d'une génératrice quelconque de ce second mode doivent passer respectivement par π et π'. Donc, si n, n' sont les deux projections d'un point de l'hyperboloïde, la droite de l'espace (pn, $p'n'$) sera une génératrice d'un mode, et la droite de l'espace (πn, $\pi' n'$) sera une génératrice de l'autre mode de génération de l'hyperboloïde.

Il est donc bien facile de construire soit les deux traces, soit la trace principale d'un plan tangent mené à l'hyperboloïde par un point donné sur sa surface, puisque l'on peut construire immédiatement les projections des deux génératrices de mode différent qui passent par ce point [1].

[1] Comme nous supposons connue la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, nous devons prévenir ici que nous en avons donné ailleurs une démonstration nouvelle, au moyen des

Remarque. — Trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe n'étant jamais parallèles à un même plan, ne peuvent conséquemment pas être parallèles au plan bissecteur B. Donc :

Deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles, sans que toutes les polaires de l'un soient respectivement parallèles à leurs correspondantes de l'autre système. D'où il est facile de conclure que :

Deux systèmes de polaires de même pôle p, qui sont respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires π, π' ayant leurs transversales reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, sans que toutes les polaires de l'un coïncident avec leurs correspondantes de l'autre.

63. — Réciproquement, pour que les projections d'un hyperboloïde à une nappe, défini par ses trois directrices, donnent deux systèmes de polaires dont les transversales soient reliées par un système de parallèles, il faut que les deux plans de projection soient respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices.

64. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une droite qui ne soit pas perpendiculaire à la ligne des pôles. Les trois directrices de cet hyperboloïde sont alors : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B.

Parmi toutes les génératrices de cet hyperboloïde, il y en a trois qu'il convient de prendre de préférence à toutes les autres pour directrices dans le second mode de génération. Voici leur construction : Ayant projeté les deux pôles p, p' sur la droite D, par des droites perpendiculaires à la ligne de terre (*fig.* 32), si l'on désigne par π' la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p', on verra facilement que : 1° la verticale

projections cotées, laquelle est plus élémentaire que celle qui repose sur la propriété analytique connue du quadrilatère gauche.

(π), 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical, 3° la droite de l'espace, dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles et qui est située dans le plan bissecteur *B*, sont trois génératrices de l'hyperboloïde, que nous nommerons les trois génératrices principales. Les deux projections de toute droite qui s'appuie sur ces trois génératrices principales doivent passer respectivement par π et π', et se couper sur la ligne des pôles pp'. D'où l'on peut conclure que si les deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite *D* représentent les génératrices d'un mode de génération de l'hyperboloïde, les deux autres systèmes de polaires π, π' qui se coupent sur la ligne des pôles pp' des deux premiers systèmes, représentent les génératrices de l'autre mode de génération.

Pour mener le plan tangent en un point (n, n') de cet hyperboloïde, on saura que les deux droites de l'espace (pn, $p'n'$) et (πn, $\pi' n'$) sont les deux génératrices de mode différent qui passent par le point (n, n').

65. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite *D* non parallèle à la ligne des pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la droite *D*. Les trois directrices de ce paraboloïde, toutes parallèles à un même plan perpendiculaire à la ligne de terre, sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite (*D*, *D*) perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur *B*.

66. — Voici une démonstration nouvelle de ce que nous admettons implicitement dans ce qui précède, à savoir, que l'hyperboloïde, dont les trois directrices sont parallèles à un même plan, est un paraboloïde hyperbolique.

Les plans de projection étant choisis de manière que deux des trois directrices soient respectivement perpendiculaires à ces deux plans, la 3^{me} directrice sera dès lors située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Il s'agit de prouver que tout plan perpendiculaire à la ligne de terre coupe toutes les génératrices de cet hyperboloïde en des points qui sont en ligne droite. Soient (*fig.* 24) p la projection de la directrice perpendiculaire au plan horizontal, p' la projection de la directrice perpendiculaire au plan vertical de projection, et, enfin, a, b, c, etc., les projections horizontales, a', b', c', etc., les projections verticales correspondantes d'un nombre quelconque de points de la 3[me] directrice située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. De ce que les points (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont en ligne droite dans l'espace, on a la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

En coupant maintenant les génératrices $(pa, p'a')$, $(pb, p'b')$, etc., par un plan perpendiculaire à la ligne de terre, il sera facile de conclure de l'épure et de la proportion précédente qu'il existe une proportion analogue entre les projections horizontales α, β, γ, etc., et les projections verticales α', β', γ', etc., des points de rencontre de ces génératrices avec le plan en question. De là suit que ces points de rencontre sont en ligne droite dans l'espace. Donc, la surface étant coupée par tout plan perpendiculaire à la ligne de terre suivant une ligne droite, est un paraboloïde hyperbolique.

67. — Deux systèmes de polaires parallèles (40) représentent respectivement les projections horizontales et verticales de droites parallèles au plan bissecteur B, s'appuyant à la fois sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal et sur la perpendiculaire (p') au plan vertical. Pour cela, il suffit que la droite prise pour ligne de terre ne soit pas perpendiculaire à la ligne des pôles. Les deux systèmes de polaires représentent donc dans l'espace un paraboloïde hyperbolique qui a pour plan directeur le plan bissecteur B et pour directrices les deux droites (p), (p') définies plus haut.

Le second plan directeur de ce paraboloïde est évidemment perpendiculaire à la ligne de terre, puisqu'il est parallèle aux deux directrices (p), (p').

68. — Un système de polaires et un système de parallèles dont les transversales t, t' sont reliées par un second système de parallèles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire de droites parallèles à un même plan (leurs projections verticales étant parallèles) et

s'appuyant, en outre, sur la verticale projetée au pôle et sur la droite de l'espace (t, t'). Il suffit pour cela de choisir pour ligne de terre une droite perpendiculaire au second système de parallèles.

69. — Un système de polaires p et un système de parallèles qui se coupent sur une droite D, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire de droites parallèles à un même plan, lesquelles s'appuient à la fois sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal et sur la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B. Pour cela, il suffit que la droite prise pour ligne de terre ne soit pas perpendiculaire aux parallèles.

70. — Un système de polaires p dont la transversale t est reliée, par un système de parallèles, à la transversale t' d'un système de droites respectivement parallèles aux polaires p, représenteront respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique, ayant pour plan directeur le plan bissecteur B et pour directrices la verticale (p), et la droite de l'espace (t, t'), si l'on prend pour ligne de terre une droite perpendiculaire au système de parallèles qui relient les deux transversales.

71. — De quatre systèmes de polaires dont les deux premiers p, p', se coupent sur une droite D, et dont les deux autres π, π' sont respectivement parallèles aux premiers, ceux-ci représenteront dans l'espace un plan que nous désignerons par M et les deux derniers un paraboloïde hyperbolique, ayant pour plan directeur le plan M, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles des deux premiers systèmes.

En effet, les deux premiers systèmes de polaires sont alors respectivement les projections horizontales et verticales de droites situées dans un même plan M, et les deux autres les projections horizontales et verticales de droites parallèles à ce même plan et s'appuyant à la fois sur la perpendiculaire (π) au plan horizontal et sur la perpendiculaire (π') au plan vertical. Le second plan directeur de ce paraboloïde devant être parallèle aux deux directrices (π), (π'), sera perpendiculaire à la ligne de terre.

Maintenant, on peut prouver d'une manière aussi facile qu'élégante qu'un plan perpendiculaire à la ligne de terre coupe la surface suivant une ligne droite et donner ainsi une démonstration nouvelle de la double génération du paraboloïde hyperbolique. En effet, (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., étant les points de rencontre des droites du plan M avec un plan perpendiculaire à la ligne de terre, on a, ces points étant situés sur une même droite, la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

et pour que les points d'intersection (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), (δ, δ'), etc., des génératrices du paraboloïde avec un plan quelconque perpendiculaire à la ligne de terre soient sur une ligne droite, il faudrait également démontrer l'égalité des rapports :

$$\alpha\beta : \alpha'\beta' = \beta\gamma : \beta'\gamma' = \gamma\delta : \gamma'\delta' = \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Or, une épure fera voir que les antécédents et les conséquents des rapports (b) sont respectivement en proportion avec les antécédents et les conséquents de (a). Donc, les rapports (b) sont égaux, ce qu'il s'agissait de prouver.

72. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une conique c passant par les pôles, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe, si l'on prend pour ligne de terre une droite non perpendiculaire à la ligne des pôles. Les trois directrices de cet hyperboloïde sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la conique de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B. On remarquera, dans le cas actuel, qu'à chaque polaire du premier système ne correspond qu'une seule polaire dans le second système.

Démonstration. — Démontrons d'abord la propriété pour le cas où la courbe c est une circonférence de cercle. Projetons les deux pôles p, p' (*fig.* 2) sur la circonférence, par des perpendiculaires à la ligne de terre LT; et représentons par π' la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p'. Considérons maintenant la surface réglée qui a pour directrices : 1° la perpendiculaire (π) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical; 3° la conique de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B. Si nous faisons voir qu'une génératrice quelconque (pa, $p'a$) de la première surface réglée rencontre toujours une génératrice quelconque (πb, $\pi' b$) de la deuxième surface réglée, nous aurons démontré que les deux surfaces n'en forment qu'une, laquelle étant doublement réglée ne peut être qu'un hyperboloïde à une nappe. Les deux génératrices (pa, $p'a$), (πb, $\pi' b$) se couperont, si le point n, intersection de leurs projections horizontales, se trouve avec le point n', intersection de leurs projections verticales, sur une droite perpendiculaire à la ligne de terre; ou, ce qui revient au même, si $\overline{nn'}$ est parallèle à $p\pi'$. Or les angles en a et en b sont égaux comme ayant des mesures égales; les angles opposés au sommet o sont égaux. Donc les deux triangles aon' et bon sont équiangles, et donnent une proportion de laquelle on déduit :

$$\overline{ao} \times \overline{on} = \overline{bo} \times \overline{on'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Les deux cordes qui se coupent en o donnent aussi :

$$\overline{ao} \times \overline{op} = \overline{bo} \times \overline{o\pi'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Divisant (b) par (a), on a la proportion :

$$\overline{on} : \overline{op} = \overline{on'} : \overline{o\pi'},$$

qui prouve le parallélisme entre $\overline{nn'}$ et $p\pi'$.

Cette propriété de la droite nn' d'être parallèle aux deux droites $p\pi'$, $p'\pi$ est projective, si le tableau sur lequel on fait la perspective du cercle est parallèle à l'une des deux parallèles $p\pi'$, $p'\pi$. Notre démonstration convient donc à une conique quelconque.

Plan tangent. — S'il s'agit de construire le plan tangent à l'hyperboloïde qui nous occupe, en un point (n, n) de la directrice (c, c) (*fig.* 28), située dans le plan bissecteur B, on construira les deux génératrices de mode différent qui passent par ce point et qui sont $(pn, p'n)$ et $(\pi n, \pi' n)$. Après cela, on voit facilement sur l'épure que, dans l'hypothèse de deux plans de projection rectangulaire, ab est la trace horizontale et mn la trace principale de ce plan tangent. Or, cette trace principale est, d'après (10), tangente à la circonférence c, et a été construite en ne faisant usage que des cinq points p, p', π, π' et n. Donc, connaissant cinq points d'une circonférence, on peut toujours construire la tangente en l'un de ces points quand les quatre autres se trouvent être les sommets d'un trapèze. Mais la dernière condition n'est pas indispensable et cette construction peut être généralisée, tant pour le cercle que pour une section conique quelconque. En effet, sur une perspective du cercle, la construction ne différera de la précédente qu'en ce que la ligne de terre LT deviendra une droite quelconque, que le trapèze deviendra un quadrilatère, et que les perspectives des quatre perpendiculaires à la ligne de terre, pointillées sur la figure, concourront en un même point, intersection de deux côtés opposés du quadrilatère.

Sur la figure 29, que nous supposons être la perspective de la figure 28, nous indiquons, par des chiffres que nous faisons porter aux droites, l'ordre dans lequel ces droites doivent être tracées pour arriver à la tangente au point n. On voit que la règle seule suffit pour résoudre le problème : « *Connaissant seulement cinq points d'une section conique, construire la tangente en l'un de ces points.* »

Il n'est pas sans intérêt de faire remarquer ici que la construction que nous venons de déduire de l'hyperboloïde à une nappe, contient les mêmes lignes et en même nombre que la construction indiquée dans la théorie des faisceaux homographiques.

§ V.

Représentation de cônes, de cylindres et de surfaces gauches.

73. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une courbe c représentent respectivement, pour une ligne de terre perpendiculaire à la

ligne des pôles, les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cône qui a pour sommet le point (p, p'), et pour directrice la courbe (c, c) située dans le plan bissecteur B.

Si la courbe c est du degré n, le cône sera du même degré.

Si une polaire du premier système rencontre la courbe c en m points, chacune des polaires du second système qui passent respectivement par ces points, sera correspondante de la polaire du premier système.

74. — Deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une courbe c passant par les deux pôles, représenteront, pour une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, un cône défini à l'article 73, et dont deux génératrices se projettent respectivement aux deux pôles et sont ainsi respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection.

Réciproquement : pour que les deux systèmes de projections des génératrices d'un cône représentent deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe passant par les deux pôles, il faut prendre les deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux génératrices quelconques du cône.

75. — A cause que deux systèmes de polaires p, p', dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent, comme il sera démontré, sur une courbe c du second degré, il en résulte qu'en prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, et en faisant abstraction des deux transversales, ces deux systèmes représentent un cône du second degré, ayant pour sommet le point de l'espace (p, p'), et pour directrice, la courbe de l'espace (c, c) située dans le plan bissecteur B.

76. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui se coupent deux à deux sur une courbe c, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cylindre qui a pour directrice dans l'espace la courbe plane (c, c) située dans le plan bissecteur B. Cela a lieu, quelque droite que l'on prenne pour ligne de terre. Le degré de ce cylindre est le même que celui de la courbe c.

Si une parallèle du premier système rencontre la courbe c en n points, chacune des n parallèles du second système qui passent respectivement par ces points sera correspondante de la parallèle du premier système.

77. — Deux systèmes de parallèles de direction différente qui passent deux à deux par les extrémités d'une même corde d'un système de cordes principales d'une courbe c, représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices rectilignes d'un cylindre qui a pour directrice la courbe de l'espace (c, $ɔ$) située dans le plan bissecteur B', si l'on prend pour ligne de terre l'axe conjugué aux cordes principales. Le degré du cylindre est le même que celui de la courbe c.

78. — Deux systèmes de polaires p, p' qui passent deux à deux par les extrémités d'une même corde d'un système de cordes principales d'une courbe c (les cordes étant parallèles à la droite qui unit les pôles), représentent respectivement les projections horizontales et verticales de génératrices d'un cône qui a pour sommet le point de l'espace (p, p'), et pour directrice la courbe de l'espace (c, $ɔ$) située dans le plan bissecteur B', si l'on prend, pour ligne de terre, l'axe conjugué au système de cordes principales.

79. — Un système de polaires p et un système de parallèles qui se coupent sur une conique c, représentent un conoïde, c'est-à-dire représentent respectivement les projections horizontales et verticales de droites de l'espace parallèles à un même plan, et qui s'appuient sur la perpendiculaire (p) au plan horizontal, et sur la courbe (c, c) située dans le plan bissecteur B, quelque droite que l'on prenne pour ligne de terre. L'équation de cette surface conoïde est du quatrième degré, comme on sait.

A chaque parallèle correspondent deux polaires, et réciproquement.

Nous donnerons une autre fois des exemples de définitions d'autres surfaces du quatrième degré.

§ VI.

Représentations de surfaces de révolution.

80. — Dans toute courbe c, un système d'ordonnées perpendiculaires à une même droite D et le système de circonférences de cercle ayant leur centre commun en un point quelconque O de la droite D, et pour rayons respectifs ces ordonnées, représenteront respectivement les projections ver-

ticales et horizontales de parallèles d'une surface de révolution, si l'on prend pour ligne de terre *L* la perpendiculaire en *O* à la droite *D*. L'axe de la surface sera alors la verticale (*O*, *D*), et son méridien principal sera la courbe (*c*, *L*), située dans le plan vertical de projection.

La surface sera du même degré que la courbe *c*, si la droite *D* coïncide avec un diamètre principal de la courbe; dans le cas contraire, le degré de la surface sera double de celui de la courbe; dans ce dernier cas, en effet, le méridien est l'ensemble de deux positions symétriques de la même courbe par rapport à la droite *D*, et cet ensemble constitue une courbe d'un degré double de celui de la courbe proposée.

81. — Si l'on construit pour chaque point d'une courbe *c* : 1° l'ordonnée perpendiculaire à une droite *D*; 2° le rayon vecteur dirigé vers un point *O* pris sur la droite *D*; 3° la circonférence ayant le point *O* pour centre, et le rayon vecteur pour rayon; si l'on prend ensuite pour ligne de terre la perpendiculaire en *O* à la droite *D*, le système de circonférences concentriques ainsi décrites du point *O* comme centre, et le système des ordonnées prolongées représenteront respectivement les projections horizontales et verticales de parallèles d'une surface de révolution ayant pour génératrice dans l'espace la courbe (*c*, *c*), située dans le plan bissecteur *B*, et pour axe, la verticale projetée horizontalement au point *O*, et verticalement dans la droite *D*.

Le degré de la surface sera égal à celui de la courbe, si la droite *D* est un axe ou diamètre principal de la courbe. Dans tout autre cas, le degré de la surface sera double de celui de la courbe.

SECONDE SECTION.

DÉFINITIONS DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU PREMIER DEGRÉ, DÉDUITES DU PLAN ET DES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ.

---

§ I.

Propriétés des transversales de deux systèmes de polaires ou de deux systèmes de parallèles qui se coupent sur une droite.

Parmi les théorèmes que nous démontrons concernant le point et la droite, les uns se déduisent du plan, les autres des surfaces gauches du second degré. Nous donnerons séparément les uns et les autres.

82. — Théorème. — *Deux systèmes de parallèles qui se rencontrent sur une droite, étant coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de cette droite, les droites qui relient les deux transversales forment toujours un système de parallèles.* (Fig. 3.)

Démonstration. — Soient D la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de parallèles et t, t' les deux transversales partant d'un point m de la droite D; ces deux systèmes de parallèles représentent, pour une ligne de terre quelconque, un plan passant par la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B (59). Or, en prenant la ligne de terre perpendiculaire à une droite quelconque aa' qui relie deux points correspondants des deux transversales t, t', le point de l'espace (a, a') appartiendra à ce plan, ainsi que la droite (t, t'), car cette dernière passe par le point (a, a') et elle rencontre la droite (D, D) au point (m, m). Maintenant il est facile de voir que (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de ce plan, comme étant chacun l'intersection de deux droites de ce plan; donc les droites qui relient les projections b et b', c et c', etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, c'est-à-dire parallèles à la droite aa'. Donc, etc.

83. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales partant d'un même point de cette droite et respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quel-*

conques, les droites qui relient ces deux transversales forment toujours un système de parallèles à la ligne des pôles. (Fig. 4.)

Démonstration. — Soient p, p' deux systèmes de polaires se rencontrant sur la droite D; soient t, t' leurs transversales respectives, parallèles aux deux polaires correspondantes pm, $p'm$. En prenant une ligne de terre, perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent des droites de l'espace situées dans un même plan Π, lequel passe par le point (p, p') et par la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B (58). Il est facile de voir que la droite de l'espace (t, t') est située dans le même plan Π, et par suite que (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de ce plan. Donc $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, elles sont parallèles à la ligne des pôles. Donc, etc.

84. — Le théorème précédent a lieu également pour deux systèmes de polaires situés dans deux plans différents, et peut être énoncé comme il suit :

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires situés dans deux plans différents et qui se rencontrent sur la droite d'intersection de ces deux plans, si on coupe respectivement ces deux systèmes par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes et partant d'un point de la droite d'intersection, les droites qui relieront dans l'espace ces deux transversales formeront un système de parallèles à la droite qui unit les deux pôles.*

Démonstration. — Soient p, p' les pôles des deux systèmes de polaires proposés. On peut considérer les polaires d'un système comme les traces horizontales, et les polaires de l'autre système comme les traces verticales d'un système de plans passant tous par la droite pp', et considérer les deux transversales comme les traces d'un plan parallèle à celui représenté par les deux polaires correspondantes mentionnées à l'énoncé. Maintenant il suffit de savoir que tous les plans passant par une même droite pp' sont coupés par un plan parallèle à l'un d'eux suivant toutes droites parallèles à la droite pp'.

85. — Une perspective, sur un tableau plan, des lignes énoncées au théorème (83) conduit à cet autre théorème :

Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales quelconques, partant d'un point de cette* *droite (par deux transversales qui ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes), les droites qui relient ces deux transversales forment un troisième système de polaires, dont le pôle est en ligne droite avec les pôles des deux systèmes proposés.* (Fig. 5.)

Corollaire I. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite et qui sont coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de cette droite, deux polaires correspondantes quelconques interceptent, avec les deux transversales, un quadrilatère complet dont une diagonale coïncide avec la droite mentionnée, et dont les deux autres diagonales passent respectivement par deux points fixes de la ligne des pôles.*

Pour se rendre compte de ce corollaire il suffit d'appliquer deux fois de suite le théorème précédent, en prenant, la seconde fois, la transversale du premier système pour transversale du second système et la transversale du second pour transversale du premier.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires parallèles, coupés respectivement par deux transversales parallèles, chaque paire de polaires correspondantes forme avec les deux transversales un parallélogramme, et les deux systèmes de diagonales de tous ces parallélogrammes concourent respectivement en deux points fixes de la ligne des pôles.* (Fig. 35.)

Il suffit de remarquer que deux systèmes de polaires respectivement parallèles se coupent sur une droite située à l'infini, et que deux transversales partant d'un point d'une droite située à l'infini sont parallèles. Moyennant ces remarques, le corollaire proposé devient une conséquence du corollaire précédent.

86. — Remarque. — Les côtés de deux angles constituent deux systèmes de deux polaires qui interceptent un quadrilatère; et ces deux systèmes se coupent sur l'une ou sur l'autre diagonale de ce quadrilatère, selon l'ordre dans lequel on considère les deux premières polaires comme respectivement correspondantes des deux autres polaires.

87. — Moyennant cette remarque, on déduira facilement, comme corollaire du théorème (85), les propriétés suivantes, dont la première est énoncée en d'autres termes par M. Cousinery :

Proposition I. — « Si trois angles ont leurs sommets en ligne droite,

» les trois quadrilatères, dont chacun est formé par les côtés de deux de » ces trois angles, sont tels que deux diagonales, appartenant à deux de » ces quadrilatères, se coupent toujours en un point d'une diagonale du » troisième quadrilatère. » (*Fig.* 38.)

D étant la droite qui renferme les sommets des trois angles, il suffit de prendre deux sommets opposés dans l'un des trois quadrilatères, pour pôles de deux systèmes de deux polaires qui se coupent sur la droite *D*; de considérer les côtés du troisième angle comme transversales respectives de ces deux mêmes systèmes, et d'appliquer deux fois de suite le théorème (85), en prenant la seconde fois la transversale du premier système pour transversale du second système, et réciproquement.

Puisque dans l'hexagone inscrit à une section conique, les sommets des trois angles formés par les côtés opposés sont sur une même droite, on peut donc appliquer à ces trois angles la propriété que nous venons de démontrer.

Proposition II. — « Si un premier quadrilatère est inscrit à un second » quadrilatère, et que deux côtés opposés du premier se coupent sur une » diagonale du second, les deux autres côtés opposés du premier se » couperont sur l'autre diagonale du second. »

D étant la diagonale du second quadrilatère sur laquelle se coupent les deux côtés opposés du premier quadrilatère, il suffit de prendre, dans le second quadrilatère, les deux sommets opposés à la diagonale *D*, pour pôles de deux systèmes de deux polaires qui se coupent sur la même diagonale *D*, et de prendre, pour transversales de ces deux systèmes, les deux côtés opposés du premier quadrilatère, qui se coupent sur la diagonale *D*; et, enfin, d'appliquer le théorème (85).

Proposition III. — « Si les trois côtés d'un triangle rencontrent respectivement les trois côtés d'un autre triangle en trois points qui sont » en ligne droite, les trois droites, dont chacune relie deux sommets qui se » correspondent dans les deux triangles, concourent en un même point. »

Soit *D* la droite sur laquelle les trois côtés du premier triangle rencontrent respectivement les trois côtés du second; soient p, p' les sommets de deux angles, opposés respectivement à deux côtés qui se rencontrent sur la droite *D*. En considérant les deux systèmes de deux polaires p, p', si l'on prend, pour transversales de ces deux systèmes, les côtés opposés aux deux pôles p, p', il suffira d'appliquer le théorème (85).

88. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si l'on prend deux polaires correspondantes quelconques pour transversales respectives des deux systèmes, les droites qui relieront les deux transversales constitueront un système de polaires, dont le pôle sera en ligne droite avec les pôles des deux systèmes proposés; et ce pôle ne variera pas de position, quelles que soient les deux polaires correspondantes qu'on ait choisies pour transversales.* (Fig. 6.)

Démonstration. — D'après le théorème (85), les droites qui relient les deux transversales de l'énoncé forment d'abord un système de polaires, dont le pôle est sur la ligne des pôles des deux systèmes de polaires proposés; il reste seulement à prouver que ce pôle ne change pas de position avec les deux polaires correspondantes choisies pour transversales. Or, on s'assurera de ce fait, sur une figure, en considérant deux paires de polaires correspondantes quelconques, et en prenant tour à tour chaque paire pour transversales.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, deux paires de polaires correspondantes forment un quadrilatère dont une diagonale (celle qui ne coïncide pas avec la droite proposée) rencontre la ligne des pôles en un point qui ne varie pas, quelles que soient les deux paires de polaires correspondantes que l'on considère.*

89. — Le théorème (88) se modifie comme il suit lorsque la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires passe par le milieu de la ligne des pôles:

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite passant par le milieu de la ligne des pôles, si l'on prend deux polaires correspondantes quelconques pour transversales respectives des deux systèmes, les droites qui relieront ces deux transversales formeront un système de parallèles à la ligne des pôles.* (Fig. 7.)

Démonstration. — En menant par chaque pôle une polaire parallèle à la transversale de l'autre système, on aura un parallélogramme formé par les deux polaires transversales et par les deux polaires parallèles à celles-ci. La droite *D*, passant par un sommet *n* de ce parallélogramme et par le milieu d'une diagonale (milieu de la ligne des pôles), doit passer par le sommet opposé *m* au premier sommet. Donc les deux polaires, parallèles aux deux transversales, se coupent sur la droite *D*, en *m*; et partant, les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes. Donc, d'après (83), le théorème est démontré.

Le théorème précédent fournit sans difficulté les deux corollaires suivants :

Corollaire I. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite passant par le milieu de la ligne des pôles, l'une des deux diagonales du quadrilatère, formé par deux paires de polaires correspondantes quelconques, est toujours parallèle à la ligne des pôles.*

Corollaire II. — « *La base d'un triangle étant coupée en deux parties égales*
» *par une droite tirée du sommet, si, d'un point quelconque de cette droite, on*
» *abaisse sur chaque côté une transversale passant par l'angle opposé, les pieds de*
» *ces deux transversales détermineront une ligne parallèle à la base.* (Brianchon,
» *Application de la théorie des transversales, p.* 12). »

Application. — Si, sur le plan d'une figure, on donne une droite quelconque et le point milieu de cette droite, on peut, au moyen du théorème précédent, mener, par un point donné, une parallèle à cette droite, en ne faisant usage que de la règle.

90. — Nous nous contenterons d'énoncer le réciproque du théorème précédent (89).

Réciproquement. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite* D, *si deux polaires correspondantes, prises pour transversales, se trouvent reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, la droite* D *passera toujours par le milieu de la ligne des pôles.*

D'où l'on déduira aisément la proposition suivante :

Proposition. — Les trois médianes de tout triangle se coupent en un même point.

91. — Le théorème (85) donne lieu au théorème plus général qui suit :

Théorème. — *Des systèmes de polaires, en nombre quelconque, et dont les* *pôles sont distribués d'une manière quelconque, étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une droite, et que toutes ces droites concourent en un même point, alors le système des droites qui relient deux droites quelconques des précédentes, forme un système de polaires.*

DÉMONSTRATION. — Soient p_1, p_2, p_3, p_4, etc., les pôles des systèmes de polaires. D'après l'énoncé, le système p_1 coupe ou rencontre le système p_2 sur une droite que nous représenterons par t_1; le système p_2 coupe le système p_3 sur une droite t_2; le système p_3 coupe le système p_4 sur une droite t_3, et ainsi de suite.

D'après l'énoncé, toutes les droites t_1, t_2, t_3, t_4, etc., que nous nommerons indifféremment droites ou transversales, passent par un même point que nous désignerons par m. En remarquant que chacun de ces systèmes se trouve coupé par deux droites ou transversales, à l'exception du premier et du dernier système, qui ne sont coupés chacun que par une seule transversale, nous pouvons écrire ces divers systèmes comme il suit, en mettant en évidence les transversales de chacun :

$$p_1\, t_1, \quad p_2\, t_1\, t_2, \quad p_3\, t_2\, t_3, \quad p_4\, t_3\, t_4, \quad \text{etc.}$$

Dans cette notation la lettre commune à deux systèmes signifie la droite sur laquelle se coupent ces systèmes. Cela posé, prouvons, par exemple, que les droites qui relient la transversale t_1 à chacune des autres transversales, forment autant de systèmes de polaires :

En comparant les deux systèmes $p_2\ t_1\ t_2$, $p_3\ t_2\ t_3$, on voit, d'après la notation, qu'ils se rencontrent sur la droite t_2, et qu'ils sont coupés respectivement par les deux transversales t_1, t_3 partant du point m de la droite t_2. Donc, d'après (85), les droites qui relient t_1 et t_3 forment un nouveau système de polaires π, que nous représenterons, d'après la notation convenue, par $\pi\ t_1\ t_3$. En comparant ce nouveau système $\pi\ t_1\ t_3$ au système $p_4\ t_3\ t_4$, on voit qu'ils se rencontrent sur la droite t_3, et qu'ils sont coupés par les deux transversales t_1, t_4 partant d'un point m de t_3; donc, d'après (85), les droites qui relient t_1 et t_4 forment un nouveau système de polaires π', que nous représenterons par $\pi'\ t_1\ t_4$. De la même manière, on continuerait à prouver que les droites qui relient la transversale t_1 à chacune des transversales restantes forment autant de systèmes de polaires.

Proposition. — « Si tous les sommets d'un polygone mobile sur son
» plan sont assujettis à parcourir autant de droites fixes concourant
» en un seul et même point; que de plus, tous ses côtés, à l'exception
» d'un seul, se meuvent constamment autour de points fixes, le côté li-
» bre et les diverses diagonales du polygone pivoteront également sur
» d'autres points fixes. » (Poncelet. *Propriétés projectives*, p. 301.)

Tous les côtés du polygone, à l'exception du côté libre, décrivent chacun un système de polaires; le premier de ces systèmes coupe le second sur la première droite fixe, le second système coupe le troisième système sur la seconde droite fixe, et ainsi de suite. Le côté libre du polygone relie sans cesse deux de toutes ces droites. Donc, d'après (85), le côté libre décrit un système de polaires (pivote autour d'un point fixe); et il en est de même de chaque diagonale.

92. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires p, p' qui se coupent sur une droite D, il y a toujours dans l'un deux polaires, se coupant à angle droit, dont les correspondantes dans l'autre se coupent également à angle droit; autrement dit, il y a dans un système deux polaires rectangulaires dont les correspondantes dans l'autre système sont aussi rectangulaires.*

Pour construire les polaires rectangulaires, il faut décrire une circonférence de cercle qui passe par les deux pôles p, p' et dont le centre soit sur la droite proposée D. Les points de rencontre m et n de la circonférence avec la droite D, sont les extrémités d'un même diamètre, et partant les deux polaires pm, pn sont rectangulaires, ainsi que leurs deux correspondantes $p'm$, $p'n$.

Corollaire I. — Si la droite D, sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires, est perpendiculaire à la ligne des pôles et passe par le milieu de cette ligne, alors on peut décrire une infinité de circonférences ayant leurs centres sur la droite D et passant par les deux pôles. D'où l'on déduit sans difficulté :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, perpendiculaire à la ligne des pôles et passant par le milieu de cette ligne, il arrive qu'à deux po-

laires quelconques se coupant à angle droit dans un système, correspondent, dans l'autre, deux polaires se coupant également à angle droit.

Corollaire II. — Si dans chacun de deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D on construit : 1° la polaire parallèle à la droite D; 2° la polaire qui passe par le centre de la circonférence mentionnée à la démonstration du théorème ci-dessus, alors les deux angles supplémentaires formés par ces deux polaires auront, pour bissectrices, les polaires rectangulaires de ce système, comme il est facile de s'en assurer sur une figure. Donc :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, on peut construire deux angles correspondants, dont les bissectrices forment avec les bissectrices de leurs suppléments les polaires rectangulaires définies à l'article 92.

§ II.

Propriétés des transversales de deux systèmes de polaires, ou de deux systèmes de parallèles, pour qu'ils se coupent sur une même droite.

93. — Théorème. — *Deux systèmes de parallèles, dont les deux transversales sont reliées par un troisième système de parallèles, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales.* (Fig. 3.)

Démonstration. — En prenant pour ligne de terre une perpendiculaire au troisième système de parallèles, les deux premiers systèmes représentent un plan π, dont l'intersection avec le plan bissecteur B est la droite mentionnée à l'énoncé; après cela, les deux transversales se coupent sur la droite mentionnée à l'énoncé, parce qu'elles sont les deux projections d'une droite du plan π.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de parallèles qui se coupent sur une droite, si un troisième système de parallèles coupe le premier système sur une transversale, il coupera aussi le second système sur une transversale, et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

En nommant transversale la droite sur laquelle se coupent les deux premiers systèmes, on peut dire que le second et le troisième système ont leurs transversales reliées par le premier. Donc le second et le troisième système se coupent, d'après le théorème, sur une droite, ce que l'on peut aussi démontrer directement de la même manière qu'à l'article (95).

Du théorème précédent, on déduit sans peine cette proposition :

Proposition. — « Si les trois côtés d'un triangle variable se meuvent » parallèlement à eux-mêmes, tandis que deux sommets du triangle se » meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième sommet » décrira une ligne droite qui passera par le point d'intersection des deux » droites fixes. »

94. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, se coupent sur une droite qui passe toujours par le sommet des deux transversales.* (Fig. 4.)

Démonstration. — Soient p, p' les deux pôles, et t, t' les deux transversales. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent un plan π, passant par le point de l'espace (p, p') et par la droite de l'espace (t, t'). L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B donnera la droite mentionnée à l'énoncé.

Corollaire. — Si les deux transversales mentionnées au théorème précédent sont parallèles, la droite de l'espace (t, t') est dans ce cas parallèle au plan bissecteur B (8); et, par suite, le plan π doit couper le plan bissecteur B, suivant une parallèle à la droite de l'espace (t, t'); d'où le corollaire suivant :

Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de parallèles à la ligne des pôles, se coupent sur une droite parallèle aux deux transversales.

95. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera aussi l'autre système sur une transversale; et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

Démonstration. — Il suffit de faire représenter aux deux systèmes de polaires un plan (58), de considérer la transversale nommée en premier lieu à l'énoncé comme une des deux projections d'une droite de ce plan, et de construire l'autre projection de cette droite.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires respectivement parallèles, si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera l'autre système sur une transversale parallèle à la première.*

Les deux systèmes de polaires étant parallèles se coupent sur une droite située à l'infini. Les deux transversales de l'énoncé devant avoir, d'après le théorème, leur sommet sur cette droite située à l'infini, seront parallèles. Voici de la même propriété une démonstration directe :

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représentent un plan π, parallèle au plan bissecteur B (60), et les deux transversales de l'énoncé sont les deux projections d'une droite de ce plan π; donc, d'après (8), ces deux projections sont parallèles.

96. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales, la ligne des pôles aura même direction que les parallèles.*

Autrement. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un système de parallèles coupe respectivement ces deux systèmes de polaires suivant deux transversales dont le sommet est sur la droite mentionnée, la ligne des pôles aura même direction que les parallèles.*

Démonstration. — Soient les deux systèmes de polaires p, p' (*fig.* 4) se rencontrant sur une droite D, coupés respectivement par un système de parallèles, suivant les deux transversales t, t' ayant leur sommet sur la droite D. En prenant une ligne de terre perpendiculaire aux parallèles, les deux systèmes de polaires représenteront un plan, passant par les droites de l'espace (t, t') et (D, D). Il est facile de reconnaître que les deux pôles sont les projections d'un point de ce plan; donc la droite qui unit les deux pôles doit être perpendiculaire à la ligne de terre, c'est-à-dire avoir même direction que les parallèles. Donc, etc.

97. — Une perspective, sur un tableau plan, des lignes énoncées aux théorèmes (93 et 94) conduit à cet autre théorème analogue à celui démontré par M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 242, art. 334.

Théorème. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires ayant son pôle en ligne droite avec les pôles des deux premiers systèmes, se coupent sur une droite qui passe par le sommet des deux transversales.* (Fig. 5.)

Ce qui revient à dire :

De trois systèmes de polaires, ayant leurs pôles en ligne droite, si l'un de ces systèmes rencontre chacun des deux autres sur une droite différente, les deux autres se couperont également sur une droite; et les trois droites ainsi déterminées passeront par un même point.

Application. — Ce théorème donne le moyen de prolonger une droite au delà d'un obstacle, sans mesurer ni droites ni angles.

Corollaire. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si un troisième système de polaires, ayant son pôle en ligne droite avec les pôles des deux premiers systèmes, coupe l'un de ceux-ci sur une transversale, il coupera aussi l'autre sur une transversale, et le sommet des deux transversales se trouvera sur la droite proposée.*

En nommant transversale la droite sur laquelle se coupent les deux premiers systèmes, on vera sur une figure que, des trois systèmes, deux ont leurs transversales reliées par le système restant; et en appliquant à ces deux systèmes le théorème ci-dessus, la propriété se trouvera démontrée.

Le théorème précédent conduit aux propositions connues, qui suivent :

Proposition I. — « Si les trois côtés d'un triangle tournent respectivement autour de trois points fixes, situés en ligne droite, et que deux sommets soient assujettis à se mouvoir sur deux droites fixes, le troisième sommet décrira une ligne droite, passant par le point d'intersection des deux droites fixes. »

En nommant transversales les deux droites fixes, si l'on construit un certain nombre de positions du triangle, on reconnaîtra que cette proposition n'est qu'une forme différente du théorème ci-dessus.

Si l'on applique le théorème ci-dessus à deux systèmes de deux polaires, après avoir remarqué que les deux polaires de chaque système forment, avec la transversale de ce système, un triangle, on aura la proposition réciproque de celle qui est énoncée à l'art. (87).

PROPOSITION II. — « Si les trois droites dont chacune relie un sommet » d'un premier triangle à un sommet d'un second triangle concourent » en un même point, les trois côtés du premier triangle rencontrent » respectivement les trois côtés du second triangle en trois points qui » sont en ligne droite.

98. — Du théorème (97) résulte cet autre :

THÉORÈME. — *Un système de polaires étant coupé par deux transversales quelconques, si l'on construit deux autres systèmes de polaires ayant leurs pôles en deux points arbitraires d'une polaire quelconque du premier système, et respectivement pour transversales celles du premier système, ces deux autres systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales.*

DÉMONSTRATION. — Les pôles des trois systèmes de polaires mentionnés à l'énoncé sont en ligne droite, et les deux derniers systèmes ont leurs transversales reliées par le premier système. Donc, d'après (97), les deux derniers systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales.

COROLLAIRE I. — Quand un système de polaires est coupé par deux transversales, nous appellerons points correspondants des deux transversales les deux points où elles sont rencontrées par une même polaire. Cela posé, on peut énoncer comme corollaire du théorème précédent :

Un système de polaires étant coupé par deux transversales, si l'on construit deux autres systèmes de polaires ayant leurs pôles en deux points correspondants des deux transversales données et respectivement pour transversales celles du premier système, ces deux autres systèmes se coupent sur une droite passant par le sommet des deux transversales primitives, et cette droite reste la même, quels que soient les deux points correspondants que l'on ait choisis pour pôles.

La droite d'intersection D des deux systèmes de polaires π, π' (*fig.* 8) ne change pas avec les deux points correspondants π, π', choisis pour pôles; car, en mettant les pôles en ω, ω', on aura une seconde droite d'intersection, passant comme la première droite par le sommet des deux transversales ainsi que par un second point (le point O); donc ces deux droites coïncident. La figure met ce fait en évidence, et rend en même temps compte du corollaire suivant :

Corollaire II. — *Un système de polaires étant coupé par deux transversales, les droites qui relient inversement deux paires de points correspondants de ces deux transversales se coupent en un point dont le lieu géométrique est une droite passant par le sommet des deux transversales.*

a, b étant deux points de la première transversale t, (*fig.* 9) et a', b' leurs correspondants sur la seconde transversale t', — les droites ab', $a'b$ sont celles que nous nommons droites qui relient inversement deux paires de points correspondants.

Application. — Cette propriété donne le moyen de résoudre le problème suivant, en ne faisant usage que de la règle : « Par un point donné, » mener une droite qui passe par le point de concours de deux droites » données, dans le cas où ce point de concours est invisible. »

99. — Le théorème (97) conduit à cet autre plus général qui suit :

Théorème. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra ayant leurs pôles sur une même droite étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, rencontre celui qui le suit immédiatement sur une droite, deux quelconques de ces systèmes se couperont sur une droite.*

Démonstration. — Prouvons, par exemple, que le premier système rencontre chacun de tous les autres systèmes sur une droite différente.

D'après l'énoncé, le second système coupe le premier et coupe aussi le troisième, chacun sur une droite; donc, d'après le second énoncé du théorème (97), le premier et le troisième système devront se couper également sur une droite. Le troisième coupant actuellement le premier sur une droite, et coupant, d'après l'énoncé, le quatrième sur une droite, le premier et le quatrième se couperont sur une droite, et ainsi de suite. Donc, etc.

Du théorème précédent résulte cette proposition connue :

Proposition. — « Si un polygone se déforme, de manière que tous ses » côtés tournent autour de points fixes, situés en ligne droite, tandis que » tous ses sommets, un seul excepté, glissent sur des droites fixes, le

» sommet libre et le point de rencontre de deux côtés quelconques non » contigus, décriront chacun une ligne droite. »

En prenant les deux côtés du sommet libre pour premier et pour dernier côtés du polygone, on peut dire que tous les côtés du polygone décrivent des systèmes de polaires qui ont leurs pôles en ligne droite, et dont deux consécutifs, depuis le premier jusqu'au dernier, se coupent sur une droite. Donc, d'après le théorème, deux quelconques de tous ces systèmes se coupent sur une droite.

100. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires se coupent sur une droite D, deux autres systèmes de polaires, respectivement parallèles aux deux premiers systèmes, se couperont sur une droite parallèle à D, pourvu que la ligne des pôles des deux derniers systèmes soit parallèle à la ligne des pôles des deux premiers.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à une ligne des pôles, les deux premiers systèmes représenteront un plan, et les deux autres systèmes un plan parallèle à celui-là. La droite *D* et sa parallèle mentionnées à l'énoncé sont les intersections de ces deux plans parallèles, par le plan bissecteur *B*.

101. — Théorème. — *De deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D, si, l'un restant fixe, l'autre se meut parallèlement à lui-même de manière que son pôle ne quitte pas la ligne des pôles, le système mobile coupera dans chacune de ses positions le système fixe sur une droite parallèle à D.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, le système fixe et le système mobile représentent à chaque instant un plan; tous ces plans sont parallèles entre eux, et coupent le plan bissecteur *B* suivant des droites parallèles entre elles.

102. — Théorème. — *Si deux systèmes de polaires, se coupant sur une droite D, se meuvent chacun parallèlement à lui-même, de manière que la ligne des pôles reste parallèle à elle-même et que les deux pôles suivent deux polaires correspondantes de la position primitive des deux systèmes, les deux systèmes mobiles se couperont à chaque instant sur la même droite D.*

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles, on verra facilement que les deux systèmes, dans toutes leurs positions, représentent un même plan de l'espace, qui doit nécessairement couper le plan bissecteur B, toujours suivant la même droite.

§ II.

Propriétés de deux systèmes de polaires se coupant sur une droite, déduites de la considération de l'hyperboloïde à une nappe.

105. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupés respectivement par deux transversales menées par un point de la ligne des pôles, parallèlement à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales forment un système de parallèles, dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles.* (Fig. 10.)

Démonstration. — Soient p, p' (fig. 10) les deux systèmes de polaires qui se coupent sur la droite D; soient t, t' les deux transversales menées par le point n de la ligne des pôles, parallèlement aux deux polaires correspondantes pm, $p'm$; il s'agit de prouver que les droites aa', bb', cc', etc., sont parallèles.

Nous excluons le cas où les deux transversales partent du point d'intersection de la droite D avec la ligne des pôles; car ce cas a été examiné à l'article (83).

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à aa', les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe, ayant pour directrices : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B. Il suffit de prouver que la droite de l'espace (t, t') rencontre toutes les génératrices de cet hyperboloïde. Or, cette droite de l'espace est parallèle à la génératrice $(p\ m,\ p'\ m)$; elle rencontre la génératrice $(p\ a,\ p'\ a')$; elle rencontre aussi au point (n, n) la génératrice dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles. De ce que la droite de l'espace (t, t') rencontre trois génératrices, elle doit rencontrer toutes les autres, et, partant, (b, b'), (c, c'), etc., sont autant de points de la droite (t, t'). Donc bb', cc', etc., sont perpendiculaires à la ligne de terre, c'est-à-dire parallèles à aa'.

Maintenant, si les droites aa', bb', etc., pouvaient être parallèles à la ligne des pôles, les deux systèmes de polaires représenteraient un plan dont la droite de l'espace (t, t') ferait partie, et, par suite, le sommet des deux transversales t, t' devrait se trouver sur la droite D; or, ce cas nous l'avons exclu. Donc, etc.

104. — Une perspective des lignes mentionnées à l'énoncé du théorème précédent donne le théorème analogue qui suit, énoncé en d'autres termes par M. Chasles, *Géométrie supérieure*, pag. 244, art. 336.

Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, étant coupés respectivement par deux transversales quelconques partant d'un point de la ligne des pôles, les droites qui relient ces deux transversales forment un système de polaires, dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 11.)

Comme application de ce théorème, nous citerons la proposition suivante qui complète celle qui est énoncée à l'art. (87).

Proposition. — « Un quadrilatère étant circonscrit à un autre, si les » points de concours des côtés opposés du premier se trouvent respecti- » vement sur les deux diagonales du second, alors les deux points de » concours des côtés opposés du second se trouveront respectivement sur » les deux diagonales du premier. »

Soit D une diagonale du quadrilatère inscrit, et soient p, p' les extrémités de l'autre diagonale du même quadrilatère. Une figure montrera trois polaires partant du pôle p, qui rencontrent respectivement sur la diagonale D, trois polaires partant du pôle p'. En prenant pour transversales de ces deux systèmes de trois polaires, les deux côtés du quadrilatère circonscrit qui partent de la ligne des pôles pp', il suffira, pour que la proposition se trouve démontrée, d'appliquer deux fois de suite le théorème précédent, en prenant la seconde fois la transversale du premier système pour transversale du second système, et réciproquement.

105. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur*

une droite, si un système de parallèles à une direction autre que celle de la ligne des pôles coupe chacun des deux systèmes de polaires sur une transversale, le sommet de ces deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles.

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde, ayant les mêmes directrices que dans la démonstration du théorème (105), (*fig.* 10). Ici la droite de l'espace, qui a pour projections les deux transversales, rencontrant toutes les génératrices de l'hyperboloïde, rencontre nécessairement celle dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles; de là, il est facile de conclure que le sommet des deux transversales doit se trouver sur la ligne des pôles.

106. — Une perspective des systèmes de lignes énoncées au théorème précédent, conduit au théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un troisième système de polaires, dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes, coupe chacun de ceux-ci suivant une transversale, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 11.)

107. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si, après avoir projeté les deux pôles sur cette droite parallèlement à une direction quelconque, on construit un système de parallèles à la même direction, rencontrant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce système de parallèles rencontrera aussi le second système sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier système; de plus, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles.* (Fig. 12.)

Démonstration. — Supposons que les deux systèmes de polaires p, p' se rencontrent sur la droite D (*fig.* 12); projetons les deux pôles p, p' sur la droite D, parallèlement à une direction quelconque donnée; soit π' la projection du pôle p, et π la projection du pôle p'. Supposons qu'un système de parallèles à la direction donnée (parallèles qui sont pointillées sur la figure), rencontre le système de polaires p sur la transversale $a\,b\,c\,d$, etc., passant par π; — il s'agit de prouver que les points a', b', c', d', etc., dans lesquels le même système de parallèles rencontre le système de polaires p', sont sur une même droite ou transversale passant par π'. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe ayant pour ses trois directrices : 1° la verticale (p); 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (D, D) située dans le plan bissecteur B. Les trois génératrices principales de cet hyperboloïde sont : 1° la verticale (π); 2° la perpendiculaire (π') au plan vertical; 3° la droite de l'espace dont la projection double coïncide avec la ligne des pôles. Cela posé, la droite de l'espace (ab, $a'b'$) qui passe par les deux points de l'espace (a, a'), (b, b') rencontre : 1° la génératrice (pa, $p'a'$); 2° la génératrice (pb, $p'b'$); 3° la génératrice verticale projetée au point π; cette droite rencontre donc toutes les autres génératrices et conséquemment les points (c, c'), (d, d'), etc., sont tous points de la même droite; donc $abcd$, etc., $a'b'c'd'$, etc., sont les deux projections d'une même droite et les points a', b', c', d', etc., sont en ligne droite. La droite a' b' c' etc., doit passer par π', à cause que le point π' est la projection d'une génératrice perpendiculaire au plan vertical de projection. Maintenant que le système de parallèles rencontre les deux systèmes de polaires suivant les deux transversales abc, etc., $a'b'c'$ etc., respectivement, il résulte de (105) que le sommet de ces deux transversales doit se trouver sur la ligne des pôles.

108. — Une perspective des systèmes de lignes énoncées au théorème qui précède, fournit le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si, après avoir projeté les pôles sur cette droite, à partir d'un centre de projection quelconque, l'on construit un troisième système de polaires, ayant son pôle au même centre, et coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce troisième système coupera aussi le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier; de plus, le sommet des deux transversales se trouvera sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes.* (Fig. 13.)

(*Voir* la figure 13, où les deux systèmes de polaires p, p' se coupent sur la droite D, et où les pôles p, p' sont projetés sur D, respectivement en π' et π, à partir du centre de projection o. Le système de polaires o coupe le système p sur la transversale donnée t, passant par π; et il coupe le système p' sur une transversale t' passant par π').

109. — Nous nous contentons d'énoncer le théorème suivant dont la démonstration repose sur des considérations tout à fait semblables à celles de l'art. (107.)

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, et ayant projeté dans la direction de ces parallèles le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système, si l'on construit un nouveau système de parallèles de même direction coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce nouveau système coupera aussi le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier.*

110. — Une perspective des lignes énoncées au théorème précédent donne le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires π, si, après avoir choisi le pôle π pour centre de projection, l'on projette le pôle de chacun des deux premiers systèmes sur la transversale de l'autre système, et que l'on construise un nouveau système de polaires, ayant son pôle en π, et coupant le premier système de polaires sur une transversale passant par la projection du pôle du second système, ce nouveau système coupera le second sur une transversale qui passera par la projection du pôle du premier système.*

§ IV.

Conditions pour que deux systèmes de polaires se coupent sur une droite, déduites de la considération de l'hyperboloïde à une nappe.

111. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires se coupent sur une droite lorsque leurs transversales, partant d'un point de la ligne des pôles, sont reliées par un système de parallèles dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles.*

De plus, si l'on projette, dans la direction des parallèles, le pôle de chaque système sur la transversale de l'autre système, la droite mentionnée passera par ces deux projections. (Fig. 12.)

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires pt, $p't'$ (*fig.* 12), représentent un hyperboloïde à une nappe (62), ayant pour directrices : 1° la verticale (p); 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical de projection; 3° la droite de l'espace (t, t'). Le sommet n des deux transversales t, t' étant sur la ligne des pôles, la droite de l'espace, dont les deux projections coïncident avec la ligne des pôles, sera une génératrice de cet hyperboloïde; et comme cette génératrice est située dans le plan bissecteur B, il s'ensuit que ce dernier plan coupe toutes les autres génératrices en des points situés sur une même droite. C'est en construisant les points de rencontre de ces autres génératrices avec le plan bissecteur B, qu'on aura la droite mentionnée à l'énoncé.

Voici maintenant l'explication du dernier point de l'énoncé : Ayant projeté, dans la direction des parallèles, le pôle p en π' et le pôle p' en π, comme il est dit à l'énoncé, on sait (62) que la verticale (π) et la perpendiculaire (π') au plan vertical de projection sont deux génératrices de l'hyperboloïde. Ces deux génératrices rencontrent respectivement le plan bissecteur B en deux points, dont la projection double de l'un coïncide avec π, et la projection double de l'autre avec π' (5). Ces deux points π, π' appartiennent donc à la droite mentionnée à l'énoncé.

112. — Une perspective des lignes énoncées au théorème précédent conduit au théorème analogue ci-dessous, qui exprime, en d'autres termes, celui de M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 241, art. 333.

Théorème. — *Deux systèmes de polaires se coupent sur une droite lorsque leurs transversales, partant d'un point de la ligne des pôles, sont reliées par un troisième système de polaires dont le pôle n'est pas sur la ligne des pôles des deux premiers systèmes. De plus, cette droite rencontre la transversale de chaque système en un point de la ligne des pôles des deux autres systèmes; c'est-à-dire le triangle formé par cette droite et les deux transversales, est inscrit au triangle qui a pour sommets les trois pôles.* (Fig. 13.)

Dans les deux premiers systèmes, il y a deux polaires, une dans chaque système, qui passent par le pôle du troisième système : c'est en construisant le point d'intersection de chacune de ces deux polaires avec sa correspondante, que l'on se rendra compte du dernier point de l'énoncé.

Du théorème précédent résulte immédiatement cette proposition :

PROPOSITION. — « Si les trois côtés d'un triangle variable de forme
» tournent respectivement autour de trois pôles fixes, non situés en ligne
» droite, tandis que deux sommets pris sur l'un des côtés, se meuvent
» respectivement sur deux droites fixes partant d'un point en ligne droite
» avec les pôles des deux autres côtés, le troisième sommet décrit une
» droite, qui forme, avec les deux droites fixes précédentes, un triangle
» inscrit à celui qui a pour sommets les trois pôles. »

Cette proposition fait voir (*fig.* 13) que,

« Si un premier triangle opp' est circonscrit à un second $\pi\pi' n$, il existe
» une infinité d'autres triangles $bb'\lambda$, dont chacun est à la fois circonscrit
» au premier et inscrit au second. »

113. — Si l'on fait une perspective telle que les deux premiers systèmes de polaires du théorème (112) deviennent deux systèmes de parallèles, alors les deux transversales deviennent parallèles aussi ; et l'on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de polaires, se coupent sur une droite, qui n'est pas parallèle aux deux transversales.*

114. — Lorsque deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, sont coupés par deux transversales qui ne partent ni d'un point de cette droite (83 et 85), ni d'un point de la ligne des pôles (103 et 104), on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite étant coupées respectivement par deux transversales qui ne partent, ni d'un point de cette droite, ni d'un point de la ligne des pôles, les droites qui relient les deux transversales seront tangentes à une même section conique, qui a aussi pour tangentes les deux transversales. La section conique sera une parabole, si les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes.*

Démonstration. — Dans le cas où les deux transversales sont respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, la courbe mentionnée à l'énoncé sera, d'après le théorème (16), une parabole, si nous prouvons que les deux transversales sont divisées en parties respectivement proportionnelles. Or, si par un point de la droite, sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires, on mène deux nouvelles transversales respectivement parallèles aux deux premières transversales, ces nouvelles transversales seront évidemment, d'après le théorème (83), divisées en parties proportionnelles. Donc, les deux premières transversales sont aussi divisées en parties proportionnelles (en vertu du principe que deux transversales parallèles d'un même système de polaires sont divisées en parties proportionnelles). — Donc, etc. Dans le cas où les deux transversales ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, on peut toujours faire une perspective des deux systèmes de polaires proposées et de leurs transversales, telle que les perspectives des deux transversales soient respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes. Dès lors, les droites qui relient les perspectives des deux transversales seront tangentes à une même parabole; donc les droites qui relient les deux transversales sur la figure primitive seront tangentes à une même section conique, autre qu'une parabole.

Il reste encore à prouver que les droites qui relient les deux transversales ne sauraient être parallèles, ni passer par un même point. Or, il ressort de (94, 95, 105, 106), que deux des droites qui relient les deux transversales, ne sauraient être parallèles, et que trois de ces droites ne sauraient passer par un même point; car, dans les deux cas, le sommet des deux transversales devrait se trouver soit sur la ligne des pôles, soit sur la droite d'intersection des deux systèmes de polaires, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc.

Du théorème qui précède, on déduit sans difficulté la proposition suivante :

Proposition. — « Si les sommets d'un triangle sont assujettis à par-
» courir respectivement trois droites fixes, tandis que les deux premiers

» côtés ou leurs prolongements pivotent autour de deux points invariables, » comme pôles, le troisième côté roulera dans toutes ses positions au- » tour d'une même section conique. » (Poncelet, *Propriétés projectives*, pag. 113.)

En suivant le mouvement du triangle mobile, on voit que les côtés qui tournent autour des deux points fixes décrivent deux systèmes de polaires qui se coupent sur l'une des trois droites fixes. Ces deux systèmes de polaires ont respectivement pour transversales les deux autres droites fixes. Le troisième côté relie à chaque instant les deux transversales; donc, ce troisième côté est à chaque instant tangent à une même conique.

TROISIÈME SECTION.

DÉFINITIONS DE LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ ET DE DEGRÉS SUPÉRIEURS, DÉDUITES, SOIT DES SURFACES RÉGLÉES DU SECOND DEGRÉ ET DE DEGRÉS SUPÉRIEURS, SOIT DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

§ I.

Définitions de lieux géométriques du second degré.

115. — Toute section faite par un plan dans un hyperboloïde à une nappe ou dans un paraboloïde hyperbolique, est une courbe du second degré; car une droite ne peut rencontrer aucune de ces surfaces, ni conséquemment la section dont il s'agit, en plus de deux points.

116. — La section faite par un plan dans un hyperboloïde à une nappe est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à une directrice et à une génératrice de l'hyperboloïde, pourvu que cette directrice et cette génératrice ne soient pas parallèles entre elles. Cela revient à dire que la section est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à deux génératrices d'un même mode de génération. Dans ce cas, la section a, en effet, deux points à l'infini.

La section sera une parabole, si le plan sécant est parallèle à une seule génératrice d'un même mode de génération; car ici la section n'a qu'un point à l'infini.

117. — La section faite par un plan dans un paraboloïde hyperbolique, est une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à deux génératrices de modes différents.

La section est une parabole, si le plan sécant n'est parallèle à aucune génératrice des deux modes de génération; à cet égard, faisons remarquer que si un plan sécant n'est pas parallèle à une génératrice d'un mode, il n'est pas non plus parallèle à une génératrice de l'autre mode.

118. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, si l'on fait tourner l'un des deux, considéré comme système invariable, autour de son pôle d'une quantité angulaire ω, on demande si le système ainsi déplacé et le système demeuré fixe ont ou n'ont pas de polaires correspondantes parallèles.*

Solution. — Soient p, p' les deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite D. Il est facile de voir, à l'aide d'une figure, que les deux polaires qui primitivement se coupent sur la droite D et font entre elles un angle égal à ω, ou supplémentaire de ω, sont précisément celles qui deviennent parallèles après le déplacement, par rotation, de l'un des deux systèmes.

Donc, en décrivant sur la droite $p\,p'$ un segment de cercle capable de l'angle ω, si la circonférence de ce cercle coupe la droite proposée D en deux points, il y aura deux paires de polaires correspondantes qui deviendront parallèles; ce qui a toujours lieu lorsque la droite D passe entre les deux pôles p, p'. Si la circonférence est tangente à la droite D, une seule paire de polaires correspondantes deviendront parallèles. Enfin, si la circonférence ne coupe pas la droite D, aucune paire de polaires correspondantes ne deviendront parallèles.

Remarque. — Cette solution prouve, en même temps, que le système qui s'est déplacé et le système qui est demeuré fixe ne peuvent avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles.

119. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, on demande si ces deux systèmes de polaires ont ou n'ont pas de polaires correspondantes parallèles.*

SOLUTION. — Soient pt, $p't'$ deux systèmes de polaires dont les transversales t, t' sont reliées par un système de parallèles.

Je remplace la transversale t' par une autre t'' parallèle à t' et égale à t (c'est-à-dire que les polaires p' devront intercepter sur t'' des parties respectivement égales à celles que les polaires p interceptent sur t). Je transporte maintenant le système p' considéré comme système invariable, de manière que les divisions de t'' coïncident respectivement avec les divisions de t. Le pôle p' prendra une nouvelle position facile à construire et que nous désignerons par π, le système π ne différant du système primitif p' que par sa position. On a ainsi les deux systèmes de polaires p et π se coupant sur la droite t. Je détermine actuellement la quantité angulaïre ω dont il faut faire tourner le système π autour de son pôle, pour que ses polaires deviennent respectivement parallèles aux polaires du système p', et la question se trouve alors ramenée à celle de l'article précédent.

REMARQUE. — On déduit facilement de cette solution, que deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles. Ce point résulte aussi de la remarque faite à l'article (62).

120. — THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, se coupent sur une conique qui passe par les deux pôles et par le sommet des deux transversales. La conique sera :*

Une parabole, *si une polaire du premier système (construite ou à construire) est parallèle à sa correspondante du second système;*

Une hyperbole, *si deux polaires du premier système sont respectivement parallèles à leurs correspondantes du second système;*

Une ellipse, *si aucune polaire du premier système n'est parallèle à sa correspondante du second système;*

Une droite, *dans les cas mentionnés aux articles* (94) *et* (111).

TANGENTE. — *La polaire du premier système qui a pour correspondante dans le second système la ligne des pôles, est tangente à la conique, au pôle du premier système.*

Démonstration. — Soient pt, $p't'$ les deux systèmes de polaires définis à l'énoncé.

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles qui relient les deux transversales t, t', les deux systèmes de polaires représentent un hyperboloïde à une nappe (62), et la courbe sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires est la projection double de la section faite dans cet hyperboloïde par le plan bissecteur B; donc cette courbe est du second degré.

La courbe du second degré passe par les deux pôles, parce que le plan bissecteur B rencontre les deux directrices de l'hyperboloïde qui ont respectivement pour projections les deux pôles.

La courbe du second degré passe par le sommet des deux transversales, parce que celles-ci étant les projections d'une directrice de l'hyperboloïde, le sommet de ces deux transversales est la projection double du point de rencontre de cette directrice avec le plan bissecteur B.

Tangente. — Si l'on suit le mouvement de deux polaires correspondantes, on voit à l'évidence que lorsque l'une des deux polaires vient coïncider avec la ligne des pôles, l'autre polaire devient tangente en son pôle à la courbe en question.

Pour construire la tangente en un point n *qui ne coïncide avec aucun des deux pôles*, projetons, parallèlement à la direction des parallèles, le pôle p sur la transversale t', le pôle p' sur la transversale t, et représentons par π, la projection du pôle p, et par π la projection du pôle p'.

Par le point n passent deux polaires pn, $p'n$ qui sont les projections d'une génératrice de l'hyperboloïde. Par le même point n passent deux autres polaires πn, $\pi' n$ qui sont les projections d'une génératrice de l'autre mode de génération du même hyperboloïde. On construira les traces horizontales de ces deux génératrices $(pn, p'n)$, $(\pi n, \pi' n)$. La droite qui unit ces deux traces sera la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde au point (n, n). La droite, qui va du point n au point où cette trace du plan tangent rencontre la ligne de terre, sera la tangente demandée (29).

121. — En faisant la perspective des systèmes de lignes mentionnés dans le théorème précédent, on en déduira le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, se coupent sur une conique qui passe par les pôles des deux premiers systèmes et par le sommet des deux transversales. La conique devient une droite dans les cas mentionnés aux articles* (97) *et* (112).

Tangente. — La règle pour construire la tangente à la courbe, en l'un des pôles des deux premiers systèmes, est la même que dans le théorème précédent. Quant à la construction de la tangente en un point quelconque de la courbe, on trouvera facilement à modifier la construction indiquée au théorème précédent, et à l'adapter au cas actuel.

On déduit du théorème précédent la proposition suivante due à Maclaurin.

Proposition. — « Si les trois côtés d'un triangle mobile sur son plan » sont assujettis à pivoter autour de trois points fixes comme pôles, et » qu'en même temps les deux premiers sommets soient assujettis à par- » courir respectivement deux droites fixes comme directrices, le troisième » sommet parcourra, par suite du même mouvement, une section coni- » que. » (Poncelet, *Propriétés projectives*, pag. 110.)

En construisant un certain nombre de positions du triangle mobile, on verra, en effet, que toutes les circonstances du théorème précédent subsistent.

122. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un système de parallèles, si un second système de parallèles de même direction rencontre le premier système de polaires sur une droite, il rencontrera le second système de polaires sur une hyperbole passant par le pôle du second système. L'hyperbole devient une ligne droite dans les cas mentionnés aux articles* (95) *et* (109).

Démonstration. — Soient D la droite et c la courbe sur lesquelles le second système de parallèles rencontre respectivement les deux systèmes de polaires. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au système de parallèles, les deux systèmes de polaires représentent une hyperboloïde à une nappe (62), dont D et c sont les deux projections d'une section plane, faite par le plan projeté suivant la droite D. La projection c de cette section est donc une courbe du second degré. Cette courbe passe par le pôle mentionné à l'énoncé, parce que le plan projeté suivant D rencontre la directrice de l'hyperboloïde qui a pour projection ce pôle. Enfin, cette courbe est une hyperbole, parce que le plan sécant, projeté suivant D, est parallèle : 1° à l'une des deux directrices qui se projettent respectivement aux deux pôles; 2° à une certaine génératrice dont une des deux projections est parallèle à D (116).

Tangente. — Pour mener une tangente à la courbe c, on construira le plan tangent à l'hyperboloïde en un point de la section (D, c) et l'on déterminera l'intersection de ce plan tangent avec le plan projeté suivant D.

123. — En faisant la perspective des divers systèmes de lignes énoncés au théorème précédent, on aura le théorème analogue qui suit :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, si un quatrième système, ayant même pôle que le troisième, coupe l'un des deux premiers sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe du second degré, passant par le pôle de cet autre et par le pôle du troisième.*

Cette courbe du second degré devient une droite quand les trois pôles sont en ligne droite et aussi dans le cas de l'art. (110).

Pour faire voir que la courbe dont il s'agit doit passer par le pôle commun au troisième et au quatrième système, il suffit de construire dans le système coupé suivant la courbe, la polaire qui passe par le pôle commun, et de construire, dans le système coupé suivant la droite, la polaire correspondante de la polaire précédente. Le point de la courbe fourni par ces deux polaires correspondantes coïncidera précisément avec le pôle commun au troisième et au quatrième système.

Tangente. — La construction de la tangente en un point de la courbe qui nous occupe, se déduit facilement de la construction indiquée au théorème précédent.

124. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un système de parallèles coupe l'un des deux systèmes de polaires sur une transversale, il coupera l'autre système sur une hyperbole passant par le pôle de cet autre système. L'hyperbole devient une droite quand le sys-*

tème de parallèles a même direction que la ligne des pôles (95), *comme aussi dans le cas de l'art.* (107).

Démonstration. — On fera représenter aux deux systèmes de polaires de l'énoncé un hyperboloïde à une nappe en prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction du système de parallèles (64). Le reste de la démonstration comme à l'art. (122).

Tangente. — Même observation qu'à l'art. (122) pour ce qui concerne la construction de la tangente.

125. — Si l'on fait une perspective des systèmes de lignes énoncés au théorème précédent, on aura le théorème analogue :

Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un troisième système de polaires coupe l'un des deux premiers sur une transversale, il coupera l'autre sur une courbe du second degré passant par le pôle de cet autre système et par le pôle du troisième.*

La courbe devient une droite si les trois pôles sont en ligne droite (97 coroll.), *et aussi dans le cas de l'art.* (108).

126. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires respectivement parallèles, si un système de parallèles coupe l'un de ces deux systèmes sur une droite, il coupera l'autre sur une hyperbole passant par le pôle de cet autre système. L'hyperbole sera une droite parallèle à la droite proposée, si le système de parallèles a même direction que la ligne des pôles* (95 coroll.)

Démonstration directe. — Soient D la droite et c la courbe suivant lesquelles le système de parallèles rencontre respectivement les deux systèmes de polaires. En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction des parallèles, les deux systèmes de polaires représentent un paraboloïde hyperbolique (67). Le plan projeté suivant D coupe ce paraboloïde suivant une courbe du second degré, dont D et c sont les deux projections; donc la courbe c est aussi du second degré. De plus, elle a deux points à l'infini, c'est-à-dire que c'est une hyperbole, parce que le plan projeté suivant D, est parallèle : 1° à l'une des deux directrices du paraboloïde qui se projettent respectivement aux deux pôles; 2° à la génératrice dont les deux projections sont parallèles à D (117).

Enfin, la courbe c passe par le pôle mentionné à l'énoncé, parce que le plan projeté suivant D rencontre la directrice du paraboloïde projetée en ce pôle.

127. — En faisant une perspective telle que les deux systèmes de polaires dont il est question au théorème (120), deviennent deux systèmes de parallèles, la courbe mentionnée au même théorème aura deux points à l'infini, les deux pôles, et l'on aura ce nouveau théorème :

Théorème. — *Deux systèmes de parallèles dont les transversales sont reliées par un système de polaires, se coupent sur une hyperbole qui passe par le sommet des deux transversales. Cette hyperbole devient une droite quand les deux transversales sont parallèles* (113).

Autrement : Étant donnés un système de parallèles et un système de polaires qui se rencontrent sur une droite, si un second système de parallèles coupe le système de polaires sur une transversale, il coupera le premier système de parallèles sur une hyperbole passant par le point d'instersection de la droite avec la transversale.

Démonstration directe pour le second énoncé. — Soit D la droite sur laquelle le système de polaires p rencontre le premier système de parallèles; et soit t la transversale sur laquelle ce même système de polaires est rencontré par le second système de parallèles. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au second système de parallèles, le premier système de parallèles et le système de polaires représenteront, d'après (69), une paraboloïde hyperbolique ayant pour directrices : 1° la verticale (p) ; 2° la droite (D, D) située dans le plan bissecteur B. L'hyperbole mentionnée à l'énoncé est une projection de la section faite dans ce paraboloïde par le plan projeté suivant t. La section est, d'ailleurs, une hyperbole, parce que ce plan est parallèle à la directrice projetée au pôle p.

128. — Théorème. — *Un système de parallèles et un système de polaires, dont les transversales sont reliées par un second système de parallèles, se coupent sur une parabole ou sur une hyperbole passant par le sommet des deux transversales. La courbe sera une parabole, si le premier système de parallèles a même direction que la transversale des polaires; elle sera une hyperbole dans tous les autres cas.*

En d'autres termes :

Étant donnés deux systèmes de parallèles qui se rencontrent sur une droite, si un *système de polaires rencontre le premier système sur une transversale, il rencontrera le second sur une parabole ou sur une hyperbole, selon que la transversale sera ou non parallèle à la direction des parallèles du second système.*

Démonstration pour le premier énoncé. — Soient p le pôle et t la transversale du système de polaires, et soit t' la transversale du premier système de parallèles. En prenant une ligne de terre perpendiculaire au second système de parallèles, le système de polaires et le premier système de parallèles représentent un paraboloïde hyperbolique (68), ayant pour directrices : 1° la verticale (p) projetée au pôle p; 2° la droite de l'espace (t, t'). La courbe mentionnée à l'énoncé est la projection double de la section faite dans ce paraboloïde par le plan bissecteur B; donc cette courbe est du second degré. On vérifie facilement que dans le cas de la parabole où le premier système de parallèles a même direction que la transversale des polaires, aucune génératrice du paraboloïde n'est parallèle au plan bissecteur B, tandis que dans le cas contraire il y aura toujours une génératrice du paraboloïde parallèle à ce plan bissecteur. — Dans le cas où les deux transversales seraient parallèles, la directrice (t, t') du paraboloïde serait parallèle au plan bissecteur B, et la courbe serait une hyperbole.

Tangente en un point quelconque n de la courbe. — Par le point de l'espace (n, n) passe un plan tangent au paraboloïde; la trace principale de ce plan tangent est la tangente demandée.

Pour construire cette trace principale, on cherchera d'abord la trace horizontale de ce plan tangent; pour cela, il faut remarquer que la génératrice qui passe par le point (n, n), est une première droite de ce plan, et que, pour se procurer une seconde droite, il suffit de couper le paraboloïde par un plan auxiliaire parallèle aux deux directrices (p) et (t, t'); ce plan auxiliaire est vertical et se projette suivant une droite menée par n parallèlement à t. Après avoir construit de cette façon la trace horizontale du plan tangent, on aura la tangente demandée, en joignant par une droite le point n avec le point où la trace horizontale du plan tangent rencontre la ligne de terre.

129. — Théorème. — *L'intersection de deux systèmes de polaires, respective-*

ment parallèles à deux autres systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, est une hyperbole qui passe par les pôles des deux premiers systèmes. L'hyperbole devient une droite parallèle à la droite proposée, si la ligne des pôles des deux premiers systèmes est parallèle à la ligne des pôles des deux autres (100).

Démonstration. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles des deux derniers systèmes de polaires, ceux-ci représenteront un plan et les deux premiers systèmes un paraboloïde hyperbolique, ayant ce plan pour plan directeur (71). La courbe mentionnée à l'énoncée est la projection double de la section faite dans ce paraboloïde par le plan bissecteur *B*. Cette courbe est une hyperbole, parce qu'une génératrice du paraboloïde (celle dont les deux projections sont parallèles à la droite mentionnée dans l'énoncé) est parallèle au plan bissecteur *B*. Nous laissons au lecteur à chercher le mode de construction de la tangente à cette hyperbole en rappelant seulement que le second plan directeur du paraboloïde mentionné est perpendiculaire à la ligne de terre.

§ II.

Définitions de lieux géométriques de tous les degrés.

150. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de parallèles, de direction différente, qui se coupent sur une courbe d'un degré quelconque, si un troisième système de parallèles coupe l'un des deux premiers systèmes sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe de même degré et de même genre que la première courbe.*

Réciproquement. Étant donnés trois systèmes de parallèles, de directions différentes, si l'un de ces systèmes rencontre respectivement les deux autres sur une droite et sur une courbe d'un degré quelconque, ces deux autres systèmes se couperont sur une autre courbe de même degré et de même genre que la première.

Tangente. — *A chaque point de la nouvelle courbe correspond un point sur la première courbe (ces deux points sont reliés par une parallèle du second système); deux tangentes menées par ces deux points aux deux courbes respectivement, rencontrent la droite mentionnée à l'énoncé en un même point.*

Démonstration. — Soit *s* la courbe sur laquelle se coupent les deux premiers systèmes de parallèles; et soient D et c la droite et la courbe sur lesquelles le troisième système de parallèles rencontre respectivement les deux premiers systèmes.

En prenant une ligne de terre perpendiculaire à la direction du troisième système de parallèles, les deux premiers systèmes représentent un cylindre dont la courbe de l'espace (s, s), située dans le plan bissecteur B, est la directrice, et dont D et c sont les deux projections d'une section plane, faite dans ce cylindre par le plan projeté suivant D. Cette section étant une courbe de même degré et de même genre que la courbe directrice, la projection c de cette section sera une courbe de même genre et de même degré que la projection s de la directrice.

Pour construire la tangente à la courbe c, on imaginera, par un point pris sur la section (D, c), un plan tangent au cylindre mentionné, et l'on construira la trace principale de ce plan tangent, laquelle est tangente à la courbe s. La tangente au point pris sur la section (D, c) étant située dans ce plan tangent, le point d'intersection des deux projections de cette tangente devra se trouver sur la trace principale du plan tangent. Or, des deux projections de la tangente à la section (D, c), l'une coïncide avec D, et l'autre est tangente à c; donc la tangente à c doit rencontrer la droite D en un point de la trace principale du plan tangent; ce qui est, en d'autres termes, la règle énoncée plus haut.

La réciproque, corollaire évident du théorème, se démontre directement en considérant le cylindre mentionné à la démonstration précédente, comme ayant pour directrice la courbe de l'espace (D, c), et en construisant l'intersection de ce cylindre avec le plan bissecteur B.

131. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe du degré* n, *si un système de parallèles à la ligne des pôles coupe le premier système de polaires sur une droite, il coupera le second système sur une courbe de même degré que la courbe proposée.*

Réciproquement. Si un système de parallèles à la ligne des pôles de deux systèmes de polaires définis rencontre l'un des systèmes de polaires sur une droite et l'autre sur une courbe du degré n, *les deux systèmes de polaires se couperont sur une courbe de même degré que la première courbe.*

TANGENTE. — *A chaque point de la dernière courbe correspond un point sur la première courbe, situés tous les deux sur une polaire du second système; les tangentes aux deux courbes en ces deux points rencontrent la droite mentionnée à l'énoncé en un même point.*

DÉMONSTRATION. — On fera représenter aux deux systèmes de polaires un cône (73 et 74); le reste de la démonstration comme il est indiqué à l'article précédent.

REMARQUE. — Si les deux systèmes de polaires de l'énoncé se coupent sur une courbe passant par le pôle du second système, le système de parallèles, eu égard à l'art. (74), coupera le second système de polaires sur une courbe passant aussi par le pôle de ce second système; cette courbe aura au moins un point à l'infini, si les deux systèmes de polaires se coupent sur une courbe qui passe par les deux pôles.

132. — Si l'on fait une perspective des lignes énoncées à l'un des deux théorèmes précédents, on en déduira le suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une courbe d'un degré quelconque, si un troisième système de polaires, ayant son pôle sur la ligne des pôles des deux premiers, coupe l'un de ceux-ci sur une droite, il coupera l'autre sur une courbe de même degré que la courbe proposée.*

Réciproquement. Étant donnés trois systèmes de polaires ayant leurs pôles en ligne droite, si l'un de ces systèmes rencontre respectivement les deux autres sur une droite et sur une courbe du degré n, *les deux autres systèmes se couperont sur une autre courbe du même degré.*

133. — En appliquant le théorème (130) aux coordonnées rectilignes employées en géométrie analytique, lesquelles constituent pour chaque courbe deux systèmes de parallèles, l'un à l'axe des abscisses, l'autre à l'axe des ordonnées, et se coupant deux à deux sur cette courbe, on est conduit au mode de déformation connu dont voici l'énoncé :

MODE DE DÉFORMATION. — *Si l'on fait tourner, dans le même sens et d'une même quantité angulaire, toutes les ordonnées d'une courbe donnée autour de leurs points de rencontre avec l'axe des abscisses (et plus généralement autour de leurs points de rencontre avec une droite arbitraire* D); *ces ordonnées dans leurs nouvelles positions, prolongées si cela est nécessaire, rencontreront le système des* *abscisses demeurées fixes sur une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.*

TANGENTE. — *A chaque point de la courbe proposée correspond un point sur la courbe déformée; les tangentes à ces courbes en ces deux points rencontrent l'axe des abscisses en un même point.*

REMARQUE. — Dans le mode de déformation ci-dessus, il est facile de reconnaître que les ordonnées de la courbe déformée sont respectivement proportionnelles aux ordonnées de la courbe primitive.

134. — On peut encore déduire comme corollaire du théorème (130) le mode de déformation connu dont voici l'énoncé :

MODE DE DÉFORMATION. — *Si, sans faire varier leurs grandeurs, on fait tourner, dans le même sens et d'une même quantité angulaire, toutes les ordonnées d'une courbe autour de leurs points de rencontre avec l'axe des abscisses, les extrémités de ces ordonnées dans leurs nouvelles positions se trouvent sur une nouvelle courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.*

LA TANGENTE *à la courbe déformée se construit comme à l'art.* (133).

DÉMONSTRATION. — Il suffit de remarquer que les arcs décrits par les extrémités des ordonnées sont semblables et que leurs cordes sont parallèles. Cela étant, il résulte du théorème (130) que ces cordes sont coupées par les ordonnées dans leurs nouvelles positions sur une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.

135. — Si, après avoir déformé une courbe au moyen du mode (133), on ramène les ordonnées dans leurs positions primitives sans les faire varier de grandeur, comme il est dit au mode (134), on sera conduit à ce troisième mode de déformation connu :

MODE DE DÉFORMATION. *Si l'on réduit dans un même rapport toutes les ordonnées d'une courbe, les extrémités des ordonnées réduites formeront une courbe de même degré et de même genre que la courbe proposée.*

LA TANGENTE *à la courbe déformée se construit comme à l'art.* (133).

REMARQUE. — Les théorèmes (131 et 132) donneraient lieu à des modes de déformation analogues aux précédents; nous en abandonnons les énoncés au lecteur.

136. — THÉORÈME. — *Étant donnée une courbe qui jouit de la propriété d'avoir*

Nous nommerons la nouvelle courbe, la transformée ou la déformée de la courbe proposée.

TANGENTE. — *Soit* m *un point de la courbe primitive, et* m′ *le point correspondant sur la courbe transformée. — Pour construire la tangente à la courbe transformée au point* m′, *on mènera par le point* m *à la courbe primitive une tangente prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre, en un point* n, *la perpendiculaire* L *élevée en* o *à la droite* D. *Sur* om′, *ou sur le prolongement de* om′, *du côté de* o, *on prendra à partir du point* o *une longueur* on′ = on. *Au point* n′ *on mènera à* on′ *une perpendiculaire prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite* L. *En unissant ce point de rencontre avec le point* m′, *par une droite, celle-ci sera la tangente demandée* — on′ *sera pris sur le prolongement de* om′ *si la tangente à la courbe primitive ne peut rencontrer* L *sans rencontrer préalablement* D.

DÉMONSTRATION. — Représentons par c la courbe proposée et menons, par le point o, une perpendiculaire L à la droite D. En prenant la perpendiculaire L pour ligne de terre, le système de circonférences et le système d'ordonnées mentionnés à l'énoncé représentent une surface de révolution dont l'axe se projette horizontalement au point o et verticalement en D. Cette surface de révolution a pour méridien principal la courbe de l'espace (L, c), située dans le plan vertical de projection, et la courbe, intersection du système de circonférences avec le système d'ordonnées, est la projection double de la section faite dans cette surface de révolution par le plan bissecteur B. Le degré de cette projection double est le même que celui de la surface de révolution; donc ce degré est double de celui de la courbe (L, c), qui a servi à engendrer la surface (81).

Pour déduire de la tangente en un point m de la courbe donnée, la tangente au point correspondant m' de la courbe transformée, nous dirons que cette première tangente est la trace verticale du plan qui touche la surface de révolution au point m considéré comme situé dans le plan vertical de projection. Cette trace verticale servira à construire la trace horizontale du plan qui touche la surface de révolution au point (m', m'); et la trace principale de ce dernier plan tangent est la tangente au point m' de la courbe transformée.

140. — Théorème réciproque. — *Étant donné un point fixe* o *sur une droite* D, *si pour chaque point d'une courbe donnée l'on construit le rayon vecteur dirigé vers* o *ainsi que l'ordonnée perpendiculaire à la droite* D, *et que l'on prolonge de part et d'autre de la droite* D *l'ordonnée de chaque point de manière qu'elle devienne égale au rayon vecteur du même point, les extrémités des ordonnées ainsi prolongées constituent une nouvelle courbe d'un degré double de celui de la courbe proposée. De plus, la droite* D *est toujours un diamètre principal ou axe de la nouvelle courbe. Le degré de la nouvelle courbe sera le même que celui de la courbe proposée, si la droite* D *est un diamètre principal ou axe de la courbe proposée.*

Tangente. — *Soit* L *la perpendiculaire en* o *à la droite* D. *Soit* m *un point de la courbe proposée et* m' *le point correspondant sur la courbe transformée. La tangente en* m *à la courbe proposée rencontre la droite* L *en un point* n; *la perpendiculaire abaissée du point* n *sur la droite* om *rencontre celle-ci en un point* r; *on prendra sur* L, *à partir de* o, *une longueur* or' = or, *et cette longueur sera portée à droite ou à gauche de* D *selon que la tangente à la courbe primitive rencontrera* L *à droite ou à gauche de* D. *Cela fait* r'm' *sera la tangente en* m' *à la courbe transformée.*

Démonstration. — Par le point o menons une perpendiculaire L à la droite D. En prenant cette perpendiculaire L pour ligne de terre, nous pouvons considérer la surface de révolution qui a pour génératrice la courbe de l'espace (c, c), située dans le plan bissecteur B, et pour axe la droite de l'espace, projetée horizontalement en o et verticalement en D. En construisant la projection verticale du méridien principal de cette surface nous aurons la nouvelle courbe mentionnée. Or, le degré de la projection verticale de ce méridien est le même que celui de la surface de révolution; donc, d'après (81), ce degré est double de celui de la courbe proposée c.

Pour déduire de la tangente en un point m de la courbe donnée, la tangente au point correspondant m' de la courbe transformée, il suffit de remarquer que la première tangente est la trace principale du plan qui touche la surface de révolution au point (m, m). Cette trace principale servira à construire la trace horizontale de ce même plan et celle-ci, à construire la trace verticale du plan qui touche la surface au point m', considéré comme situé dans le plan vertical de projection. Cette trace verticale sera la tangente au point m' de la courbe transformée.

141. — Pour appliquer les deux théorèmes qui précèdent, nous conviendrons de nommer la droite D axe de transformation ou de déformation, et le point o, origine des rayons vecteurs. Cela posé, voici quelques applications du dernier de ces deux théorèmes :

1° L'ensemble de deux circonférences égales situées de part et d'autre d'une droite et tangentes en un même point de cette droite, constitue une courbe du quatrième degré ayant pour axe la tangente commune. — Si, pour déformer ces deux circonférences, on place l'origine o des rayons vecteurs au point de contact (*fig.* 36) et qu'on prenne la tangente pour axe de déformation, on convertira les deux circonférences en une lemniscate, courbe du quatrième degré, laquelle aura pour axes la tangente et la perpendiculaire en o à cette tangente.

En remplaçant les deux circonférences par deux coniques quelconques, égales et symétriques par rapport à une droite et tangentes en un même point de cette droite, on sera conduit à des lemniscates elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Si les deux coniques, égales et symétriques par rapport à une même droite, ne sont plus tangentes à cette droite (*fig.* 37), les courbes du quatrième degré que l'on déduira de ces deux coniques seront des variétés des lemniscates précédentes. La *fig.* 39 montre la déformation de deux cercles égaux tangents, lorsque l'origine o des rayons vecteurs n'est pas au point de contact, comme dans la *fig.* 36.

2° Si pour déformer une parabole on place l'origine des rayons vecteurs à son sommet et qu'on prenne pour axe de déformation l'axe transverse de la parabole, on obtiendra une autre parabole de même sommet et de même axe transverse.

3° L'origine des rayons vecteurs étant au centre d'une hyperbole, la déformée de celle-ci sera une autre hyperbole, si l'on prend l'axe transverse pour axe de déformation.

4° Si l'on déforme une circonférence de cercle en plaçant l'origine des rayons vecteurs à l'extrémité d'un diamètre pris pour axe de déformation, on obtiendra une portion de parabole (*fig.* 34). L'ellipse conduit au même résultat, en plaçant l'origine des rayons vecteurs à l'extrémité d'un axe pris pour axe de déformation.

5° On convertira une ellipse en une portion d'hyperbole en plaçant l'origine des rayons vecteurs au centre de l'ellipse et en prenant l'un des axes de celle-ci pour axe de déformation. Si l'ellipse se change en circonférence de cercle, l'hyperbole se convertira en deux droites parallèles et tangentes à la circonférence.

6° L'ensemble de deux droites qui se coupent constitue une courbe du second degré, dont la bissectrice est un axe. Si, pour déformer ces droites, on place l'origine des rayons vecteurs en un point de la bissectrice et qu'on prenne celle-ci pour axe de déformation, on convertira les deux droites en deux branches d'hyperbole tangentes aux deux droites proposées (*fig.* 35). Si les deux droites sont parallèles, on sera conduit à une hyperbole équilatère (*fig.* 31) qui touchera par ses sommets les deux parallèles; il suffit pour cela de placer l'origine des rayons vecteurs en un point quelconque de la droite menée à égale distance des deux parallèles et prise pour axe de déformation.

Remarque. — La règle générale énoncée au théorème (140) pour mener la tangente aux courbes déformées, citées ci-dessus, ne demande que des constructions fort simples qui pourraient facilement être vérifiées par l'analyse; mais on ne voit pas aussi facilement comment l'analyse aurait pu servir à les découvrir.

TROISIÈME CHAPITRE.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES RÉSULTANT DE L'INTERSECTION DE DEUX SYSTÈMES DE POLAIRES DÉFINIS PAR UNE CONSIDÉRATION MÉTRIQUE : LA PROPORTION.

142. — Dans ce chapitre, qui traitera uniquement des courbes et des surfaces du second degré, nous croyons qu'il sera intéressant de voir qu'une théorie complète de deux droites divisées en parties proportionnelles ou en parties perspectivement proportionnelles, et de deux systèmes de polaires ayant respectivement ces deux droites pour transversales, constitue toute une géométrie supérieure de ces courbes et de ces surfaces, en tant qu'il ne s'agisse que de propriétés descriptives.

Il ne sera pas moins intéressant de voir cette théorie découler d'une seule source, la considération de l'hyperboloïde à une nappe, lequel renferme comme cas particulier le paraboloïde hyperbolique, le cône et le plan.

Aussi, après avoir reconnu que deux systèmes de polaires dont les transversales sont divisées en parties respectivement proportionnelles, peuvent toujours représenter l'une de ces trois surfaces et ne sont autre chose que deux faisceaux projectifs de M. Steiner, ou deux faisceaux homographiques de M. Chasles, nous avons acquis la conviction que la théorie de ces faisceaux, basée jusqu'ici sur la notion du rapport anharmonique, pouvait être traitée par les seuls principes de la géométrie descriptive, lorsqu'on y introduit les propriétés des deux plans bissecteurs.

Il y a plus, si l'on ne connaissait d'autres applications de la géométrie descriptive, on pourrait croire que la méthode des projections, combinée avec les propriétés des plans bissecteurs, a été imaginée exprès pour établir par voie descriptive la théorie des faisceaux projectifs ou homographiques [1].

Ce chapitre est divisé en trois sections : la première traitera de droites proportionnelles et de droites perspectivement proportionnelles; la seconde de deux systèmes de polaires proportionnels, et la troisième de deux systèmes de plans polaires proportionnels.

PREMIÈRE SECTION.

DROITES PROPORTIONNELLES ET DROITES PERSPECTIVEMENT PROPORTIONNELLES.

§ I.

Droites proportionnelles situées dans un même plan.

143. — Définitions. — *Nous dirons que deux droites sont proportionnelles, lorsque les parties consécutives de l'une sont respectivement proportionnelles aux parties consécutives de l'autre; dans ce cas, les points de division consécutifs sur l'une, sont respectivement correspondants des points de division consécutifs sur l'autre.*

Lorsque les parties consécutives de l'une des deux droites sont respectivement égales aux parties consécutives de l'autre, nous dirons que les deux droites proportionnelles sont égales.

Si un point de division de l'une des deux droites coïncide avec le point cor-

[1] C'est ainsi que, par la géométrie descriptive, on trouve de suite dans l'espace, la raison des rayons doubles de deux faisceaux projectifs ou homographiques qui ont même centre; car, si par le sommet d'un cône du second degré, on mène deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux génératrices de ce cône, le sommet sera dans le plan bissecteur B et selon que ce cône est touché ou coupé par le plan bissecteur B, les deux systèmes de projections orthogonales des génératrices du cône constitueront deux faisceaux homographiques de même centre, ayant un ou deux rayons doubles. Chaque rayon double n'est autre, en effet, que la projection double d'une génératrice située dans le plan bissecteur B. Si le plan bissecteur B ne coupe ni ne touche le cône, les deux mêmes faisceaux n'auront pas de rayon double.

respondant de l'autre, nous dirons que les deux droites ont un point correspondant commun qui est leur point d'intersection.

144. — Il est évident que :

Deux droites proportionnelles sont déterminées lorsque l'on connaît deux points sur l'une de ces droites et les deux points correspondants sur l'autre.

Car un troisième point quelconque étant donné sur l'une, on pourra toujours construire son correspondant sur l'autre.

145. — 1° *Deux droites sont proportionnelles et ont un point correspondant commun, quand les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de parallèles.*

2° *Deux droites parallèles sont proportionnelles quand les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de polaires, ou un système de parallèles. Dans le dernier cas, les deux droites données ont un point correspondant commun situé à l'infini, comme aussi dans le cas où le pôle du système de polaires est en dehors de ces droites.*

146. — *Réciproquement.* — 1° *Si deux droites proportionnelles ont un point correspondant commun, le système de droites reliant chacune deux points correspondants est un système de parallèles.*

2° *Si deux droites proportionnelles sont parallèles, les droites, reliant chacune deux points correspondants, constituent un système de polaires, ou un système de parallèles. Dans le dernier cas, les deux droites données ont un point correspondant commun situé à l'infini, comme aussi dans le cas où le pôle du système de polaires est en dehors de ces droites.*

147. — *Parmi toutes les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites proportionnelles non parallèles et n'ayant pas de point correspondant commun, deux quelconques ne sont jamais parallèles entre elles et aucune ne peut être parallèle à l'une des deux droites proportionnelles proposées.* Dans ce cas et d'après (35) on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites proportionnelles, non parallèles et n'ayant pas de point correspondant commun, sont, ainsi que les deux droites proposées, tangentes à une même section conique, laquelle, ne pouvant avoir deux tangentes parallèles, sera nécessairement une parabole.*

148. — Remarque. — Lorsque deux droites proportionnelles qui se coupent n'ont pas de point correspondant commun, leur point d'intersection, considéré comme appartenant à la première, a son correspondant sur la seconde et, considéré comme appartenant à la seconde, il a également un point correspondant sur la première. Ces deux points ne sont pas correspondants l'un de l'autre et nous les nommerons points correspondants de l'intersection des deux droites données.

§ II.

Droites proportionnelles non situées dans un même plan.

149. — 1° *Si deux droites, situées ou non dans un même plan, sont proportionnelles, leurs projections, orthogonales, ou obliques sur un plan quelconque, sont également proportionnelles, et réciproquement.*

2° *Si le plan sur lequel on projette orthogonalement deux droites proportionnelles est perpendiculaire à une droite reliant deux points correspondants, les projections des deux droites proposées, ont un point correspondant commun et, par suite, les droites qui relient ces projections sont parallèles* (146).

150. — De cette dernière propriété, il est facile de conclure que :

Les droites qui relient deux droites proportionnelles non situées dans un même plan, sont des génératrices d'un paraboloïde hyperbolique.

151. — Les perspectives de deux droites proportionnelles, sur un tableau parallèle à ces deux droites, sont évidemment proportionnelles. Et si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants, les deux perspectives proportionnelles auront un point correspondant commun.

152. — *Deux droites proportionnelles*, *appliquées arbitrairement sur une droite* D, *représentent une droite dans l'espace si l'on prend une ligne de terre perpendiculaire à* D.

Soient a, b, c, etc., les points de division de la première droite, et a', b', c', etc., les points de division correspondants de la seconde droite. Puisque l'on a la proportion :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = \text{etc.},$$

il s'ensuit que les points de l'espace (a, a'), (b, b'), (c, c'), etc., sont tous sur une même droite située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Donc, etc.

153. — Problème fondamental. — *Construire la paire de points correspondants qui coïncident, lorsque l'on applique deux droites proportionnelles abc, etc., $a'b'c'$, etc., sur une droite* D.

Solution. — En prenant une ligne de terre perpendiculaire à D, nous pouvons, d'après (152), considérer la droite de l'espace (abc, etc., $a'b'c'$, etc.) Cela posé, le point où cette droite rencontre le plan bissecteur B (27), est un point dont les deux projections coïncident. Or, ces deux projections coïncidantes sont évidemment deux points correspondants des deux droites proportionnelles.

Comme la droite de l'espace (abc, etc., $a'b'c'$, etc.), ne peut rencontrer le plan bissecteur B qu'en un point, il en résulte que :

1° *Deux droites proportionnelles appliquées arbitrairement l'une sur l'autre, ne peuvent avoir, au plus, qu'une paire de points correspondants qui coïncident ;*

2° *Si les deux droites proportionnelles sont égales* (143) *et que, de plus, les points a, b, c, etc., et leurs correspondants a', b', c', etc., se suivent dans le même sens, ces droites n'ont pas de points correspondants qui coïncident ; autrement dit, les points correspondants qui coïncident sont à l'infini.*

C'est que dans ce cas, la droite de l'espace (abc etc., a' b' c' etc.) est parallèle au plan bissecteur B (22).

Nous verrons plus loin une autre solution du même problème, laquelle s'applique également à deux droites perspectivement proportionnelles placées l'une sur l'autre, et qui a l'avantage de n'exiger que l'emploi de la règle et le tracé d'une circonférence d'un rayon arbitraire.

§ III.

Définitions et propriétés de droites perspectivement proportionnelles.

154. — *Deux droites, situées ou non dans un même plan, sont dites perspectivement proportionnelles ou divisées en parties perspectivement proportionnelles, lorsqu'on peut trouver un tableau et une position de l'œil pour lesquels les perspectives de ces droites se trouvent divisées en parties consécutives proportionnelles.*

Les démonstrations des propriétés énoncées dans ce paragraphe peuvent être suivies dans l'espace, sans qu'il soit nécessaire de tracer aucune figure, ni d'effectuer aucune construction.

155. — *Il résulte de* (154) *que les perspectives de deux droites proportionnelles, situées ou non dans un même plan, sont toujours perspectivement proportionnelles, pour des positions quelconques de l'œil et du tableau.*

Si ces deux droites proportionnelles ont un point correspondant commun, leurs perspectives auront également un point correspondant commun.

Quand les deux droites proportionnelles ne sont pas situées dans un même plan, leurs perspectives ont encore un point correspondant commun, si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants proposés.

156. — *Les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe divisent deux quelconques des trois directrices en parties perspectivement proportionnelles :*

Car les perspectives des génératrices seront parallèles si l'on prend un tableau parallèle à l'une des trois directrices, et qu'on place l'œil sur cette même directrice; donc, les perspectives des génératrices divisent celles des deux autres directrices en parties proportionnelles. Donc, d'après 154) etc.

157. — *Deux droites sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant commun, si les droites reliant chacune deux points correspondants concourent en un même point* p *:*

Car les perspectives des droites qui concourent au point *p* seront parallèles, sur un tableau parallèle à la droite qui unit l'œil au point *p;* donc ces perspectives divisent celles des deux droites proposées en parties proportionnelles (145). Donc (154), etc.

158. — *Réciproquement, si deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, les droites reliant chacune deux points correspondants concourent en un même point et constituent un système de polaires.*

Puisque les deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, leurs perspectives, qui sont proportionnelles sur un certain tableau, auront aussi un point correspondant commun; donc les droites qui relient ces perspectives seront parallèles (146 1°). Donc les droites qui relient les deux droites proposées concourent en un même point et constituent un système de polaires.

159. — De la propriété (157), il résulte à l'évidence que :

1° *Deux transversales quelconques d'un même système de polaires sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant commun;*

2° *Une droite qui tourne autour d'un point fixe p, divise deux droites fixes quelconques* D, D′ *en parties perspectivement proportionnelles et les deux droites fixes ont un point correspondant commun.* (Fig. 26.)

Les deux points où la droite mobile, tournant autour du point fixe p, rencontre, dans chacune de ses positions, les deux droites fixes D, D' étant points correspondants, on voit que, quand la droite mobile devient parallèle à la première droite D, elle rencontre la seconde droite D' en un point M' dont le correspondant sur la première est à l'infini. De même, quand la droite mobile devient parallèle à la seconde droite D', elle rencontre la première droite D en un point M dont le correspondant sur la seconde est à l'infini. Donc on peut dire que :

3° *Quand deux droites perspectivement proportionnelles ont un point correspondant commun, il existe sur chacune d'elles un point dont le correspondant sur l'autre est à l'infini.*

Autrement. — Parmi toutes les droites, reliant chacune deux points correspondants de deux droites perspectivement proportionnelles ayant un point correspondant commun, il y en a deux qui sont respectivement parallèles aux deux droites proposées.

Entre toutes les positions que peut prendre la droite mobile (*fig.* 27), en tournant autour du point fixe p, il y en a deux pour chacune desquelles cette droite retranche de l'angle compris entre les deux droites fixes D, D' ou de son supplément un triangle isocèle dont le sommet est au point d'intersection o des deux droites fixes. Ces deux triangles sont oaa', obb'. Les deux positions dont il s'agit se coupent à angle droit, comme étant respectivement perpendiculaires aux bissectrices des angles des deux droites fixes. De là on peut conclure que :

4° *Si deux droites perspectivement proportionnelles* D, D′ (fig. 27), *ont un point correspondant commun, il existe, sur l'une d'elles, deux segments* oa, ob *situés de part et d'autre du point commun et qui sont respectivement égaux aux deux segments correspondants* oa′, ob′ *de l'autre droite, situés d'un même côté du point commun. Les quatre segments ont d'ailleurs le point commun* o *pour origine.*

Remarque. — La propriété 2° énoncée plus haut, montre que l'on peut prendre sur l'une de deux droites perspectivement proportionnelles, des segments consécutifs dont les correspondants sur l'autre droite ne sont pas consécutifs.

C'est par cette raison que l'on ne peut pas conclure de la propriété 4° que deux droites perspectivement proportionnelles sont réellement proportionnelles; car sur la droite D (*fig.* 27) les deux segments ao, ob sont consécutifs, tandis que sur la droite D', les deux segments correspondants a'o, ob', respectivement égaux à ceux-là, ne sont pas consécutifs.

160. — Les deux dernières propriétés de (159) s'étendront à deux droites quelconques perspectivement proportionnelles, si l'on fait coïncider un point quelconque de l'une avec son point correspondant de l'autre; car il sera démontré plus tard que :

Deux droites perspectivement proportionnelles restent perspectivement proportionnelles, de quelque manière qu'on les déplace dans l'espace.

161. — De cette dernière propriété il résulte que:

1° *Deux droites perspectivement proportionnelles sont déterminées lorsqu'on connaît trois points de l'une et les trois points correspondants de l'autre.*

Car en faisant coïncider un des trois points de la première droite avec son correspondant de la seconde, la propriété (158) permet de construire à un quatrième point quelconque pris sur l'une, le point correspondant sur l'autre droite.

2° *Étant données deux droites situées ou non dans un même plan, si l'on prend trois points arbitraires sur l'une et trois points arbitraires sur l'autre, je dis que les trois segments déterminés par les trois points de la première droite sont toujours perspectivement proportionnels aux trois segments déterminés par les trois points de la seconde droite, et cela, n'importe l'ordre dans lequel on considère les trois points de la première droite comme respectivement correspondants des trois points de la seconde droite.*

Et si les deux droites sont dans un même plan, cela revient à dire :

De cinq droites arbitrairement tracées sur un plan, trois quelconques divisent toujours les deux autres, soit en parties proportionnelles, soit en parties perspectivement proportionnelles.

Ce que l'on peut démontrer directement comme suit :

En effet, si les deux droites proposées du premier énoncé ne sont pas dans un même plan, les trois droites reliant chacune deux points correspondants des deux droites proposées, peuvent être considérées comme trois génératrices d'un hyperboloïde à une nappe ; donc, d'après (156), la propriété existe.

La même chose se démontre pour le cas où les deux droites sont dans un même plan, en les considérant comme étant les perspectives de deux droites de l'espace non situées dans un même plan.

162. — Il sera démontré que :

Si deux droites sont perspectivement proportionnelles, leurs perspectives sur un tableau plan quelconque sont deux nouvelles droites perspectivement proportionnelles.

Et comme une projection orthogonale, ou une projection oblique sur un plan quelconque, n'est qu'une perspective pour un œil placé à une distance infinie de ce plan, on peut énoncer que :

Si deux droites sont perspectivement proportionnelles, leurs projections, orthogonales ou obliques sur un plan quelconque, sont perspectivement proportionnelles.

163. — Théorème. — *Toutes les droites reliant chacune deux points correspondants de deux droites perspectivement proportionnelles, non situées dans un*

même plan, sont des génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe, dont les deux droites proposées font également partie.

Démonstration. — Si nous projetons les deux droites perspectivement proportionnelles sur un plan perpendiculaire à une droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les deux projections seront toujours perspectivement proportionnelles et auront, de plus, un point correspondant commun. Donc les droites qui relient ces deux projections concourent en un même point que nous désignerons par p. Or, les droites qui relient ces deux projections sont elles-mêmes les projections des droites qui relient dans l'espace les deux droites proposées. Donc, les droites qui relient dans l'espace les deux droites proposées, rencontrent toutes la perpendiculaire élevée au point p au plan de projection. Donc, etc.

164. — Deux droites perspectivement proportionnelles situées dans un même plan, pouvant être considérées comme les perspectives de deux droites proportionnelles, on peut conclure du théorème (147) que :

Théorème. — *Les droites qui relient deux droites perspectivement proportionnelles, situées dans un même plan et n'ayant pas de point correspondant commun, sont toutes tangentes à une même section conique, ayant aussi pour tangentes les deux droites proposées.*

165. — Théorème fondamental. — *Deux tangentes quelconques à un cercle ou à une section conique quelconque, sont divisées par toutes les autres tangentes au même cercle, en parties perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — Considérons le cercle proposé comme cercle de gorge d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, et prenons, pour plan horizontal de projection, le plan de ce même cercle. On peut démontrer bien facilement que les projections horizontales des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont toutes tangentes au cercle de gorge. Cela posé :

Soient t, t' deux tangentes au cercle de gorge. On peut considérer ces deux tangentes comme les projections horizontales de deux génératrices d'un mode, et toutes les autres tangentes au même cercle comme les projections horizontales de génératrices de l'autre mode de génération de l'hyperboloïde; et comme dans l'espace les deux génératrices (t), (t') sont divisées par toutes les autres génératrices en parties perspectivement proportionnelles, leurs projections orthogonales t, t', sont également divisées en parties perspectivement proportionnelles. Toute section conique étant une perspective du cercle, il résulte de l'article (162) que la propriété que nous venons de démontrer pour le cas du cercle appartient à une section conique quelconque.

Corollaire. — Deux tangentes t, t' à un cercle étant considérées comme fixes, si une troisième tangente, rencontrant respectivement les deux premières en deux points correspondants a, a', se meut de manière que a s'approche indéfiniment du point de contact de t, a' s'approchera indéfiniment du point d'intersection de t avec t'; par la raison que lorsque a vient coïncider avec le point de contact de t, a' doit venir coïncider avec le point d'intersection de t et de t'; car deux tangentes doivent coïncider du moment que leurs points de contact coïncident. De là, il suit que : *Deux tangentes fixes à une section conique étant divisées en parties perspectivement proportionnelles par une troisième tangente mobile, le point d'intersection des deux tangentes fixes, considéré comme appartenant à l'une d'elles, a pour point correspondant sur l'autre, le point de contact de cette autre.*

166. — *Des points correspondants qui peuvent coïncider lorsqu'on place deux droites perspectivement proportionnelles, l'une sur l'autre.*

Deux droites perspectivement proportionnelles, placées arbitrairement l'une sur l'autre, peuvent être considérées comme étant les perspectives de deux droites proportionnelles situées dans un même plan, l'œil étant également placé dans ce plan.

Cela posé, si l'œil est placé sur une droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de celles-ci auront un point correspondant commun.

Si l'œil se trouve placé au point d'intersection de deux droites reliant chacune deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de celles-ci auront deux paires de points correspondants qui coïncideront. Enfin si l'œil ne se trouve placé sur aucune droite reliant deux points correspondants des deux droites proposées, les perspectives de celles-ci n'auront pas de points correspondants qui se confondent. Et puisque les droites qui relient les deux droites proportionnelles sont toutes tangentes à une même parabole, ce qui précède revient à dire que :

Les perspectives des deux droites proportionnelles auront une paire ou deux paires de points correspondants qui coïncident, selon que l'œil est placé sur ou hors la parabole mentionnée; enfin, les mêmes perspectives n'ont pas de points correspondants qui coïncident, si l'œil est placé dans l'intérieur de la parabole.

SECONDE SECTION.

PROPRIÉTÉS DE DEUX SYSTÈMES DE POLAIRES PROPORTIONNELS, ET APPLICATIONS DIVERSES.

§ I.

167. — Définitions. — *Étant donnés deux systèmes de polaires, coupés chacun par une transversale, nous dirons que ces deux systèmes ont leurs transversales proportionnelles ou qu'ils sont coupés respectivement par deux transversales proportionnelles, lorsque les segments interceptés par les polaires consécutives du premier système sur leur transversale, sont respectivement proportionnels aux segments interceptés par les polaires consécutives du second système sur la transversale de ce second système.*

Ceci posé nous dirons que : *deux systèmes de polaires sont proportionnels lorqu'ils sont ou peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles.*

168. — Dans deux systèmes de polaires proportionnels dont les transversales sont tracées, il faut entendre par polaires correspondantes celles qui passent par deux points correspondants des deux transversales proportionnelles.

169. — Dans deux systèmes de polaires proportionnels, l'angle formé

par deux polaires quelconques du premier système est dit correspondant de l'angle formé par les deux polaires correspondantes du second système.

170. — Voici différents cas où l'on reconnaît presque immédiatement que deux systèmes de polaires sont proportionnels.

1° *Deux positions quelconques d'un même système de polaires constituent deux systèmes de polaires proportionnels ;*

2° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les angles formés par les polaires consécutives du premier système sont respectivement égaux aux angles formés par les polaires consécutives du second système ;*

3° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second système ;*

4° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque les polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires aux polaires du second système.*

Car les angles consécutifs du premier système seront respectivement égaux aux angles consécutifs du second système.

Remarque. — En disant que deux droites qui tournent respectivement autour de deux points fixes comme pôles, décrivent deux systèmes de polaires proportionnels, nous entendons par là qu'un nombre quelconque de positions de la première droite, et le même nombre de positions correspondantes de la seconde droite, constituent deux systèmes de polaires proportionnels. D'après cela on peut dire que :

5° *En faisant tourner, autour de son sommet, un angle de grandeur invariable, les deux côtés de cet angle décriront deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle.*

Car, si le premier côté décrit un angle quelconque, le second côté décrira un angle égal.

6° *Si un angle de grandeur variable tourne autour de son sommet, de manière que ses deux côtés interceptent constamment un segment de même grandeur, sur une droite fixe, les deux côtés de cet angle décriront deux systèmes de polaires proportionnels.*

Il résulte de cette condition de mouvement, que les polaires consécutives du premier système interceptent sur la droite fixe des segments respectivement égaux à ceux que les polaires consécutives du second système interceptent sur la même droite.

7° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, lorsque leurs transversales sont reliées par un système de parallèles.* Donc :

8° *Les projections des génératrices d'un hyperboloïde à une nappe sur deux plans de projection respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices de cette surface, constituent deux systèmes de polaires proportionnels.*

9° *Deux systèmes de polaires sont proportionnels lorsqu'ils sont respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires proportionnels.*

10° *Deux systèmes de polaires situés ou non dans un même plan, sont proportionnels lorsqu'ils se coupent sur une même droite;* car cette droite est une transversale commune aux deux systèmes;

11° *Un système de polaires et la projection orthogonale ou oblique de ce système sur un plan quelconque, constituent deux systèmes de polaires proportionnels, non situés dans un même plan. D'une manière plus générale :*

12° *Un système de polaires et la perspective de ce système sur un tableau plan quelconque constituent deux systèmes de polaires proportionnels non situés dans un même plan.*

Car ils se coupent toujours sur une droite du tableau.

13° *Deux systèmes de trois polaires tracées d'une manière quelconque sont toujours proportionnels, quel que soit l'ordre dans lequel on considère les polaires du premier système, comme respectivement correspondantes des polaires du second système.*

En considérant, en effet, les trois polaires consécutives du premier système, si les polaires correspondantes du second système ne sont pas consécutives, on pourra d'abord les rendre telles, en prolongeant une ou deux d'entre elles. Cela fait, on peut toujours couper chaque système par une transversale tellement disposée, que les deux segments consécutifs, interceptés sur cette transversale par les trois polaires consécutives de ce système, soient égaux. Donc, etc.;

14° *Les quatre côtés de deux angles égaux ayant même sommet constituent* *deux systèmes de quatre polaires proportionnels, si l'on considère ces quatre côtés comptés dans un sens comme respectivement correspondants des mêmes côtés comptés en sens contraire.*

On s'assurera facilement sur une figure, que les quatre côtés forment trois angles consécutifs dont les extrêmes sont égaux; et qu'ainsi les trois angles consécutifs comptés dans un sens sont respectivement égaux aux trois mêmes angles comptés en sens contraire. Donc d'après (170 2°.) la propriété énoncée existe.

15° *Si quatre polaires interceptent sur une transversale trois segments consécutifs dont les extrêmes sont égaux, alors en considérant les quatre polaires comptées dans un sens comme respectivement correspondantes des mêmes polaires comptées en sens contraire, on aura deux systèmes proportionnels de quatre polaires.*

Il est facile de voir, en effet, que les quatre polaires du premier système interceptent sur la transversale commune trois segments consécutifs qui sont respectivement égaux à ceux que les quatre polaires du second système interceptent sur la même transversale.

16° *Deux systèmes de polaires à transversales proportionnelles sont déterminés lorsque l'on connaît les deux pôles, ainsi que deux points de la transversale du premier système et les deux points correspondants de la transversale du second système.*

Car, en prenant un troisième point quelconque sur l'une des transversales, il sera facile de construire le point correspondant sur l'autre.

171. — 1° *Deux systèmes de parallèles de direction différente, situés dans un même plan ou dans deux plans différents, sont dits proportionnels lorsqu'on peut les couper respectivement par deux transversales proportionnelles ;*

2° *Un système de parallèles et un système de polaires, situés dans un même plan ou dans deux plans différents, sont dits proportionnels lorsqu'on peut les couper respectivement par deux transversales proportionnelles;*

3° *Un système de parallèles et un système de polaires qui se coupent sur une même droite sont proportionnels.*

Car, si l'on coupe le système de parallèles par une transversale quelconque, et le système de polaires par une transversale parallèle à la droite mentionnée, les deux transversales seront proportionnelles.

4° *Un système de parallèles et sa perspective, qui est un système de polaires, sont proportionnels,* car ils se coupent sur une droite;

5° *Toutes les transversales d'un système de parallèles sont proportionnelles entre elles;*

6° *Toutes les transversales d'un système de polaires ne sont proportionnelles que pour autant qu'elles sont parallèles entre elles;*

7° *Si, dans deux systèmes de polaires à transversales proportionnelles, on remplace chaque transversale par une autre qui lui soit parallèle, les deux nouvelles transversales seront proportionnelles entre elles.*

Remarque. — Ces nouvelles transversales peuvent toujours être menées de manière qne les divisions de l'une soient respectivement égales aux divisions correspondantes de l'autre; nous les nommerons alors transversales égales.

172. — Quand nous déplacerons un système de polaires, ce sera toujours sans faire varier la grandeur d'aucun de ses éléments de sorte que le système primitif et le système déplacé seront toujours superposables. Cela posé :

Théorème. — 1° *Deux systèmes de polaires qui ont leurs angles consécutifs respectivement égaux, peuvent toujours être placés l'un sur l'autre, de manière que toutes les polaires du premier système coïncident respectivement avec leurs correspondantes du second système ;*

2° *Deux systèmes de polaires qui ont leurs angles consécutifs respectivement égaux, étant coupés respectivement par deux transversales proportionnelles, si l'on fait coïncider l'un des systèmes avec l'autre, les deux tranversales proportionnelles deviendront parallèles.* (171 6°).

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires proportionnels, deux angles consécutifs du premier système sont respectivement égaux à leurs correspondants du second système, tous les autres angles du premier système seront respectivement égaux à leurs correspondants du second système ;*

Corollaire II. — *Deux systèmes de polaires proportionnels ne sauraient avoir* *plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles, sans que toutes les polaires de l'un soient parallèles respectivement aux polaires de l'autre;*

COROLLAIRE III. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, ayant même pôle, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, sans que toutes les polaires de l'un coïncident respectivement avec les polaires de l'autre ;*

COROLLAIRE IV. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, si trois polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires à leurs correspondantes du second système, toutes les autres polaires du premier système sont respectivement perpendiculaires à leurs correspondantes du second système.*

173. — THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Deux systèmes de polaires, situés dans un même plan ou dans deux plans différents et qui se rencontrent sur une droite, étant coupés par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quelconques (chaque transversale et la polaire qui lui est parallèle appartenant à un même système), ces deux transversales seront toujours proportionnelles.*

Cela est évident, d'après les articles (83 et 84), pour le cas où les deux transversales partent d'un point de la droite sur laquelle se rencontrent les deux systèmes de polaires proposés; donc la propriété existe pour deux autres transversales quelconques respectivement parallèles aux deux transversales précédentes (171 7°.)

Le théorème analogue concernant un système de parallèles et un système de polaires qui se coupent sur une droite, se trouve à l'art. (171 3°.)

Du théorème précédent découlent les corollaires suivants :

COROLLAIRE I. — *Si deux systèmes de polaires se rencontrent sur une droite, en coupant l'un des deux systèmes par une transversale arbitraire, on pourra toujours couper l'autre système par une transversale proportionnelle ;*

COROLLAIRE II. — *Les côtés de deux angles quelconques, les bissectrices de ces angles et de leurs suppléments, constituent deux systèmes de quatre polaires qui sont proportionnels.*

Il suffira de prouver que l'on peut disposer l'un de ces systèmes de manière qu'il rencontre l'autre sur une droite. Or, en faisant coïncider la bissectrice de l'un des deux angles avec celle de l'autre angle, les bissectrices des suppléments de ces angles seront parallèles et les deux côtés du premier angle couperont les deux côtés du second en deux points, appartenant à une droite ayant même direction que les deux bissectrices parallèles.

Corollaire III. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra, dont chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une droite différente, sont tous proportionnels entre eux.*

Car ayant coupé le premier par une transversale quelconque, on pourra couper successivement les suivants par des transversales proportionnelles à celle du premier système.

Corollaire IV. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires, sont proportionnels, c'est-à-dire qu'ils peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles.*

Chacun des deux premiers systèmes coupant le troisième sur une droite, il suffit d'appliquer le coroll. I.

Corollaire V. — *La perspective, sur un plan quelconque, de deux systèmes de polaires proportionnels constitue deux autres systèmes de polaires également proportionnels et réciproquement.*

Ayant coupé les deux systèmes proposés respectivement par deux transversales proportionnelles, on pourra couper, d'après (173), la perspective de chaque système par une transversale proportionnelle à celle de ce système, puisque chaque système proposé et sa perspective se coupent sur une droite.

Corollaire VI. — *La perspective, sur un plan quelconque, d'un système de parallèles et d'un système de polaires proportionnels, constitue deux systèmes de polaires proportionnels.*

Corollaire VII. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont perspectivement proportionnelles, sont proportionnels; c'est-à-dire qu'ils jouissent de la propriété de pouvoir être coupés par des transversales proportionnelles.*

Car on peut faire une perspective des deux systèmes de polaires proposés, telle que les perspectives des deux transversales soient proportionnelles. Dès lors, les deux nouveaux systèmes, perspectives des deux systèmes proposés, étant proportionnels, les deux systèmes proposés le sont aussi d'après la réciproque du corol. V.

Corollaire VIII. — *La perspective, sur un plan quelconque, de deux systèmes de parallèles à transversales proportionnelles, constitue deux systèmes de polaires proportionnels.*

Car la perspective se compose de deux systèmes de polaires à transversales perspectivement proportionnelles; donc ces deux systèmes de polaires sont proportionnels en vertu du corollaire précédent. La démonstration de ce corollaire se fait plus facilement par l'art. (171 7°.)

174. — Propriété fondamentale. — *On peut toujours donner à l'un des deux systèmes de polaires proportionnels une position telle, qu'il coupe l'autre sur une droite.*

Démonstration. — Puisque les deux systèmes de polaires sont proportionnels, ils peuvent être coupés respectivement par deux transversales proportionnelles. Remplaçant ces deux premières transversales par deux autres, respectivement parallèles aux deux premières et égales entre elles (171 7°), et transportant l'un des deux systèmes, considéré comme système invariable, de manière à faire coïncider les divisions égales de ces deux nouvelles transversales, on amènera ainsi les deux systèmes de polaires à se couper sur une même droite. Donc, etc.

Si, dans cette position, on fait tourner l'un des deux systèmes autour de cette droite, et qu'on place l'œil sur la droite qui unit le pôle du système mobile avec celui du système fixe, les deux systèmes seront l'un la perspective de l'autre. On peut donc énoncer que :

Corollaire I. — *Deux systèmes de polaires proportionnels peuvent toujours être placés dans l'espace, de manière que l'un soit la perspective de l'autre.*

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, il y a toujours, dans l'un, deux polaires rectangulaires dont les correspondantes dans l'autre sont aussi rectangulaires.*

Cette propriété existe quand l'un des systèmes de polaires est déplacé de manière à couper l'autre sur une droite (92). Donc la même propriété existait avant le déplacement, puisque dans ce déplacement la grandeur de l'angle formé par deux polaires quelconques du système déplacé ne subit aucune variation.

175. — Théorème fondamental. — *Si l'on coupe respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, situés ou non dans un même plan, par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes quelconques, chaque transversale et la polaire qui lui est parallèle appartenant à un même système, ces deux transversales sont toujours proportionnelles.*

Démonstration. — La propriété existe si l'on déplace l'un des systèmes de manière à ce qu'il coupe l'autre sur une droite (174). Donc elle existe pour la position primitive des deux systèmes, car en ramenant le système déplacé dans sa position primitive, on n'altère pas le parallélisme entre la polaire et la transversale qui lui est parallèle, ni la grandeur des divisions de la transversale.

Corollaire I. — *Réciproquement, dans deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles, celles-ci sont toujours respectivement parallèles à deux polaires correspondantes.*

Ce que l'on démontre facilement par l'absurde, en se référant au théorème ci-dessus et à l'article (171 6°.)

Corollaire II. — *Étant donnés tant de systèmes de polaires proportionnels que l'on voudra, si l'on coupe le premier par une transversale arbitraire, on pourra toujours couper chacun des autres par une transversale proportionnelle à la transversale du premier système.*

Corollaire III. — *Deux systèmes de polaires sont proportionnels, s'ils sont respectivement proportionnels à deux autres systèmes de polaires proportionnels.*

Corollaire IV. — *Deux systèmes de polaires, respectivement proportionnels à un troisième système de polaires, sont proportionnels entre eux.*

Corollaire V. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont les transversales proportionnelles ne sont pas tracées, sont entièrement déterminés, lorsqu'on connaît trois polaires du premier système et leurs correspondantes dans le second système.*

Car en coupant respectivement ces deux systèmes de trois polaires par deux transversales respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, on connaîtra deux points de l'une des deux transversales proportionnelles et les deux points correspondants de l'autre. Donc (170 16°), etc.

176. — Théorème fondamental. — *Si l'on coupe deux systèmes de polaires proportionnels, situés ou non dans un même plan, par deux transversales quelconques qui ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, ces transversales sont alors perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — En effet, on peut toujours faire une perspective des deux systèmes de polaires et de leurs transversales, telle que les perspectives de celles-ci deviennent respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes quelconques données; dès lors, les perspectives de ces transversales seront proportionnelles, en vertu de (175), si l'on remarque que les deux nouveaux systèmes de polaires, perspectives des deux systèmes proposés, sont proportionnels (173, corol. 5.) Donc, etc.

Remarque. — Le tableau sur lequel les perspectives des deux transversales deviennent respectivement parallèles aux perspectives de deux polaires correspondantes, doit être parallèle au plan qui passe par l'œil et par deux points correspondants quelconques des deux transversales (points de rencontre de deux polaires correspondantes avec leurs transversales respectives). Ce qui revient à dire :

Pour que les perspectives de deux transversales ou de deux droites perspectivement proportionnelles deviennent proportionnelles, il faut que deux points correspondants des transversales passent ensemble à l'infini sur la perspective. (M. Chasles, *Géométrie supérieure*, page 84).

177. — Théorème. — *Deux droites perspectivement proportionnelles restent perspectivement proportionnelles de quelque manière qu'on déplace l'une ou l'autre, ou toutes les deux dans l'espace.*

Démonstration. — Car en prenant ces deux droites perspectivement proportionnelles dans leur position primitive, pour transversales de deux systèmes de polaires, ces deux systèmes seront proportionnels (173 corol. 7), et resteront proportionnels de quelque manière qu'on les déplace dans l'espace. Donc, les deux transversales qui sont transportées avec les deux systèmes restent aussi perspectivement proportionnelles (176.)

178. — Nous pouvons démontrer ici le théorème énoncé à l'art. (162.)

Théorème. — *La perspective sur un plan quelconque, de deux droites perspectivement proportionnelles, donne deux nouvelles droites perspectivement proportionnelles.*

Démonstration. — En prenant les droites proposées pour transversales respectives de deux systèmes de polaires, ceux-ci seront proportionnels (175, corol. 7). La perspective de ces deux systèmes de polaires et de leurs transversales, donne deux nouveaux systèmes de polaires proportionnels dont les transversales (perpectives des droites proposées), sont toujours (176), perpectivement proportionnelles. Donc, etc.

179. — Théorème. — *Deux droites perspectivement proportionnelles à une troisième, sont perspectivement proportionnelles entre elles.*

Démonstration. — En prenant trois points arbitraires pour pôles de trois systèmes de polaires ayant respectivement pour transversales les trois droites données, les deux systèmes qui ont pour transversales les deux premières droites seront proportionnels chacun au système qui a pour transversale la troisième droite; donc les deux premiers systèmes sont proportionnels entre eux, et, partant, leurs transversales, c'est-à-dire les deux premières droites, sont perspectivement proportionnelles entre elles (176.)

180. — On démontrerait de la même manière qu'à l'article précédent le théorème suivant :

Théorème. — *Deux droites sont perspectivement proportionnelles, lorsqu'elles sont respectivement proportionnelles ou perspectivement proportionnelles à deux autres droites perspectivement proportionnelles.*

181. — Théorème. — *Un système de parallèles* p' *et un système de polaires* p *ayant des transversales perspectivement proportionnelles, sont proportionnels; c'est-à-dire que l'on peut toujours remplacer les transversales données par d'autres transversales, proportionnelles entre elles.* (Fig. 40.)

Démonstration. — Par le point d'intersection o d'une parallèle avec la polaire qui lui correspond, menons deux nouvelles transversales *t*, *t'*, respectivement parallèles aux anciennes qui ne sont pas tracées sur la figure; les droites qui relieront *t* et *t'* concourront en un même point ω, à cause que t et t' sont perspectivement proportionnelles (180) et ont un point correspondant o commun (158). Si l'on mène par le point o la transversale T dans le système de polaires, de manière que le rapport des deux segments oa : ab soit égal au rapport des deux segments oa' : $a'b'$, je dis que T sera proportionnelle à t', car T et t' sont perspectivement proportionnelles et ont un point correspondant o commun; donc les droites qui relient T et t' concourent en un même point; mais deux de ces droites, savoir : aa', bb' sont parallèles à cause de l'égalité oa : ab = oa' : $a'b'$; donc toutes les droites qui relient T et t' sont parallèles et, partant, T et t' sont proportionnelles. Donc, etc.

182. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique quelconque passant par leurs pôles, sont proportionnels.*

Démonstration. — Si les deux systèmes de polaires se coupent sur une circonférence passant par les deux pôles, l'angle formé par deux polaires quelconques du premier système est évidemment égal à celui formé par les deux polaires correspondantes du second système. Donc (170 2°), ces deux systèmes sont proportionnels.

Maintenant deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique quelconque passant par leurs pôles sont proportionnels, comme étant les perspectives de deux systèmes de polaires proportionnels (174, corol. V), qui se coupent sur une circonférence.

D'où l'on déduit sans difficulté les corollaires :

Corollaire I. — *Tant de systèmes de polaires que l'on voudra étant donnés, si chaque système, depuis le premier jusqu'au dernier, coupe celui qui le suit immédiatement sur une section conique passant par leurs pôles, tous ces systèmes seront proportionnels entre eux.*

Corollaire II. — *Dans toute section conique, un système de diamètres et le système de diamètres respectivement conjugués aux premiers, constituent deux systèmes de polaires proportionnels de même pôle.*

En effet, les deux systèmes de diamètres sont respectivement parallèles à deux systèmes de cordes supplémentaires, lesquelles constituent deux systèmes de polaires proportionnels; donc, d'après (170 9°), la même propriété existe pour les deux systèmes de diamètres.

§ II.

183. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels* p, p′, *dont deux polaires correspondantes coïncident avec la ligne des pôles, représentent dans l'espace un plan, si l'on prend pour ligne de terre une perpendiculaire à la ligne des pôles.*

Démonstration. — Coupons les deux systèmes par une même transversale parallèle à la droite qui unit les deux pôles, et représentons par a, b, c, etc., les points de rencontre des polaires du premier système avec la transversale, et par a', b', c', etc., les points de rencontre des polaires du second système avec la même transversale; d'après (175) on a :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = \text{etc.};$$

à cause de cette proportion, les points de l'espace (a, a'), (b, c'), (c, c') etc., sont sur une même droite, et les deux systèmes de polaires représentent dans l'espace un plan passant par cette droite et par le point (p, p'). Donc, etc.

L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B, étant une droite, on a :

Corollaire. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont une paire de polaires correspondantes coïncident avec la ligne des pôles, se coupent sur une droite.*

184. — On démontrera facilement que :

Théorème. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente et à transversales proportionnelles, représentent, pour une ligne de terre quelconque, un plan dans l'espace, si l'on fait abstraction des transversales.*

L'intersection de ce plan avec le plan bissecteur B, étant une droite, on a :

Corollaire I. — *Deux systèmes de parallèles de direction différente et à transversales proportionnelles, se coupent sur une droite.*

Corollaire II. — *Deux systèmes de parallèles, dont les transversales sont parallèles et reliées par un système de polaires, se coupent sur une même droite.*

Car les deux transversales de ces deux systèmes de parallèles sont proportionnelles. Donc, etc.

185. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels représentent un hyperboloïde à une nappe, pour toute ligne de terre non perpendiculaire à la ligne des pôles.*

Démonstration. — Soient t et t' les transversales proportionnelles des deux systèmes de polaires proposés p, p'; par le point d'intersection n de deux polaires correspondantes quelconques, menons deux nouvelles transversales T T', respectivement parallèles aux premières transversales t, t'.

Puisque les nouvelles transversales sont proportionnelles et qu'elles ont un point n correspondant commun, le système de droites reliant ces nouvelles transversales est un système de parallèles (146). Donc, en prenant une ligne de terre quelconque perpendiculaire à ces parallèles, les deux systèmes de polaires p, p' représentent un hyperboloïde à une nappe, dont les trois directrices sont : 1°. la perpendiculaire (p) au plan horizontal de projection; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite de l'espace (T, T').

S'il arrivait que la ligne de terre fût aussi perpendiculaire à la ligne des pôles, alors les deux systèmes de polaires représenteraient un plan (55).

Puisque deux systèmes de polaires proportionnels représentent un hyperboloïde à une nappe, on peut dire (120) que le lieu géométrique, intersection de deux systèmes de polaires proportionnels, passe par les deux pôles, et qu'il est la projection double d'une section faite dans un hyperboloïde à une nappe, par le plan bissecteur B; et comme l'hyperboloïde à une nappe ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points, il en doit être de même d'une de ses sections planes et d'une projection de ces sections. Donc on peut énoncer que :

1° *Le lieu géométrique, intersection de deux systèmes de polaires proportionnels, ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points.*

D'un autre côté, comme l'hyperboloïde à une nappe ne saurait avoir plus de deux génératrices d'un même mode de génération parallèles au plan bissecteur B, il en résulte aussi que :

2° *Deux systèmes de polaires proportionnels ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes parallèles;*

3° *Deux systèmes de polaires proportionnels, ayant même pôle, ne sauraient avoir plus de deux paires de polaires correspondantes qui coïncident.*

186. — Comme il sera démontré que deux systèmes de polaires proportionnels se coupent toujours sur une section conique passant par les deux pôles, on peut, eu égard à (74) énoncer que :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncident avec la ligne des pôles, représentent un cône du second degré pour toute ligne de terre perpendiculaire à la ligne des pôles.*

187. — Deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, pouvant être considérés comme respectivement parallèles à deux autres systèmes de polaires proportionnels dont les pôles ne coïncident pas, et ces deux derniers systèmes représentant un cône pour toute ligne de terre perpendiculaire à leur ligne des pôles, on en conclut facilement que :

THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, qui ont même pôle, représentent un cône du second degré dont le sommet est dans le plan bissecteur* B, *si la droite prise pour ligne de terre n'est pas perpendiculaire à une paire de polaires correspondantes qui peuvent coïncider dans les deux systèmes.*

188. — THÉORÈME. — *Deux systèmes de polaires proportionnels p, p', dont une paire de polaires correspondantes sont parallèles, représentent un paraboloïde hyperbolique, pour toute ligne de terre perpendiculaire à ces deux polaires.*

DÉMONSTRATION. — En effet, en coupant les deux systèmes par une transversale parallèle aux deux polaires correspondantes dont il s'agit, cette transversale rencontrera en a, b, c, etc., les polaires du système p, et en a', b', c', etc., les polaires correspondantes du système p'; et l'on a (175) :

$$ab : a'b' = bc : b'c' = cd : c'd' = \text{etc.}$$

Cela posé, les trois directrices du paraboloïde sont : 1° la perpendiculaire (p) au plan horizontal; 2° la perpendiculaire (p') au plan vertical; 3° la droite ($a\ b\ c$, etc., $a'\ b'\ c'$, etc.) située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre. La surface est un paraboloïde, parce que ses trois directrices sont toutes parallèles à un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

189. — *Si un système de parallèles et un système de polaires sont proportionnels, on peut faire représenter à ces deux systèmes un paraboloïde hyperbolique.*

Démonstration. — Puisque les deux systèmes sont proportionnels, on peut les couper respectivement par deux transversales qui soient proportionnelles et qui aient de plus un point correspondant commun; dès lors, les droites qui relient les deux transversales sont parallèles. Cela posé, si l'on prend une ligne de terre perpendiculaire à ces dernières parallèles, les deux systèmes de l'énoncé représenteront, d'après (68), un paraboloïde hyperbolique.

§ III.

190. — Théorème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, si, par le point d'intersection* n *de deux polaires correspondantes, on mène deux transversales respectivement parallèles à deux autres polaires correspondantes :*

1° *Les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de parallèles* (fig. 17). *La direction de ces parallèles, pour un même point* n, *varie avec les deux polaires correspondantes, auxquelles les transversales sont parallèles, et, les deux polaires correspondantes restant les mêmes, cette direction varie aussi avec le point* n;

2° *Si les deux transversales partant du point d'intersection* n *de deux polaires correspondantes ne sont pas respectivement parallèles à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de polaires* (fig. 19). [V. Géom. de M. Steiner, p. 88, de M. Chasles, p. 72];

3° *Si, dans les deux cas précédents, les deux transversales ne partent pas du point d'intersection de deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces deux transversales sont, dans le* 1er *cas, tangentes à une même parabole, et, dans le* 2d *cas, tangentes à une même section conique, autre qu'une parabole.*

Démonstration. — Dans le 1er cas, les deux transversales sont proportionnelles (175), et il est facile de voir qu'elles ont un point correspondant n commun; donc (146) les droites qui relient ces deux transversales constituent un système de parallèles.

Maintenant si la direction de ces parallèles était la même que celle des parallèles qui relient deux nouvelles transversales partant du même point n, et respectivement parallèles à deux nouvelles polaires correspondantes, en prenant une ligne de terre perpendiculaire à cette direction, on verrait facilement que les deux systèmes de polaires proposés représenteraient un plan et devraient ainsi se couper sur une ligne droite. Donc, hormis le cas particulier où les systèmes de polaires se coupent sur une droite, la direction dont il s'agit ne peut pas rester la même. De la même manière on ferait voir que cette direction change avec le point d'intersection des deux polaires correspondantes par lequel les transversales auront été menées.

Dans le 2^d cas, les deux transversales sont perspectivement proportionnelles (176), et elles ont un point correspondant n commun. Donc (158), etc.

Dans le 3^e cas, les deux transversales sont toujours perspectivement proportionnelles, mais elles n'ont pas de point correspondant commun. Donc (164), etc.

Remarque. — Étant données, dans deux systèmes de polaires proportionnels, trois polaires du premier système et les trois polaires correspondantes du second, si l'on trace une quatrième polaire quelconque dans le premier système, on pourra, au moyen de la propriété 2°, construire, à l'aide de la règle seulement, sa polaire correspondante dans le second système.

191. — Remarque. — Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncide avec la ligne des pôles, renferment chacun une polaire qui est correspondante de la ligne des pôles; ces deux polaires, qui ne sont pas correspondantes, seront nommées indifféremment polaires correspondantes de la ligne des pôles, ou *polaires principales*.

192. — Problème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels étant placés d'une manière quelconque dans un même plan, on demande de quelle quantité angulaire il faut faire tourner l'un d'eux autour de son pôle pour qu'il coupe l'autre sur une droite.*

Solution. — Ayant construit la polaire principale d'un des deux systèmes (190, remarque), il suffira de faire tourner ce système autour de son pôle jusqu'à ce que sa polaire principale vienne coïncider avec la ligne des pôles. Dès lors les deux systèmes se trouvent dans le cas du corollaire de l'art. (183) et se coupent sur une droite.

193. — Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, deux polaires correspondantes quelconques étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces deux transversales concourent toujours au point d'intersection des deux polaires principales* (fig. 18). [V. Géom. de M. Steiner, p. 89 [1].]

Démonstration. — Il résulte d'abord du théorème (190, 2°) que les droites qui relient les transversales mentionnées à l'énoncé, forment un système de polaires, c'est-à-dire concourent en un même point. Ce point de concours doit se trouver à l'intersection des deux polaires principales, parce que chacune de celles-ci relie deux points correspondants des deux transversales, ce dont il est facile de s'assurer, en remarquant que la ligne des pôles, considérée comme polaire d'un système, est rencontrée, par sa transversale, au pôle de l'autre système, donc en un point de la polaire principale de cet autre système.

Remarque. — Les droites qui relient les deux transversales mentionnées au théorème seront parallèles, si les deux polaires principales sont parallèles.

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires proportionnels, on considère deux paires de polaires correspondantes quelconques, les deux points d'intersection des polaires non correspondantes se trouvent sur une droite passant par le point d'intersection des deux polaires principales* (V. Géom. de M. Chasles, p. 75.);

Autrement : dans deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on considère le quadrilatère intercepté par deux polaires quelconques du premier système et par les deux polaires correspondantes du second, celle des deux diagonales de ce quadrilatère qui ne passe pas par les points d'intersection des polaires correspondantes,

[1] La géométrie de M. Steiner a pour titre : *Systematische Entwickelung der abhaengigkeit geometrischer Gestalten von einander*. Berlin, 1832.

passe toujours par le point d'intersection des deux polaires principales (fig. 20).

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires proportionnels, si, après avoir mené une droite quelconque par le point d'intersection des deux polaires principales, l'on construit deux polaires qui se coupent sur cette droite, les deux polaires respectivement correspondantes de celles-là se couperont également sur la même droite.*

194. — Comme application de l'art. précédent, nous citerons la proposition suivante :

Proposition. — *Quand trois angles soustendent une même corde, pris deux à deux, ils en soustendent une seconde, et les trois cordes ainsi déterminées concourent en un même point.* (M. Chasles, *Géométrie supérieure*, p. 76.)

Démonstration. — Désignons par p, p' les extrémités de la corde qui soustend les trois angles, et considérons les deux systèmes de trois polaires p, p', qui se coupent aux sommets des trois angles proposés. Ces deux systèmes de polaires étant proportionnels (170, 13°), si on leur applique l'énoncé du premier corollaire (193), après avoir remarqué que les deux côtés d'un même angle constituent une paire de polaires correspondantes, on en déduira la proposition qu'il s'agit de démontrer.

§ IV.

195. — En remarquant que deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles sont proportionnels, et que chaque point de la conique est un point d'intersection de deux polaires correspondantes, on peut donner à l'énoncé du théorème (190) la forme suivante, sous laquelle il est utile de les connaître :

Théorème. — 1° *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique passant par les pôles, les droites qui relient deux transversales menées par un point* n *de la conique, parallèlement à deux polaires correspondantes quelconques, constituent un système de parallèles, dont la direction n'est pas celle de la ligne des pôles* (fig. 17);

2° *Si les transversales menées par un point* n *de la conique ne sont pas res-*

pectivement parallèles à deux polaires correspondantes, les droites qui relient ces transversales constituent un système de polaires dont le pôle ne se trouve pas sur la ligne des pôles des deux systèmes proposés (fig. 19);

3° *Si dans les deux cas précédents, les deux transversales ne partent pas d'un point de la conique, les droites qui les relient sont tangentes à une autre section conique à laquelle sont aussi tangentes les deux transversales.*

196. — Remarque. — Lorsque deux systèmes de polaires se coupent sur une section conique passant par les deux pôles, il est facile de voir que si l'une de deux polaires correspondantes devient tangente en l'un des pôles, l'autre coïncide avec la ligne des pôles. On peut donc dire, eu égard à la remarque (191), que :

Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles, les deux polaires principales sont tangentes à la conique aux deux pôles respectivement.

197. — D'après cette remarque, le théorème (193) et ses corollaires peuvent s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *Dans deux systèmes de polaires qui se rencontrent sur une section conique passant par leurs pôles, deux polaires correspondantes quelconques étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces deux transversales concourent toujours au point d'intersection des deux polaires principales* (fig. 18).

Corollaire I. — *Si, dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par les pôles, on considère deux paires de polaires correspondantes quelconques, les deux points d'intersection des polaires non correspondantes se trouvent sur une droite passant par le sommet des deux polaires principales* (fig. 20).

Remarque. — Cette propriété donne le moyen de construire, par la règle seulement, le point d'intersection des deux polaires principales. Il suffit, en effet, pour cela de connaître trois paires de polaires correspondantes des deux systèmes.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, si, après avoir mené une droite quelconque par le sommet des deux polaires principales, l'on construit deux polaires qui se coupent* *sur cette droite, les deux polaires respectivement correspondantes de celles-là se couperont également sur la même droite.*

Corollaire III. — *Dans deux systèmes de polaires ayant leurs pôles aux extrémités d'un diamètre d'une section conique et se coupant sur cette courbe, deux polaires correspondantes étant prises pour transversales réciproques des deux systèmes, les droites qui relient ces transversales forment un système de parallèles dont la direction ne change pas, quelles que soient les deux polaires correspondantes prises pour transversales.*

Dans ce cas, les deux polaires principales sont parallèles comme tangentes aux extrémités du diamètre. Donc (197), etc.

§ V.

198. — Application. — *Connaissant cinq points d'une section conique, on demande de construire graphiquement d'autres points de la même courbe, en ne faisant usage que de la règle.*

Solution. — Il suffit de prendre deux des cinq points pour pôles de deux systèmes de polaires proportionnels se coupant aux trois autres points, et de construire, au moyen de la remarque (190), tant de paires de polaires correspondantes que l'on voudra avoir de points nouveaux. L'intersection de chaque paire de polaires correspondantes sera un point de la conique.

199. — Le théorème (195) conduit directement à la célèbre propriété de l'hexagone de Pascal, à savoir que :

Proposition. — *Dans tout hexagone inscrit à une section conique, les points de concours des côtés respectivement opposés sont en ligne droite* (fig. 22).

Soient, en effet, 1, 2, 3, 4, 5, 6, les sommets consécutifs de l'hexagone. En prenant les deux sommets de rang impair 1, 3, pour pôles de deux systèmes de polaires qui se coupent aux trois sommets de rang pair, ces deux systèmes de polaires seront proportionnels (182). Coupons le système dont le pôle est au point 1 par la transversale 5 — 4 ou t^1, et le système dont le pôle est au point 3, par la transversale 5 — 6 ou t^3; ces deux transversales partant d'un même point 5 de la conique, les droites qui les relient doivent former un système de polaires, et conséquemment concourir en un même point.

Or, a, b, c sont les points où les trois polaires 1—2, 1—4, 1—6 rencontrent leur transversale t^1; et a', b', c' sont les points où les trois polaires respectivement correspondantes 3—2, 3—4, 3—6 rencontrent leur transversale t^3; et puisque les trois droites aa', bb', cc', dont chacune relie deux points correspondants de ces deux transversales, doivent concourir en un même point, il faut que le point o, intersection de bb' avec cc', se trouve sur aa'. Or, les trois points a, o, a' sont précisément, comme l'indique la figure, les points de concours des côtés respectivement opposés de l'hexagone. Donc, etc. :

200. — Proposition. — Si, dans la figure précédente, on coupe le système de polaires dont le pôle est au point 1, par la transversale 5—6 et le système de polaires dont le pôle est au point 3, par la transversale 5—4, on sera conduit, en appliquant le théorème (195, 2°), à la proposition suivante :

Dans un hexagone inscrit à une section conique, deux paires quelconques de côtés opposés, suffisamment prolongés, forment un quadrilatère dont une diagonale est en même temps diagonale de l'hexagone. Cela posé, l'autre diagonale du quadrilatère et les deux autres diagonales de l'hexagone se coupent toujours en un même point (fig. 30).

D'où il résulte comme corollaire :

Dans les trois quadrilatères, dont chacun est formé par deux paires de côtés opposés prolongés d'un hexagone inscrit à une section conique, celles de leurs diagonales, qui sont en même temps diagonales de l'hexagone, interceptent un triangle qui est inscrit à celui intercepté par les trois autres diagonales des trois quadrilatères.

201. — Si l'hexagone inscrit à une conique se déforme, de façon que les côtés de rang pair deviennent tangents à la courbe, la proposition (199) conduit à la suivante :

Proposition. — *Dans tout triangle inscrit à une section conique, les points d'intersection de chaque côté avec la tangente menée par le sommet opposé à ce côté, sont trois points en ligne droite.*

Réciproquement, si l'on coupe les côtés d'un triangle par une transversale quelconque, les droites qui relient respectivement les points d'intersection avec les sommets opposés, sont tangentes à une même section conique, circonscrite au triangle.

La première de ces propriétés donne la solution du problème suivant: *Connaissant trois points d'une section conique et les tangentes en deux de ces points, construire la tangente au troisième point.*

202. — Proposition. — *Si les trois points de concours des côtés respectivement opposés d'un hexagone sont en ligne droite, l'hexagone est inscrit à une section conique.*

En faisant abstraction de la conique (fig. 22), si l'on considère les deux mêmes systèmes de polaires et les deux mêmes transversales que dans la proposition (199), on trouvera que les transversales de ces deux systèmes sont reliées par un troisième système de polaires, dont le pôle est en *o*, donc, d'après (216 corol. IV), ces deux systèmes de polaires se coupent sur une conique qui passe par les deux pôles et par le sommet des deux transversales, c'est-à-dire que tous les sommets de l'hexagone se trouvent sur cette conique.

203. — Les côtés d'un quadrilatère inscrit à une section conique forment, avec les deux diagonales, six systèmes de deux polaires, dont deux quelconques ont leurs pôles sur la conique et se coupent sur la même conique.

Si, en ne considérant que les quatre systèmes qui ont, deux à deux, leurs pôles aux extrémités d'un même côté du quadrilatère, on applique à ces systèmes, pris deux à deux, l'énoncé du théorème (197 corol. I), on aura, eu égard à la remarque (196), la proposition suivante :

Proposition. — *Si un quadrilatère inscrit à une section conique a ses sommets aux points de contact des côtés d'un quadrilatère circonscrit :*

1° *Les quatre diagonales des deux quadrilatères se croisent en un même point;*

2° *Les diagonales du quadrilatère circonscrit passent respectivement par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

§ VI.

204. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles et dont les pôles sont sur une droite qui relie deux points correspondants, se coupent sur une droite.*

Démonstration. — Les deux systèmes sont proportionnels (173, corol. VII) et ils ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident avec la ligne des pôles; donc, ils se coupent sur une droite (183, corol.).

Corollaire I. — Dans le cas particulier où les deux pôles coïncident respectivement avec deux points correspondants, on a ce corollaire :

Deux systèmes de polaires dont les transversales sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles et dont les pôles coïncident avec deux points correspondants des transversales, se coupent toujours sur la même droite, quels que soient les deux points correspondants pris pour pôles, et cette droite rencontre les transversales en deux points dont les correspondants coïncident avec le sommet des deux transversales. (V. Géom. de M. Steiner, p. 87.)

Il résulte du théorème ci-dessus que ces deux systèmes de polaires se coupent d'abord sur une droite, quels que soient les points correspondants que l'on ait choisis pour pôles. Après cela, si l'on remarque que le point, où cette droite rencontre chaque transversale, est l'intersection de deux polaires correspondantes dont l'une passe par le sommet des deux transversales, on s'assurera que cette droite rencontre, en effet, les transversales en deux points dont les correspondants coïncident avec le sommet des transversales, et comme ces deux points sont uniques sur les deux transversales, la propriété est démontrée.

Corollaire II. — La droite d'intersection des deux systèmes de polaires qui nous occupent ne variant pas avec les deux points correspondants choisis pour pôles, on en déduit ce corollaire :

Si deux droites sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, deux droites qui relient inversement deux paires quelconques de points correspondants se coupent toujours sur une même droite, qui rencontre les deux droites proposées en deux points, dont les correspondants coïncident avec le point d'intersection des deux droites proposées. (V. Géom. de M. Chasles, p. 73.)

15

205. — Proposition. — Si, dans le corollaire précédent, on ne donne que trois points d'une des deux droites perspectivement proportionnelles et les trois points correspondants de l'autre, (ce qui est le cas (161, 2°) de deux droites sur chacune desquelles on prend trois points quelconques, et où l'on considère dans un ordre arbitraire les trois points de la première, comme respectivement correspondants des trois points de la seconde), en construisant chaque couple de droites qui relient inversement deux paires de points correspondants, on aura un hexagone inscrit aux deux droites proposées, dans lequel chaque couple de droites qui relient inversement deux paires de points correspondants, constitue ce que l'on nomme deux côtés opposés de l'hexagone.

On peut donc énoncer que :

Dans un hexagone inscrit à deux droites, les trois points de concours des côtés respectivement opposés sont en ligne droite.

206. — Application. — *Une section conique étant donnée par cinq tangentes, construire le point de contact de chacune de ces tangentes.*

Solution. — Deux quelconques t, t' de ces tangentes étant divisées par les trois autres en parties perspectivement proportionnelles, il suffit de construire, d'après (204, corol. II), sur chacune des deux tangentes t, t', le point correspondant de leur point d'intersection. Chaque point correspondant de ce point d'intersection est un point de contact (165, corol.).

207. — Théorème. — *Quatre droites, reliant chacune une paire de points correspondants de deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, forment avec ces deux dernières un hexagone dont les trois diagonales se rencontrent en un même point.* (V. Géom. de M. Steiner, p. 90.)

Démonstration. — Soient (*fig.* 14), *abcd*, *a'b'c'd'* les deux droites perspectivement proportionnelles. Les droites dont chacune relie deux points correspondants sont *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'*. L'hexagone formé par ces six droites est *cp'pa'd'd*. Les trois diagonales sont : *pd*, *p'd'*, *ca'*. Cela posé, prenons les deux droites proposées *abcd*, *a'b'c'd'* pour transversales de deux systèmes de polaires p, p'. Comme les pôles ainsi choisis se trouvent sur une droite *bb'*, qui relie deux points correspondants, il résulte du théorème (204) que les deux systèmes de polaires se coupent sur une droite.

Donc, les trois points c, m, a', dont chacun est l'intersection de deux polaires correspondantes, sont en ligne droite.

Or, cette droite cma' est une diagonale, et les deux polaires correspondantes pd, $p'd'$, qui se coupent en un point m de cette droite, sont les deux autres diagonales de l'hexagone, et comme elles se coupent toutes trois au point m, le théorème est démontré.

208. — Proposition. — Puisque, dans un hexagone circonscrit à une section conique, deux côtés quelconques sont divisés en parties perspectivement proportionnelles par les quatre autres (165), on peut appliquer à cet hexagone le théorème précédent et l'on en déduit directement l'énoncé suivant du théorème de Brianchon, savoir :

Dans tout hexagone circonscrit à une section conique, les trois diagonales se coupent en un même point (fig. 14).

209. — Si l'hexagone cirsconcrit à une conique se déforme de manière que les côtés de rang pair viennent coïncider respectivement avec les côtés de rang impair, la proposition précédente deviendra :

Proposition. — *Dans tout triangle circonscrit à une section conique, les trois droites dont chacune joint un sommet avec le point de contact du côté opposé se coupent en un même point.*

Réciproquement trois droites menées d'un même point aux sommets d'un triangle, rencontrent les côtés opposés en trois points qui sont les points de contact d'une section conique inscrite au triangle.

La première de ces propriétés donne la solution du problème suivant :

Problème. — *Connaissant trois tangentes d'une section conique et les points de contact de deux de ces tangentes, construire le point de contact de la troisième.*

210. — Problème fondamental. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, on demande de construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident.*

Solution. — Nous conviendrons d'abord de représenter un système de polaires dont le pôle est p, et dont les polaires passent respectivement par des points donnés a, b, c, etc., par ($p — abc$, etc.). Cela posé, soit p le pôle commun aux deux systèmes de polaires proportionnels proposés. Décrivons une circonférence de cercle passant par le pôle p, laquelle coupera en des points a, b, c, etc. les polaires du premier système et en des points a', b', c', etc. les polaires respectivement correspondantes du second système. Comme la circonférence fait ici office de transversale, nous conviendrons de nommer points correspondants les points dans lesquels elle coupe deux polaires correspondantes. Ainsi, a et a' sont deux points correspondants de la circonférence, ainsi que b et b', c et c', etc.

D'après la convention faite ci-dessus, nous écrirons les deux systèmes de polaires proposés comme il suit : $(p - abc$, etc.), $(p - a'b'c'$, etc.), (*fig.* 21).

En considérant maintenant les deux systèmes de polaires auxiliaires $(a - a'b'c'$, etc.), $(a' - abc$, etc.) dont les pôles sont, comme l'indique la notation, en deux points correspondants de la circonférence, on reconnaît facilement, d'après (182), que le système auxiliaire $(a - a'b'c'$, etc.) et le système primitif $(p - a'b'c'$, etc.) sont proportionnels, de même que le système auxiliaire $(a' - abc$, etc.) et le système $(p - abc$, etc.). Donc, les deux systèmes auxiliaires sont proportionnels entre eux (175, corol. III) et comme ils ont deux polaires correspondantes aa' et $a'a$ qui coïncident, ils doivent se couper sur une droite. Maintenant il est facile de s'assurer que si cette droite rencontre la circonférence en un point, les deux systèmes de polaires proposés p ont une paire de polaires correspondantes qui coïncident et qui passent par ce même point.

Donc, selon que la droite mn, intersection des deux systèmes de polaires auxiliaires, rencontre en un ou en deux points la circonférence, les deux systèmes de polaires proposés auront une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident. Si la droite ne rencontre pas la circonférence, les deux systèmes proposés n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident. (V. Géom. de M. Steiner, p. 174.)

La solution précédente resterait la même si, au lieu d'une circonférence, on faisait usage de toute autre section conique.

Comme les deux paires de polaires correspondantes qui peuvent coïncider dans deux systèmes de polaires proportionnels de même pôle, sont uniques, il s'ensuit que la droite sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires auxiliaires mentionnés plus haut est unique aussi et ne change pas, quels que soient les deux points correspondants que l'on choisisse pour pôles de ces deux systèmes auxiliaires. De cette dernière considération découle ce corollaire :

Corollaire. — *Deux systèmes de polaires proportionnels et de même pôle étant coupés par une circonférence de cercle ou par une section conique quelconque passant par le pôle, deux droites qui relient inversement deux paires quelconques de points correspondants, se coupent toujours sur une même ligne droite.*

La même propriété appartient à deux systèmes de polaires proportionnels que l'on couperait par une section conique quelconque passant par les deux pôles.

211. — Problème. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de polaires correspondantes parallèles.*

Solution. — Soient p, p' les deux systèmes de polaires proportionnels; au pôle p je construis un système auxiliaire de polaires respectivement parallèles aux polaires du système p'. Le système auxiliaire et le système p' étant proportionnels (170, 3°), le système auxiliaire et le système p qui ont le même pôle p, sont également proportionnels, et la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes p, sont précisément la polaire ou les deux polaires du système p qui sont parallèles à leurs correspondantes du système p'. Si les deux systèmes p n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux systèmes proposés n'ont pas non plus de polaires correspondantes parallèles.

212. — Problème. — *Étant données deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, on demande de mener, par un point donné, une droite qui rencontre les deux premières en deux points correspondants.*

Solution. — Considérons deux systèmes de polaires ayant pour pôle commun le point donné et pour transversales respectives les deux droites données. Si ces deux systèmes de polaires ont une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident, chaque paire rencontrera les deux droites proposées en deux points correspondants. Donc, d'après (210), il peut y avoir une, deux ou pas de solution.

213. — Application. — *Connaissant cinq tangentes d'une section conique, on*

demande de mener, par un point donné, une sixième tangente à cette courbe.

Solution. — Deux des cinq tangentes étant divisées par les trois autres en parties perspectivement proportionnelles (165), tout se réduit à mener, par le point donné, une droite qui rencontre les deux premières tangentes en deux points correspondants (212).

214. — Problème fondamental. — *Ayant placé arbitrairement l'une sur l'autre deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, on demande de trouver, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de points correspondants qui coïncident.*

Solution. — Soient t, t', les deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles placées sur une même droite D. On prendra un point arbitraire p, en dehors de la droite D, pour pôle de deux systèmes de polaires proportionnels pt, pt'; on construira, d'après (210), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans ces deux systèmes. Chaque paire de polaires correspondantes qui coïncident, rencontre la droite D en un point qui est la réunion de deux points correspondants des deux droites proposées t, t'. Si les deux systèmes de polaires pt, pt' n'ont pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux droites t, t' n'auront pas non plus de points correspondants qui coïncident.

215. — Application. — *Construire parallèlement à une droite* D, *la tangente à une section conique dont on connaît cinq tangentes.*

Solution. — Deux quelconques des cinq tangentes étant divisées en parties perspectivement proportionnelles par les trois autres, soient a, b, c, les points de division de la première, et a', b', c' les points de division correspondants de la seconde. Par les points de division a, b, c, menons trois droites parallèles à D; ces parallèles rencontrent la tangente $a'b'c'$ en trois points a'', b'', c''. Les deux droites $a'b'c'$ et $a''b''c''$ sont évidemment perspectivement proportionnelles (179) et tout se réduit à construire, s'il y a lieu, la paire ou les deux paires de points correspondants qui peuvent coïncider sur ces deux droites. Par chaque paire de points correspondants qui coïncident menant une parallèle à la droite D, cette parallèle sera la tangente demandée.

216. — Théorème. — *Deux systèmes de polaires proportionnels, dont aucune paire de polaires correspondantes ne coïncide avec la ligne des pôles, se coupent toujours sur une section conique passant par les deux pôles, ou, en d'autres mots, l'intersection de deux systèmes de polaires proportionnels est une perspective du cercle.*

La section conique sera une parabole si les deux systèmes ont une paire de polaires correspondantes parallèles; une hyperbole, si les deux systèmes ont deux paires de polaires correspondantes parallèles; et une ellipse dans tous les autres cas.

Pour démontrer cette réciproque du théorème (182) nous avons besoin de quelques notions préliminaires :

1° Si par une droite δ, perpendiculaire à la ligne de terre et située dans le plan bissecteur B', on mène arbitrairement un plan, les deux traces de ce plan seront également inclinées sur la ligne de terre, et, après le rabattement du plan vertical de projection, elles se trouveront être l'une le prolongement de l'autre (25). D'où l'on conclut que :

2° Si au point de rencontre de la droite δ avec la ligne de terre, on trace dans le plan horizontal un système de polaires, la perspective de ces polaires sur le plan vertical de projection, pris pour tableau, l'œil étant placé sur la droite δ, sera un autre système de polaires, qui coïncideront respectivement avec les polaires du système proposé, quand on aura rabattu le plan vertical de projection sur le plan horizontal;

3° Étant donnés deux systèmes de polaires dont les polaires du premier système sont respectivement parallèles aux polaires du second, si l'on fait tourner l'un de ces systèmes autour de son pôle d'une quantité angulaire quelconque, il coupera l'autre, demeuré fixe, sur une circonférence de cercle passant par les deux pôles.

Cela posé, soient p, p' deux systèmes de polaires proportionnels (*fig.* 23), nous allons prouver qu'il existe toujours un tableau et une position de l'œil pour lesquels les perspectives de ces systèmes se coupent sur une circonférence de cercle, passant par les perspectives des deux pôles p, p'.

Pour cela, faisons d'abord tourner le système p autour de son pôle, jusqu'à ce qu'il coupe le système p' sur une droite (192) que nous désignerons par D. Représentons le système p, dans cette nouvelle position, par pD. Par le pôle p menons une droite D' parallèle à D; prenons le plan vertical élevé suivant D' pour tableau, et plaçons l'œil dans le plan vertical élevé suivant D, en un point o, tel que la droite op soit perpendiculaire à la ligne de terre D' et située dans le plan bissecteur B'.

Voyons maintenant ce que seront, pour ces positions de l'œil et du tableau, les perspectives des trois systèmes de polaires p, pD et p'.

D'après (2°) les deux systèmes p et pD, qui ont même pôle p, coïncideront avec leurs perspectives après le rabattement du tableau.

Les perspectives des deux systèmes pD et p' seront deux systèmes de polaires parallèles, par la raison que la perspective de la droite D se trouvera à l'infini.

En désignant par π la perspective du pôle p', nous pouvons dire que la perspective des trois systèmes, le tableau étant rabattu, se compose des deux systèmes p, pD, qui sont eux-mêmes leurs perspectives, et du système π qui est parallèle au système pD. Or, les systèmes pD et π étant parallèles et le système p étant le résultat d'une rotation du système pD autour de son pôle, il résulte de (3°) que les deux systèmes p et π se coupent sur une circonférence de cercle passant par p et π. Or, le pôle p est lui-même sa perspective, et π est la perspective du pôle p'; donc, etc.

Corollaire I. — *Deux systèmes de parallèles dont les transversales sont perspectivement proportionnelles se coupent sur une section conique.*

En faisant la perspective des deux systèmes de parallèles, on aura deux systèmes de polaires proportionnels qui se couperont sur une conique et il est facile d'en conclure que les deux systèmes de parallèles doivent se couper également sur une conique. Les deux systèmes de parallèles ne sauraient, d'ailleurs, se couper sur une droite, car, dans ce cas, leurs transversales seraient proportionnelles, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire II. — *Dans deux systèmes de polaires qui se coupent sur une conique passant par leurs pôles, si un troisième système de polaires est parallèle à l'un des deux premiers* (44), *il coupera l'autre sur une conique passant par le pôle de cet autre et par son propre pôle.*

Corollaire III. — *Si deux systèmes de polaires se coupent sur une conique passant par leurs pôles, deux autres systèmes de polaires, respectivement parallèles aux deux premiers, se couperont également sur une conique passant par leurs pôles.*

Corollaire IV. — *Deux systèmes de polaires, dont les transversales sont reliées par un troisième système de polaires ou par un système de parallèles, se coupent sur une section conique qui passe par leurs pôles et par le sommet des deux transversales.*

La conique passe par le sommet des deux transversales, parce que les deux polaires qui se coupent à ce sommet sont évidemment deux polaires correspondantes.

Corollaire V. — *Étant donnés deux systèmes de polaires qui se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, si un troisième système de polaires coupe l'un des deux premiers sur une droite, il coupera l'autre sur une section conique passant par le pôle de cet autre système et par son propre pôle.*

217. — Application. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels* p, p', *trouver le point de rencontre d'une droite* D *avec la section conique sur laquelle se coupent les deux systèmes de polaires proposés.*

Solution. — Si l'on construit un système auxiliaire de polaires, ayant pour pôle p', et coupant le système p sur la droite D, on aura ainsi deux systèmes de polaires, ayant même pôle p', et qui sont proportionnels, comme étant chacun proportionnel au système p. La paire de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes p', polaires que l'on construira d'après (210), couperont la droite D au point demandé. On voit qu'il y a une ou deux ou pas de solution, selon que les deux systèmes de polaires p' ont une ou deux paires, ou n'ont pas de paire de polaires correspondantes qui coïncident.

Remarque. — Si la droite D passe par le pôle d'un système, elle rencontre la section conique en un second point, qui est l'intersection de la droite D considérée comme polaire de ce système avec sa polaire correspondante de l'autre système.

218. — Les propositions qui suivent jusqu'à l'article (234) concernent diverses déformations que l'on peut faire subir au triangle et au quadri-

latère, et leurs énoncés sont, pour la plupart, empruntés à la géométrie de M. Steiner (voir p. 171 et suivantes) et au *Traité des propriétés projectives* de M. Poncelet.

219. — PROPOSITION. — *Si les sommets des trois angles d'un triangle variable se meuvent respectivement sur trois droites fixes, tandis que deux côtés du triangle tournent respectivement autour de deux points fixes, le troisième côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même section conique à laquelle sont aussi tangentes deux des trois droites fixes ainsi que la droite qui unit les deux points fixes.*

DÉMONSTRATION. — Les deux systèmes de polaires décrits par les deux côtés qui tournent autour des deux points fixes, sont proportionnels puisqu'ils se coupent sur l'une des trois droites fixes. En considérant les deux autres droites fixes comme transversales respectives de ces deux systèmes de polaires, on voit que le troisième côté du triangle relie à chaque instant ces deux transversales : donc, ce troisième côté est d'après (190, 3°), tangent à une même section conique, ayant pour tangentes les deux transversales. Enfin, il est facile de s'assurer qu'il arrivera un instant où les trois côtés du triangle se confondront avec la droite qui unit les deux points fixes, d'où il suit que cette droite est aussi tangente à la même section conique.

220. — PROPOSITION. — *Si les trois côtés d'un triangle variable tournent respectivement autour de trois points fixes, tandis que deux des trois sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième sommet décrira une section conique, passant par le point d'intersection des deux droites fixes et par les deux points fixes autour desquels tournent les deux côtés du troisième sommet.*

DÉMONSTRATION. — En construisant deux ou trois positions du triangle variable, on reconnaîtra toutes les circonstances du corollaire IV (216).

221. — PROPOSITION. — *Si la base d'un triangle variable se meut tangentiellement à une section conique, tandis que les deux autres côtés tournent respectivement autour de deux points fixes situés sur une tangente à cette courbe et, qu'en outre, les sommets des angles à la base se meuvent respectivement sur deux autres tangentes à la conique, le troisième sommet décrira une ligne droite.*

DÉMONSTRATION. — En construisant quelques positions du triangle variable, on verra que les deux côtés qui tournent décrivent deux systèmes de polaires ayant pour pôles les deux points fixes et pour transversales les deux autres tangentes à la conique. Ces deux transversales étant divisées par la base en parties perspectivement proportionnelles (165), les deux systèmes de polaires sont proportionnels; et comme il est facile de voir, par une figure, que ces deux systèmes ont deux polaires correspondantes qui coïncident avec la ligne des pôles, vu qu'il arrive un instant où les trois côtés du triangle se confondent avec cette ligne, il en résulte que ces deux systèmes se coupent sur une droite (183 corol.).

222. — Proposition. — *Si l'un des sommets d'un triangle variable se meut sur une section conique, tandis que les côtés passant par ce sommet tournent respectivement autour de deux points fixes de la conique, que de plus, les deux autres sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, partant d'un point de la conique, le troisième côté passera sans cesse par un même point fixe.*

Démonstration. — En construisant deux positions seulement du triangle variable, on reconnaîtra toutes les circonstances énoncées au théorème (195 2°).

223. — Proposition. — *Si deux côtés d'un triangle variable tournent respectivement autour de deux points fixes d'une section conique donnée, tandis que le sommet de l'angle compris par ces côtés se meut sur la même courbe; que, de plus, les deux sommets opposés à ces côtés se meuvent respectivement sur deux droites fixes, le troisième côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même autre section conique, à laquelle sont aussi tangentes les deux droites fixes.*

Démonstration. — D'après l'énoncé, les deux côtés qui tournent autour de deux points fixes de la conique donnée, se coupent également sur cette même conique; donc ces deux côtés décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (182). Les deux droites fixes étant prises pour transversales respectives de ces deux systèmes de polaires, on voit que le troisième côté relie à chaque instant ces deux transversales; donc, ce troisième côté est sans cesse tangent à une même section conique, à laquelle sont aussi tangentes les deux droites fixes (195, 3°). Donc, etc.

224. — Proposition. — *Si deux sommets d'un triangle variable se meuvent*

respectivement sur deux tangentes fixes d'une section conique donnée, tandis que les côtés opposés à ces sommets tournent respectivement autour de deux points fixes; que, de plus, le troisième côté touche constamment la section conique donnée, le troisième sommet décrira une autre section conique passant par les deux points fixes.

Démonstration. — Le troisième côté du triangle, touchant constamment la conique donnée, divise les deux tangentes fixes en parties perspectivement proportionnelles (165). Les deux côtés qui tournent autour des deux points fixes décrivent deux systèmes de polaires qui sont proportionnels, comme ayant pour transversales les deux tangentes fixes (173, corol. VII); donc, ces deux systèmes de polaires se coupent sur une section conique qui passe par leurs pôles, c'est-à-dire par les deux points fixes. Or, le point d'intersection des deux côtés qui tournent autour des deux points fixes est précisément le troisième sommet de l'énoncé. Donc, etc.

225. — Proposition. — *Si l'angle opposé à la base d'un triangle variable tourne autour de son sommet sans changer de grandeur, tandis que les deux autres sommets se meuvent respectivement sur deux droites fixes, la base du triangle sera, dans toutes ses positions, tangente à une même section conique ayant pour tangente les deux droites fixes.*

Ou bien, sous une forme plus générale :

« *Si, sur le plan d'un angle donné de position, on fait mouvoir, autour d'un point arbitraire et fixe pris pour sommet, un angle quelconque, de grandeur invariable; qu'on trace ensuite, pour chacune de ses positions, les deux droites qui sous-tendent à la fois l'angle fixe et l'angle mobile, chacune de ces deux séries de droites enveloppera, en particulier, une seule et même section conique, ayant précisément pour foyer le sommet fixe de l'angle mobile, et, pour tangents, les deux côtés de l'angle fixe.* » (M. Poncelet, p. 272.)

Démonstration. — Pour le premier énoncé :

Les deux côtés de l'angle constant de grandeur décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 5°), qui se trouvent coupés respectivement par les deux droites fixes, prises pour transversales. La base du triangle, reliant à chaque instant deux points correspondants de ces deux transversales, qui sont perspectivement proportionnelles (176), il résulte, de (164), que cette base, dans toutes ses positions, ainsi que les deux droites fixes sont tangentes à une même section conique.

226. — Proposition. — *Si la base d'un triangle variable se meut sur une droite fixe, sans changer de grandeur, tandis que les deux autres côtés tournent respectivement autour de deux points fixes, le sommet opposé à la base décrira une section conique qui passera par ces deux points.*

Démonstration. — Le sommet qui doit décrire la section conique étant l'intersection des deux côtés qui tournent autour des deux points fixes, il suffit de faire voir que les deux systèmes de polaires décrits par ces deux côtés sont proportionnels. Or, il résulte de l'énoncé que ces deux côtés interceptent, à chaque instant, sur la direction de la base prolongée, un segment égal à cette base; donc, d'après (170, 6°), ces deux côtés décrivent deux systèmes de polaires proportionnels. Donc, etc.

227. — Proposition. — *Si, dans un quadrilatère complet variable, deux côtés opposés, de grandeur invariable, se meuvent respectivement sur deux droites fixes, tandis qu'un troisième côté tourne autour d'un point fixe, le quatrième côté et les deux diagonales seront tangents à des sections coniques distinctes, tangentes chacune aux deux droites fixes sur lesquelles se meuvent les deux côtés de grandeur invariable.*

Démonstration. — Les deux sommets du quadrilatère, adjacents au côté qui tourne autour du point fixe, décrivent, sur les deux droites fixes, deux séries de divisions perspectivement proportionnelles (159, 2°), et les deux autres sommets du quadrilatère décrivent, sur les deux mêmes droites fixes, des divisions égales respectivement à celles des deux premières séries. D'où il suit que deux sommets quelconques, appartenant respectivement aux deux côtés de grandeur invariable, décrivent des divisions perspectivement proportionnelles. Donc, d'après (164), les deux diagonales et le quatrième côté sont tangents à des sections coniques distinctes.

228. — Proposition. — *Si, dans un quadrilatère complet variable, deux angles opposés, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets, supposés fixes, tandis qu'un troisième sommet se meut sur une droite fixe, les trois autres*

sommets décriront chacun en particulier une section conique, passant par les deux sommets fixes.

D'une autre manière, qui met mieux en évidence la description organique des courbes du deuxième ordre par Newton :

Si deux angles, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets, supposés fixes, de telle sorte que deux de leurs côtés se coupent sans cesse sur une droite donnée, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun séparément, une section conique passant par les deux sommets fixes.

Démonstration. — Des quatre systèmes de polaires décrits par les côtés des deux angles mobiles, deux, se coupant sur la droite donnée, sont proportionnels; les deux autres systèmes étant, d'après (170, 5°), respectivement proportionnels aux deux systèmes qui se coupent sur la droite donnée, il en résulte que les quatre systèmes sont proportionnels; de là et de (216) on déduit facilement la propriété énoncée.

229. — Proposition. — « *Quand on a dans un plan deux figures semblables, mais non semblablement placées, les droites menées arbitrairement par un point de la première rencontrent respectivement leurs homologues dans la seconde en des points situés sur une conique.* » (M. Chasles, p. 337. *Mémoires couronnés*, tom. XI.)

Démonstration. — Les droites menées arbitrairement par un point de la première figure et leurs homologues dans la seconde, constituent deux systèmes de polaires qui sont proportionnels, comme ayant leurs angles respectivement égaux. Donc, ces deux systèmes se coupent sur une section conique passant par leurs pôles, c'est-à-dire par les deux points d'où partent les deux séries de droites homologues.

230. — Proposition. — *Si deux angles, de grandeur constante, tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux de leurs côtés parcoure une section conique passant par leurs sommets, les trois autres points d'intersection des côtés de ces angles décriront, chacun en particulier, une section conique passant aussi par les deux sommets.*

Démonstration. — Des quatre systèmes de polaires décrits par les côtés des deux angles mobiles, deux, se coupant sur une section conique passant par leurs pôles (les deux sommets), sont proportionnels, et les deux autres systèmes étant, d'après (170, 5°), respectivement proportionnels aux deux systèmes qui se coupent sur la conique, il s'ensuit que les quatre systèmes sont proportionnels. Maintenant, il suffit de conclure que, de ces quatre systèmes, deux quelconques qui n'ont pas même pôle se coupent sur une section conique passant par leurs pôles.

231. — Proposition. — *Si, dans un triangle variable, l'angle opposé à la base tourne autour de son sommet sans changer de grandeur, tandis que la base tourne autour d'un point fixe, et que l'un des sommets à la base décrit une ligne droite, l'autre sommet à la base décrira une section conique passant par le sommet et le point fixes.* (Propriété énoncée sous une forme différente par M. Poncelet, p. 275).

Démonstration. — Il ressort de (170, 5°, 10° et 174, corol. IV), que les trois systèmes de polaires décrits par les deux côtés de l'angle de grandeur constante et par la base, sont proportionnels. Cela étant, il est facile de voir que la section conique mentionnée à l'énoncé est l'intersection de deux de ces trois systèmes de polaires. Donc, (216) etc.

232. — Proposition. — « *Si tous les sommets d'un polygone plan quelconque sont astreints à se mouvoir sur autant de droites fixes, données dans ce plan, tandis que tous ses côtés, un seul excepté, pivotent respectivement sur des points fixes, le côté libre et les diverses diagonales de ce polygone rouleront, par suite du mouvement général de la figure, sur des sections coniques distinctes, tangentes aux deux droites fixes qui dirigent le mouvement de ce côté ou de ces diagonales respectives.*» (M. Poncelet, p. 298).

Démonstration. — Tous les côtés de ce polygone, à l'exception du côté libre, décrivent des systèmes de polaires qui sont tous proportionnels (173, corol. III). Le côté libre et les diverses diagonales relient chacun deux des transversales (deux des droites fixes) de tous ces systèmes de polaires proportionnels. Donc, d'après (190, 3°), la proposition est démontrée.

De la propriété (182, corol. I) on déduira sans difficulté la proposition suivante :

233. — Proposition. — *Si tous les côtés d'un polygone tournent respectivement autour d'autant de points fixes, tandis que tous les sommets, un seul*

excepté, se meuvent chacun sur une section conique distincte, passant par les deux points fixes autour desquels tournent les deux côtés de ce sommet, le sommet libre décrira une section conique, passant par les deux points fixes autour desquels tournent les côtés du sommet libre; et il en est de même du point d'intersection de deux côtés quelconques, lequel décrira une section conique passant par les deux points fixes autour desquels tournent ces deux côtés.

234. — Application. — *Deux sections coniques, déterminées chacune par cinq points, ont deux points communs : on demande de construire, sans décrire ces courbes, les deux autres points qu'elles peuvent avoir de communs.*

Solution. — Soient p, p' les deux points communs aux deux sections coniques. Construisons le système de trois polaires, ayant pour pôle p et aboutissant aux trois autres points de la première conique; construisons aussi les trois points de rencontre de ces trois polaires avec la seconde conique (217, remarque). Cela fait, nous pouvons construire deux autres systèmes de trois polaires, ayant tous deux pour pôle p', et dont l'un coupe le système p sur la première conique, et l'autre sur la seconde. Ces deux systèmes, qui ont même pôle p', sont proportionnels, comme étant chacun proportionnels au système p. Maintenant, il ne reste plus qu'à chercher si les deux systèmes p' ont une ou deux paires de polaires correspondantes qui coïncident (210), auquel cas, chaque paire rencontrera l'une des deux coniques en un point qui appartiendra aussi à l'autre conique, et ce point que l'on construira d'après (217, remarque), satisfera à la question. Si, dans les deux systèmes p', il n'y a pas de polaires correspondantes qui coïncident, les deux sections coniques n'auront d'autres points communs que les deux points donnés p, p'.

235. — Application. — *Étant donnés deux polygones d'un même nombre de côtés, construire un troisième polygone qui soit inscrit au premier et circonscrit au second, ou bien :*

Construire un polygone dont les côtés passent respectivement et dans un ordre déterminé, par des points donnés et dont les angles se trouvent respectivement, dans un ordre également déterminé, sur des droites données.

Solution. — Pour le cas du second énoncé, il est facile de s'assurer : 1° que si l'on connaissait le premier côté du polygone demandé, on pourrait en construire successivement tous les autres; 2° que pour vérifier si un polygone, dont le premier côté est choisi au hasard, satisfait à la question, il faut vérifier si le dernier côté de ce polygone rencontre le premier côté sur la première droite fixe. D'après cela, si l'on imagine le lieu géométrique formé par le point d'intersection du premier et du dernier côté de tous les polygones que l'on peut essayer pour trouver celui qui convient, le point d'intersection de ce lieu géométrique avec la première droite fixe sera le point par lequel devra passer le premier côté du polygone demandé; et comme ce premier côté doit aussi passer par le premier point fixe, il sera entièrement déterminé. Pour connaître la nature du lieu géométrique dont il s'agit, il suffit de donner les premiers côtés de trois polygones seulement et de construire tous les autres côtés. On mettra ainsi en évidence autant de systèmes de trois polaires qu'il y a de points fixes, systèmes ayant respectivement pour pôles ces mêmes points fixes. Comme ces systèmes sont tels que le premier coupe le second sur la seconde droite fixe, que le second coupe le troisième sur la troisième droite fixe et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier qui coupe le dernier sur la dernière droite fixe, il en résulte que tous ces systèmes de polaires sont proportionnels (373, corol. III), et que le premier et le dernier se coupent sur une conique passant par leurs pôles; le lieu géométrique dont il s'agit est donc une conique dont on construira, d'après (217), les points de rencontre avec la première droite fixe, et le problème pourra être considéré comme résolu.

236. — Théorème. — *Si trois droites* D, D′, D″ *sont proportionnelles, tout système de parallèles qui a pour transversale l'une d'entre elles* D, *rencontrera le système de droites qui relient les deux autres droites proposées sur une parabole ou sur une hyperbole.*

Démonstration. — En prenant pour ligne de terre une droite ayant même direction que le système de parallèles, on pourra considérer ces parallèles comme les projections verticales, et les droites qui relient *D′* et *D″* comme les projections horizontales d'autant de génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ayant le plan horizontal de projection pour plan directeur. En effet :

En menant par les points de division de D' et de D'' des perpendiculaires à la ligne de terre, ces deux systèmes de perpendiculaires couperont respectivement le système de parallèles suivant deux droites d', d'' (184, corol.). Cela posé, les directrices du paraboloïde dont il s'agit sont les droites de l'espace (D', d'), (D'', d''); et la courbe mentionnée à l'énoncé n'est autre que la projection double de l'intersection de ce paraboloïde avec le plan bissecteur B. Donc, etc.

237. — Théorème. — *Étant données deux transversales proportionnelles* t, t' *dont l'une,* t, *appartient à un système de polaires, et l'autre,* t', *à un système de droites respectivement parallèles à ces polaires, toutes ces droites, ainsi que leur transversale* t', *sont tangentes à une même parabole.*

Démonstration. — Le théorème est évident si les droites qui relient les deux transversales t, t' sont parallèles, c'est-à-dire si les deux transversales ont un point correspondant commun; car, dans ce cas, les droites, respectivement parallèles aux polaires sont les projections horizontales des génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique (70); et, d'après (35), ces droites, ainsi que leur transversale t', sont tangentes à une même conique, laquelle, ne pouvant avoir deux tangentes parallèles, est nécessairement une parabole.

Dans le cas où les deux transversales proportionnelles n'ont pas de point correspondant commun, il est facile de voir que la construction de la courbe mentionnée à l'énoncé reste la même si l'on transporte parallèlement à lui-même le système de polaires avec sa transversale t, de manière qu'un point de celle-ci aille coïncider avec le point correspondant de t'. Et comme la propriété énoncée existe pour cette position du système de polaires, elle existe également pour la position primitive du même système. Donc, etc.

Eu égard à (175, corol. II), le théorème précédent donne :

Corollaire. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on coupe l'un des deux par une transversale quelconque, et si, par le point de rencontre de chaque polaire avec cette transversale, on mène une droite parallèle à la polaire correspondante de l'autre système, toutes ces droites, ainsi que la transversale, seront tangentes à une même parabole.*

Proposition. — *Si le sommet d'un angle, de grandeur invariable, se meut sur une droite fixe* D, *tandis que le premier côté de l'angle tourne autour d'un point fixe, le second côté sera, dans toutes ses positions, tangent à une même parabole.*

Démonstration. — Si, dans chaque position du premier côté de l'angle, on mène par le point fixe une parallèle au second côté, toutes ces parallèles formeront (170, 2°) un système de polaires proportionnel au système formé par le premier côté; et si maintenant on considère la droite D comme transversale du système de polaires décrit par le premier côté, on aura toutes les circonstances du corollaire qui précède.

238. — Théorème. — *Dans toute section conique, un système de diamètres, respectivement conjugués aux directions d'un système de polaires* p, *constitue un système de polaires proportionnel au système* p.

Démonstration. — Il suffit de remarquer qu'un système de diamètres et leurs conjugués sont deux systèmes de polaires proportionnels entre eux et à tout système de polaires parallèle à l'un d'eux.

Proposition I. — *Si un nombre quelconque de cordes d'une section conique donnée passent par un point fixe* p, *les milieux de toutes ces cordes se trouvent sur une autre section conique passant par ce point fixe et par le centre* p' *de la section conique donnée.*

En effet, ces cordes forment un système de polaires p et les diamètres de la section conique respectivement conjugués à ces cordes (c'est-à-dire les diamètres qui passent respectivement par les milieux de ces cordes) forment un système de polaires p' proportionnel au système p; or, l'intersection de ces deux systèmes, qui est une conique passant par les deux pôles p, p', est précisément le lieu géométrique des points milieux de toutes les cordes. Donc, etc.

Puisque l'ensemble de deux droites est une section conique, on a :

Proposition II. — *Si l'on coupe un système de polaires par deux transversales quelconques, les milieux de toutes les portions de polaires comprises entre ces transversales sont situés sur une hyperbole passant par le pôle du système de polaires et par le sommet des deux transversales.*

Démonstration directe. — Tout se réduit à démontrer que, en joignant le sommet des deux transversales avec le milieu de chaque portion de polaire comprise entre ces transversales, on a un second système de polaires proportionnel au système proposé. Or, en menant, par un point pris sur l'une des deux transversales, des droites respectivement parallèles aux polaires du système proposé, on aura un troisième système de polaires proportionnel au proposé (170, 3°) et au second, car il coupera le second, comme il est facile de le démontrer, sur une droite parallèle à l'autre transversale. Il en résulte (175, corol. IV) que le premier et le second système sont proportionnels, et comme ils ont deux paires de polaires correspondantes respectivement parallèles aux deux transversales, ils se coupent sur une hyperbole, qui est celle de l'énoncé.

239. — Étant donnés, sur un plan, deux sections coniques et un système de polaires π, si, par le centre de chacune de ces coniques, on mène les diamètres respectivement conjugués aux directions des polaires π; ces deux systèmes de diamètres formeront, d'après (238 et 175, corol. IV), deux systèmes de polaires qui seront proportionnels et qui se couperont sur une troisième section conique passant par leurs pôles, centres des deux premières coniques. D'où l'on déduit les propositions connues qui suivent :

Proposition I. — *Dans deux sections coniques tracées sur un même plan, le lieu géométrique des points de concours des diamètres conjugués à une même direction variable, est une troisième section conique passant par les centres des deux sections coniques proposées.*

Si les deux coniques proposées se coupent en quatre points, elles ont dès lors six cordes communes; la troisième conique, devant passer par les milieux de ces six cordes, est entièrement déterminée, puisque les milieux des six cordes se réduisent au *minimum* à cinq, dans le cas où les quatre points communs aux deux sections coniques se trouvent être les sommets d'un parallélogramme; et comme les centres des deux coniques proposées doivent se trouver sur la troisième conique, il en résulte cette autre proposition connue :

Proposition II. — *Le lieu géométrique des centres de toutes les sections coniques que l'on peut mener par quatre points, est également une section conique.*

Et puisque le lieu des centres de toutes ces sections coniques est unique, il en résulte cette nouvelle proposition, due à M. Lamé :

Proposition III. — *Lorsque plusieurs sections coniques ont quatre points communs, leurs diamètres conjugués à des diamètres parallèles, ou conjugués à une même direction, concourent tous en un même point.*

Dans un quadrilatère, on peut considérer les deux diagonales et les deux paires de côtés opposés comme représentant trois sections coniques ayant en commun les quatre sommets du quadrilatère. En appliquant à ces trois sections coniques l'énoncé précédent, on en déduit la proposition suivante énoncée en ces termes par M. Chasles, *Géom.*, p. 252 :

Proposition IV. — « *Une transversale étant tracée dans le plan d'un quadrilatère, la droite menée du point de concours de deux côtés opposés au point milieu du segment intercepté sur la transversale entre ces deux côtés ; la droite menée semblablement du point de concours des deux autres côtés au point milieu du segment compris sur la transversale entre ces deux côtés ; et, enfin, la droite menée du point de rencontre des deux diagonales au point milieu du segment compris entre ces deux côtés ; ces trois droites, dis-je, passent par un même point.* »

240. — Application. — *Construire les diamètres conjugués parallèles de deux sections coniques tracées sur un même plan.*

Solution. — Si, dans chaque section conique, l'on construit trois diamètres au moins, respectivement conjugués à des directions quelconques données, ces deux systèmes de diamètres, deux à deux conjugués à une même direction, forment deux systèmes de polaires proportionnels, dont on construira, d'après (211), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui sont parallèles ; chaque paire, se composant de deux diamètres parallèles, dont les conjugués le sont également, la question se trouve résolue.

241. — Application. — *Par un point donné, mener une normale à une section conique.*

Solution. — Abaissons du point donné une perpendiculaire à une tangente quelconque, et soit x le point de rencontre de la perpendiculaire avec le diamètre mené au point de contact. Lorsque le point x, variable de position d'une tangente à l'autre, viendra se placer sur la conique, il sera le pied de la normale (voir *Propriétés projectives* de M. Poncelet, p. 288), ce qui revient à dire que le pied de la normale est l'intersection de la conique avec le lieu géométrique décrit par le point x.

Pour déterminer ce lieu, remarquons que la perpendiculaire à la tangente est aussi perpendiculaire au diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact. Donc, la construction d'un point du lieu demandé est ramenée à ceci : par le point fixe donné, ayant mené une perpendiculaire sur un diamètre quelconque, le conjugué de ce diamètre rencontrera la perpendiculaire en un point x du lieu cherché.

On voit sur-le-champ que si l'on répète cette construction pour déterminer d'autres points x, on aura trois systèmes de polaires, formés comme il suit : le premier, par un système de diamètres; le second, par les perpendiculaires abaissées sur les diamètres précédents ; enfin, le troisième, par les diamètres respectivement conjugués aux diamètres du premier système. Le lieu demandé est précisément l'intersection des deux derniers systèmes; or, les trois systèmes sont proportionnels (170, 4° et 182, corol. II) ; donc, le lieu, intersection des deux derniers systèmes, est une section conique qui passe par leurs pôles, c'est-à-dire par le point donné et par le centre de la section conique donnée. D'un autre côté, on s'assurera facilement que les deux derniers systèmes ont leurs polaires rectangulaires correspondantes respectivement parallèles; donc, le lieu demandé est une hyperbole équilatère, dont les points d'intersection avec la conique proposée sont les pieds de la normale demandée.

242. — Application. — *Construire une droite qui rencontre quatre droites données dont deux quelconques ne sont pas dans un même plan;*

Construire le point de rencontre d'une droite avec un hyperboloïde à une nappe.

Ces deux problèmes peuvent facilement être ramenés au suivant :

Construire les génératrices communes à deux hyperboloïdes à une nappe h, h', *qui ont deux directrices communes.* (V. *Géom.* de M. Steiner, p. 245, 4°).

Solution. — En prenant les deux plans de projection respectivement perpendiculaires aux deux directrices communes, une de ces directrices se projettera en un point p sur le plan horizontal, et l'autre en un point p' sur le plan vertical. Soient T, T', les deux projections de la troisième directrice du premier hyperboloïde et t, t', les deux projections de la troisième directrice du second hyperboloïde.

Parmi toutes les génératrices ayant, deux à deux, la même projection horizontale et appartenant respectivement aux deux hyperboloïdes h, h', il s'agit de trouver celles qui ont, de plus, la même projection verticale. Ces deux génératrices se confondent évidemment en une seule, qui appartiendra à la fois aux deux hyperboloïdes. Pour cela, on commencera par construire trois génératrices quelconques de chaque hyperboloïde qui aient respectivement mêmes projections horizontales.

La construction de ces génératrices mettra en évidence : 1° deux systèmes de polaires proportionnels $p\,T$, $p'\,T'$ (projections horizontales et verticales de trois génératrices de h); 2° deux autres systèmes de polaires proportionnels $p\,t$, $p'\,t'$ (projections horizontales et verticales de trois génératrices de h'). Or, les deux systèmes $p\,T$, $p\,t$ ne forment qu'un seul et même système; donc, les deux autres systèmes $p'\,T'$, $p'\,t'$ qui ont même pôle p' et dont chacun est proportionnel au système $p\,T$ ou $p\,t$ (170, 8°), sont proportionnels. Tout est ramené maintenant à construire, d'après l'art. (210), la paire ou les deux paires de polaires correspondantes qui coïncident dans les deux systèmes $p'T'$, $p't'$. Chaque paire de polaires correspondantes qui coïncident sera la projection verticale d'une génératrice commune aux deux hyperboloïdes, et il ne reste plus qu'à construire la projection horizontale de cette génératrice commune, ce qui est facile.

243. — Proposition. — *Si un angle droit tourne autour de son sommet, supposé fixe, de manière que ses deux côtés s'appuient respectivement sur deux droites fixes non situées dans un même plan, la droite qui relie à chaque instant les deux points de rencontre des côtés de l'angle avec les droites fixes, décrira un hyperboloïde à une nappe, dont ces droites fixes font également partie.* (V. *Géom.* de M. Steiner, p. 221, 8°).

Démonstration. — On fera voir, comme à l'article (264), que les deux côtés mobiles de l'angle droit décrivent, respectivement dans deux plans fixes, deux systèmes de polaires proportionnels. Ces deux systèmes de polaires divisent donc les deux droites fixes, prises pour transversales, en parties perspectivement proportionnelles, et, par suite, les droites qui relient ces deux droites fixes constituent un hyperboloïde à une nappe (165) dont ces droites fixes font partie. Cette proposition est due à M. Poncelet, ainsi que le fait remarquer M. Steiner.

244. — Nous laissons à démontrer la proposition et à résoudre le problème ci-après :

Proposition. — *Une droite qui se meut tangentiellement à un cylindre du second degré, de manière à s'appuyer sur deux droites fixes, non situées dans un même plan et tangentes au cylindre, engendre un hyperboloïde à une nappe.*

Problème. — *Étant données trois tangentes de chacune des deux sections coniques, plus deux tangentes communes à ces courbes, construire, s'il y a lieu, les deux autres tangentes communes.*

TROISIÈME SECTION

TRAITANT DE SYSTÈMES DE PLANS POLAIRES ET DE SYSTÈMES DE POLAIRES DANS L'ESPACE.

245. — Définition. — Nous entendons par système de plans polaires, un ensemble de plans passant par une même droite, laquelle est nommée axe du système.

246. — La transversale d'un système de plans polaires est une droite qui rencontre tous ces plans.

247. — Un système de plans polaires est coupé par un plan quelconque, non parallèle à l'axe, suivant un système de polaires qui a pour pôle le point de rencontre de ce plan avec l'axe.

248. — Un système de polaires et sa projection orthogonale sur un plan quelconque constituent deux systèmes de polaires proportionnels; car, en prenant pour transversale du second système, la projection d'une trans-

versale quelconque du premier système, ces deux transversales seront toujours proportionnelles.

249. — Toutes les sections faites dans un système de plans polaires par des plans quelconques non parallèles à l'axe de ce système, sont autant de systèmes de polaires proportionnels; car tous ces systèmes ont même projection orthogonale sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe (248).

D'où l'on déduit facilement que deux transversales quelconques d'un même système de plans polaires sont proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, selon qu'elles sont toutes deux parallèles ou non parallèles à l'un de ces plans.

250. — Définition. — *Deux systèmes de plans polaires sont dits proportionnels, lorsqu'en les coupant par un plan quelconque rencontrant les deux axes, on obtient toujours pour sections deux systèmes de polaires proportionnels.*

De cette définition et de l'article précédent, on déduit que :

1° *Deux systèmes de plans polaires sont proportionnels lorsqu'on peut les couper par un seul plan, ou respectivement par deux plans, suivant deux systèmes de polaires proportionnels.*

Car (d'après 249 et 175 corol. III), un plan quelconque coupera ces deux systèmes de plans, suivant deux systèmes de polaires proportionnels;

2° *Deux systèmes de plans polaires sont proportionnels, lorsqu'ils ont des transversales proportionnelles ou perspectivement proportionnelles;*

Car, en coupant chaque système de plans polaires par un plan conduit suivant la transversale de ce système, on aura évidemment deux systèmes de polaires proportionnels.

251. — Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels se coupent sur un hyperboloïde à une nappe passant par les axes de ces deux systèmes.*

Si les axes se rencontrent en un point, l'hyperboloïde devient un cône du second degré ayant pour sommet ce point de rencontre.

Si les axes sont parallèles entre eux, l'hyperboloïde dégénère en cylindre du second degré dont les génératrices rectilignes sont parallèles à ces axes.

Démonstration. — En coupant chacun des deux systèmes de plans polaires proportionnels par un plan de projection perpendiculaire à son axe, on obtiendra deux systèmes de polaires proportionnels, dont deux polaires correspondantes quelconques sont les projections de la droite d'intersection de deux plans polaires correspondants. Donc (d'après 185 et 186) la propriété est démontrée.

Remarque. — Pour prouver que la droite d'intersection de deux plans tournant respectivement autour de deux axes, engendre un hyperboloïde à une nappe, passant par ces axes, il suffira, d'après (250, 1°), de prouver que les traces horizontales ou verticales des deux plans mobiles, ou bien que la trace horizontale de l'un et la trace verticale de l'autre décrivent deux systèmes de polaires proportionnels.

Corollaire. — Si les deux systèmes de plans polaires proportionnels ont deux paires de plans polaires correspondants parallèles, leurs axes sont également parallèles et deux plans polaires correspondants quelconques se coupent suivant une droite parallèle à ces axes. De plus, si on coupe les deux systèmes par un plan quelconque rencontrant ces deux axes, on obtiendra deux systèmes de polaires proportionnels, ayant deux paires de polaires correspondantes parallèles et se coupant sur une hyperbole. D'où il est facile de conclure que :

1° *Deux systèmes de plans polaires proportionnels, ayant deux paires de plans polaires correspondants parallèles, ont leurs axes parallèles et se coupent sur un cylindre hyperbolique dont les génératrices rectilignes sont parallèles à ces axes, lesquels sont eux-mêmes des génératrices de ce cylindre;*

2° *Deux systèmes de plans polaires proportionnels dont les axes ne sont pas parallèles, ne peuvent avoir plus d'une paire de plans polaires correspondants parallèles.*

Car leurs axes, dans le cas contraire, seraient parallèles.

252. — Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels, ayant une paire de plans polaires correspondants parallèles, se coupent sur un paraboloïde hyperbolique dont un des deux plans directeurs est parallèle aux deux plans polaires correspondants parallèles.*

Démonstration. — Si l'on coupe chacun des deux systèmes de plans polaires proposés par un plan de projection perpendiculaire à son axe, on aura deux systèmes de polaires proportionnels dont deux polaires correspondantes sont perpendiculaires à la ligne de terre, si l'on remarque que les deux plans polaires correspondants parallèles sont chacun perpendiculaire à cette ligne de terre; donc (d'après 188), ces deux systèmes de polaires représentent un paraboloïde hyperbolique, et, par suite, les deux systèmes de plans polaires proposés se coupent sur ce paraboloïde.

253. — Théorème. — *Tout hyperboloïde à une nappe peut être considéré comme le lieu géométrique des intersections d'une infinité de deux systèmes de plans polaires proportionnels. Il en est de même du paraboloïde hyperbolique.*

Démonstration. — Soient prises, sur l'hyperboloïde, trois génératrices quelconques d'un même mode. Si l'on fait tourner deux plans respectivement autour de deux de ces génératrices prises pour axes, de manière que ces plans rencontrent sans cesse la troisième génératrice en un même point, il est visible que la droite d'intersection de ces plans rencontrera constamment les trois génératrices et engendrera ainsi l'hyperboloïde proposé.

Or, il est facile de voir que les deux plans mobiles décrivent deux systèmes de plans polaires proportionnels, car, si par la troisième génératrice on mène un plan quelconque qui rencontre les deux axes, ce plan coupera les deux systèmes de plans proposés suivant deux systèmes de polaires qui se coupent sur cette même génératrice et qui sont, par suite, proportionnels; donc, (150, 1°), etc. Et puisque les trois génératrices mentionnées plus haut sont tout à fait arbitraires, il en résulte que l'hyperboloïde est le lieu géométrique des intersections d'une infinité de deux systèmes de plans polaires proportionnels.

Corollaire I. — De ce théorème on déduit facilement la réciproque suivante du théorème (251) :

Si deux systèmes de plans polaires se coupent sur un hyperboloïde à une nappe, ces deux systèmes sont proportionnels et leurs axes font toujours partie de cet hyperboloïde.

Corollaire II. — En coupant deux systèmes de plans polaires proportionnels par un plan qui rencontre leurs axes, on obtient deux systèmes de polaires proportionnels se coupant sur une section conique qui appartient visiblement à l'hyperboloïde à une nappe sur lequel se coupent les deux systèmes de plans polaires proportionnels proposés. De là, on conclut que :

Toute section plane d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un paraboloïde hyperbolique, est une section conique ou courbe du second degré.

254. — PROPOSITION. — *Si deux plans tournent respectivement autour de deux droites fixes, de manière à être respectivement parallèles à deux diamètres variables mais conjugués d'une même section conique, la droite d'intersection des deux plans mobiles décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les droites fixes.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 21, p. 301.)

DÉMONSTRATION. — Les traces des deux plans mobiles décrivent, sur le plan de la section conique donnée, deux systèmes de polaires qui sont proportionnels (170, 9°) comme étant respectivement parallèles aux deux systèmes de polaires proportionnels décrits par les deux diamètres conjugués (182, corol. II). Donc, selon (251, remarque), le théorème se trouve démontré.

255. — PROPOSITION. — *Si deux plans tournent respectivement autour de deux droites fixes de manière à se couper constamment à angle droit, leur intersection décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les droites fixes.*

DÉMONSTRATION. — En prenant pour plan horizontal de projection un plan quelconque perpendiculaire à l'une des deux droites, l'un des deux plans mobiles sera vertical et les traces horizontales des deux plans mobiles se couperont toujours à angle droit, puisque deux plans perpendiculaires entre eux, dont l'un est vertical, ont toujours leurs traces horizontales perpendiculaires. Les traces des deux plans mobiles décrivent donc deux systèmes de polaires proportionnels (170, 4°). Donc, (251, remarque), le théorème est démontré.

256. — Des articles (250, 2°) et (251) résulte immédiatement cette proposition :

PROPOSITION. — *Deux droites de l'espace étant divisées en parties proportionnelles, ou en parties perspectivement proportionnelles, si deux plans tournent chacun autour d'un axe fixe de manière à rencontrer respectivement les droites données en deux points correspondants, l'intersection des deux plans mobiles décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les deux axes fixes.*

257. — Proposition. — *Étant donnés deux coins, de grandeur invariable, si l'on fait tourner chacun d'eux autour de son arête, de manière que l'intersection d'une face de l'un avec une face de l'autre s'appuie constamment sur une droite fixe de l'espace, cette intersection décrira un hyperboloïde à une nappe passant par les deux arêtes, et les trois autres droites d'intersection des faces des deux coins décriront, chacune séparément, un hyperboloïde à une nappe passant par les deux mêmes arêtes.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 17, p. 299.)

Démonstration. — D'abord, les deux faces de chaque coin décrivent deux systèmes de plans polaires proportionnels ayant même axe, par la raison que les traces de ces faces sur un plan perpendiculaire à l'arête de ce coin, décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 5°), car l'angle de ces traces, mesurant l'ouverture constante du coin, ne varie pas de grandeur dans le mouvement de ce dernier. D'un autre côté, les deux faces dont l'intersection décrit, d'après l'énoncé, un hyperboloïde à une nappe, décrivent aussi deux systèmes de plans polaires proportionnels (253 corol. I). De ce qui précède, il est facile de conclure que les quatre systèmes de plans polaires, décrits par les quatre faces des deux coins, sont tous proportionnels entre eux et que deux quelconques de ces systèmes, qui n'ont pas même axe, doivent se couper sur un hyperboloïde à une nappe. Donc, etc.

258. — Proposition. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels situés dans deux plans différents, si, par un point de l'espace, on mène des droites dont chacune rencontre deux polaires correspondantes, toutes ces droites appartiendront à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point donné.* (V. *Géom.* de M. Steiner, II, p. 183.)

Démonstration. —Le système de plans polaires que l'on mènera par le point donné et par les polaires du premier système est proportionnel à celui des plans polaires que l'on mènera par le point donné et par les polaires du second système (250, 1°). Et comme les axes de ces deux systèmes de plans polaires se rencontrent au point donné, il résulte de (251) que deux plans polaires correspondants quelconques se coupent sur un même cône du second degré ayant pour sommet le point donné. Or, chaque droite d'intersection de deux plans polaires correspondants passe par le point donné et rencontre deux polaires correspondantes. Donc, etc.

259. — PROPOSITION. — *Étant donnée une section conique rencontrée par deux droites fixes non situées dans un même plan, si une troisième droite se meut de manière à s'appuyer à la fois sur les deux premières et sur la section conique, elle engendrera un hyperboloïde à une nappe, passant par les deux droites fixes et par la section conique.*

DÉMONSTRATION. — Si l'on fait tourner deux plans respectivement autour des deux droites fixes prises pour axes, de manière que pour chacune de leurs positions les traces de ces deux plans sur celui de la section conique se coupent sur cette courbe, ces traces décriront deux systèmes de polaires proportionnels (182); donc, (251, remarque) les deux plans se coupent sur un hyperboloïde à une nappe satisfaisant à l'énoncé.

260. — THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, si l'on prend une ligne de terre quelconque passant par le pôle commun, et que l'on considère les polaires d'un système comme les traces horizontales et les polaires correspondantes de l'autre système comme les traces verticales de plans de l'espace, tous ces plans, ainsi que les deux plans de projection, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le pôle commun.*

Autrement. — Si un plan mobile autour d'un point donné sur une ligne de terre, se meut de manière que ses traces sur les plans de projection décrivent respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, le plan mobile, dans toutes ses positions, ainsi que les deux plans de projection, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point donné.

DÉMONSTRATION. — Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que tous les plans mentionnés à l'énoncé sont coupés par un plan auxiliaire quelconque, suivant un système de droites tangentes à une même section conique.

Or, les deux traces du plan auxiliaire étant prises pour transversales respectives des deux systèmes de polaires proposés, ces transversales sont perspectivement proportionnelles et les droites qui les relient dans l'espace, l'un des plans de projection étant relevé dans sa vraie position, sont précisément les intersections du plan auxiliaire avec le système de plans proposés; et comme les droites qui relient les deux transversales sont, ainsi que ces dernières, tangentes à une même conique (164), le théorème est démontré.

261. — La réciproque du théorème précédent est facile à démontrer et peut s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *Deux plans tangents quelconques à un cône du second degré, sont coupés par tous les autres plans tangents à cette surface, suivant deux systèmes de polaires proportionnels.*

Autrement. — Deux plans tangents quelconques à un cône du second degré étant pris pour plans de projection, si un troisième plan se meut tangentiellement au même cône, ses deux traces décriront deux systèmes de polaires proportionnels, ayant pour pôle commun le sommet du cône.

262. — Proposition. — *Si d'un point quelconque on mène des plans perpendiculaires à toutes les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, tous ces plans seront tangents à un même cône du second degré.* (M. Steiner, p. 234.)

Démonstration. — Si l'on prend pour plans de projection deux plans passant par le point donné et respectivement perpendiculaires à deux des trois directrices de l'hyperboloïde, les projections des génératrices de cette surface formeront deux systèmes de polaires proportionnels (170, 7°, 8°) et les traces horizontales et verticales de tous les plans perpendiculaires à ces génératrices formeront deux autres systèmes de polaires également proportionnels, comme ayant leurs polaires respectivement perpendiculaires à celles des deux premiers systèmes (170, 4°); (car le principe, si une droite est perpendiculaire à un plan, ses deux projections orthogonales le sont respectivement aux traces du plan, est indépendant de l'angle que font les deux plans de projection.) Donc (260) etc.

Remarque. — Le même théorème existe pour un cône du second ordre, et se démontre de la même manière.

263. — Proposition. — *Tous les plans menés par un même point de l'espace, et dont chacun est parallèle à deux polaires correspondantes de deux systèmes de polaires proportionnels, situés dans deux plans différents, sont tangents à un même cône du second degré ayant pour sommet le point donné.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.*, n° 27, p. 303.)

Démonstration. — En prenant pour plans de projection deux plans passant par le point donné et respectivement parallèles aux plans des deux systèmes de polaires proposés, on trouvera facilement que les traces horizontales et verticales de tous les plans satisfaisant aux conditions de l'énoncé, forment deux systèmes de polaires proportionnels, si l'on remarque que les traces horizontales sont respectivement parallèles aux polaires de l'un des deux systèmes proposés, et les traces verticales respectivement parallèles aux polaires de l'autre système. Donc, d'après (260), la propriété est démontrée.

264. — Proposition. — *Si les deux côtés d'un angle droit se meuvent respectivement dans deux plans fixes, tandis que le sommet reste en un point fixe de l'intersection de ces deux plans, le plan de l'angle, dans toutes ses positions, ainsi que les deux plans fixes, seront tangents à un même cône du second degré, ayant pour sommet le point fixe.* (V. *Géom.* de M. Steiner, n° 4, p. 219.)

Démonstration. — Les deux plans fixes étant pris pour plans de projection, les deux côtés de l'angle droit seront respectivement les traces horizontale et verticale de son plan. D'après (260), tout se réduit donc à démontrer que les deux côtés de l'angle décrivent deux systèmes de polaires proportionnels. Or, le côté qui se meut dans le plan horizontal, et la projection horizontale de l'autre côté, se coupant toujours à angle droit (en vertu du principe que les projections horizontales de deux droites perpendiculaires, dont l'une est dans le plan horizontal, sont perpendiculaires), décrivent deux systèmes de polaires proportionnels (170, 4°). De là, et de (248), il est facile de conclure qu'il en est de même des deux côtés. Donc, (260), etc.

265. — Proposition. — *Si, dans l'espace, on donne un point et deux droites proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, non situées dans un même plan, tous les plans dont chacun passe par le point donné et par une paire de points correspondants des deux droites proposées, sont tangents à un même cône du second degré, ayant ce point pour sommet et pour tangentes les deux droites données.*

Démonstration. — Si par chaque droite et le point donnés on mène un plan, et qu'on prenne ces deux plans pour plans de projections, les traces horizontales et verticales de tous les plans mentionnés à l'énoncé forment respectivement deux systèmes de polaires de même pôle, lesquels sont proportionnels comme ayant leurs transversales proportionnelles ou perspectivement proportionnelles, ces transversales étant les droites proposées. Donc (260), etc.

Puisque les droites qui relient deux droites proportionnelles constituent un paraboloïde hyperbolique et que celles qui relient deux droites perspectivement proportionnelles représentent un hyperboloïde à une nappe, il en résulte le corollaire suivant :

Corollaire. — *Tous les plans menés par un même point fixe et par chacune des génératrices d'un paraboloïde hyperbolique ou d'un hyperboloïde à une nappe sont tangents à un même cône du second degré.*

266. — Proposition. — *Deux plans tangents à un cône du second degré étant considérés comme fixes, si l'on assujettit une droite à s'appuyer sur deux autres droites fixes respectivement perpendiculaires à ces deux plans, et à être constamment perpendiculaire à un troisième plan tangent mobile, cette droite engendrera un hyperboloïde à une nappe.* (Proposé par M. Steiner. V. *Géom.* 29°, p. 303.)

Démonstration. — Les deux plans tangents fixes étant pris pour plans de projection, il en résulte que le sommet s du cône sera sur la ligne de terre, et que les deux droites fixes, respectivement perpendiculaires à ces deux plans de projection, s'y projetteront respectivement en deux points p, p'. D'après (261), les deux traces du plan tangent mobile décriront respectivement deux systèmes de polaires proportionnels, ayant pour pôle commun le sommet s du cône. D'un autre côté, les deux projections de la droite mobile décriront deux systèmes de polaires p, p', respectivement proportionnels aux deux systèmes de polaires s; car les polaires des deux systèmes p, p' sont respectivement perpendiculaires à celles des deux systèmes s, en vertu de ce principe qu'une droite perpendiculaire à un plan a ses deux projections respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan. Donc, (d'après 185), la droite mobile engendre un hyperboloïde à une nappe.

267. — Théorème [1]. — *La section faite dans deux systèmes de plans polaires*

[1] Ce paragraphe et les trois suivants ont été ajoutés au mémoire pendant l'impression.

proportionnels par un plan, mené suivant la droite d'intersection D de deux plans polaires correspondants quelconques, représente deux systèmes de polaires qui se coupent sur une ligne droite.

Démonstration. — La section dont il s'agit représente, en effet, deux systèmes de polaires proportionnels (250) dont les pôles sont aux points de rencontre de la droite D avec les axes des deux systèmes de plans polaires proposés. Et puisque le plan sécant passe par D, intersection de deux plans polaires correspondants, il coupe ceux-ci suivant deux polaires correspondantes qui coïncident de fait avec D. Donc les deux systèmes de polaires proportionnels ont deux polaires correspondantes qui coïncident avec leur ligne des pôles, et ces deux systèmes se coupent par conséquent sur une droite (183, coroll.).

Il serait facile de déduire de ce théorème la double génération de l'hyperboloïde à une nappe, double génération que nous avons supposée connue dans les deux premiers chapitres.

268. — Nous laissons au lecteur à démontrer le théorème suivant, ainsi que la proposition que l'on peut en déduire.

Théorème. — *Si un système de plans parallèles et un système de plans polaires sont proportionnels, ces deux systèmes se coupent sur un paraboloïde hyperbolique.*

Proposition. — *Les normales menées à un hyperboloïde à une nappe, par tous les points d'une même génératrice, constituent un paraboloïde hyperbolique droit.*

A l'occasion de ces deux énoncés, nous devons faire remarquer, comme nous aurions dû le faire à l'article (250), que :

Un système de plans parallèles et un système de plans polaires sont proportionnels lorsqu'en les coupant par un plan quelconque, le système de parallèles et le système de polaires que l'on obtient pour sections sont proportionnels (171, 1°). *De cette définition et de* (181) *on déduit facilement que :*

Un système de plans parallèles dont la transversale est proportionnelle, ou perspectivement proportionnelle à celle d'un système de plans polaires, sont deux systèmes proportionnels.

269. — Nous nous contenterons encore d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Deux systèmes de plans polaires proportionnels étant coupés respectivement par deux transversales, celles-ci sont proportionnelles ou perspectivement* *proportionnelles, selon qu'elles sont ou qu'elles ne sont pas respectivement parallèles à deux plans polaires correspondants.*

270. — Remarque. — De la théorie des plans polaires proportionnels qui vient de nous occuper, et qui est exposée avec beaucoup de détail par M. Steiner, nous n'avons donné que ce qu'il fallait pour résoudre les quelques questions qui précèdent;

271. — Avant de terminer ce mémoire, nous croyons devoir faire remarquer que la théorie des systèmes de polaires proportionnels dont nous nous sommes occupés dans ce dernier chapitre a été traitée de main de maître, sous les dénominations de *faisceaux projectifs* et de *faisceaux homographiques*, par MM. Steiner et Chasles que nous avons eu plusieurs fois occasion de citer. Notre seul mérite a été d'arriver par des considérations de géométrie descriptive pure, à la démonstration des principaux théorèmes d'une théorie exigeant jusqu'ici la notion du rapport harmonique et anharmonique. Et, à cette occasion, nous ne pouvons nous empêcher de faire ressortir combien notre théorème (29) conduit à ce résultat d'une manière naturelle; car pour passer des deux premiers chapitres, qui ne renferment que des notions de géométrie descriptive pure, au troisième chapitre dont il s'agit, il nous a suffi de reconnaître que deux systèmes de polaires proportionnels peuvent toujours représenter un hyperboloïde à une nappe, et d'introduire ensuite l'idée de deux droites perspectivement proportionnelles.

Dans un prochain mémoire, où nous ferons connaître d'autres applications qui ressortent des propriétés des plans bissecteurs, nous définirons, par des considérations descriptives, deux systèmes de polaires en involution, en même temps que nous traiterons du double contact des sections coniques.

ERRATA ET OBSERVATIONS.

1° Dans l'article (35), après ces mots : *Bulletin de l'Académie*, ajoutez : tome XVIII, p. 41.

2° Nous ne sommes plus revenus, dans le dernier chapitre, sur deux systèmes de polaires qui se coupent sur une droite, parce que leurs propriétés avaient été exposées, quoique par des considérations différentes, dans la seconde section du second chapitre;

3° L'énoncé du théorème (29) doit être modifié comme il suit : Au lieu de ces mots : *dont le degré est égal à celui de la surface*, il faut lire : *dont le degré ne peut jamais être supérieur, mais bien égal ou inférieur à celui de la surface.* Car on sait que, pour plusieurs surfaces d'un degré supérieur au second degré, certaines sections planes peuvent être d'un degré moindre que celui de ces surfaces;

4° Nous avons oublié, dans les articles (24), (25), (26) de faire remarquer, ce qui du reste est évident, qu'une droite perpendiculaire à la ligne de terre et située dans l'un des deux plans bissecteurs, est toujours perpendiculaire à l'autre. D'où il résulte *qu'un plan dont les deux traces sont en ligne droite sur l'épure est perpendiculaire au plan bissecteur B, et qu'un plan dont les traces sont également inclinées sur la ligne de terre est perpendiculaire au plan bissecteur B';*

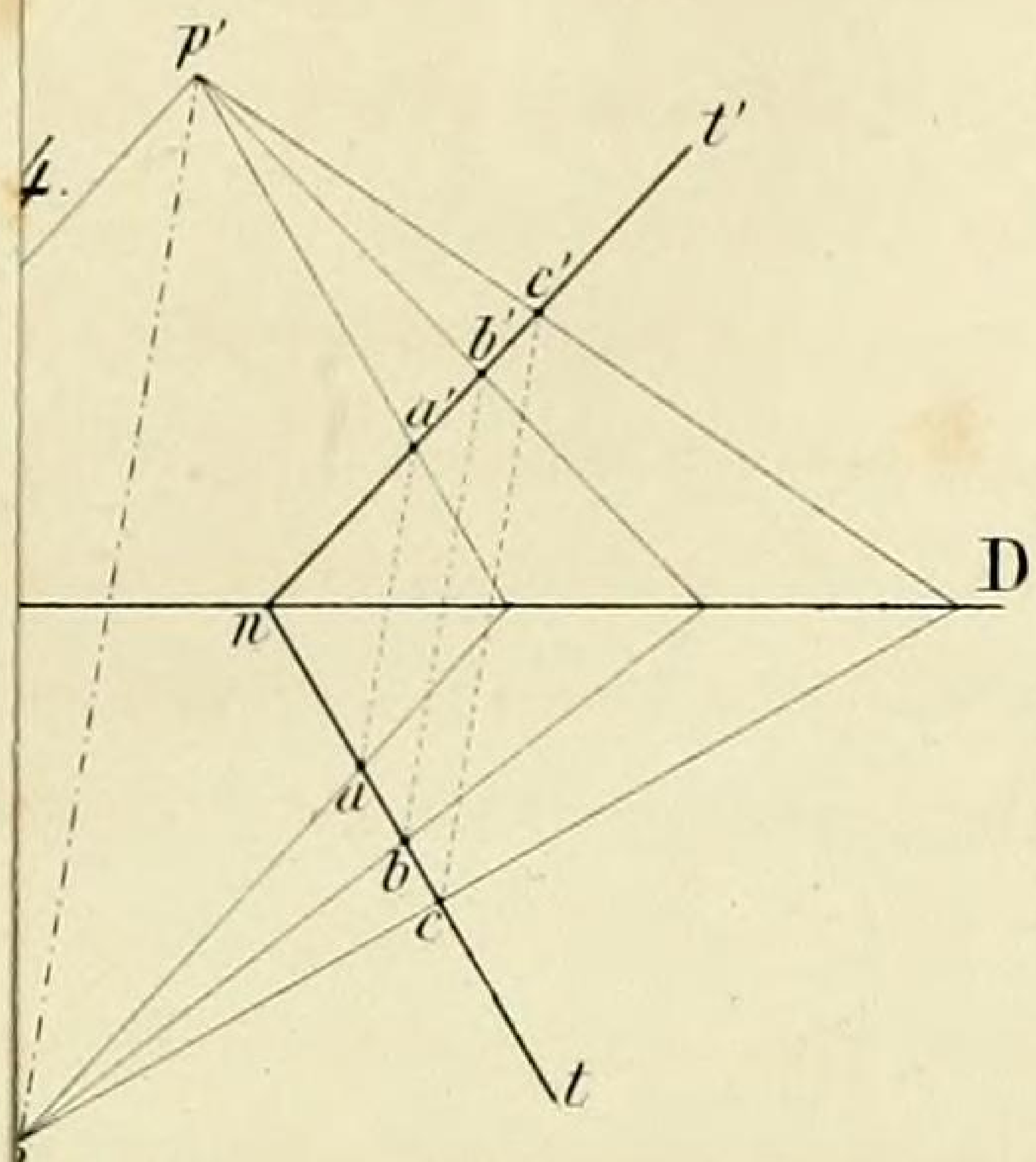
5° Nous avons également oublié de dire à l'art. (171) que *deux systèmes de parallèles, à transversales perspectivement proportionnelles, étant coupés par deux autres transversales quelconques, celles-ci ne sont jamais proportionnelles;* car s'il en était autrement, les deux transversales proposées seraient également proportionnelles (171, 5°);

6° La propriété énoncée au corollaire de l'art. (237) est proposée par M. Steiner, comme question à résoudre. (V. *Géom.*, 24°, p. 302);

7° Les propriétés 1° et 2° de l'art. (190) appartiennent seulement à deux systèmes de polaires proportionnels ayant même pôle, lorsqu'ils ont deux polaires correspondantes qui coïncident, et que les deux transversales sont menées par un point de ces deux dernières;

8° Après le premier alinéa de l'art. (50), il faut ajouter ces mots : *et la droite qui unit ces deux points, est parallèle au plan bissecteur B'* (23, 3°).

FIN.



4.

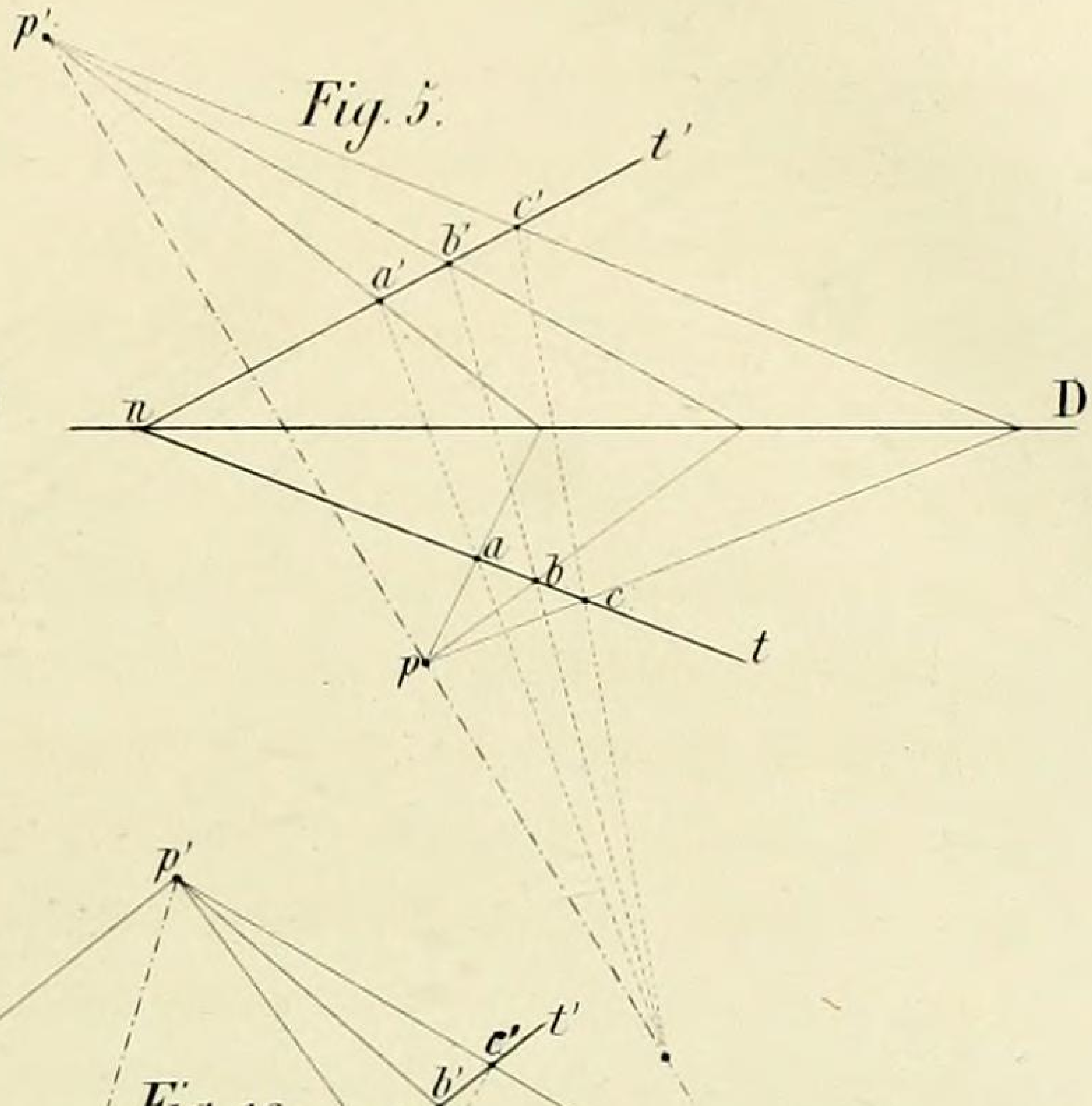


Fig. 5.

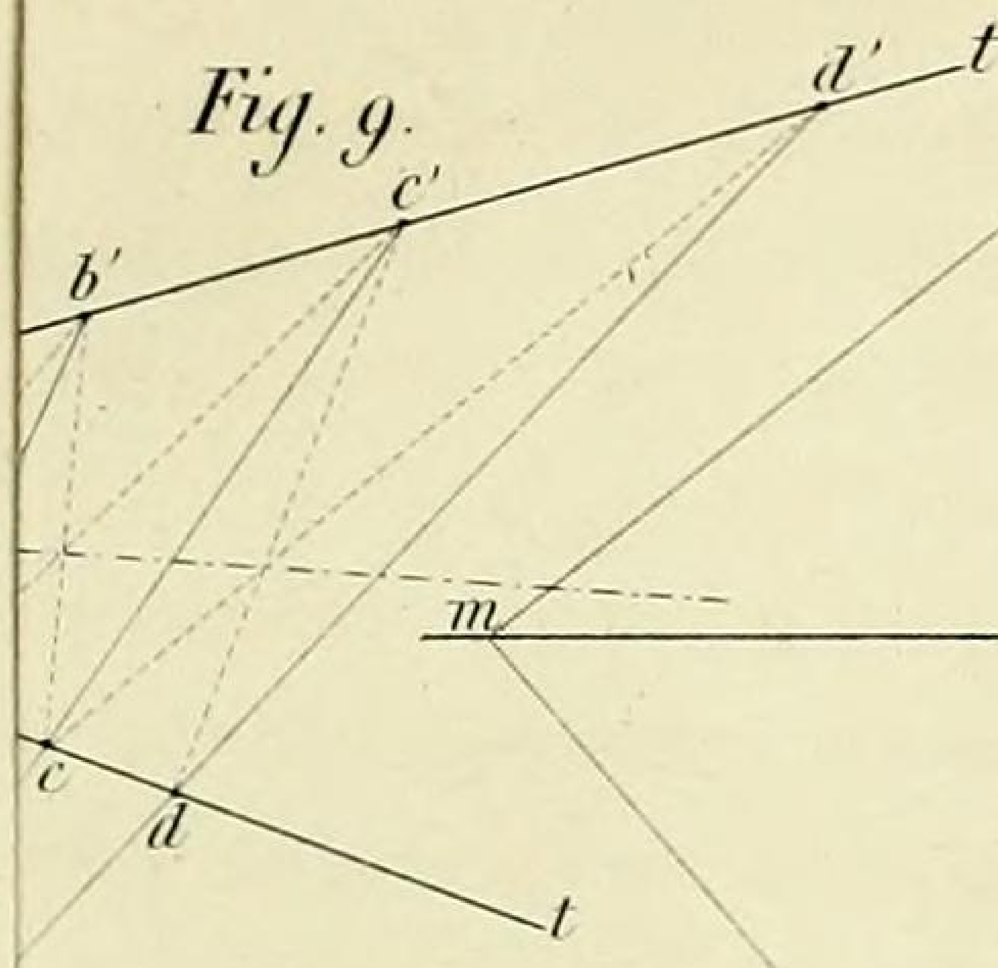


Fig. 9.

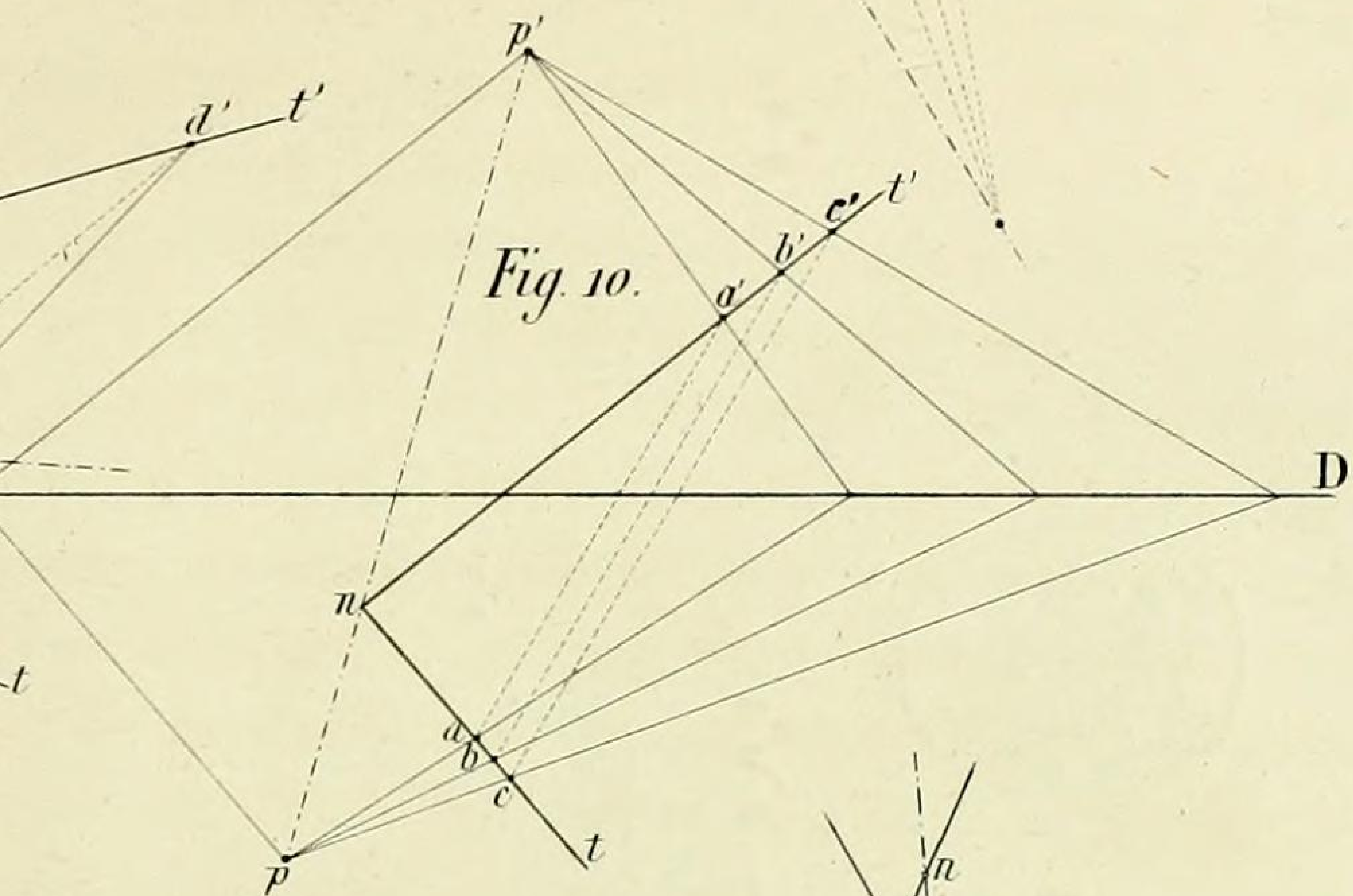


Fig. 10.

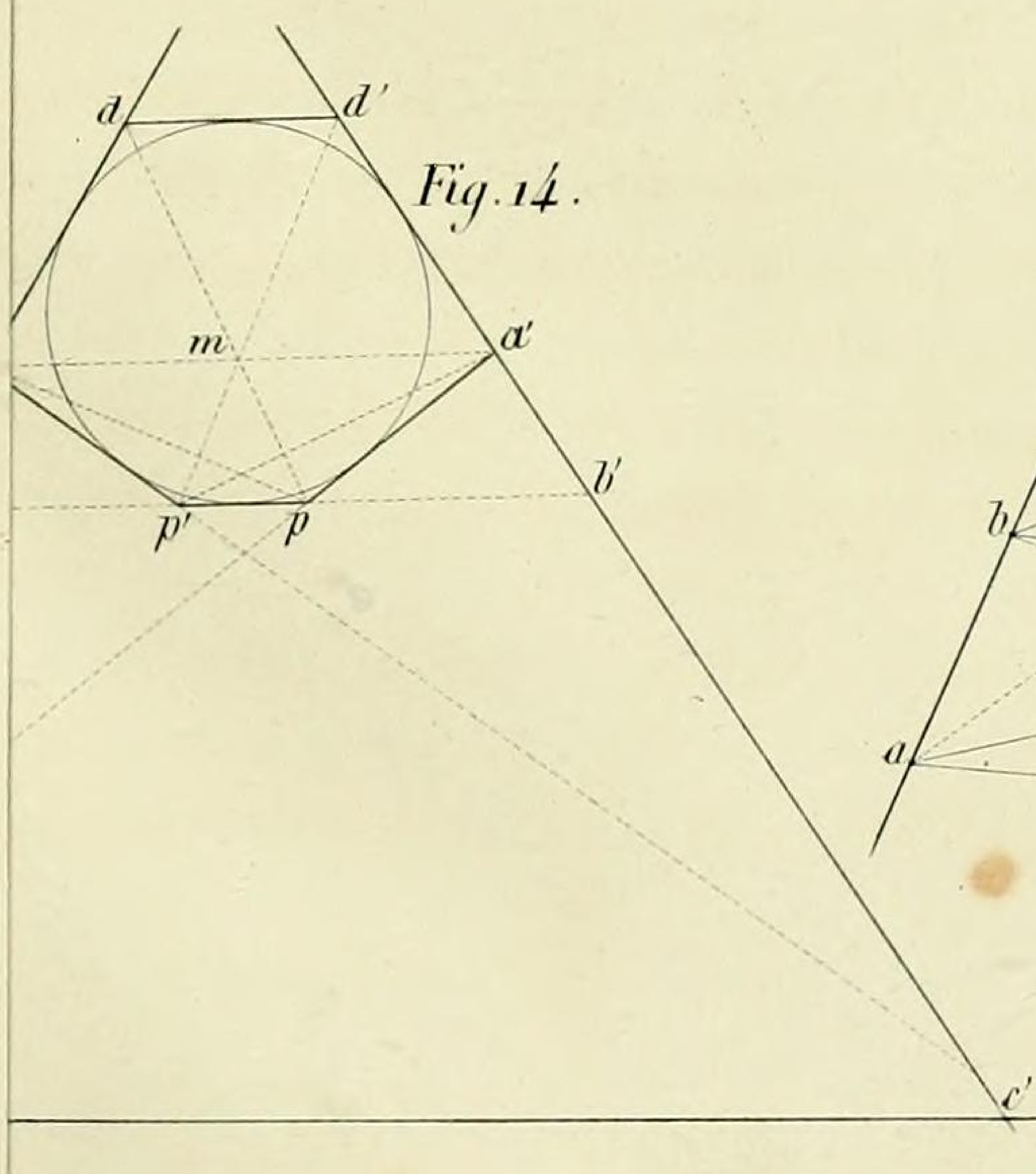


Fig. 14.

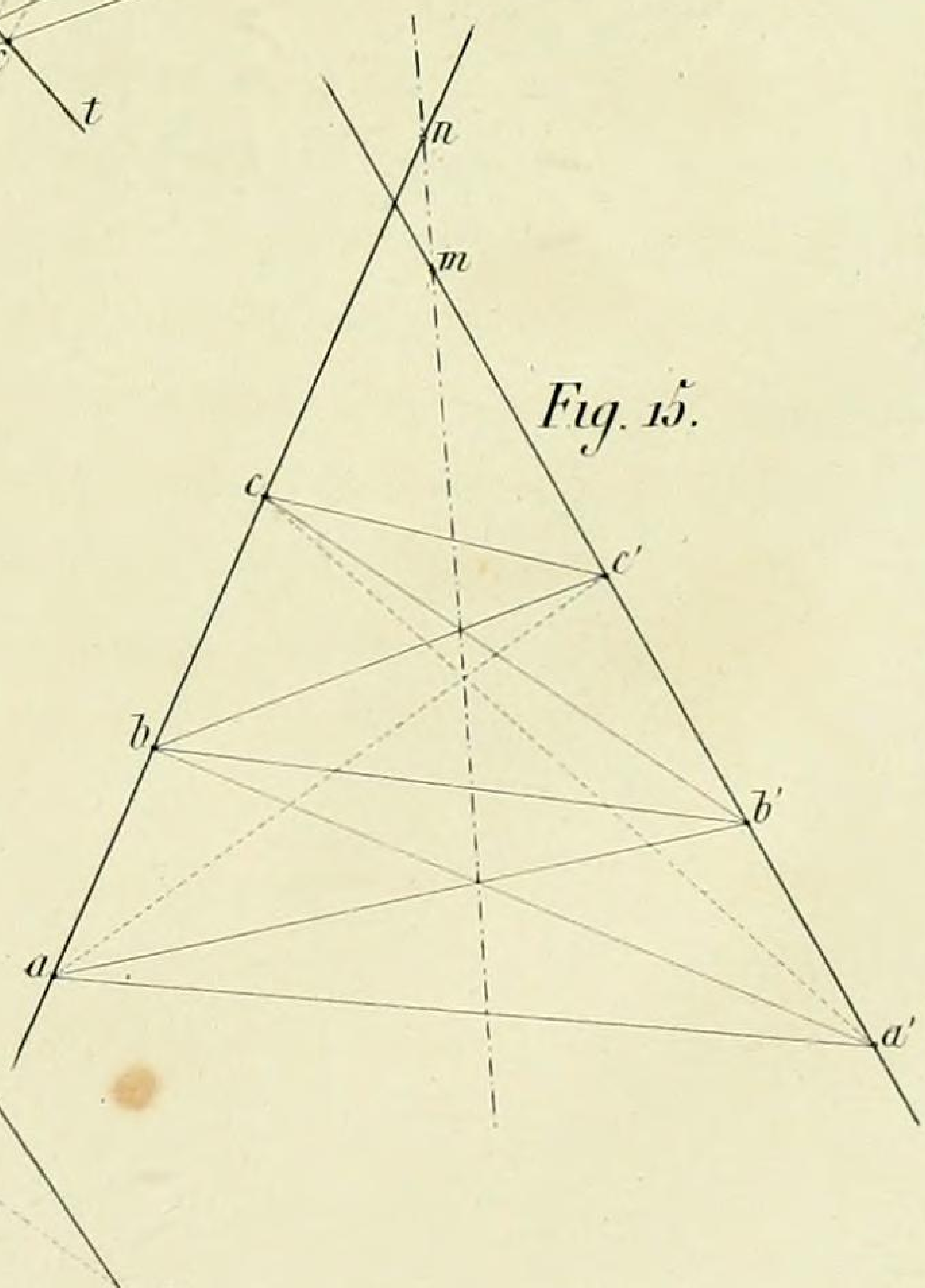


Fig. 15.

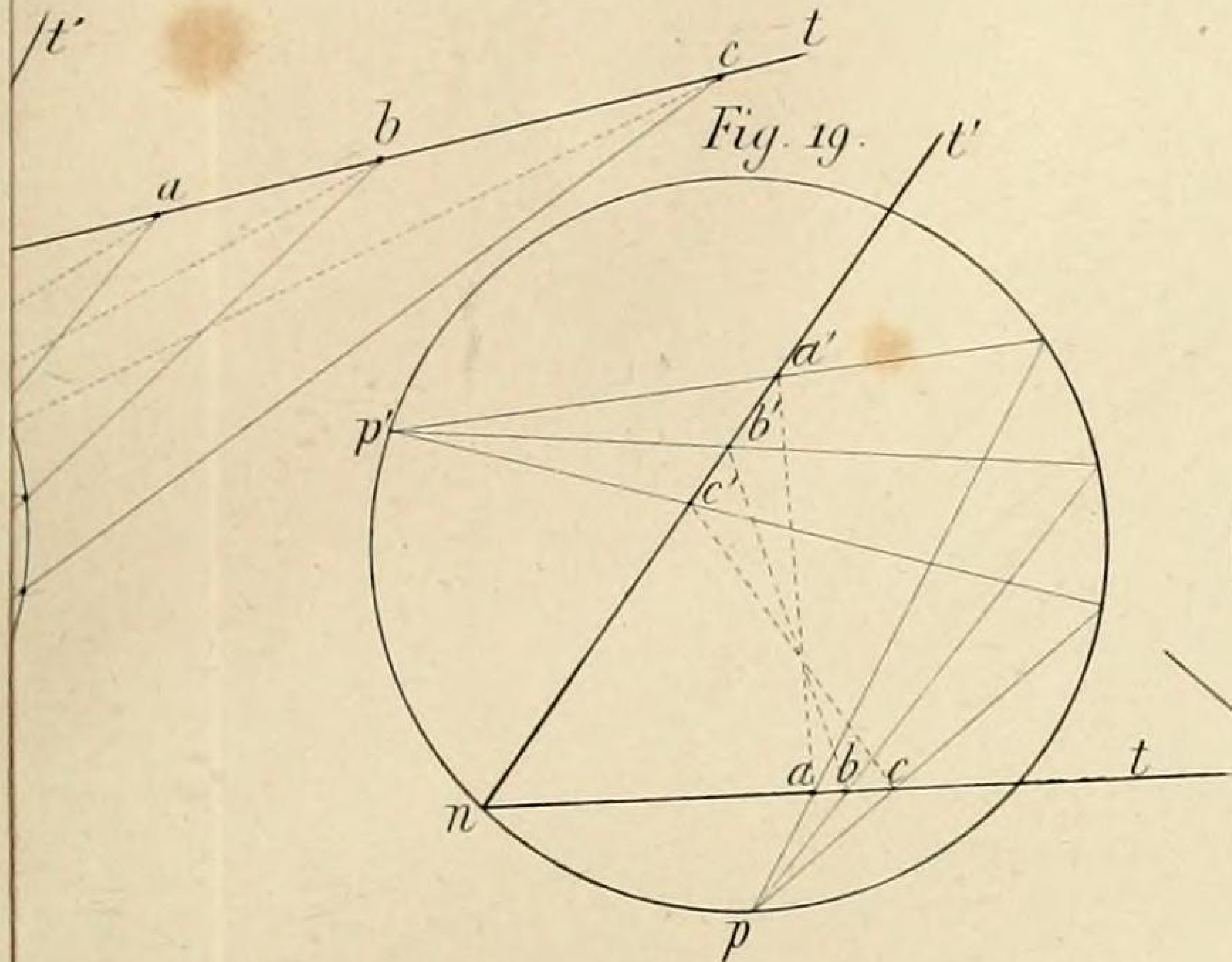


Fig. 19.

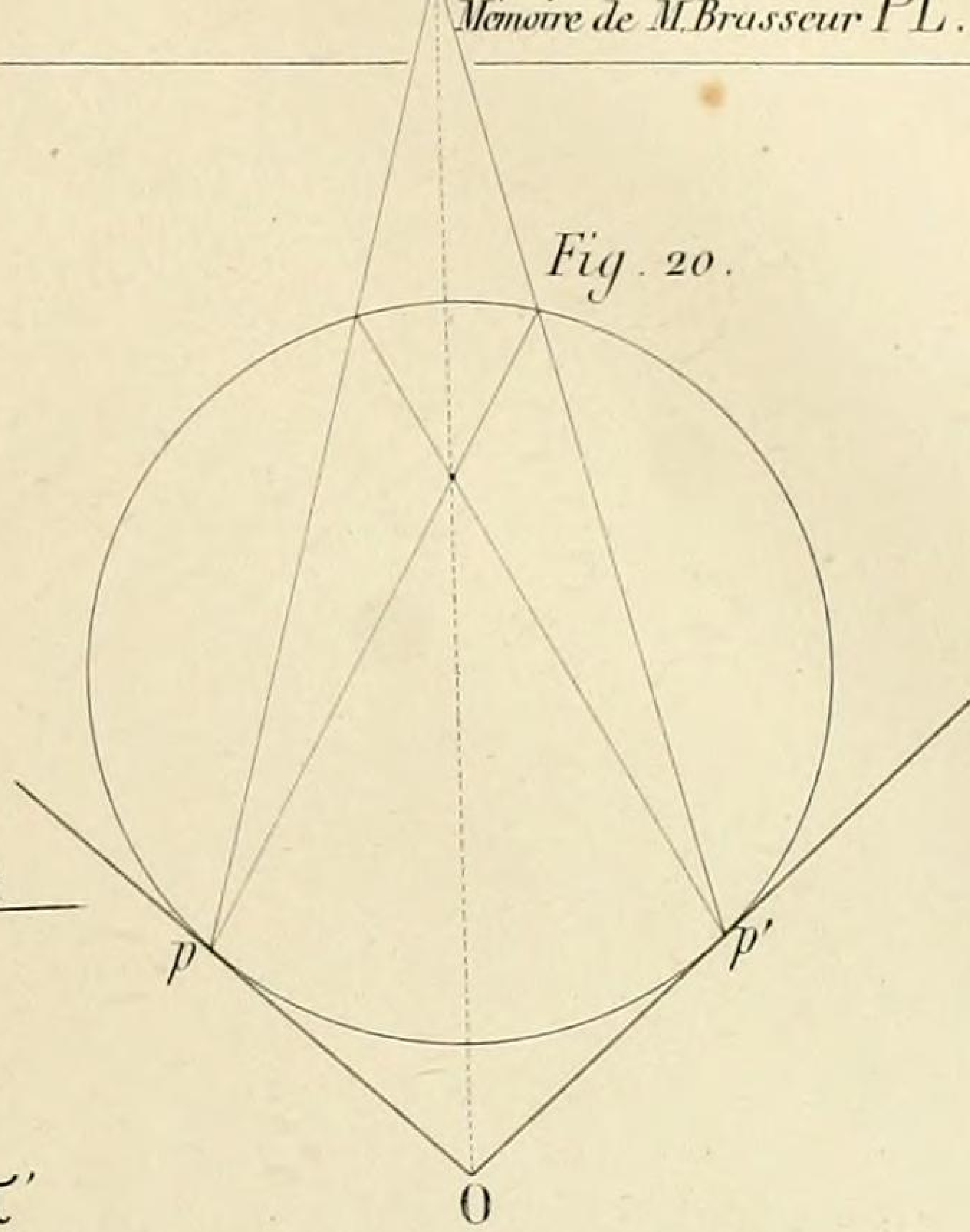
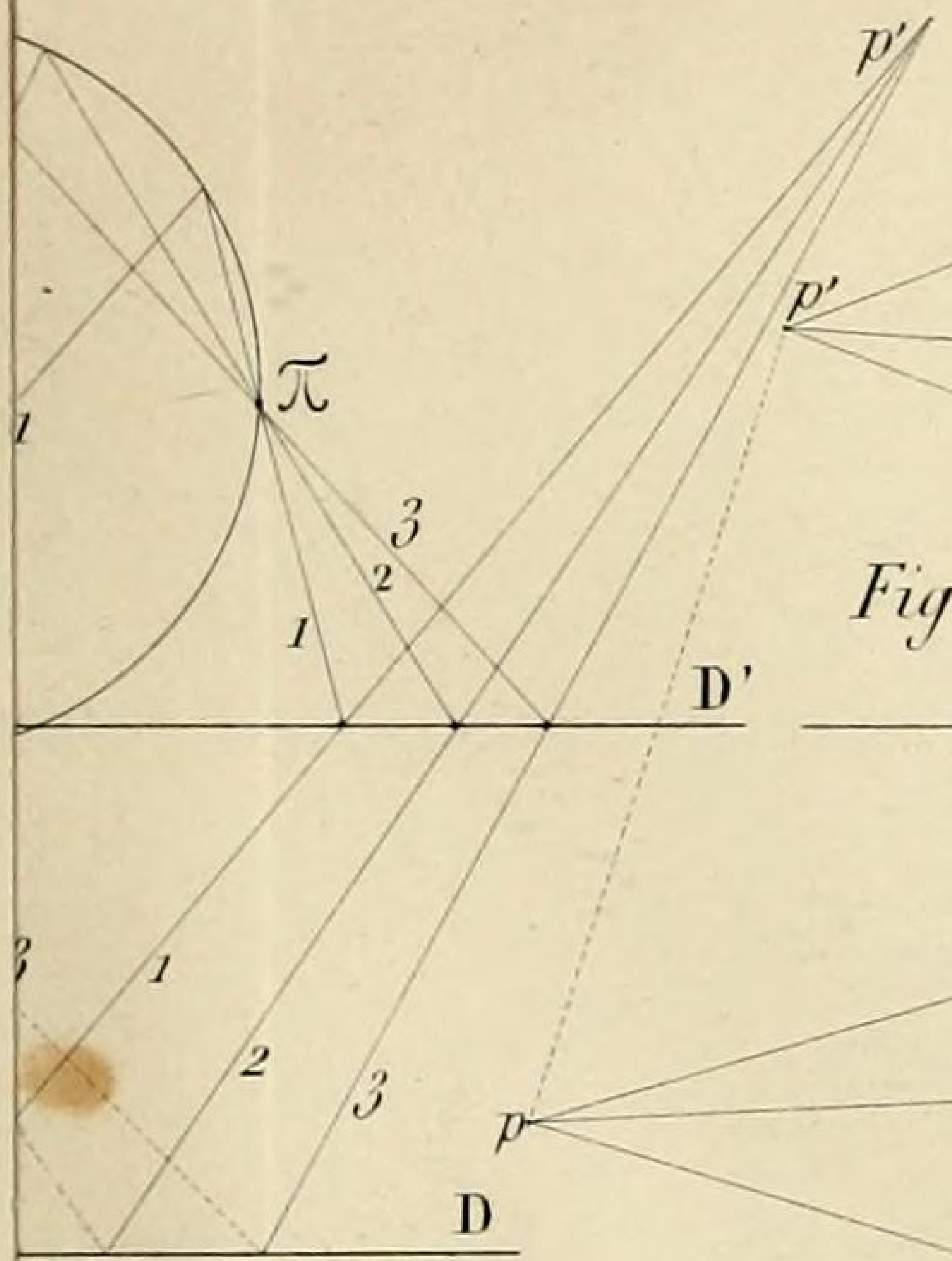


Fig. 20.



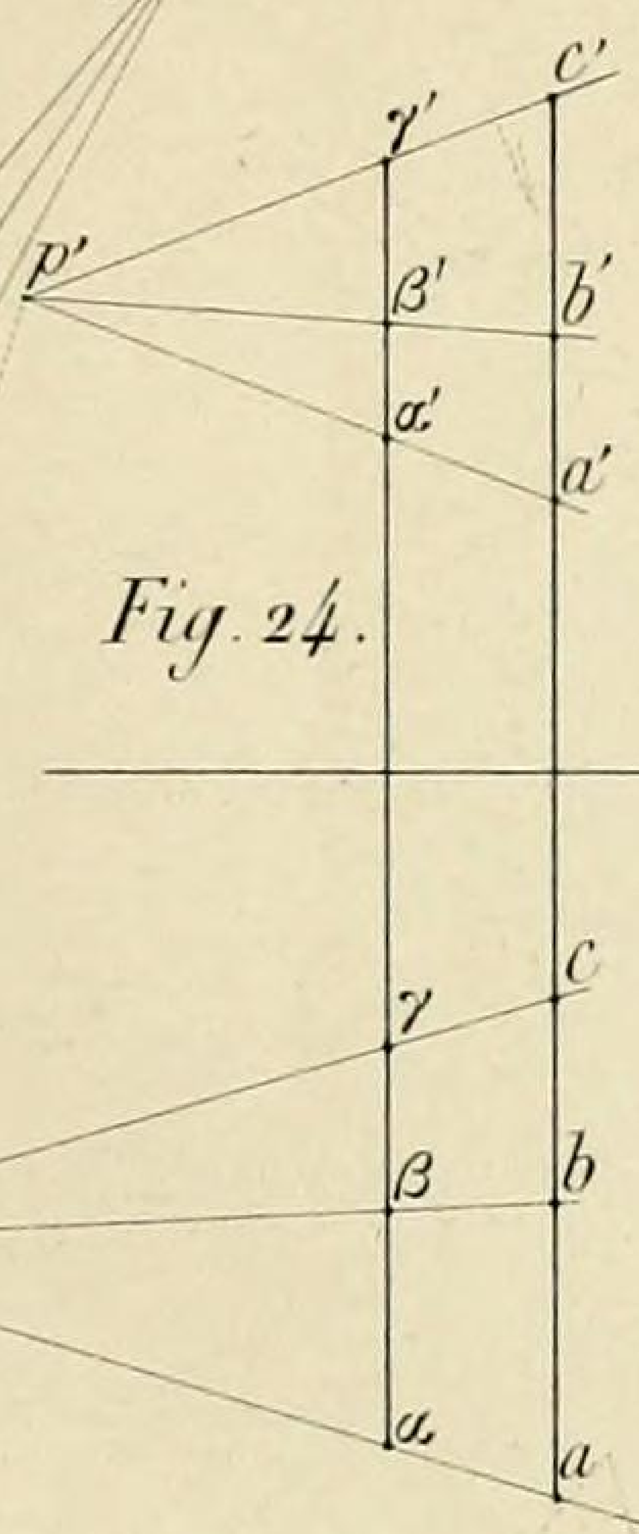


Fig. 24.

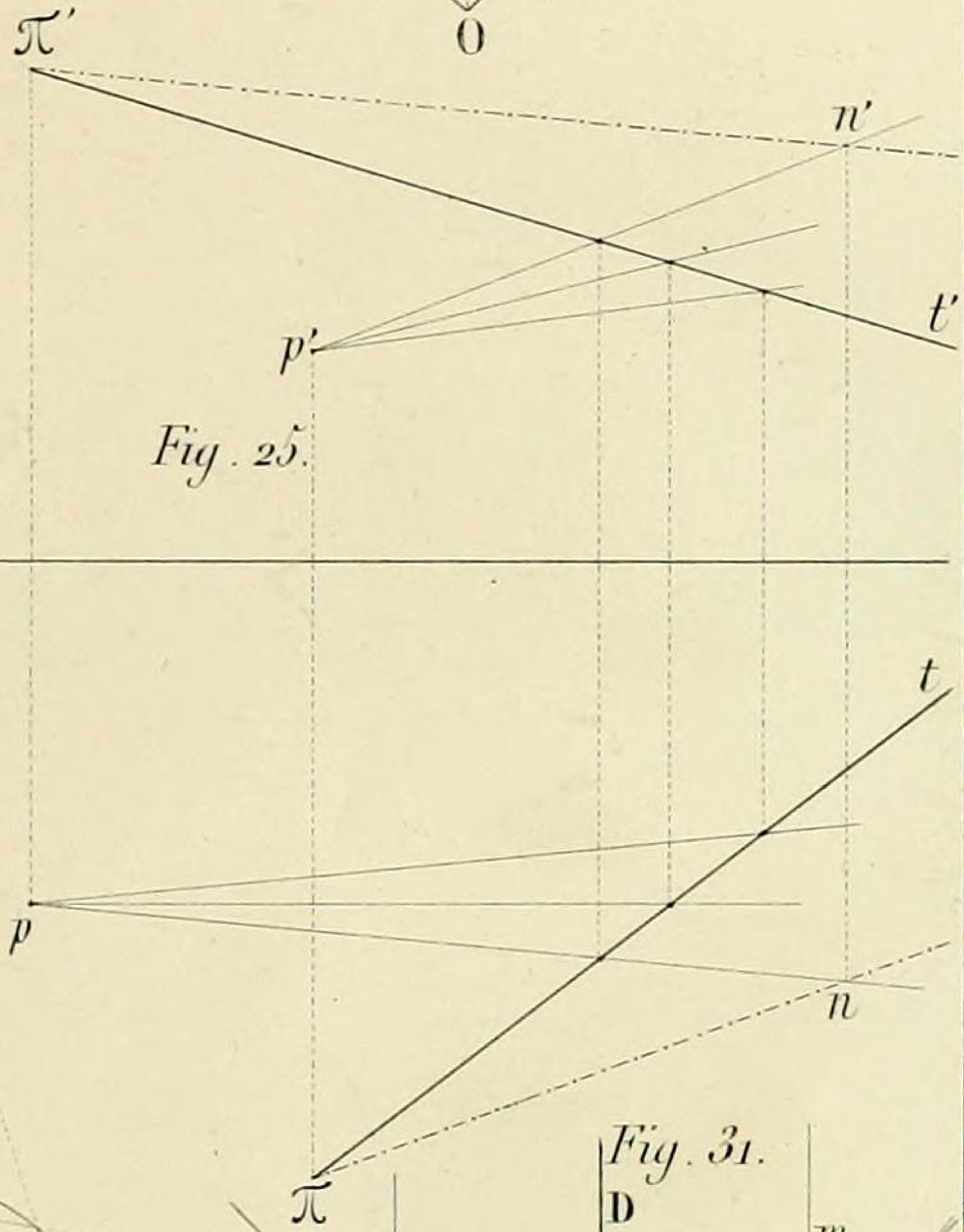


Fig. 25.

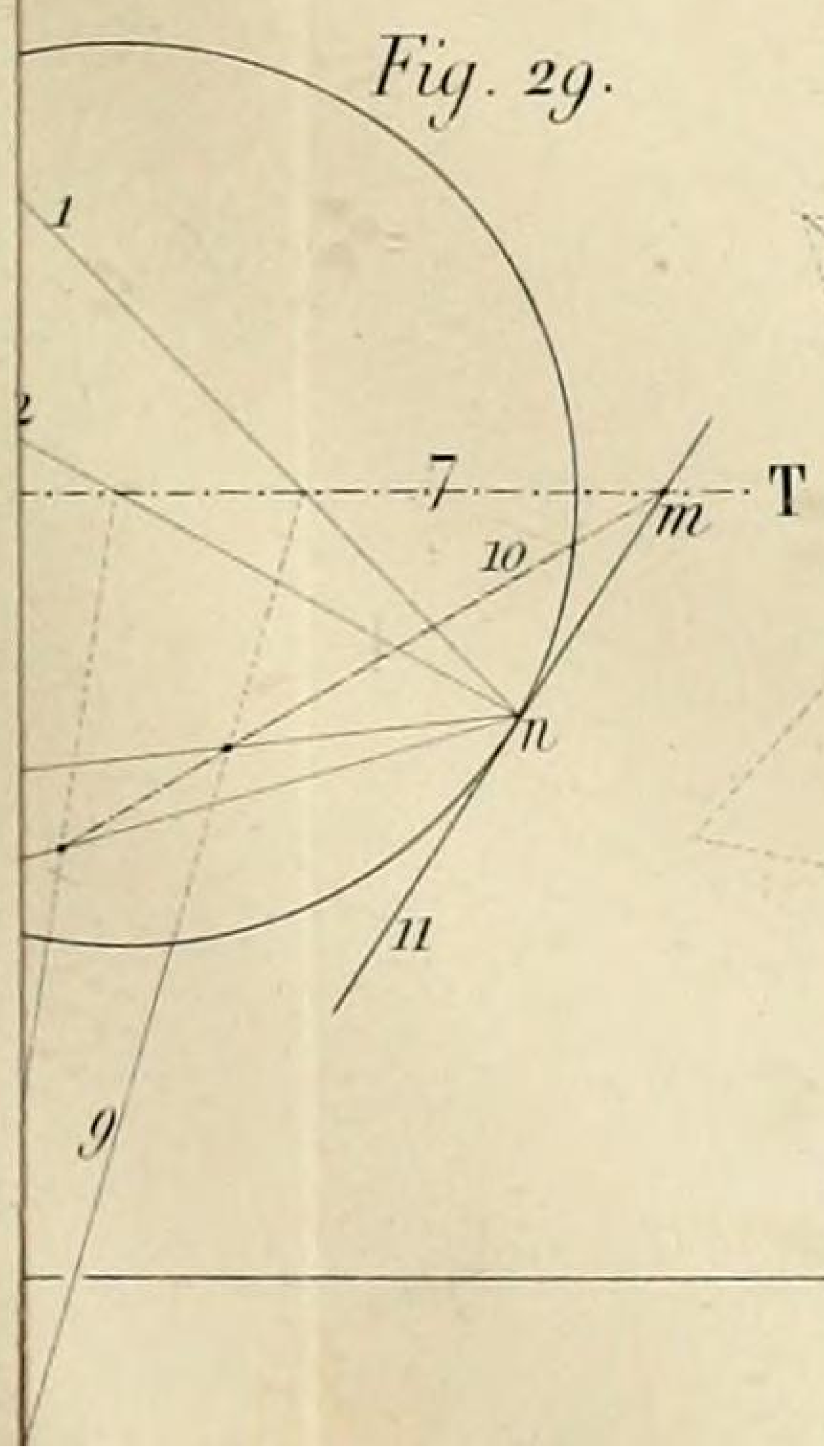


Fig. 29.

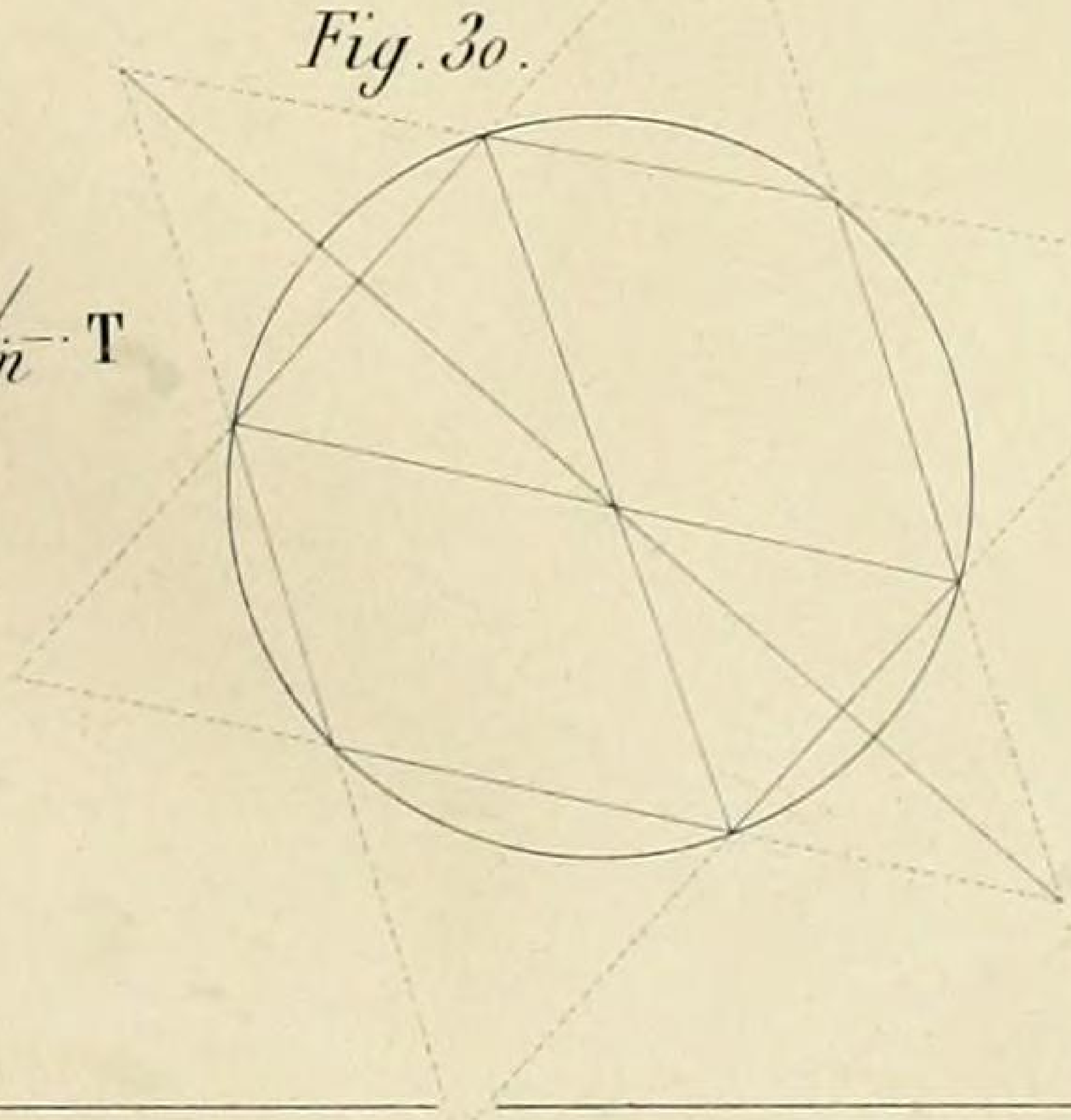


Fig. 30.

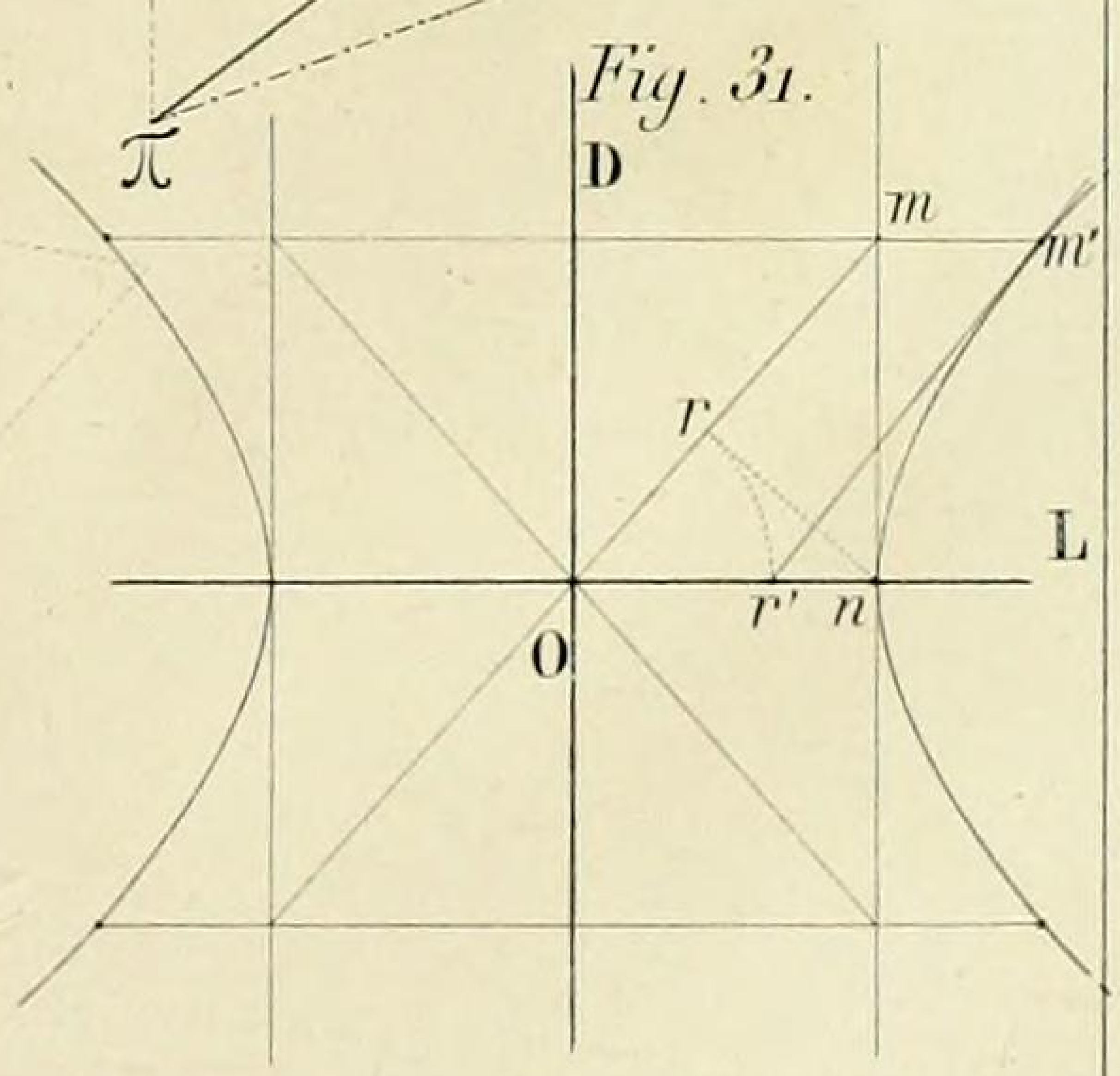


Fig. 31.

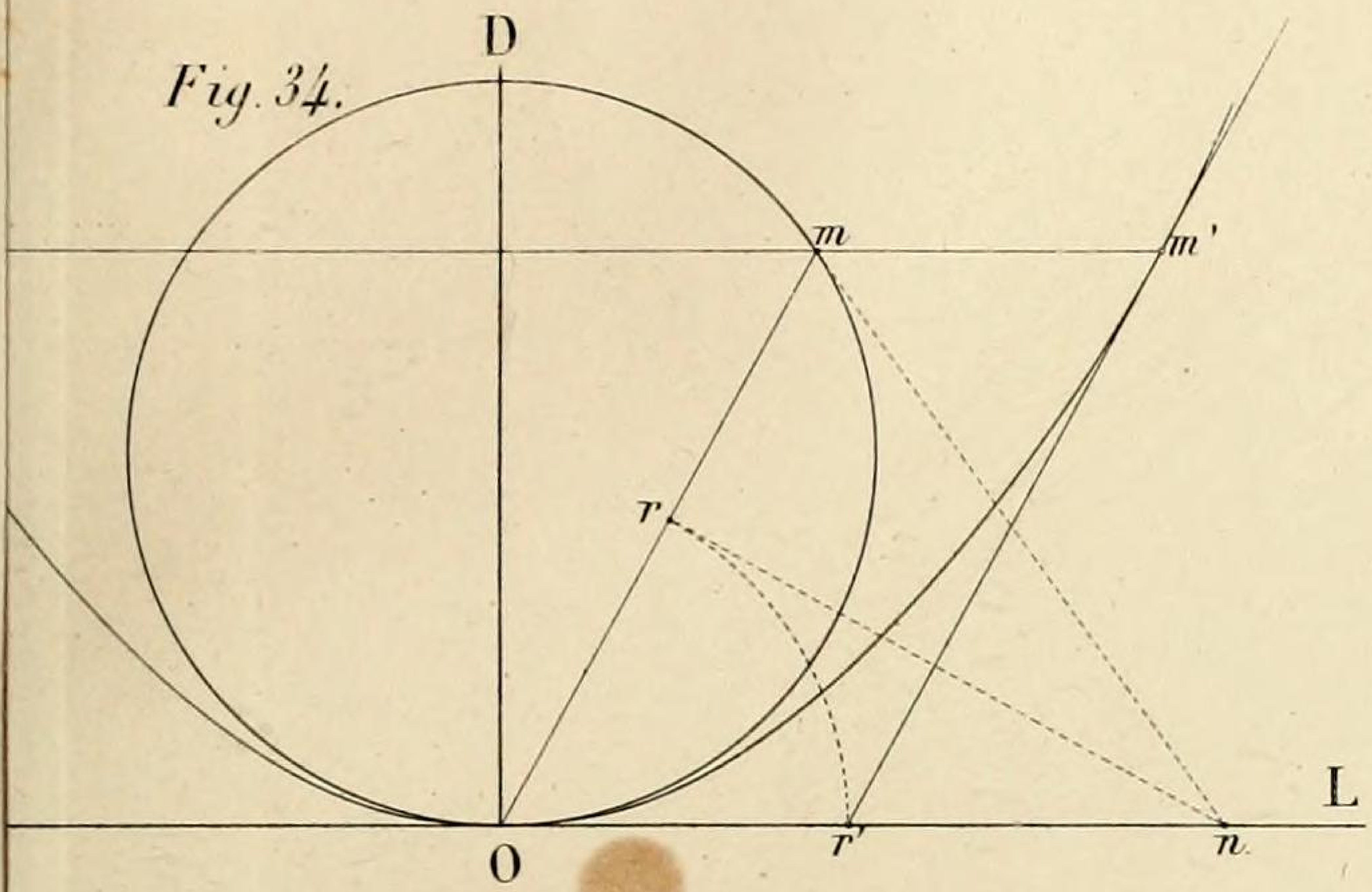


Fig. 34.

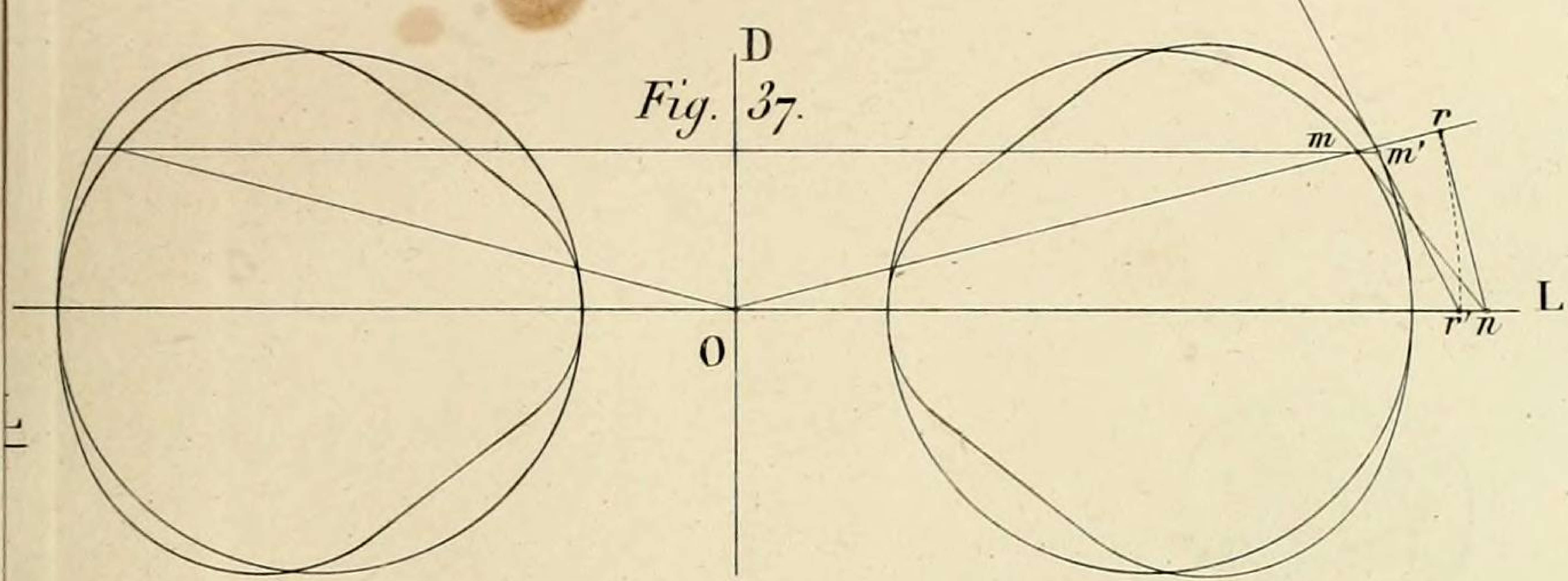
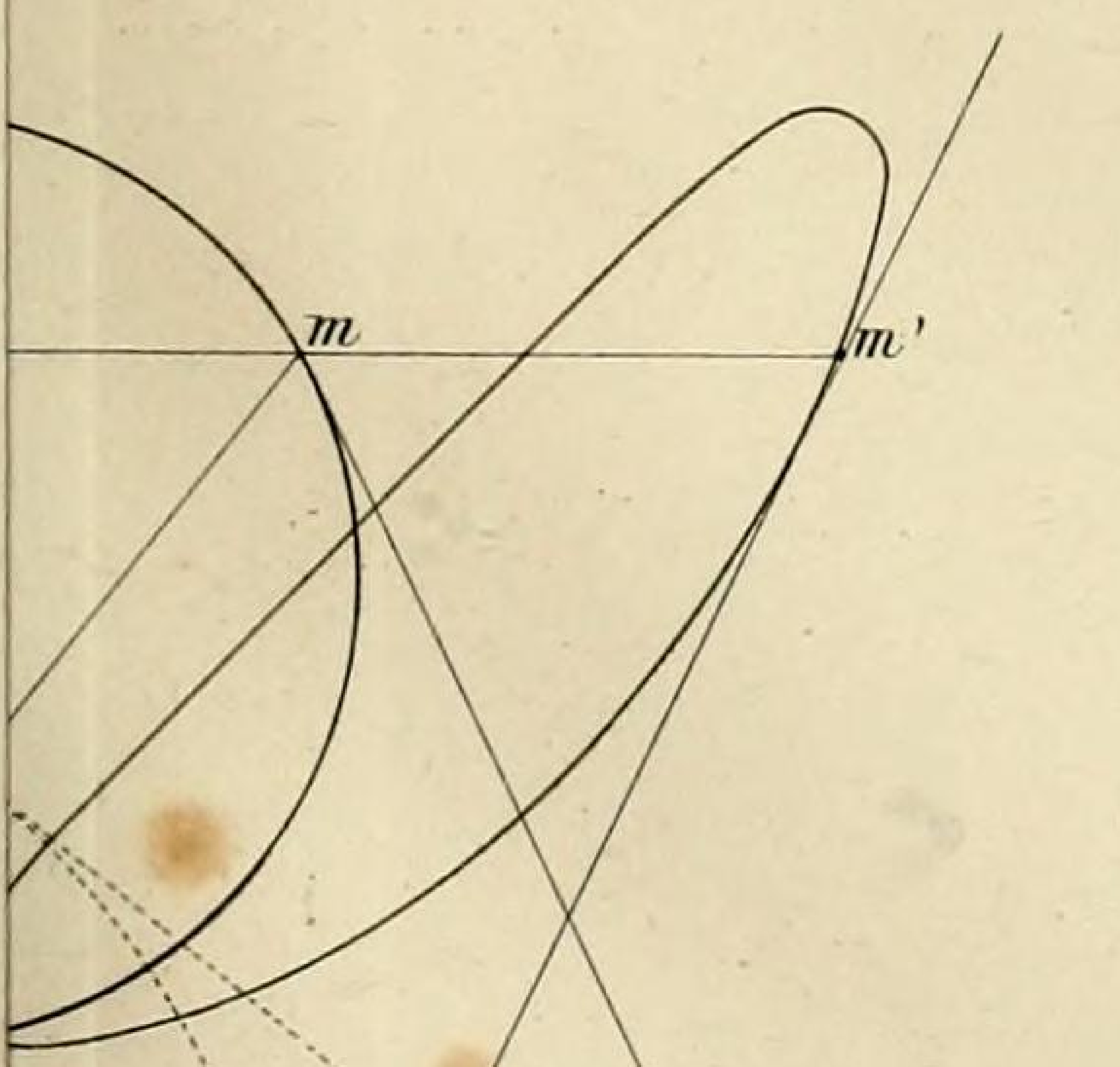


Fig. 37.



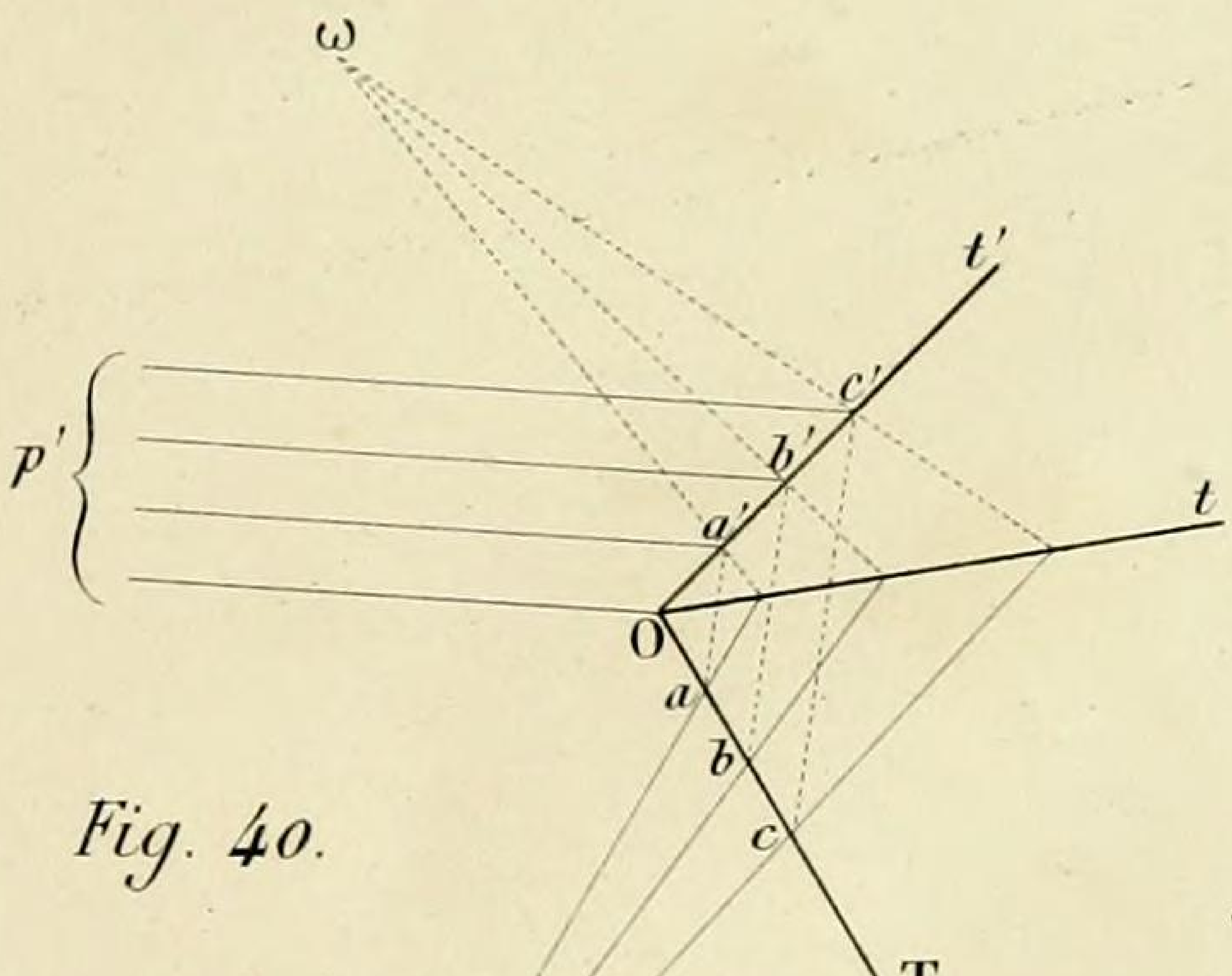


Fig. 40.