PROGRAMME

DU

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

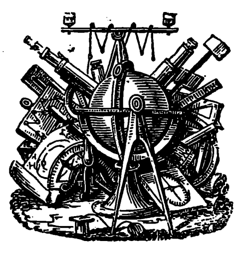
FAIT A L'UNIVERSITÉ

PAR

J.-B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

NOUVELLE ÉDITION.



LIÉGE,

IMPRIMERIE DE L. GRANDMONT-DONDERS, LIBRAIRE,

RUE VINAVE-D'ILE, N° 20-608.

1850.

PROGRAMME

DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Première Partie,

TRAITANT DE LA REPRÉSENTATION DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES PLANES, ET DE PROBLÊMES RELATIFS A CES CORPS.

PREMIÈRE SECTION,

TRAITANT DE LA REPRÉSENTATION DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

(Éléments suffisants pour représenter les corps terminés par des surfaces planes.)

Définition. — Un premier but de la Géométrie descriptive est de donner des méthodes faciles pour *représenter* ou *dessiner sur un plan,* qui n'a que deux dimensions, tout corps de la nature qui en a trois, de manière que, si le corps venait à disparaître, on pût, au moyen de ce *dessin,* le reproduire avec sa *même forme,* sa *même grandeur*, et dans la *même position* qu'il occupait d'abord.

Un tel dessin s'appelle *épure.*

Un second but de la Géométrie descriptive est de déduire, de la seule épure d'un corps, le résultat de tout problême, dont la Géométrie ordinaire donne la solution, en supposant que l'on puisse opérer sur le corps même dans l'espace.

Enfin le but le plus élevé de la Géométrie descriptive est de faire servir les méthodes dont il s'agit ci-dessus comme moyens de découvrir et de démontrer des propriétés de l'étendue.

DE LA REPRÉSENTATION DU POINT.

Pour représenter un corps de *forme*, de *grandeur* et de *position* sur un plan, il suffit de représenter sur ce plan la position de chacun de ses points, et pour cela de savoir représenter sur ce plan la position d'un seul point arbitrairement donné dans l'espace.

Convention pour représenter la position d'un point de l'espace sur deux plans fixes qui se coupent.

Définition. — La projection d'un point sur un plan, c'est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

Projeter un point sur un plan, c'est marquer le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Cela posé :

Pour représenter la position d'un point de l'espace, sur deux plans fixes qui se coupent, on est convenu de marquer la projection de ce point sur chacun des deux plans fixes.

Les deux plans fixes prennent le nom de plans de projection. L'un est dit plan horizontal de projection, et l'autre, plan vertical de projection.

De même, des deux projections d'un point, l'une est dite projection horizontale, et l'autre, projection verticale.

L'intersection des deux plans de projection s'appelle ligne de terre.

Propriété. — Un point quelconque et ses deux projections se trouvent toujours dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Si les deux plans de projection se coupent à angle droit, on a de plus la propriété suivante :

Propriété. — La distance de la projection horizontale d'un point à la ligne de terre, est égale à la distance du point dans l'espace au plan vertical de projection.

La distance de la projection verticale d'un point à la ligne de terre, est égale à la distance du point dans l'espace au plan horizontal de projection.

Moyen de retrouver la position d'un plan dont on connaît les projections sur deux plans fixes qui se coupent.

Par la projection horizontale du point, on élèvera une perpendiculaire ou plan horizontal de projection. Par la projection verticale du point, on élèvera une perpendiculaire au plan vertical de projection. L'intersection de ces deux perpendiculaires sera la position cherchée.

Convention pour représenter la position d'un point sur un seul plan.

Pour que la position d'un point, représentée au moyen de ses projections sur deux plans fixes qui se coupent, se trouvent représentée sur un seul de ces plans (but de la Géométrie descriptive) il suffit, connaissant l'angle que font ces deux plans fixes, et ayant tracé d'une manière visible *la ligne de terre*, à laquelle nous les supposons pour un instant terminés, *de rabattre* l'un sur l'autre, c'est-à-dire, de faire tourner l'un d'eux autour de la ligne de terre, jusqu'à ce qu'il coïncide avec l'autre. Alors les deux projections du point, éléments nécessaires et suffisants pour reproduire sa position, se trouveront de fait sur un seul et même plan.

D'après cette convention, qui est reçue en Géométrie descriptive, quand les deux projections d'un point de l'espace figurent sur un même plan, et désormais il en sera toujours ainsi, il faudra bien se rappeler que, *des deux plans de projection séparés par la ligne de terre, il n'y en a jamais qu'un dans sa véritable position, et par suite que, des deux projections d'un point, il n'y en a également qu'une dans sa véritable position.*

Propriété. — Quand les deux projections d'un point figurent sur un même plan, la droite qui les unit est perpendiculaire à la ligne de terre. (Cette propriété existe, quelque soit l'angle que faisaient d'abord les deux plans de projection avant que l'un n'ait été rabattu dans l'autre.)

Moyen de retrouver la position d'un point dont les deux projections figurent sur un même point.

Pour retrouver la position d'un point dont les deux projections figurent sur un même plan, il suffit de ramener dans sa véritable position celui des deux plans qui ne s'y trouve pas, en le faisant tourner autour de la ligne de terre, avec la projection qu'il renferme, jusqu'à ce qu'il fasse avec l'autre plan l'angle qu'ils faisaient d'abord entre eux, angle qui doit toujours être connu. Alors le problème est ramené au cas, où l'on connaît les deux projections d'un point sur deux plans donnés de position.

Si les deux plans de projection se coupaient d'abord à angle droit, ce que nous supposons dans tout ce qui va suivre, alors on peut retrouver la position d'un point, sans être obligé de faire retourner dans sa véritable position celui des deux plans de projection qui ne s'y trouve pas.

Pour cela, il suffit, par celle des deux projections dont le plan est dans sa véritable position, d'élever à ce plan une perpendiculaire égale à la distance de l'autre projection à la ligne de terre; l'extrémité de cette perpendiculaire sera la position cherchée.

DE LA REPRÉSENTATION DE LA DROITE.

On appelle *projection horizontale* d'une droite, l'intersection du plan horizontal de projection avec un plan mené par la droite perpendiculairement au plan horizontal.

On appelle *projection verticale* d'une droite, l'intersection du plan vertical de projection avec un plan mené par la droite perpendiculairement au plan vertical.

Une droite est représentée de position par ses deux projections.

Pour reproduire la position d'une droite, lorsque ses projections sont données, il suffit de faire les mêmes raisonnements que pour retrouver la position d'un point dont on connaît les projections.

DE LA REPRÉSENTATION DU PLAN.

On appelle *trace horizontale* d'un plan, la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan horizontal de projection.

On appelle *trace verticale* d'un plan, la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan vertical de projection.

Les deux traces d'un plan sont deux droites situées dans ce plan, et on est convenu de les prendre pour représenter sa position.

Les deux traces d'un plan doivent toujours, ou se couper sur la ligne de terre, ou être parallèles à la ligne de terre.

Observation. — Quand un plan est perpendiculaire au plan horizontal de projection, sa trace horizontale s'appelle aussi *projection horizontale du plan.*

Quand un plan est perpendiculaire au plan vertical de projection, sa trace verticale s'appelle aussi *projection verticale du plan.*

DES DIFFÉRENTES POSITIONS D'UN POINT PAR RAPPORT AUX PLANS DE PROJECTION.

Le formulaire qui fait reconnaître toutes les positions d'un point, à l'inspection de ses projections, est le suivant :

» Selon que la *projection horizontale* d'un point se trouve EN DEÇA OU AU DELA de la ligne de terre, le point dans l'espace se trouve. . . . . du *plan vertical.*

» Selon que la *projection verticale* d'un point se trouve AU DESSUS OU AU DESSOUS de la ligne de terre, le point dans l'espace se trouve. . . . . du *plan horizontal.*

DES DIFFÉRENTES POSITIONS D'UNE DROITE PAR RAPPORT AUX PLANS DE PROJECTION.

Une droite peut être :
- parallèle
  - au plan horizontal,
  - au plan vertical,
  - aux deux plans, c'est-à-dire, à la ligne de terre.
- perpendiculaire
  - au plan horizontal,
  - au plan vertical,
  - à la ligne de terre.
- oblique aux deux plans de projection.

Le formulaire qui fait reconnaître toutes les positions d'une droite, à l'inspection de ses projections, est le suivant :

» Selon que la *projection verticale* d'une droite est PARALLÈLE OU PERPENDICULAIRE à la ligne de terre, la droite dans l'espace est . . . . au plan *horizontal.*

» Selon que la *projection horizontale* d'une droite est . . . . à la ligne de terre, la droite dans l'espace est . . . . au plan *vertical.*

EXCEPTION. — Ces deux lois n'existent pas pour une droite dont les deux projections se confondent avec une même perpendiculaire à la ligne de terre. Dans ce cas, la droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et elle n'est déterminée de position que lorsqu'on donne les projections de deux de ses points.

DES DIFFÉRENTES POSITIONS D'UN PLAN PAR RAPPORT AUX PLANS DE PROJECTION.

Un plan peut être :

- parallèle
  - au plan horizontal,
  - au plan vertical,
  - à la ligne de terre.
- perpendiculaire
  - au plan horizontal,
  - au plan vertical,
  - aux deux plans, c'est-à-dire à la ligne de terre.
- oblique aux deux plans de projection.

Le formulaire qui fait reconnaître toutes les positions d'un plan, à l'inspection de ses traces, est le suivant :

» Selon que la trace *verticale* d'un plan est PARALLÈLE OU PERPENDICULAIRE à la ligne de terre,
le plan dans l'espace est . . . . au plan *horizontal*.

» Selon que la trace *horizontale* d'un plan est . . . . à la ligne de terre,
le plan dans l'espace est . . . . au plan *vertical*.

EXCEPTION. — Ces deux lois n'existent pas pour un plan dont les deux traces seraient parallèles à la ligne de terre, auquel cas le plan est lui-même parallèle à la ligne de terre.

DES DIFFÉRENTES POSITIONS QUE DEUX DROITES PEUVENT AVOIR ENTR'ELLES.

Deux droites peuvent

- se couper,
- être parallèles,
- ne pas être parallèles et ne pas se couper.

Pour reconnaître ces trois circonstances, on a les deux lois suivantes :

PROPRIÉTÉ. — Deux droites se coupent dans l'espace, quand le point d'intersection de leurs projections horizontales et le point d'intersection de leurs projections verticales se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre et réciproquemeut.

PROPRIÉTÉ. — Deux droites parallèles dans l'espace ont leurs projections horizontales et verticales respectivement parallèles et réciproquement.

EXCEPTION. — Il peut exister une exception à la seconde loi dans le cas où les deux droites sont chacune perpendiculaire à la ligne de terre.

Exception. — Il peut exister une exception à la réciproque de la seconde loi dans le cas où les deux droites sont chacune perpendiculaire à la ligne de terre.

Si deux droites se coupent à angle droit, et que l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, on a la propriété :

Propriété. — Deux droites perpendiculaires dont l'une est parallèle à l'un des plans de projection, ont leurs projections sur ce plan seulement perpendiculaires.

DE TOUTES LES POSITIONS QUE DEUX PLANS PEUVENT AVOIR ENTRE EUX.

Deux plans doivent toujours { se couper, ou être parallèles.

On reconnaîtra ces deux circonstances à la loi suivante :

Propriété. — Deux plans parallèles ont leurs traces horizontales et verticales respectivement parallèles, et réciproquement.

Exception. — Il peut exister une exception à la réciproque dans le cas où les traces des deux plans sont toutes parallèles à la ligne de terre.

Pour deux plans perpendiculaires dont l'un est perpendiculaire à l'un des plans de projection, on a la propriété :

Propriété. — Deux plans perpendiculaires, dont l'un est perpendiculaire à un plan de projection, ont leurs traces sur ce dernier perpendiculaires.

DE TOUTES LES POSITIONS QU'UNE DROITE PEUT AVOIR A L'ÉGARD D'UN PLAN.

Une droite peut { être dans le plan, être parallèle au plan, couper le plan.

Pour ces trois cas, on ne peut reconnaître, à l'inspection des projections de la droite et des traces du plan, que la circonstance où la droite coupe le plan à angle droit, circonstance que l'on reconnaîtra par la loi suivante :

Propriété. — Si une droite est perpendiculaire à un plan, les projections horizontales et verticales de la droite sont respectivement perpendiculaires aux traces horizontales et verticales du plan; et réciproquement.

Exception. — La réciproque peut avoir une exception dans le cas, où les deux traces du plan sont parallèles à la ligne de terre.

DEUXIÈME SECTION,

TRAITANT DE QUESTIONS RELATIVES AU POINT, A LA DROITE ET AU PLAN.

Toutes les opérations graphiques (*), que nécessite la solution d'un problème quelconque de Géométrie descriptive, ne sont qu'une répétition de celles qu'il faut exécuter pour arriver à la solution des deux problèmes suivants :

Premier problème. — Construire le point de rencontre d'une droite donnée avec un plan donné.

Second problème. — Construire la longueur d'une portion de droite donnée.

Observation. — Si dans une question de Géométrie descriptive on donne un point, une droite, un plan, cela signifie que l'on donne les deux projections de ce point, les deux projections de cette droite, les deux traces de ce plan. De même, si l'on demande de trouver un point, une droite, un plan, cela veut dire qu'il faut trouver les deux projections de ce point, les deux projections de cette droite, les deux traces de ce plan.

Le premier problème sera subdivisé comme suit :

A. Cas particulier. — Construire les points de rencontre d'une droite avec les plans de projection; c'est-à-dire, construire les *traces* de la droite.

B. Application. — Construire les deux traces d'un plan assujetti à satisfaire à diverses conditions.

(*) Règles à observer dans le tracé des épures.

Les projections horizontales des lignes qui représentent *les données* ou *les résultats* d'un problème, seront marquées par un trait *plein* et *continu*, lorsque ces lignes sont visibles pour l'œil d'un spectateur placé sur le plan vertical vis-à-vis des données, à une distance infinie du plan horizontal.

Les projections horizontales de ces mêmes lignes, ou des portions de ces lignes qui ne sont pas visibles, seront *ponctuées*.

Les projections verticales de ces lignes seront marquées par un *trait plein et continu*, lorsque ces lignes sont visibles pour l'œil d'un spectateur placé sur un plan horizontal, vis-à-vis des données, à une distance infinie du plan vertical.

Les projections verticales de ces mêmes lignes ou des portions de ces lignes qui ne sont pas visibles, seront *ponctuées*.

Les projections des lignes auxiliaires, qui ne représentent ni les données ni les résultats d'un problème, seront composées de *petits traits interrompus*, qu'elles soient visibles ou non.

Les lignes auxiliaires sur lesquelles on voudra appeler l'attention, d'une manière particulière, pourront être représentées par une ligne mixte, composée de *petits traits* séparés par *un* ou *deux points ronds*.

C. Réciproquement. — Étant données les deux traces d'une droite, construire ses deux projections, et comme

D. Application. — Construire les deux projections de l'intersection de deux plans.

E. Cas général. — Construire le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.

PREMIER PROBLÈME.

A.

Construire les points de rencontre d'une droite avec les plans de projection; autrement dit, construire les deux traces de la droite.

On appelle *trace horizontale* d'une droite, le point dans lequel la droite rencontre le plan horizontal de projection; et *trace verticale* d'une droite, le point dans lequel la droite rencontre le plan vertical de projection.

Moyen de solution : Cela revient à déterminer, parmi tous les points de la droite, celui dont la distance au plan horizontal est nulle, et celui dont la distance au plan vertical est nulle; ce qui conduit à la solution graphique suivante :

Solution graphique. — Prolonger la projection verticale de la droite jusqu'à la ligne de terre; en ce point élever une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la projection horizontale de la droite; ce dernier point de rencontre sera la *trace horizontale* de la droite. — De même, prolonger la projection horizontale de la droite jusqu'à la ligne de terre; en ce point élever une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la projection verticale de la droite; ce dernier point de rencontre sera la *trace verticale* de la droite.

Observation. — Une droite n'a qu'une trace, si elle est parallèle à l'un des plans de projection.

La trace d'une droite, perpendiculaire à un plan de projection, coïncide avec la projection de la droite sur ce plan.

B

Construire les traces d'un plan assujetti à satisfaire à diverses conditions.

Moyens de solution. — Lorsqu'un plan passe par une droite, les traces de ce plan doivent passer respectivement par les traces de la droite.

Lorsqu'un plan passe par une horizontale, sa trace horizontale est parallèle à cette horizontale.

Réciproquement, toute horizontale, située dans un plan, est parallèle à la trace horizontale de ce plan.

Pour pouvoir construire les deux traces d'un plan, il faut connaître au préalable deux droites de ce plan. Une droite suffit si l'on connaît la direction de l'une ou de l'autre trace du plan.

Applications.

1. — Par un point donné sur l'une des traces d'un plan mener une parallèle à l'autre trace de ce plan.

2. — Par une droite mener un plan vertical, puis un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

3. — Vérifier si une droite donnée est située dans un plan donné.

4. — Vérifier si un point donné est situé dans un plan donné.

5. — Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.

6. — Mener un plan par deux droites qui se coupent.

7. — Mener un plan par deux droites qui se coupent, et dont l'une est parallèle au plan horizontal et l'autre parallèle au plan vertical.

8. — Mener un plan par deux droites parallèles.

9. — Mener un plan par trois points non en ligne droite.

10. — Mener un plan par un point et une droite.

11. — Mener un plan par une droite parallèlement à une autre droite donnée quelconque.

12. — Mener un plan par une droite parallèlement à la ligne de terre.

13. — Mener un plan par un point parallèlement à deux droites données.

14. — Mener un plan par un point parallèlement à un plan donné.

15. — Mener un plan par une droite perpendiculairement à un plan donné.

16. — Mener un plan par un point perpendiculairement à une droite.

17. — Même problème, la droite étant une horizontale.

18. — Étant donnés un plan et la projection horizontale d'une droite située dans ce plan, chercher la projection verticale de cette droite.

19. — Étant donnés un plan et la projection horizontale d'un point situé dans ce plan, chercher la projection verticale de ce point.

C.

Connaissant les traces d'une droite, chercher les projections de la droite.

Moyen de solution. — Il suffit de construire les projections des deux traces de la droite, et pour cela de se rappeler qu'un point, qui est situé dans l'un des plans de projection, est lui-même sa projection sur ce plan, et que son autre projection doit se trouver sur la ligne de terre.

D.

Construire les deux projections de l'intersection de deux plans.

Moyen de solution. — La droite d'intersection de deux plans rencontre le plan vertical de projection au point, où les traces verticales se coupent, et le plan horizontal de projection au point, où les traces horizontales se coupent.

Cas facile. — Le cas le plus simple de l'intersection de deux plans, est celui où l'un d'eux est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Divers cas d'intersections et applications.

1. — Chercher l'intersection de deux plans, dont l'un est parallèle, soit au plan horizontal de projection, soit au plan vertical de projection.

Moyen de solution. — Dans le premier cas l'intersection est parallèle au plan horizontal de projection et dans le second cas, parallèle au plan vertical de projection.

2. — Chercher l'intersection de deux plans, dont les traces soit horizontales, soit verticales, sont parallèles.

Moyen de solution. — Dans le premier cas la droite d'intersection est parallèle au plan horizontal de projection et dans le second cas parallèle au plan vertical de projection.

3. — Chercher l'intersection de deux plans sans faire usage des points d'intersection des traces.

4. — Chercher l'intersection de deux plans dont les traces se coupent en un même point de la ligne de terre.

5. — Chercher l'intersection de deux plans parallèles à la ligne de terre.

6. — Par un point donné, mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan.

Solution dans l'espace. — Par le point et la première droite mener un plan; — par le point et la seconde droite mener un plan; — l'intersection de ces deux plans sera la droite cherchée.

7. — Déterminer l'intersection de deux plans, dont chacun est représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ces plans.

La solution de ce problème en fournit une seconde pour le précédent.

8. — Trouver une droite qui s'appuie sur deux autres et qui soit parallèle à une troisième.

Solution dans l'espace. — Par la première droite mener un plan parallèle à la troisième. — Par la seconde droite mener un plan parallèle à la troisième. — L'intersection de ces deux plans sera la droite demandée.

E.

Chercher le point de rencontre d'une droite avec un plan quelconque.

Moyen de solution. — Le point devant se trouver sur la droite proposée, la question sera résolue, si l'on peut déterminer une nouvelle droite sur laquelle le point doit également se trouver.

Pour cela, si par la droite proposée, on mène un plan auxiliaire quelconque, tous les points de la droite seront dans ce plan auxiliaire ; le point que l'on cherche et qui est un de ceux de la droite, devra donc se trouver dans ce plan auxiliaire. Mais il doit aussi se trouver dans le plan proposé ; donc il sera sur la droite d'intersection du plan proposé avec le plan auxiliaire.

Pour plus de simplicité, le plan auxiliaire sera généralement perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Cas facile. — Le cas le plus simple de la recherche du point de rencontre d'une droite avec un plan, est celui où le plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection; dans ce cas, l'emploi du plan auxiliaire devient inutile.

Applications.

1. — Chercher l'intersection d'un plan vertical avec un plan représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce dernier.

2. — Chercher le point de rencontre d'une droite avec un plan, représenté par deux droites qui se coupent, sans chercher les traces de ce plan.

3. — Par un point mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan.

Solution dans l'espace. — Par le point et la première droite mener un plan. — Chercher le point de rencontre de ce plan avec la seconde droite. La droite qui joindra ce point de rencontre avec le point proposé, sera la droite cherchée.

SECOND PROBLÈME.

Chercher la longueur d'une portion de droite, ou la distance entre deux points.

Moyen de solution. — La longueur d'une droite peut être considérée comme étant l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont l'un des deux côtés de l'angle droit est égal à la projection horizontale de la droite, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la différence des hauteurs verticales des extrémités de la droite.

Cas facile. — Une droite, parallèle à l'un des plans de projection, se projette sur ce plan dans sa véritable grandeur.

Applications.

1. — Chercher la distance d'un point à un plan.

2. — Chercher la distance de deux plans parallèles.

3. — Chercher la distance de deux droites parallèles.

4. — Chercher la distance d'un point à une droite.

5. — Chercher la distance d'un point à une droite parallèle à l'un des plans de projection.

6. — Chercher l'angle de deux droites.

7. — Chercher l'angle des deux traces d'un plan.

8. — Chercher l'angle d'une droite avec un plan.

9. — Construire un triangle, dont on a les projections des trois sommets.

10. — Chercher l'angle d'un plan avec les plans de projection.

11. — Mener par une droite donnée un plan qui fasse avec le plan horizontal de projection le plus petit angle possible.

12. — Chercher l'angle de deux plans.

13. — Réduire un angle à l'horizon; c'est-à-dire, connaissant l'angle que font deux droites entre elles, et l'angle que chacune d'elles fait avec une même verticale, construire la projection horizontale de cet angle.

14. — Chercher la plus courte distance entre deux droites et la position de cette plus courte distance.

Solution dans l'espace. — Par la première droite mener un plan auxiliaire parallèle à la seconde. — Par un point de la seconde, abaisser une perpendiculaire sur ce plan. — Par le pied de cette perpendiculaire, mener une parallèle à la seconde; — le point de rencontre de cette parallèle avec la première droite sera une des extrémités de la plus courte distance. — Par ce point élever une perpendiculaire au plan auxiliaire ; — le point de rencontre de cette perpendiculaire avec la seconde droite sera l'autre extrémité de la plus courte distance.

Cas facile.. — Les cas les plus simples de la recherche de la plus courte distance de deux droites sont ceux, 1° où l'une des deux droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection ; 2° où les deux droites sont parallèles à un même plan de projection.

MÉTHODE DES RABATTEMENTS.

BUT. — Lorsque les données ou une partie des données d'une problème figurent dans un même plan de l'espace, et que les opérations, pour arriver à un certain résultat, doivent toutes être exécutées sur ce même plan, le but des rabattements est de construire, sur l'un des plans de projection, une figure semblable et égale à celle que les données forment dans le plan de l'espace. Cela fait, tout se réduit à construire le résultat du problème sur la nouvelle figure qui est accessible, tandis que la première ne l'était pas.

On verra que les solutions par rabattement ont sur les autres l'avantage de mieux faire voir les traces des opérations exécutées pour passer des données au résultat d'un problème.

DÉFINITION. — Lorsqu'on fait tourner un plan autour de sa trace horizontale jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan horizontal de projection, on dit que ce plan a été *rabattu*, et la position qu'un point quelconque de ce plan vient occuper dans le plan horizontal, s'appelle le *rabattement de ce point.*

De même, la position qu'une droite quelconque du plan vient occuper dans le plan horizontal, s'appelle le *rabattement de la droite.*

La trace horizontale autour de laquelle on fait tourner le plan, s'appelle *charnière.*

Principes pour rabattre un point et une droite.

A. — Lorsqu'un plan tourne autour de sa trace horizontale, prise pour charnière, chaque point du plan décrit une circonférence de cercle dont le centre est sur la charnière, et dont le plan est perpendiculaire à la charnière, et par suite vertical.

De ce que le point se meut dans un plan vertical perpendiculaire à la charnière, lorsqu'il sera rabattu, il devra se trouver sur la projection horizontale de ce plan, c'est-à-dire, sur une perpendiculaire abaissée de la projection horizontale du point sur la charnière. De là suit que

B. — tout point rabattu est lié à sa projection horizontale par une perpendiculaire à la charnière.

C. — Du principe (A) résulte aussi que, lorsqu'on met en mouvement un point, pour le rabattre, sa distance à la charnière ne change pas de longueur, non plus que sa distance à un point fixe quelconque de la charnière.

D. — Remarque. — Comme il faudra toujours connaître l'une ou l'autre de ces deux distances, pour pouvoir construire le rabattement d'un point, nous ferons remarquer qu'il existe toujours sur la charnière un point, dont la distance au point à rabattre, se projette dans sa véritable grandeur sur le plan vertical de projection.

E. — Lorsqu'une droite est en mouvement pour se rabattre, elle rencontre dans toutes ses positions la charnière, en un même point et sous un angle constant.

F. — D'après cela, pour rabattre une droite, il suffira de rabattre un seul de ses points, puisque le point dans lequel la droite rencontre la charnière reste fixe. Nous ferons remarquer qu'une droite rencontre toujours la charnière au point, où sa projection horizontale rencontre la même charnière.

Observation. — Il est facile d'adapter les raisonnements, qui précèdent et qui vont suivre, au cas où la trace verticale d'un plan serait charnière, et qu'on voulût rabattre ce plan dans le plan vertical de projection.

Toute solution par rabattement se réduit à savoir résoudre les problèmes suivants :

PREMIER PROBLÈME.

Construire le rabattement d'un point situé dans un plan donné.

Solution graphique. — Ayant déterminé la distance D du point à rabattre à la charnière, on mènera de la projection horizontale du point une perpendiculaire à la charnière, et on prendra sur cette perpendiculaire un point distant de la charnière de la quantité D.

Autre solution. — Ayant déterminé la distance D' du point à rabattre à un point fixe quelconque F de la charnière, on mènera de la projection horizontale du point à rabattre une perpendiculaire à la charnière, et on prendra sur cette perpendiculaire, un point dont la distance au point fixe F, est égale à D'. Cette solution peut être simplifiée en choisissant, d'après la remarque (D), convenablement le point fixe F.

Observation. — Il entre dans l'esprit des solutions précédentes que les distances D, D' soient déterminées elles-mêmes par rabattement autour des traces horizontales des plans verticaux dans lesquelles ces distances sont respectivement situées; opération facile par la considération qui suit.

CAS FACILES. — Si le point à rabattre est donné, dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, alors sa distance à la charnière est toujours parallèle à l'un des plans de projection et s'y projette dans sa véritable grandeur, quelle que soit la trace du plan que l'on choisisse pour charnière.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Étant données les projections horizontales d'une série de points situés dans un même plan, et le rabattement de l'un de ces points autour de la trace horizontale du plan, prise pour charnière, construire les rabattements de tous les autres points par le moyen de quatre ou de trois séries de parallèles.

MOYEN DE SOLUTION. — Par le point dont le rabattement est donné on fera passer, dans le plan proposé, deux droites quelconques D, D', dont on construira les projections horizontales et les rabattements. Cela fait, par chacun des autres points à rabattre, on mènera deux droites respectivement parallèles aux droites D, D', et on construira leurs rabattements, sachant que des droites qui sont parallèles entre elles dans un plan de l'espace le sont aussi en rabattement.

Le rabattement de chaque point sera ainsi fourni par l'intersection des rabattements des deux droites menées par ce point.

Cette solution oblige à construire quatre systèmes de parallèles. Pour que le nombre de ces systèmes se réduise à trois, il faut que l'une des deux droites D, D' mentionnées soit perpendiculaire à la charnière.

TROISIÈME PROBLÈME.

Réciproque du premier problème. — Étant donnés un plan quelconque et le rabattement d'un point de ce plan, construire les projections de ce point.

MOYEN DE SOLUTION. — Par le point à rabattre, on mènera un plan auxiliaire, perpendiculaire à la charnière. On construira l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan proposé. Le point dont on cherche les deux projections devra se trouver sur cette intersection. On rabattra cette intersection autour de la trace horizontale (projection horizontale) du plan auxiliaire prise pour charnière, on déterminera sur cette intersection rabattue la position qui convient au point que l'on cherche. Connaissant ainsi deux rabattements du point que l'on cherche, on construira facilement d'après le principe (B) sa projection horizontale.

Nous laissons à trouver la solution de la réciproque du second problème.

Applications de la théorie des rabattements.

1. — Chercher la longueur d'une portion de droite et les angles qu'elle fait avec les plans de projection.

2. — Trois points étant donnés, construire le triangle dont ces trois points seraient les sommets.

3. — Démontrer que, lorsque dans l'espèce une droite est divisée suivant une loi quelconque, ses projections doivent être divisées suivant la même loi.

4. — Chercher la distance d'un point à une droite.

5. — Chercher la distance de deux droites parallèles.

6. — Chercher le point de rencontre d'une droite avec un plan.

7. — Chercher l'angle de deux droites qui se coupent.

8. — Chercher l'angle des deux traces d'un plan.

9. — Chercher une droite qui divise en deux également l'angle de deux droites données.

10. — Chercher l'angle d'un plan avec le plan horizontal ou le plan vertical de projection.

11. — Même problème dans le cas où les traces sont en ligne droite.

12. — Connaissant la trace horizontale d'un plan et l'angle qu'il fait avec le plan horizontal, chercher la trace verticale de ce plan.

13. — On donne la trace horizontale et le rabattement de la trace verticale d'un plan, chercher la trace verticale. (Indiquer le cas où le problème est impossible).

14. — Par un point donné sur une droite mener un plan perpendiculaire à cette droite.

15. — Chercher l'angle d'une droite avec un plan.

16. — Chercher l'angle de deux plans.

17. — Chercher l'angle de deux plans parallèles à la ligne de terre.

18. — Chercher l'angle de deux plans dont les traces horizontales ou les traces verticales coïncident.

19. — Chercher un plan qui divise en deux également l'angle que font deux autres plans donnés.

20. — Vérifier si une droite est parallèle à un plan donné.

21. — Connaissant les traces horizontales de deux plans qui se coupent, et le rabattement de leur intersection autour de chacune de ces traces, chercher les traces verticales de ces plans.

22. — Dans un plan donné mener une droite qui soit à une distance donnée d'une autre droite également située dans ce plan.

23. — Réduire un angle à l'horizon.

24. — Étant donnés un point et une droite, déterminer sur la droite un point distant du point donné d'une longueur donnée.

25. — Par un point donné mener une droite qui fasse avec les plans de projection des angles donnés.

26. — Déterminer un plan qui passe par un point donné, et qui fasse des angles donnés avec les plans de projection.

27. — Connaissant les projections des arêtes d'un angle trièdre, construire les traces d'un plan qui coupent ces trois arêtes à des distances données, à partir du sommet.

Il sera démontré que tous les problèmes que l'on peut proposer sur l'angle trièdre se réduisent, au moyen de l'angle trièdre supplémentaire, aux trois suivants :

28. — Connaissant les trois faces, chercher les trois angles.

29. — Connaissant deux faces et l'angle compris, chercher les autres faces.

30. — Connaissant deux faces et l'angle opposé à l'une d'elle, chercher la troisième face.

31. — Étant donnés le rabattement d'une circonférence autour d'une charnière donnée, et la projection horizontale d'un point de cette circonférence, construire les projections horizontales de tant de points de la circonférence que l'on voudra.

THÉORIE DU CHANGEMENT DES PLANS DE PROJECTION.

Le changement des plans de projection présente en Géométrie descriptive les mêmes avantages que la transformation des plans coordonnés en Géométrie analytique.

La position des données à l'égard des plans de projection, et réciproquement, la position des plans de projection à l'égard des données, peut apporter de grandes simplifications dans la résolution de presque tous les problèmes de Géométrie descriptive. Ce que nous allons éclaircir par quelques exemples :

Dans la recherche de la longueur d'une portion de droite, nous avons vu que, si le plan vertical de projection est parallèle à la droite, la grandeur de la projection verticale est égale à celle de la droite elle-même; et l'on est dispensé de construire le triangle rectangle dont il a été question ailleurs.

S'il s'agit de chercher le point de rencontre d'une droite avec un plan, l'emploi d'un plan auxiliaire, que l'on est obligé de faire passer par la droite, devient inutile, si le plan vertical de projection passe par la droite proposée, ou s'il est perpendiculaire au plan proposé; car dans les deux cas, l'une des deux projections du point de rencontre est toujours connue.

L'angle que font deux plans serait connu, si le plan vertical de projection était perpendiculaire à l'intersection commune de ces plans ; car dans ce cas, l'angle formé par les deux traces verticales serait l'angle cherché.

La plus courte distance entre deux droites, quant à sa grandeur et à sa position, serait pour ainsi dire trouvée, si l'une des deux droites était perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Mais la solution d'un même problème, pour peu qu'il soit compliqué, se compose le plus souvent de plusieurs problèmes particuliers, et il est rare que tous puissent également participer de l'avantage que donne à l'un d'eux la position particulière des plans de projection, que l'on aura choisie au commencement du problème.

Il est donc bien important, lorsque les données d'un problème se trouvent représentées sur deux plans de projection, de savoir représenter successivement ces mêmes données sur d'autres plans de projection, choisis de manière à rendre plus facile la recherche de chacun des résultats particuliers qui doivent servir à trouver le résultat final.

Chaque fois que dans une question on remplace un plan de projection par un autre, il faudra projeter toutes les données de la question sur cet autre plan de projection; et pour cela, il suffit de savoir résoudre les problèmes suivants :

PREMIER PROBLÈME.

Étant données les projections d'un point, trouver la projection verticale du même point sur un nouveau plan vertical de projection, le plan horizontal de projection restant le même.

Solution. — Comme l'intersection de deux plans de projection est appelée ligne de terre, la trace horizontale du nouveau plan vertical de projection sera désormais appelée *nouvelle ligne de terre*. Cela posé :

Pour trouver la projection verticale d'un point sur un nouveau plan vertical de projection, il suffit d'abaisser de la projection horizontale une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre : le point de cette perpendiculaire, dont la distance à la nouvelle ligne de terre est égale à la distance de l'ancienne projection verticale à l'ancienne ligne de terre, est la nouvelle projection verticale cherchée.

DEUXIÈME PROBLÈME.

Étant données les projections d'une droite, trouver la projection verticale de la même droite, sur un nouveau plan vertical de projection, le plan horizontal de projection restant le même.

Solution. — Il suffit de projeter deux points de la droite sur le nouveau plan vertical de projection, comme il a été dit ci-dessus.

TROISIÈME PROBLÈME.

Étant données les traces d'un plan, trouver la trace verticale du même plan, sur un nouveau plan vertical de projection, le plan horizontal de projection restant le même.

Solution. — Cela revient à rabattre sur le plan horizontal le nouveau plan vertical de projection avec la droite, suivant laquelle il est coupé par le plan proposé.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Un plan quelconque étant donné par ses deux traces, faire en sorte qu'il devienne plan de projection.

Solution. — On prendra, pour nouveau plan vertical de projection, un plan perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé, ce qui revient à prendre, pour nouvelle ligne de terre, une perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé. — Après cela on prendra le plan proposé, pour nouveau plan horizontal de projection; ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre la nouvelle trace verticale du plan proposé.

Applications du changement de la ligne de terre.

1. — Chercher la longueur d'une portion de droite.

Moyen de solution. — Prendre pour nouveau plan vertical de projection celui qui passe par la droite, ou tout autre qui est parallèle à la droite; ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre la projection horizontale de la droite, ou bien une droite parallèle à cette projection.

2. — Chercher la distance d'un point à un plan.

Moyen de solution. — Le cas le plus facile de ce problème, est celui où le plan proposé est perpendiculaire à l'un des plans de projection ; par exemple au plan vertical.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il faut prendre pour nouveau plan vertical de projection un plan vertical perpendiculaire au plan proposé ; ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre une perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé.

3. — Chercher le point de rencontre d'une droite avec un plan.

Moyen de solution. — Un cas des plus faciles de ce problème, est celui où la droite proposée serait située dans l'un des plans de projection ; par exemple, dans le plan vertical de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre pour nouveau plan vertical de projection, celui qui passe par la droite proposée, ce qui revient à prendre, pour nouvelle ligne de terre, la projection horizontale de la droite.

4. — Chercher la distance d'un point à une droite.

Moyen de solution. — Un cas très-simple de ce problème, est celui où la droite proposée est située dans l'un des plans de projection, par exemple, dans le plan vertical de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre pour nouveau plan vertical de projection, celui qui passe par la droite proposée, ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre la projection horizontale de la droite.

5. — Vérifier si deux droites, dont les projections sont données, sont perpendiculaires.

Moyen de solution. — Dans le cas particulier, où l'une des deux droites est parallèle à l'un des plans de projection, on peut reconnaître, à l'inspection des projections de ces droites, si elles sont perpendiculaires dans l'espace. — Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre, pour nouveau plan vertical de projection, celui qui passe par l'une des deux droites, ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre la projection horizontale de l'une des deux droites.

6. — Vérifier si un polygone donné est plan, c'est-à-dire, si tous ses côtés sont situés dans un même plan.

Moyen de solution. — Dans le cas particulier, où le polygone se projette en ligne droite sur l'un des plans de projection, le polygone est plan. — Donc, pour vérifier dans le cas général si un polygone est plan, il faut le projeter sur un nouveau plan vertical de projection, que l'on prendra perpendiculaire à une horizontale de ce polygone ; ce qui revient à prendre, pour nouvelle ligne de terre, une perpendiculaire à la projection horizontale de cette horizontale.

7. — Chercher l'angle qu'un plan fait avec le plan horizontal de projection.

Moyen de solution. — Le cas le plus simple de ce problème est celui où le plan proposé est perpendiculaire au plan vertical de projection.

Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il suffit de prendre pour nouveau plan vertical de projection, un plan perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé ; ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre une droite perpendiculaire à cette trace.

8. — Chercher l'angle de deux plans?

Moyen de solution : — Le cas le plus simple de ce problème, est celui où les deux plans proposés sont perpendiculaires à l'un des plans de projection. — Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il faut : 1° ramener les deux plans de projection de manière qu'ils aient même trace horizontale ; et pour cela, prendre pour nouveau plan horizontal de projection celui qui passe par la commune intersection des deux plans proposés. Ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre la projection verticale de cette intersection.

2° Quand les deux plans sont ainsi ramenés à avoir même trace horizontale, on prendra pour nouveau plan vertical de projection un plan perpendiculaire à leur commune trace horizontale.

9. — Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.

Moyen de solution. — Dans le cas particulier, où le plan proposé est perpendiculaire à l'un des plans de projection ; par exemple, au plan vertical, il faut, pour que la droite soit parallèle au plan, que la projection verticale de la droite soit parallèle à la projection verticale du plan. — Pour ramener le cas général à ce cas particulier, il faut prendre pour nouveau plan vertical de projection un plan vertical perpendiculaire au plan proposé ; ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre une perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé.

10. — Chercher la plus courte distance entre deux droites, quant à sa grandeur et à sa position.

Moyen de solution. — *Premier cas.* — Le cas le plus simple est celui où l'une des droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection, par exemple, au plan vertical. — Dans ce cas, il est facile de démontrer que la plus courte distance, et la droite qui est perpendiculaire au plan vertical, se projettent sur le plan horizontal dans des perpendiculaires ; de même que la plus courte distance et l'autre droite se projettent sur le plan vertical dans des perpendiculaires.

Ces notions suffisent pour pouvoir construire immédiatement la plus courte distance entre les deux droites dont il s'agit.

Deuxième cas. — Un second cas particulier qui peut être ramené facilement au précédent, est celui où l'une des deux droites est située dans l'un des plans de projection, par exemple, dans le plan horizontal, et dirigée d'une manière quelconque par rapport à l'autre plan de projection. — Dans ce cas, il suffit de prendre pour nouveau plan vertical de projection un plan perpendiculaire à celle des droites qui est située dans le plan horizontal : ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre une perpendiculaire à cette droite.

Cas général. — Enfin, quand les deux droites sont situées d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection, on commencera par ramener ce cas général au second cas particulier qui précède, en prenant pour nouveau plan vertical de projection le plan vertical qui passe par l'une des deux droites : ce qui revient à prendre pour nouvelle ligne de terre, la projection horizontale de cette droite; de ce cas il sera facile de passer au premier cas.

Autre solution. — Construire les deux traces d'un plan parallèle aux deux droites proposées, et faire en sorte que ce plan devienne plan de projection.

11. — Faire passer, par une droite donnée, douze plans partageant l'espace autour de cette droite en vingt-quatre angles égaux.

Moyen de solution. — Il suffit de faire observer que le cas le plus simple de cette recherche est celui où la droite proposée est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

THÉORIE DES PROJECTIONS COTÉES.

Un point est représenté de position par sa seule projection horizontale, lorsque l'on connaît sa distance au plan horizontal de projection. *Cette distance,* réduite en nombre, s'appelle la *cote* du point, et quand cette cote est écrite à côté de la projection, on dit que la projection est *cotée.* Cela posé :

Un point est représenté de position par sa projection cotée. Selon que la cote est positive ou négative, le point se trouve au-dessus ou en dessous du plan horizontal.

Une droite est représentée de position par sa projection avec les cotes de deux de ses points.

Une horizontale est représentée de position par sa projection avec la cote d'un seul de ses points.

Un plan est représenté de position par la projection d'une de ses lignes de plus grande pente (*), avec les cotes de deux points de cette ligne.

Propriété I. — Si sur une droite on prend un nombre quelconque de points projetés respectivement en A, B, C, D, etc., et ayant respectivement pour cotes a, b, c, d, etc., on aura toujours la proportion :

$$AB : a - b = BC : b - c = CD : c - d = \text{etc.}$$

Qu'il est facile d'énoncer en langage ordinaire et de laquelle on déduit facilement comme corollaire, la propriété suivante :

Propriété II. — Lorsque la projection d'une droite est divisée en un nombre quelconque de parties égales, les *cotes* des points de division successifs suivent une progression arithmétique.

Au moyen de la première propriété on résoudra sans difficulté les deux problèmes suivants qui sont d'un usage fréquent.

Problème I. — Étant donnée la projection d'une droite avec les cotes de deux de ses points, chercher la cote d'un point quelconque dont la projection est donnée.

Problème. II. — Étant donnée la projection d'une droite avec les cotes de deux de ses points, déterminer la projection d'un point quelconque dont la cote est donnée.

Graduer la projection d'une droite, c'est déterminer sur cette projection, d'après le problème I, les projections des différents points dont les cotes suivent la progression des nombres naturels 1, 2, 3, etc.

Échelle de pente d'une droite. — La projection graduée d'une droite s'appelle échelle de pente de la droite.

Échelle de pente d'un plan. — La *projection graduée* d'une des lignes de plus grande pente d'un plan, s'appelle échelle de pente du plan. On l'indique par un *trait double* pour la distinguer de l'échelle d'une droite.

Différentes positions de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Deux horizontales sont parallèles et par suite situées dans un même plan, si leurs projections sont parallèles; et réciproquement.

Deux horizontales sont encore dans un même plan, si elles ont même cote.

Si deux droites ou deux plans sont parallèles, alors. 1° Leurs échelles sont parallèles. 2° Les cotes dans l'ordre de grandeur se comptent sur les deux

(*) La ligne de plus grande pente d'un plan est une perpendiculaire, menée dans ce plan, à la trace horizontale ou à une horizontale quelconque de ce plan.

échelles dans le même sens. 3o La grandeur des divisions des deux échelles est la même. Et réciproquement.

Deux droites se coupent dans l'espace, ou sont situées dans un même plan, lorsque les droites qui joignent les points de division marqués des mêmes cotes sur les deux échelles sont parallèles. Et réciproquement.

Par pente d'une droite on entend la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec le plan horizontal. Cette pente est égale en rapport de la différence des cotes de deux points quelconques de la droite, à la distance qui sépare les projections de ces deux points.

Si une droite est perpendiculaire à un plan, l'échelle de la droite est parallèle à l'échelle du plan; la pente de la droite est égale à la valeur inverse de la pente du plan; et les cotes se suivent dans l'ordre de grandeur sur les deux échelles en sens contraire; et réciproquement.

Applications.

Principe. — Pour pouvoir construire l'échelle de pente d'un plan, il faut déterminer au préalable une horizontale quelconque de ce plan.

1. — Étant données l'échelle de pente d'un plan et la projection d'un point situé dans ce plan, déterminer la cote de ce point.

2. — Étant données les échelles de pente de deux droites qui se coupent, trouver l'échelle de pente du plan passant par ces deux droites.

3. — Étant données la projection cotée d'un point et l'échelle de pente d'une droite, trouver l'échelle de pente du plan passant par ce point et cette droite.

4. — Étant données les projections cotées de trois points, trouver l'échelle de pente du plan passant par ces trois points.

5. — Étant données les échelles de pente de deux droites parallèles, trouver l'échelle de pente du plan passant par ces deux parallèles.

6. — Étant données les échelles de pente de deux droites et la projection cotée d'un point, trouver l'échelle de pente du plan passant par le point donné et qui soit parallèle aux deux droites.

7. — Étant données l'échelle de pente d'un plan et la projection cotée d'un point, trouver l'échelle de pente d'un plan passant par le point proposé et parallèle au plan proposé.

8. — Vérifier si une droite donnée est parallèle à un plan donné.

9. — Étant donné un nombre quelconque de droites, vérifier si ces droites sont toutes parallèles à un même plan.

10. — Par un point donné sur un plan, mener une droite dont la pente est donnée.

11. — Par une droite donnée mener un plan dont la pente est donnée.

Intersection de deux plans.

1. — Étant données les échelles de pente de deux plans, trouver l'échelle de pente de leur intersection.

2. — Même problème, les échelles de pente étant parallèles.

3. — Deux plans étant représentés, chacun par les échelles de pente de deux droites qui se coupent, trouver l'échelle de pente de leur intersection, sans déterminer les échelles des deux plans.

Point de rencontre d'une droite avec un plan.

1. — Étant données les échelles de pente d'un plan et d'une droite, trouver la projection cotée du point de rencontre de la droite avec le plan.

2. — Un plan étant représenté par deux droites qui se coupent, chercher la projection cotée du point dans lequel ce plan est rencontré par une horizontale dont la cote est donnée, sans chercher l'échelle du plan.

3. — Démontrer que tout plan, parallèle à deux droites non situées dans un même plan, coupe, en trois points qui sont en ligne droite, trois horizontales quelconques s'appuyant sur ces deux droites.

Remarque. — La solution de cette question prouve la double génération du *paraboloïde hyperbolique*, dont il sera fait mention dans la 2de partie.

4. — On donne un point et deux droites non situées dans un même plan, on demande de construire l'échelle de pente d'une droite qui s'appuie sur les deux droites proposées et qui passe par le point donné.

5. — Même problème, les deux droites étant des horizontales.

Moyen de solution. — Dans ce cas la construction de la droite demandée revient à résoudre le problème de Géométrie plane : par un point pris dans l'intérieur d'un angle mener une droite de manière que la partie comprise entre le point donné et l'un des côtés de l'angle, soit dans un rapport donné avec la partie comprise entre le point donné et l'autre côté de l'angle.

6. — On donne trois horizontales deux à deux non situées dans un même plan, démontrer que trois droites quelconques, s'appuyant sur ces horizontales, sont parallèles à un même plan.

Remarque. — La solution de cette question prouve que *l'hyperboloïde à une nappe*, dont il sera question dans la seconde Partie, dégénère en *paraboloïde hyperbolique*, quand ses trois directrices deviennent parallèles à un même plan.

7. — Construire une droite qui s'appuie sur deux autres droites données et qui soit parallèle à une troisième droite également donnée.

1. — Chercher la longueur d'une portion de droite.

Solution. — Calculer l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est égal à la différence des cotes des extrémités de la droite et dont l'autre côté est égal à la projection horizontale de la droite, projection qui doit être réduite en nombre sur l'*échelle horizontale du dessin.*

2. — Chercher la distance d'un point donné à un plan donné.

3. — Chercher la distance d'un point donné à une droite donnée.

4. — Chercher la distance de deux droites données.

5. — Une certaine étendue de terrain étant représentée par les projections cotées d'une suite de sections horizontales; 1° Construire la section faite dans ce terrain par un plan donné ; 2° Mener par une droite donnée, un plan qui ait un point de commun avec l'une de ces sections et qui laisse au-dessous de lui toutes les autres sections. 3° Mener par un point donné, un plan qui remplisse les mêmes conditions et fasse avec l'horizon le plus petit angle possible.

NOTE.

Nous avons oublié de citer une propriété métrique concernant les deux projections d'une droite, nous réparons ici cette omission :

Propriété. — Si sur une droite de l'espace on prend un nombre quelconque de points projetés respectivement en A, B, C, D, etc., sur le plan horizontal; et en A', B', C', D', etc., sur le plan vertical, on aura toujours la proportion :

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \text{etc.}$$

La réciproque a lieu avec une restriction et peut être énoncée comme suit :

Si la proportion précédente a lieu entre les projections d'un nombre quelconque de points, tous situés dans un même plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, tous ces points appartiendront à une même droite.

Seconde Partie,

TRAITANT DE LA REPRÉSENTATION DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES COURBES, ET DE PROBLÈMES RELATIFS A CES CORPS.

PREMIÈRE SECTION,

TRAITANT DE LA REPRÉSENTATION DES LIGNES COURBES ET DES SURFACES COURBES.

DE LA REPRÉSENTATION DES LIGNES COURBES.

Pour représenter une courbe de *forme*, de *grandeur* et de *position* sur un plan, il suffit de représenter sur ce plan la position de chacun de ses points; ce qui se fait en projetant tous ses points sur deux plans de projection, et en rabattant l'un de ces plans sur l'autre.

La projection horizontale d'une courbe est la ligne qui passe par les projections horizontales de tous les points de cette courbe.

La projection verticale d'une courbe est la ligne qui passe par les projections verticales de tous les points de cette courbe.

Une courbe plane est celle dont les points sont situés dans un même plan.

Une courbe à double courbure, ou mieux *gauche* est celle dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan.

Une *sécante* devient *tangente* à une courbe, quand deux points de section de la sécante considérée comme mobile autour de l'un d'eux, se réunissent en un seul, qui prend alors le nom de *point de contact*.

Autrement. — Si une sécante d'une courbe se meut parallèlement à elle-même, elle deviendra tangente à la courbe, au moment où deux de ses points de section se réuniront en un seul, appelé point de contact.

De chacune de ces définitions suit que la tangente à une courbe plane est toujours située dans le plan de la courbe.

Ces deux définitions de la tangente à une courbe ne peuvent servir à construire la tangente que lorsqu'on connaît la définition de la courbe.

Alors on cherchera au moyen de cette définition une droite auxiliaire, variable de position avec la sécante et qui jouisse à l'égard de cette sécante d'une propriété constante. Cela fait, tout est ramené à construire la position que prendra la droite auxiliaire au moment où la sécante deviendra tangente. Cette dernière position de la droite auxiliaire, que nous nommerons position limite, étant connue, la construction de la tangente revient à mener par le point destiné à devenir point de contact, une droite qui, à l'égard de la position limite de la droite auxiliaire, jouisse de la même propriété constante mentionnée.

Pour construire la position limite de la droite auxiliaire on a besoin d'être familiarisé avec des considérations analogues à celles dont nous allons donner deux exemples.

Étant donnés trois points A, B, C, entre lesquels il y a cette dépendance que B et C sont variables de position ensemble et que B doit toujours se trouver entre A et C. Dans ce cas, si C vient à coïncider avec A, au même instant B devra coïncider avec A.

De même, étant données trois droites A, B, C, passant par un même point et entre lesquelles il y a cette dépendance que B et C sont variables de position ensemble et que B doit toujours se trouver entre A et C. Dans ce cas, si C vient à coïncider avec A, au même instant B devra coïncider avec A. Les conclusions restent les mêmes si les trois droites étaient parallèles.

Pour appliquer ces considérations à la recherche de la tangente à un cercle, il suffit de remarquer que la perpendiculaire abaissée du centre sur la sécante du cercle passe toujours *entre* les deux points de section de la sécante. Donc quand la sécante sera devenue tangente, la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente passera par le point de contact.

De la seconde définition de la tangente résulte immédiatement que dans une courbe qui a un diamètre conjugué à une certaine direction, les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles à la même direction.

Le plan osculateur d'une courbe à double courbure, en un point donné de cette courbe, est la limite de tous les plans sécants que l'on peut mener par la tangente en ce point à la courbe.

Définition des courbes du second degré par leurs foyers.

L'ellipse est une courbe plane, dans le plan de laquelle il y a deux points fixes, appelés foyers, dont la somme des distances à un point quelconque de la courbe est une quantité constante.

Cette courbe est entièrement fermée et les deux foyers se trouvent dans son intérieur.

L'hyperbole est une courbe plane dans le plan de laquelle existent deux points fixes, appelés foyers, dont la différence des distances à un point quelconque de la courbe est une quantité constante.

Cette courbe est composée de deux branches séparées, dont aucune n'est fermée, et dont chacune renferme un foyer.

La parabole est une courbe plane, dans le plan de laquelle existe un point fixe, appelé foyer, dont la distance à un point quelconque de la courbe est égale à la distance du même point à une droite fixe, appelée directrice.

Cette courbe est ouverte et n'a qu'une branche; le foyer se trouve à l'intérieur et la directrice à l'extérieur.

Construction. — Ces définitions fournissent immédiatement des moyens faciles pour construire chacune de ces courbes, soit par *points*, soit par un *mouvement continu.*

Génération des courbes du second degré qui répond à ces définitions.

Les courbes du second degré peuvent être considérées comme engendrées par le centre d'un cercle mobile et variable de rayon, qui touche constamment deux cercles fixes, situés dans un même plan avec le cercle mobile.

Les centres des deux cercles fixes, seront les foyers de la courbe.

Pour que le centre du cercle mobile décrive une parabole, il faut que, l'un des cercles fixes se change en ligne droite, c'est-à-dire, que son rayon devienne infini.

Il est facile de démontrer, par les simples notions sur le contact de deux cercles, que les courbes ainsi décrites jouissent des propriétés énoncées aux définitions ci-dessus.

La considération que la sécante, qui passe par deux points d'une telle courbe, est dans toutes ses positions perpendiculaire à la corde commune aux deux cercles générateurs, dont les centres sont respectivement en ces deux points, conduit à la méthode suivante pour mener une tangente à une courbe du second degré, par un point donné sur cette courbe.

Construction de la tangente. Par le point donné, centre d'un cercle générateur, on mènera une perpendiculaire à la droite qui joint les points de contact du cercle générateur avec les deux cercles fixes; cette perpendiculaire sera la tangente demandée.

On fera concorder aisément cette méthode, qui convient à toutes les courbes du second degré, avec les méthodes particulières connues pour chacune d'elles.

Propriété. — Si d'un même foyer d'une courbe du second degré on abaisse des perpendiculaires sur toutes les tangentes à cette courbe, les pieds de ces perpendiculaires se trouveront sur une circonférence de cercle qui, pour le cas de la parabole, devient une ligne droite.

Cette propriété devient une conséquence de la méthode des tangentes énoncée ci-dessus, après qu'on aura établi que les milieux de toutes les droites, partant d'un même point et terminées à une même circonférence, se trouvent sur une autre circonférence.

Construction. — De cette propriété on déduit une méthode pour construire les courbes du second degré par le moyen d'une équerre, dont le sommet de l'angle droit doit toujours se trouver sur une *circonférence* de cercle ou sur une *ligne droite;* alors si l'un des côtés de l'équerre passe constamment par un *point fixe*, l'autre côté sera toujours tangent à une même courbe du second degré, dont un foyer sera au point fixe. Selon que le point fixe est intérieur ou extérieur à la circonférence, la courbe, enveloppe des tangentes, sera une ellipse ou une hyperbole; ce sera une parabole si la circonférence est remplacée par une droite.

Les courbes du second degré sont des sections coniques.

En coupant par un plan un cône droit à base circulaire, on obtient pour intersection :

Une ellipse, si le plan sécant coupe toutes les arêtes du cône.

Une parabole, si le plan sécant est parallèle à une seule arête du cône.

Une hyperbole, si le plan sécant est parallèle à deux arêtes du cône.

Démonstration pour l'ellipse : Si l'on conçoit un cône droit à base circulaire et deux sphères inscrites dans une même nappe de ce cône, et si l'on coupe ce cône par un plan tangent à la fois aux deux sphères, (l'une des sphères sera au-dessus et l'autre au-dessous de ce plan) je dis qu'on aura pour courbe d'intersection une ellipse ayant pour foyers les deux points de contact du plan tangent.

Ne considérons du cône que le tronc ou la portion comprise entre les deux circonférences, suivant lesquelles les deux sphères sont touchées par le cône, circonférences dont les plans sont perpendiculaires à l'axe du cône et dont les centres sont sur ce même axe. Cela posé, chaque point de la courbe en question est à la fois sur une arête et dans le plan tangent.

Un point quelconque de la courbe considéré comme situé sur une arête, divise cette arête en deux parties A et A′, dont l'une A est tangente à la première sphère, et dont l'autre A′ est tangente à la seconde sphère.

Si par le même point, considéré comme situé dans le plan tangent, on mène deux droites D, D′ aux points de contact, l'une de ces droites D sera tangente à la première sphère et l'autre D′ à la seconde sphère; car toute droite qui, dans le plan tangent à une surface, passe par le point de contact, est une droite tangente à cette surface.

Du même point de la courbe partent maintenant deux tangentes A et D à la première sphère, et deux tangentes A′ et D′ à la seconde sphère; or, toutes les tangentes à une même sphère et partant d'un même point, sont égales; donc on a :

$$D = A \text{ et } D' = A'$$

Et partant $D + D' = A + A' =$ l'arête entière.

Ainsi quel que soit sur la courbe le point que l'on considère, en menant de ce point deux droites D, D′ aux deux points de contact, la somme de ces deux droites est égale à l'arête qui passe par ce point; or toutes les arêtes du tronc sont égales, donc la somme des distances de chaque point de la courbe aux deux points de contact est une quantité constante; donc la courbe est une ellipse ayant pour foyers les deux points de contact.

On démontre d'une manière analogue que, si les deux sphères sont respectivement inscrites dans les deux nappes du cône, tout plan tangent à la fois aux deux sphères et qui les laisse d'un même côté, coupe le cône suivant une hyperbole, ayant pour foyers les points de contact du plan tangent.

Enfin, on démontre qu'un plan, tangent à une seule sphère et parallèle à l'une des arêtes du cône, coupe celui-ci suivant une parabole, qui a pour foyer le point de contact.

Définition des sections coniques par leurs foyers et directrices.

Dans la démonstration précédente, le plan tangent aux deux sphères coupe les plans des deux bases du cône tronqué, suivant deux droites parallèles appelées *directrices.* Chaque directrice et le foyer le plus voisin jouissent de la propriété suivante : le rapport des distances d'un point de la section conique au foyer et à la directrice reste le même pour tous les points de la section conique.

Dans la parabole il n'y a qu'un foyer, qu'une directrice, et le rapport mentionné est égal à l'unité.

Pour démontrer tout cela, il faut prendre, pour plan horizontal de projection, celui qui passe par le sommet du cône et par les centres des deux sphères et qui est en outre perpendiculaire au plan tangent.

Cette manière de démontrer synthétiquement les propriétés des sections faites dans un cône par un plan est due à feu M. Dandelin, colonel du génie.

GÉNÉRATION ET REPRÉSENTATION DES SURFACES COURBES.

L'ensemble des conditions, auxquelles doit satisfaire une ligne qui se meut dans l'espace, constitue la définition du mouvement de cette ligne. Cela posé :

Si d'après la définition du mouvement d'une ligne, celle-ci ne peut se mouvoir que d'une seule manière, ou d'un nombre *fini* de manières, l'ensemble des positions occupées par cette ligne constituera une surface courbe; et l'on dit que la surface a été engendrée par la courbe mobile.

Génératrice. — La courbe mobile ainsi qu'une position quelconque de cette courbe s'appelle génératrice de la surface; de sorte que toute surface peut être considérée comme composée de toutes ses génératrices.

Une surface est définie, lorsque l'on connaît la définition de sa génératrice et l'énoncé des conditions auxquelles cette génératrice doit satisfaire, en se mouvant dans l'espace.

Ces conditions se déterminent le plus souvent par des considérations géométriques, en assujétissant la génératrice à s'appuyer dans son mouvement sur un certain nombre de courbes données de position dans l'espace, ou à satisfaire à des conditions équivalentes.

Directrices. — Les courbes, qui dirigent ainsi le mouvement de la génératrice, prennent le nom de *directrices* de la surface.

Le nombre des directrices ne peut être déterminé que lorsqu'on connaît la définition de la génératrice; dans tous les cas, il doit être tel que, en chaque point d'une des directrices, on ne puisse construire qu'*une seule* génératrice ou un nombre *fini* de génératrices qui rencontrent en même temps toutes les autres directrices.

Les surfaces individuelles, en nombre infini, qui ont *même génération*, c'est-à-dire, qui sont engendrées par une *même génératrice*, se distinguent entre elles d'après la nature de leurs directrices.

Il suit de tout ce qui précède qu'une surface, dont on connaît la nature de la génératrice et les directrices, sera représentée de forme, de grandeur et de position par les projections de ses directrices; puisque l'on aura ainsi les moyens de construire dans chaque cas particulier, et selon le but que l'on se propose, tel nombre de génératrices que l'on jugera à propos.

Quoique l'on ne représente pas une surface par l'ensemble des projections de tous ses points, on a cependant coutume, pour mieux la figurer, de construire la *limite* de sa projection horizontale et la *limite* de sa projection verticale, en supposant que l'on a projeté tous les points de la surface.

Ces limites, appelées *contours apparents*, servent principalement à reconnaître si un point, dont l'une des projections est donnée, peut ou non appartenir à la surface.

La trace horizontale d'une surface est l'intersection de cette surface avec le plan horizontal de projection.

La trace verticale d'une surface est l'intersection de cette surface avec le plan vertical de projection.

On ne construit ces traces que pour certaines surfaces.

Parmi le nombre infini de surfaces, dont on peut concevoir la génération, nous n'examinerons que les trois familles de surfaces le plus fréquemment employées dans les arts : *les surfaces réglées*, qui ont pour génératrice la ligne droite; les *surfaces de révolution* et les *surfaces du second degré*, qui ont pour génératrice la circonférence de cercle assujétie à satisfaire à certaines conditions, dont il sera parlé plus tard.

DES SURFACES RÉGLÉES.

Une surface réglée est définie par trois directrices, autrement dit, le mouvement d'une ligne droite est définie par trois directrices.

Les surfaces réglées se divisent en $\begin{cases} \text{surfaces développables.} \\ \text{surfaces gauches.} \end{cases}$

Une surface développable est une surface réglée dont deux génératrices consécutives sont toujours dans un même plan. Deux génératrices consécutives sont pour nous deux génératrices infiniment voisines.

Arête de rebroussement. La courbe à laquelle toutes les génératrices sont tangentes s'appelle arête de rebroussement. Cette arête divise la surface en deux portions, appelées *les deux nappes* de la surface.

Une surface gauche est une surface réglée dont deux génératrices consécutives ne sont jamais dans un même plan.

Ligne de striction. — L'ensemble des éléments de plus courte distance entre deux génératrices consécutives constitue une courbe, appelée ligne de *striction*. Cette ligne divise de même la surface gauche en deux portions appelées les *deux nappes* de la surface.

PROPRIÉTÉS DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

1. — *Nombre de directrices.* — Une surface développable ne peut avoir que *deux directrices.* La condition que chaque génératrice soit dans un même plan avec celle qui la précède immédiatement tient lieu de la troisième directrice. Une seule directrice suffit lorsqu'elle est prise pour arête de rebroussement.

2. — *Construction d'une génératrice.* — Si l'on fait mouvoir un plan sur les deux directrices, de manière qu'il renferme dans toutes ses positions une tangente à chaque directrice, l'intersection de deux positions consécutives de ce plan mobile sera une génératrice.

3. — Toutes les surfaces développables supposées *flexibles*, mais *inextensibles*, peuvent être développées sur un plan sans *duplicature* ni *déchirure.*

Le plan sur lequel on développe une surface développable est nommé *plan de développement.*

Un tel développement n'est rien autre qu'une série de rabattements effectués sur un même plan, et dans lesquels chaque génératrice à son tour devient charnière pour rabattre la génératrice qui suit immédiatement.

4. — Tout plan qui passe par une génératrice d'une surface développable coupe la surface suivant une courbe, à laquelle cette génératrice est *tangente.*

Les surfaces développables les plus simples sont les surfaces cylindriques et les surfaces coniques.

Surfaces cylindriques.

1. — Une surface cylindrique est une surface réglée dont toutes les génératrices sont parallèles entre elles.

L'arête de rebroussement d'une surface cylindrique est située à l'infini et par suite n'existe pas.

2. — Un cylindre est entièrement *défini* lorsqu'on donne *une seule directrice*, et *une droite* à laquelle toutes les génératrices doivent être parallèles.

3. — *La trace horizontale* d'un cylindre est toujours prise pour directrice, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

4. — *Problème.* Étant données la directrice d'un cylindre et une droite à laquelle ses génératrices doivent être parallèles, construire la trace horizontale de ce cylindre.

5. — *Même problème*, la directrice étant une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection.

6. — Un cylindre est *droit*, lorsque toutes ses génératrices sont perpendiculaires au plan horizontal. Dans le cas contraire, le cylindre est dit *oblique.*

7. — *L'axe* d'un cylindre est une droite parallèle aux génératrices du cylindre, menée par le centre de la directrice.

8. — *La section droite* d'un cylindre, est la courbe suivant laquelle le cylindre est coupé par un plan perpendiculaire à ses génératrices.

9. — Toutes les sections faites dans un cylindre par des plans parallèles, sont des courbes égales.

10. — Cette propriété conduit à une génération des surfaces cylindriques par le mouvement d'une courbe plane, constante de forme et de grandeur.

11. — Si un plan parallèle aux génératrices d'un cylindre coupe ce cylindre, il le coupera suivant une ou plusienrs génératrices.

12. — Si deux cylindres parallèles se coupent, ils se couperont suivant une ou plusieurs génératrices.

Surfaces coniques.

1. — Une surface conique est une surface réglée dont toutes les génératrices passent par un même point, appelé *sommet*, ou mieux, *centre*. Toute surface conique a deux *nappes* séparées par le sommet.

L'arête de rebroussement d'une surface conique se réduit à un point, le sommet du cône.

2. — Un cône est entièrement *défini*, lorsqu'on donne *une seule directrice*, et le *sommet*.

3. — *La trace horizontale* d'un cône est toujours prise pour directrice, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

4. — *Problème*. Étant donnés le sommet et la directrice d'un cône, construire la trace horizontale du cône.

5. — *Même problème*, la directrice étant une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection.

6. — Un cône est *droit*, lorsque la droite qui passe par le sommet et par le centre de la trace horizontale, est perpendiculaire au plan horizontal. Dans tout autre cas, le cône est *oblique*.

7. — Toutes les sections faites dans une surface conique par des plans parallèles sont des courbes semblables. Cette propriété conduit à une génération des surfaces coniques par le mouvement d'une courbe plane, constante de forme, mais variable de grandeur.

8. — Si un plan passant par le sommet d'un cône, coupe ce cône, il le coupera suivant une ou plusieurs génératrices.

9. — Si deux cônes ayant même sommet se coupent, ils se couperont suivant une ou plusieurs génératrices.

Transformées de quelques lignes tracées sur des surfaces développables.

On appelle *transformée* d'une courbe quelconque tracée sur une surface développable ce que devient cette courbe lorsqu'on développe la surface.

1. — L'angle qu'une courbe tracée sur une surface développable fait avec une génératrice quelconque, reste le même lorsqu'on développe la surface.

2. — Toute courbe, qui sur une surface cylindrique coupe toutes les génératrices sous un même angle, a pour transformée une ligne droite; et par suite la transformée de la section droite d'une surface cylindrique est une ligne droite.

3. — Une courbe tracée sur une surface conique et dont tous les points sont à égale distance du sommet, a pour transformée un arc de cercle.

4. — La longueur d'une courbe est égale à la longueur de sa transformée. Cette propriété ramène la rectification d'une courbe à double courbure, à la rectification d'une courbe plane.

5. — Il résulte de la même propriété que *la ligne la plus courte* que l'on puisse mener sur une surface développable quelconque entre deux points de la surface a pour transformée une ligne droite.

Les surfaces gauches *se divisent en* { *surfaces gauches à trois directrices.* / *surfaces gauches à plan directeur.* }

Surfaces gauches a plan directeur.

Une surface gauche a plan directeur est une surface gauche qui a deux directrices et un plan directeur.

Le plan directeur est un plan auquel toutes les génératrices doivent être parallèles; il tient lieu d'une troisième directrice.

Construction d'une génératrice. On coupera les deux directrices par un plan parallèle au plan directeur; ce plan parallèle coupera chaque directrice en un point, et la droite qui joindra ces deux points sera une génératrice.

Conoïde. — Si l'une des deux directrices d'une surface gauche à plan directeur est une droite, la surface est appelée conoïde. Le conoïde est dit *droit*, si la directrice rectiligne est perpendiculaire au plan directeur.

Dans tout conoïde droit, la directrice rectiligne est la ligne de striction.

L'étude de toute surface gauche à plan directeur, repose sur les propriétés du paraboloïde hyperbolique ou plan gauche.

Paraboloïde hyperbolique ou plan gauche.

Le paraboloïde hyperbolique a pour directrices deux droites non situées dans un même plan et dont aucune n'est parallèle au plan directeur.

Cette surface est gauche : car si deux génératrices consécutives et même deux génératrices quelconques étaient dans un même plan, les deux directrices seraient dans ce même plan. Sa propriété principale est :

1. — Tout plan parallèle aux deux directrices coupe la surface suivant une ligne droite; et de là on déduit comme corollaires ces autres propriétés :

2. — Si une droite se meut sur deux génératrices en restant toujours parallèle à un *plan parallèle* aux deux directrices, ou bien, si elle se meut sur *trois* génératrices, elle engendrera identiquement la même surface.

3. — La surface a donc deux modes de génération différents par le mouvement d'une ligne droite et deux plans directeurs différents.

4. — Le paraboloïde hyperbolique est appelé *droit* lorsque ses deux plans directeurs sont perpendiculaires entre eux.

5. — La surface se projette en deux systèmes de parallèles de direction différente sur un plan perpendiculaire à la fois aux deux plans directeurs.

6. — Par chaque point de la surface passent deux lignes droites qui y sont situées tout entières.

7. — Tout plan qui passe par une génératrice, s'il n'est pas parallèle au plan directeur, coupe la surface suivant une ligne droite différente de la génératrice proposée.

8. — Une droite ne peut couper la surface en plus de deux points sans y être contenue tout entière. Donc une droite ne peut pas non plus rencontrer une section plane de la surface en plus de deux points.

9. — Aucune génératrice, soit de l'un soit de l'autre mode de génération, ne peut être parallèle *à la droite d'intersection* des deux plans directeurs. Une telle génétratrice serait en effet l'intersection de deux plans parallèles à l'un des deux plans directeurs.

10. — De cette propriété résulte qu'une génératrice d'un mode de génération ne peut être parallèle à aucune génératrice de l'autre mode.

SURFACES GAUCHES A TROIS DIRECTRICES.

Une surface gauche a trois directrices est celle qui a trois directrices.

Construction d'une génératrice. — Si les trois directrices sont des courbes, on construira deux cônes ayant leurs sommets en un même point de la première courbe et pour directrices respectives les deux autres courbes; la droite suivant laquelle ces deux cônes se couperont sera une génératrice.

Si l'une des trois directrices est une ligne droite, par cette droite on mènera un plan qui coupe les deux autres directrices chacune en un point; la droite qui joindra ces deux points sera une génératrice.

Propriété. — Tout plan qui passe par une génératrice d'une surface gauche quelconque, coupe la surface suivant une *ligne courbe* dont la génératrice proposée est une *sécante*. Pour les surfaces gauches à plan directeur, le plan mené par la génératrice ne doit pas être parallèle au plan directeur.

Propriété. — Toute surface gauche à trois directrices, supposée flexible, mais inextensible, peut être convertie, sans duplicature ni déchirure, en une surface gauche à plan directeur. Pour cela je place l'une des génératrices, suivant laquelle je suppose la surface coupée, dans le plan directeur et je fais tourner toute la surface autour de cette première génératrice jusqu'à ce que la seconde génératrice, qui suit immédiatement la première, soit devenue parallèle au plan directeur; je fais de même tourner toute la portion restante de la surface autour de la seconde génératrice jusqu'à ce que la troisième génératrice de la surface devienne parallèle au plan directeur et ainsi de suite. Cette propriété n'a été, que je sache, énoncée nulle part. Dans cette transformation, les aires et les contours de ces aires ne sont pas altérés quant à leur grandeur.

En appliquant ce mode de transformer une surface en une autre à l'hyperboloïde de révolution à une nappe, dont il sera question plus tard, on convertira l'hyperboloïde en un héliçoïde gauche à plan directeur. Les divers parallèles de l'hyperboloïde deviennent, dans cette transformation, des hélices, à l'exception du cercle de gorge, qui devient l'axe du cylindre à base circulaire sur lequel se trouvent toutes les hélices.

Pour donner une idée de la démonstration de cette propriété de l'hyperboloïde, il suffit de faire remarquer que si la circonférence du cercle de gorge est divisée en un nombre quelconque de parties égales, deux génératrices quelconques, passant par deux points de division consécutifs, font toujours entre elles le même angle; et cet angle ne change pas quand l'une des génératrices tourne autour de l'autre pour prendre une position parallèle au plan directeur.

Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe (surface gauche à trois directrice, la plus simple).

L'hyperboloïde à une nappe a pour directrices trois droites non parallèles à un même plan et deux à deux non situées dans un même plan.

Cette surface est gauche ; car si deux génératrices consécutives et même deux génératrices quelconques étaient dans un même plan, les trois directrices seraient dans ce même plan. Sa propriété principale est :

1. — Une droite qui rencontre trois génératrices de l'hyperboloïde à une nappe, rencontre toutes les autres génératrices; de là les propriétés suivantes.

2. — Si l'on fait mouvoir une droite sur trois génératrices quelconques de l'hyperboloïde à une nappe, elle engendrera identiquement la même surface ;

L'hyperboloïde a donc deux modes distincts de génération par le mouvement d'une droite.

3. — Une génératrice d'un mode est toujours parallèle à une certaine génératrice de l'autre mode de génération.

4. — Par chaque point de la surface passent deux droites qui y sont situées tout entières.

5. — Une droite ne peut couper la surface en plus de deux points sans y être contenue tout entière. Donc une droite ne peut pas non plus couper une section plane de la surface en plus de deux points.

6. — Tout plan qui passe par une génératrice coupe la surface suivant une ligne droite différente de cette génératrice.

7. — L'hyperboloïde à une nappe, dont les trois directrices sont parallèles à un même plan, est un paraboloïde hyperbolique.

Donc trois génératrices de l'hyperboloïde ne peuvent pas être parallèles à un même plan, autrement la surface serait un paraboloïde hyperbolique.

Directrices de quelques surfaces gauches individuelles employées dans les arts.

Les trois directrices de l'arrière voussure de Montpellier sont : 1° une circonférence de cercle; 2° une droite parallèle au plan de ce cercle; 3° une perpendiculaire au plan du cercle menée par son centre.

Les trois directrices de la surface de l'arrière voussure de Marseille (1) sont : 1° deux circonférences de cercle situées dans des plans verticaux parallèles et dont les rayons sont inégaux; 2° une perpendiculaire aux plans de ces cercles, menée par le centre du petit sans passer par le centre du grand.

Observation. Dans le cas particulier où cette perpendiculaire passe aussi par le centre du grand cercle, la surface de l'arrière voussure de Marseille devient conique.

(1) La propriété, dont on aura besoin pour prouver que cette surface est gauche, est la suivante : Si par un point, autre que le centre, pris dans l'intérieur d'un cercle, on mène tant de droites que l'on voudra terminées à la circonférence, deux *consécutives* ne seront pas égales.

Les trois directrices de la surface du Biais passé sont : 1° deux circonférences de cercle ayant pour diamètres, et pour projections les côtés opposés d'un parallèlogramme; 2° une perpendiculaire aux plans de ces cercles, menée par le centre du parallèlogramme.

OBSERVATION. Dans le cas particulier, où le parallèlogramme devient rectangle, la surface du Biais passé devient cylindrique.

Les trois directrices de l'héliçoïde gauche sont : 1° *deux hélices* de même pas, tracées sur deux cylindres droits à bases circulaires concentriques; 2° *l'axe commun* de ces deux cylindres.

Les deux directrices de l'héliçoïde gauche à plan directeur sont, le plan horizontal étant pris pour plan directeur :

1° une hélice tracée sur un cylindre droit; 2° l'axe de ce cylindre.

Cette surface est gauche : les projections verticales de deux génératrices consécutives sont parallèles et les projections horizontales ne le sont pas; donc ces génératrices ne sont pas dans un même plan.

Les deux directrices de la surface gauche de la voûte d'arête en tour ronde sont, le plan horizontal étant pris pour plan directeur :

1° Une ellipse enveloppée sur un cylindre droit à base circulaire de manière que le grand axe de l'ellipse s'enveloppe sur une portion de la circonférence de la base du cylindre; 2° l'axe de ce cylindre.

Cette surface est gauche : les projections verticales de deux génératrices consécutives sont parallèles, et les projections horizontales de ces génératrices se coupent; donc ces génératrices ne sont pas dans un même plan.

DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

Principe. — Pour qu'un point, en tournant autour d'une droite fixe, décrive une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite et dont le centre se trouve sur cette même droite, il faut que les distances de ce point à deux points fixes de la droite ne changent pas de grandeur.

Première génération. — Une surface de révolution est engendrée par une courbe quelconque, plane ou à double courbure, invariable de forme et de grandeur, qui tourne autour d'une droite fixe, de manière que chacun de ses points décrive une circonférence de cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite fixe et dont le centre se trouve sur cette même droite;

et pour cela il suffit que trois points de la courbe mobile décrivent des circonférences satisfaisant à ces deux conditions.

2. — *Génératrice.* La courbe mobile est la génératrice de la surface.

3. — *Axe de révolution.* La droite fixe s'appelle *axe.*

4. — Une surface de révolution est entièrement déterminée, lorsqu'on connaît son axe et sa génératrice.

5. — *Parallèles.* La circonférence, engendrée par un point quelconque de la courbe génératrice, a pour *rayon* la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe, et pour *centre* le pied de cette perpendiculaire. Chacune des circonférences, dont une surface de révolution est composée, s'appelle parallèle.

6. — *Tout plan perpendiculaire à l'axe* coupe la surface suivant un parallèle.

7. — *Équateur.* Le plus grand parallèle, lorsque son rayon n'est pas infini, prend le nom d'équateur.

8. — *Cercle de gorge.* Le plus petit parallèle, lorsque son rayon n'est pas nul, prend le nom de cercle de gorge.

9. — *Plan méridien.* Tout plan qui passe par l'axe d'une surface de révolution est appelé plan méridien.

10. — *Méridien.* La courbe suivant laquelle un plan méridien coupe une surface de révolution est appelée *méridien* ou *courbe méridienne.* Tous les méridiens sont égaux entre eux et chacun rencontre tous les parallèles de la surface.

11. — *Méridien principal.* Dans le cas, où l'axe est parallèle à l'un des plans de projection, on appelle méridien principal celui qui est parallèle à ce plan de projection. Ce méridien est le seul qui se projette dans sa véritable grandeur sur ce même plan de projection.

12. — *Principe.* Toute courbe, soit plane soit à double courbure, qui sur une surface de révolution rencontre tous les parallèles, peut être prise pour *nouvelle génératrice* de la surface; donc tout méridien peut être pris pour génératrice *plane* de la surface de révolution.

Convention. Comme on est maître de disposer les plans de projection à l'égard de l'axe comme on voudra, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'axe est toujours perpendiculaire à l'un des plans de projection; et dans ce cas le méridien principal sera toujours pris pour génératrice, à moins que l'on n'avertisse du contraire.

13. — *Problème.* Étant données les deux projections de la génératrice d'une surface de révolution dont l'axe est verticale, construire la projection verticale du méridien principal de cette surface.

14. — *Contours apparents.* Dans l'hypothèse que l'axe est vertical, la projection horizontale de l'équateur ou du cercle de gorge sera la *limite* de la *projection horizontale* de la surface; et la projection verticale du méridien principal sera la *limite* de la *projection verticale* de la surface.

15. — *Seconde génération.* Il suit de la première définition des surfaces de révolution que ces surfaces peuvent aussi être considérées comme engendrées par une circonférence de cercle variable de rayon, dont le centre se meut sur l'axe et dont le plan est toujours perpendiculaire à ce même axe; la circonférence étant d'ailleurs assujettie à s'appuyer sur une courbe donnée prise pour *directrice. Le rayon* du cercle générateur varie comme les *perpendiculaires* abaissées des différents points de la directrice sur l'axe.

Surfaces de révolution du second degré.

1. — *Une courbe du second degré*, prise pour *génératrice* d'une surface de révolution, n'engendre de surface du second degré que lorsqu'elle tourne autour de l'un de ses axes la surface engendrée sera :

2. — *Un ellipsoïde de révolution surhaussé ou surbaisse* selon que l'ellipse tourne autour de son petit axe ou autour de son grand axe.

3. — *Un hyperboloïde de révolution à une ou à deux nappes* selon que l'hyperbole tourne autour de l'axe imaginaire ou autour de l'axe réel.

4. — *Un paraboloïde de révolution* si la parabole tourne autour de son axe.

5. — *Une droite* prise pour *génératrice* d'une surface de révolution engendre toujours une surface du second degré à moins qu'elle ne soit perpendiculaire à l'axe. Ce sera :

6. — *Un cône de révolution*, si la droite *rencontre* l'axe;

7. — *Un cylindre de révolution*, si la droite est *parallèle* à l'axe;

8. — *Un hyperboloïde de révolution* à une nappe, si la droite ne rencontre pas l'axe et ne lui est pas parallèle.

Propriétés principales de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

1. — Toutes les génératrices de l'hyperboloïde se projettent sur le plan horizontal de projection suivant des tangentes à la projection du cercle de gorge.

2. — En donnant les projections cotées du cercle de gorge et d'un autre parallèle de la surface, on fera voir, au moyen des projections cotées, que deux positions consécutives de la génératrice ne sont jamais dans un même plan; et par suite *l'hyperboloïde est une surface gauche.*

3. — L'hyperboloïde de révolution à une nappe a deux génératrices *rectilignes* distinctes. — Pour le prouver il suffit de faire voir (par les projections cotées) que par un point quelconque de la génératrice on peut mener une droite telle, qu'en la faisant tourner autour de l'axe de révolution, les parallèles, engendrés par les différents points de cette droite, coïncident respectivement avec les parallèles décrits par les différents points de la génératrice.

4. — Si par une génératrice on mène un plan quelconque, il coupera tous les parallèles de la surface en tous points qui sont sur une même droite.

Démonstration. Si par un point donné de la surface de révolution on abaisse une perpendiculaire sur un plan méridien quelconque et qu'on prolonge cette perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité de cette perpendiculaire prolongée se trouvera sur le même parallèle que le point proposé. Cela étant :

Si de tous les points d'une génératrice de l'hyperboloïde on abaisse des perpendiculaires sur un même plan méridien, en prolongeant chaque perpendiculaire d'une quantité égale à elle-même, les extrémités de ces perpendiculaires prolongées seront sur une même droite, symétrique de la droite proposée par rapport au plan méridien; mais toutes ces extrémités sont aussi sur la surface; donc le plan de toutes ces perpendiculaires coupe la surface proposée suivant une ligne droite. Mais deux droites symétriques par rapport à un plan vertical (le plan méridien) sont également inclinées sur le plan horizontal. L'hyperboloïde est donc composé de deux systèmes de droites également inclinées sur le plan horizontal. Ce que nous savions déjà par la propriété précédente (3).

5. — On démontre sans le secours de l'analyse, comme on l'a fait à l'égard du cône de révolution, que les sections, faites par un plan dans l'hyperboloïde de révolution à une nappe, sont des courbes du second degré.

Le *Tore* ou surface annulaire du quatrième degré a pour génératrice une circonférence de cercle et pour *axe* une droite située dans le plan du cercle.

Cette surface devient sphérique dans le cas particulier où la droite prise pour axe passe par le centre du cercle.

SURFACES DU SECOND DEGRÉ AUTRES QUE CELLES DE RÉVOLUTION.

1. — *Première génération.* Si dans une courbe du second degré on conçoit un diamètre quelconque et toutes les cordes conjuguées à ce diamètre, toutes les circonférences de cercle, dont les plans sont perpendiculaires au

plan de la courbe, et qui ont respectivement pour diamètres ces différentes cordes, constituent une surface du second degré. Cela posé :

2. — *Seconde génération.* Si l'on conçoit maintenant dans la même courbe le diamètre *égal* au diamètre précédent et toutes les cordes conjuguées à ce nouveau diamètre, je dis que toutes les circonférences de cercle dont les plans sont perpendiculaires au plan de la courbe, et qui ont respectivement pour diamètres ces nouvelles cordes, constituent identiquement la même surface.

3. — Les extrémités des deux diamètres égaux s'appellent *ombilics* de la surface. Cette double génération n'est qu'un corollaire des deux principes que voici :

4. — Si deux droites se coupent mutuellement en deux parties de manière que le produit des deux parties de l'une soit égal au produit des deux parties de l'autre, les circonférences qui ont respectivement ces droites pour diamètres et dont les plans sont perpendiculaires au plan de ces droites, *se couperont*,

5. — Dans une courbe quelconque du second degré, deux cordes ou deux sécantes, non parallèles mais également inclinées sur un *même axe* de la courbe, jouissent des mêmes propriétés métriques que dans le cercle.

Cette propriété, sur laquelle on peut baser toute une théorie des surfaces du second degré, se déduit de l'équation polaire des courbes du second degré, en remarquant que le *produit des deux valeurs*, que fournit cette équation pour un rayon vecteur faisant un angle quelconque avec *un axe* de la courbe ne change pas, si l'on remplace cet angle par son supplément.

Cette propriété, nous l'avons énoncée pour la première fois dans notre Programme de Géométrie descriptive, imprimé en 1837.

SECONDE SECTION,

TRAITANT DE QUESTIONS RELATIVES AUX SURFACES COURBES.

(Plans tangents, normales, intersections.)

PLAN TANGENT.

Propriété. — Il sera démontré que toutes les tangentes en un même point à une surface courbe sont situées dans un même plan appelé *plan tangent.* Le point de contact des tangentes est aussi le point de *contact* du plan tangent. De là on déduit les propriétés suivantes :

1. — Un plan est tangent en un point donné sur une surface, lorsqu'il renferme deux tangentes en ce point à la surface.

2. — Toute droite menée dans un plan tangent par le point de *contact*, est tangente en ce point à la surface.

3. — Si l'on coupe une surface courbe et son plan tangent par un plan qui passe sur le point de contact, la droite d'intersection sera tangente à la courbe d'intersection.

4. — *Normale.* — La perpendiculaire au plan tangent élevée par le point de contact est appelée normale à la surface.

Propriétés des plans tangents aux surfaces développables, gauches et à celles de révolution.

1. — *Surfaces développables.* Tout plan tangent à un cylindre, à un cône, et à une surface développable quelconque passe par une génératrice de cette surface, et *chaque point* de cette génératrice est *un point de contact.*

La trace horizontale d'un plan tangent à un cylindre, à un cône et en général à une surface développable quelconque, est tangente à la trace horizontale du cylindre, du cône, ou de la surface développable.

La trace verticale du plan tangent jouit de la même propriété par rapport aux traces verticales des mêmes surfaces.

2. — *Observation.* Cette propriété permet de construire les deux traces d'un plan tangent à une surface développable, lorsqu'on connaît seulement *une droite* située dans ce plan.

3. — Le plan tangent à un cylindre perpendiculaire à un plan de pro-

jection conduit à cette propriété projective : si une droite est tangente à une courbe, les projections de la droite sont respectivement tangentes aux projections de la courbe.

1. — *Surfaces de révolution.* Tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact; et si l'axe de la surface est vertical, alors

2. — La trace horizontale du plan tangent est perpendiculaire à la projection horizontale du plan méridien, qui passe par le point de contact.

1. — *Surfaces gauches.* Tout plan qui passe par une génératrice d'une surface gauche est un plan tangent, dont le point de contact se trouve à l'intersection de la génératrice avec la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface.

2. — Les traces d'un plan tangent à une surface gauche doivent passer respectivement par les traces de même nom de la génératrice qui passe par le point de contact.

Questions les plus importantes sur le plan tangent à une surface.

Mener un plan tangent.
1. *Par un point donné sur la surface.*
2. *Par un point donné hors de la surface.*
3. *Par une droite donnée.*
4. *Parallèlement à une droite donnée.*
5. *Parallèlement à un plan donné.*

Remarque. — Tous ces problèmes ne sont pas toujours *possibles* ni toujours *déterminés* pour les diverses surfaces que nous avons examinées.

PLANS TANGENTS AUX CYLINDRES.

Principe. Toute génératrice d'un cône ou d'un cylindre rencontre le plan horizontal au point dans lequel la projection horizontale de cette génératrice rencontre la trace horizontale du cylindre ou du cône.

1. — Problème. *Mener un plan tangent à un cylindre, par un point donné sur sa surface.* (*Il suffit de donner la projection horizontale du point.*)

Moyen de solution. La génératrice qui passe par le point donné est une droite du plan tangent.

Moyen de vérification. La parallèle, menée par le point donné à la trace horizontale du plan tangent, doit être située dans ce plan.

2. — Problème. *Mener un plan tangent à un cylindre par un point donné hors de sa surface.* (*Il y a plusieurs plans tangents.*)

Moyen de solution. La parallèle aux génératrices du cylindre, menée par le point donné, sera une droite du plan tangent.

Moyen de vérification. La parallèle, menée par le point donné à la trace horizontale du plan tangent, doit être située dans ce plan.

Le plan tangent doit contenir la génératrice suivant laquelle il touche le cylindre.

3. — PROBLÈME. *Mener un plan tangent à un cylindre parallèlement à une droite donnée.*

Moyen de solution. Après avoir construit un plan auxiliaire parallèle à la droite donnée et aux génératrices du cylindre, on mènera au cylindre un plan tangent parallèle à ce plan auxiliaire.

Moyen de vérification. Le plan tangent devra contenir la génératrice suivant laquelle il touche le cylindre.

Cas indéterminé. Si la droite donnée est parallèle au cylindre, alors le problème est indéterminé, c'est-à-dire qu'il comporte une infinité de solutions. Dans ce cas on peut demander de construire les traces du plan tangent qui fait le plus petit angle possible avec le plan horizontal de projection.

4. — PROBLÈME. *Par une droite mener un plan tangent à une surface cylindrique.*

Ce problème n'est possible que lorsque la droite est parallèle aux génératrices du cylindre ou lorsqu'elle est tangente au cylindre.

5. — PROBLÈME. *Parallèlement à un plan mener un plan tangent à un cylindre.* Ce problème n'est possible que lorsque le plan est parallèle aux génératrices du cylindre.

6. — MÊMES PROBLÈMES. *Résoudre tous les problèmes précédents, lorsque le cylindre est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

PLANS TANGENTS AUX CÔNES.

Observation. Le sommet d'un cône est un point qui appartient à toutes les génératrices et par suite à tous les plans tangents à ce cône.

1. — PROBLÈME. *Mener un plan tangent à un cône par un point donné sur sa surface.*

Moyen de solution. La génératrice qui passe par le point donné est une droite du plan tangent.

Moyens de vérification. Les deux parallèles à la trace horizontale du plan tangent, menées par le point donné et par le sommet, doivent être toutes deux situées dans ce plan.

2. — Problème. *Mener un plan tangent à un cône par un point donné hors de sa surface.*

Moyen de solution. La droite qui lie le point donné avec le sommet du cône est une droite du plan tangent.

Moyens de vérification. La parallèle à la trace horizontale du plan tangent, menée par le point donné devra être située dans ce plan.

Il en est de même de la parallèle menée par le sommet du cône.

Le plan tangent devra contenir la génératrice suivant laquelle il touche le cône.

3. — Problème. *Mener un plan tangent à un cône parallèlement à une droite donnée.*

Moyen de solution. La droite, que l'on mènera par le sommet parallèlement à la droite donnée, appartiendra au plan tangent.

Moyen de vérification. Le plan tangent devra contenir la génératrice suivant laquelle il touche le cône.

Cas impossible. Le problème est impossible, si la parallèle menée par le sommet rencontre l'intérieur de la base du cône.

4. — Problème. *Par une droite mener un plan tangent à une surface conique.* Ce problème n'est possible que lorsque la droite passe par le sommet du cône ou lorsqu'elle est tangente au cône.

5. — Problème. *Parallèlement à un plan mener un plan tangent à une surface conique.*

Ce problème n'est possible que lorsque le plan auxiliaire, mené par le sommet parallèlement au plan proposé, est tangent au cône. Dans ce cas, le plan auxiliaire satisfait à la question.

PLANS TANGENTS AU CÔNE DE RÉVOLUTION.

1. — Problème. *Déterminer la génératrice suivant laquelle un cône de révolution est touché par un plan tangent mené par un point donné hors de ce cône, sans faire usage de la projection verticale de son sommet.*

Moyen de solution. Par le point donné on mènera un plan horizontal, qui coupera le cône suivant une circonférence de cercle.

Menant deux tangentes du point donné à cette circonférence, chaque point de contact sera un point d'une des deux génératrices touchées.

Joignant les projections horizontales de ces points avec la projection horizontale du sommet, on aura les projections horizontales des deux génératrices touchées.

Observation. Ces projections, considérées comme terminées à la projection horizontale du sommet, sont celles des deux génératrices, qui appartiennent à la même nappe du cône à laquelle appartient la *circonférence* mentionnée plus haut.

2. — Problème. *Déterminer la génératrice suivant laquelle un cône de révolution est touché par un plan tangent parallèle à une droite donnée, sans faire usage de la projection verticale du sommet du cône.*

Moyen de solution. On construira un cône auxiliaire de révolution, dont la génératrice principale soit parallèle à la génératrice principale du cône proposé.

Parallèlement à la droite donnée on mènera un plan tangent à ce cône auxiliaire, en faisant usage de la projection verticale de son sommet. Les projections horizontales des génératrices touchées seront aussi celles des génératrices suivant lesquelles le cône proposé est touché par un plan tangent parallèle à la droite donnée.

Observation. Ces projections sont celles des deux génératrices de la *nappe* du cône à laquelle appartient la *trace horizontale* de ce cône.

APPLICATIONS DES PLANS TANGENTS AUX SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES.

1. — Problème. *Par une droite mener un plan qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.*

Moyen de solution. Par un point quelconque de la droite donnée, on mènera une droite auxiliaire faisant avec le plan horizontal un angle égal à l'angle donné. On prendra cette droite auxiliaire pour génératrice d'un cône droit de révolution.

Les deux plans tangents à ce cône, menés par la droite donnée, satisferont chacun à la question.

2. — Problème. *Par un point donné et parallèlement à un plan donné, mener une tangente à une surface conique.*

Moyen de solution. Par le point donné on mènera deux plans dont l'un est tangent au cône et l'autre parallèle au plan donné.

L'intersection de ces deux plans sera la tangente demandée.

3. — Problème. *Mener à un cylindre donné, un plan tangent qui fasse avec le plan horizontal de projection un angle donné.*

Moyen de solution. On construira un cône droit de révolution, dont la génératrice fasse avec le plan horizontal un angle égal à l'angle donné.

On mènera à ce cône un plan tangent parallèle aux génératrices du cylindre; et parallèlement à ce plan on mènera un plan tangent au cylindre.

4. — Problème. *Mener à un cône donné un plan tangent qui fasse avec le plan horizontal un angle donné.*

Moyen de solution. On construira un cône droit de révolution, ayant même sommet que le cône proposé et dont la génératrice fasse avec le plan horizontal un angle égal à l'angle donné.

Le plan tangent à la fois à ce cône auxiliaire et au cône proposé est le plan tangent demandé.

5. — Problème. *Construire un cylindre tangent à la fois à deux plans donnés et dont la base soit un cercle d'un rayon donné.*

Moyen de solution. Les génératrices du cylindre devront être parallèles à la droite d'intersection des deux plans, et la base du cylindre être tangente aux traces horizontales des deux plans.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES DE RÉVOLUTION.

Principes préliminaires sur lesquels reposent les solutions des problèmes sur les plans tangents aux surfaces de révolution.

A. — Si une tangente à un méridien d'une surface de révolution tourne avec ce méridien, elle engendrera un cône de révolution qui touchera la surface suivant le parallèle engendré par le point de contact de la tangente.

B. — Réciproquement tout cône qui touche une surface de révolution suivant un parallèle, est un cône de révolution, qui a même axe que la surface de révolution proposée.

C. — Pour construire la génératrice principale d'un cône qui doit toucher une surface de révolution suivant un parallèle donné, par le point de rencontre de ce parallèle avec le méridien principal, on mènera à ce dernier une tangente.

D. — Pour construire une tangente à un méridien, autre que le méridien principal, il faut rabattre ce méridien dans le plan du méridien principal ainsi que le point par lequel la tangente doit passer, ou la droite à laquelle la tangente doit être parallèle, et mener par le point rabattu, ou parallèlement à la droite rabattue, une tangente à la courbe rabattue.

Quand la tangente rabattue sera connue, on remontera facilement à ses projections.

E. — Tout cône circonscrit à une sphère est un cône de révolution, qui touche la sphère suivant une circonférence de petit cercle.

L'axe de ce cône, est la droite qui joint le sommet avec le centre du petit cercle. Cet axe est perpendiculaire au plan de ce cercle et passe par le centre de la sphère.

F. — Tout cylindre circonscrit à une sphère, touche celle-ci suivant une circonférence de grand cercle, dont le plan est perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

G. — Le point d'intersection de deux courbes planes, se trouve sur la droite d'intersection des plans de ces courbes.

APPLICATIONS.

1. — Problème. *Par un point donné sur une surface de révolution, mener un plan tangent.* (*il suffit de donner la projection horizontale du point*).

Solution. Par le point donné passent un parallèle et un méridien de la surface; à chacune de ces courbes, on mènera une tangente (D). Le plan de ces tangentes sera le plan tangent cherché.

2. — Problème. *Par un point donné hors d'une surface de révolution, mener un plan tangent, de manière que le point de contact se trouve sur un parallèle donné.*

Première solution. On déterminera le cône auxiliaire, qui touche la surface de révolution suivant le parallèle donné que nous appellerons *parallèle touché.*

Par le point donné on imaginera un plan tangent à ce cône auxiliaire et l'on déterminera la génératrice touchée, sans faire usage de la projection verticale du sommet du cône.

L'intersection du *parallèle touché* avec la *génératrice touchée* sera le point de contact du plan tangent cherché.

Observation. Si l'on ne construit que la projection horizontale de la génératrice touchée, ce qui suffit, alors il faut faire attention de n'employer de cette projection que la partie qui appartient à celle des deux *nappes* du cône qui est *circonscrite* à la surface de révolution.

Cas faciles. Les points de contact les plus faciles à déterminer sont ceux qui doivent se trouver sur le *plus grand parallèle* et sur le parallèle dont le plan passe par le point donné, (s'il y a lieu).

Parallèles limites. Menant par le point donné deux tangentes au méridien, dont le plan passe par le point donné, les points de contact appartiendront, chacun à un parallèle limite, c'est-à-dire que le problème proposé est impossible, si le parallèle donné n'est pas compris entre ces parallèles limites.

Deuxième solution. On inscrira à la surface de révolution une sphère qui touche la surface de révolution suivant le parallèle donné. On imaginera un cône auxiliaire ayant son sommet au point donné et circonscrit à la sphère.

Ce cône touchera la sphère suivant une circonférence de petit cercle dont l'intersection avec le parallèle donné sera le point de contact du plan tangent demandé.

3. — Problème. *Par un point donné hors d'une surface de révolution, mener un plan tangent, de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.*

Solution. Par le point donné on mènera une perpendiculaire au plan du méridien donné; par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec ce plan on mènera une tangente (D) au méridien donné.

Le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent.

Cas faciles. Les points de contact les plus faciles à déterminer sont ceux qui doivent se trouver sur le méridien principal.

Méridiens limites. Si par le point donné on mène deux tangentes au parallèle dont le plan passe par le point donné (s'il y a lieu), les méridiens qui passeront par les points de contact de ces deux tangentes, seront les deux méridiens limites.

4. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans tangents que l'on peut mener à une surface de révolution, par un point donné hors de cette surface,* c'est à-dire :

Déterminer la courbe suivant laquelle un cône ayant son sommet au point donné et circonscrit à une surface de révolution, touche cette surface.

Solution. On déterminera, au moyen des deux problèmes précédents, les points de contact d'une série de plans tangents, passant tous par le point donné, et dont les uns touchent la surface sur des *parallèles donnés*, et dont les autres touchent la surface sur des *méridiens donnés.*

La courbe qui passera par tous les points ainsi déterminés sera la courbe cherchée.

Observation. Il est bon d'employer les deux méthodes simultanément, parce que les parallèles servent principalement à compléter la projection verticale de la courbe, et les méridiens à compléter la projection horizontale.

5. — Problème. *Parallèlement à une droite donnée mener un plan tangent à une surface de révolution, de manière que le point de contact se trouve sur un parallèle donné.*

Première solution. On circonscrira à la surface de révolution un cône auxiliaire qui la touche suivant le parallèle donné, que nous nommerons *parallèle touché.*

Parallèlement à la droite donnée on concevra un plan tangent à ce cône auxiliaire et l'on déterminera la *génératrice touchée*, sans faire usage de la projection verticale du sommet du cône.

L'intersection du *parallèle touché* avec la *génératrice touchée* sera le point de contact demandé.

Observation. Si l'on ne construit que la projection horizontale de la génératrice touchée, ce qui suffit, alors il faut faire attention de n'employer de cette projection que la partie qui appartient à celle des deux nappes du cône qui est *circonscrite* à la surface de révolution.

Cas facile. Les points de contact les plus faciles à déterminer sont ceux qui doivent se trouver sur le plus grand ou sur le plus petit parallèle.

Parallèles limites. En menant parallèlement à la droite donnée deux tangentes au méridien dont le plan est parallèle à la droite donnée (D), les points de contact de ces tangentes se trouvent respectivement sur les parallèles limites, c'est-à-dire que le problème est impossible pour tout parallèle qui ne se trouve pas entre ces parallèles limites.

Seconde solution. On inscrira à la surface de révolution une sphère qui touche cette surface suivant le parallèle donné.

On concevra un cylindre parallèle à la droite donnée et circonscrit à cette sphère. Ce cylindre touchera la sphère suivant une circonférence de grand cercle, et l'intersection de cette circonférence; avec le parallèle donné sera le point de contact demandé.

6. — Problème. *Parallèlement à une droite donnée mener un plan tangent de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.*

Solution. On mènera suivant la droite donnée ou suivant une parallèle à la droite donnée un plan perpendiculaire au plan du méridien donné, et on cherchera l'intersection de ces deux plans.

Parallèlement à cette intersection, on mènera au méridien donné une tangente (D); le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent.

Cas facile. Les points de contact les plus faciles à déterminer sont ceux qui doivent se trouver sur le méridien principal.

7. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans tangents que l'on peut mener à une surface de révolution, parallèlement à une droite donnée,* c'est-à-dire, *déterminer la courbe suivant laquelle un cylindre, parallèle à une droite donnée et circonscrit à une surface de révolution, touche cette surface.*

Solution. On déterminera, au moyen des deux problèmes précédents, les points de contact d'une série de plans tangents, tous parallèles à la droite donnée, dont les uns touchent la surface de révolution sur des *parallèles donnés*, et dont les autres touchent la surface sur des *méridiens donnés*.

La courbe qui passera par tous les points de contact ainsi déterminés, sera la courbe cherchée.

Observation. Il est bon d'employer les deux méthodes simultanément, parce que les points de contact, que l'on détermine sur des parallèles donnés, servent principalement à compléter la projection verticale de la courbe; et les points de contact, que l'on détermine sur des méridiens donnés, servent à compléter la projection horizontale de la courbe.

8. — Problème. *Chercher la courbe suivant laquelle une surface de révolution est touchée par un conoïde, circonscrit à cette surface et ayant pour plan directeur le plan horizontal.*

Solution. On coupera la surface de révolution et la droite, qui sert de directrice au conoïde, par une suite de plans parallèles au plan horizontal.

Chacun de ces plans coupera la droite en un point et la surface de révolution suivant un parallèle.

Les points de contact des deux tangentes, menées par ce point à ce parallèle, seront deux points de la courbe cherchée.

9. — Problème. *Par une droite, mener un plan tangent à une surface de révolution.*

Première solution. Au moyen du problème (4), on construira les courbes de contact de deux cônes, circonscrits à la surface de révolution et ayant leurs sommets en des points pris arbitrairement sur la droite.

L'intersection de ces deux courbes sera le point de contact du plan tangent.

Deuxième solution. Au moyen du problème (4), on construira la courbe de contact d'un cône circonscrit à la surface de révolution et ayant son sommet en un point quelconque de la droite.

Au moyen du problème (7), on construira la courbe de contact d'un cylindre, parallèle à la droite donnée et circonscrit à la surface de révolution.

L'intersection de ces deux courbes sera le point de contact du plan tangent.

Troisième solution. On déterminera la courbe de contact d'un cône, circonscrit à la surface de révolution et ayant son sommet en un point quelconque de la droite.

On déterminera au moyen du problème (8), la courbe de contact d'un conoïde, circonscrit à la surface de révolution et ayant pour directrice la droite donnée et pour plan directeur le plan horizontal.

L'intersection de ces deux courbes sera le point de contact du plan tangent.

Quatrième solution. On cherchera le méridien principal d'un hyperboloïde de révolution, ayant même axe que la surface proposée et pour génératrice la droite donnée.

On mènera une tangente commune au méridien principal de l'hyperboloïde et à celui de la surface proposée. On prendra cette tangente pour génératrice d'un cône de révolution circonscrit à la surface proposée.

Le plan tangent que l'on mènera à ce cône par la droite donnée (droite qu'on démontrera qui est tangente au cône), sera le plan tangent demandé.

Cinquième solution. On cherchera la trace horizontale d'un cylindre, parallèle à la droite donnée et circonscrit à la surface de révolution.

Par la droite donnée on mènera à ce cylindre un plan tangent, qui sera aussi tangent à la surface de révolution.

Pour construire la trace horizontale de ce cylindre on cherchera les traces horizontales de tous les cylindres auxiliaires, parallèles à la droite donnée et ayant respectivement pour directrices les différents parallèles de la surface de révolution, compris entre les parallèles limites dont il est fait mention (5).

La courbe tangente aux traces de tous ces cylindres auxiliaires sera la trace du cylindre en question.

Cas particuliers. Si la droite proposée est parallèle au plan horizontal de projection, alors le point de contact du plan tangent devra se trouver sur le *méridien* dont le plan est *perpendiculaire* à la droite. Et si la droite est perpendiculaire au plan horizontal, alors le point de contact du plan tangent devra se trouver sur le plus grand, ou sur le plus petit parallèle.

Même Problème. *La surface étant une hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Solution particulière. Soient M, M′ les deux points de rencontre de la droite proposée avec l'hyperboloïde, points que l'on sait construire en ne traçant que des circonférences et des droites; Cela posé:

Par le point M passent deux génératrices rectilignes G, g, appartenant respectivement aux deux modes de génération, et par le point M′, deux autres génératrices rectilignes G′, g', appartenant respectivement aux deux mêmes modes.

Les deux plans qui passent par la droite proposée et respectivement par les génératrices G, g, sont chacun un plan tangent. Le point de contact de l'un de ces plans sera au point d'intersection de G avec g', et le point de contact de l'autre, au point d'intersection de g avec G′.

Problème. *Parallèlement à un plan, mener un plan tangent à une surface de révolution.*

Moyen de solution. On mènera *un plan méridien perpendiculaire* au plan donné, ce plan méridien coupera la surface de révolution suivant un méridien, et le plan donné suivant une droite.

Parallèlement à cette droite, menant à ce méridien une tangente (D), le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent.

Même problème. *Résoudre le même problème pour un hyperboloïde de révolution à une nappe, sans construire le méridien principal de l'hyperboloïde.*

Moyen de solution. On construira la base d'un cône de révolution, ayant même axe que l'hyperboloïde et dont la génératrice soit parallèle à celle de l'hyperboloïde. Par le sommet de ce cône on mènera un plan auxiliaire parallèle au plan proposé. Ce plan auxiliaire coupera le cône suivant deux droites; on construira les quatre génératrices de l'hyperboloïde, deux de chaque mode respectivement parallèles à ces deux droites; et les plans, au nombre de deux, dont chacun renferme deux de ces génératrices qui se coupent, seront deux plans tangents. Le problème serait impossible, si le plan auxiliaire n'avait pas de droite de commun avec le cône.

PLANS TANGENTS A UNE SPHÈRE.

1. — Problème. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à une sphère.*

Première solution. Par le centre de la sphère, on mènera un plan perpendiculaire à la droite. Ce plan coupera la sphère en une circonférence de grand cercle, et la droite en un point; de ce point menant à cette circonférence deux tangentes, les points de contact de ces tangentes seront aussi les points de contact des plans tangents demandés. Ces tangentes se construiront par rabattement.

Deuxième solution. On prendra sur la droite deux points, dont l'un soit avec le centre de la sphère sur une parallèle au plan horizontal, et dont l'autre soit avec le même centre sur une parallèle au plan vertical.

On imaginera deux cônes, circonscrits à la sphère et ayant respectivement pour sommet ces deux points de la droite. Les axes de ces cônes seront respectivement parallèles aux plans de projection; et les deux circonférences de petit cercle, suivant lesquelles la sphère est touchée par ces cônes, se projetteront, l'une en ligne droite sur le plan horizontal, et l'autre en ligne droite sur le plan vertical.

Il suffit donc, pour trouver ces projections rectilignes, de chercher deux points de la courbe de contact de chaque cône avec la sphère.

Mais ces projections rectilignes sont aussi celles de la droite, suivant laquelle les plans des deux circonférences touchées se coupent, c'est-à-dire de la droite qui passe par les deux points de contact, qui sont à chercher.

La solution se réduit donc à trouver l'intersection d'une sphère avec une droite, dont on a les deux projections.

2. — Problème. *Par un point donné, mener un plan tangent à deux sphères.*

Solution. On cherchera le sommet d'un cône circonscrit aux deux sphères. Par la droite qui joint le point donné avec le sommet du cône, on mènera un plan tangent à l'une des deux sphères; ce sera le plan tangent demandé. (Il y a quatre plans tangents.)

3. — Problème. *Mener un plan tangent à trois sphères.*

Solution. On cherchera le sommet d'un cône circonscrit à la première et à la deuxième sphère.

On cherchera le sommet d'un second cône circonscrit à la première et à la troisième sphère.

Par la droite qui joint ces deux sommets, on mènera un plan tangent à l'une des trois sphères. Ce sera le plan tangent demandé. (Il y a huit plans tangents).

4. — Problème. *Mener un plan tangent à une sphère et à un cône droit à base circulaire.*

Solution. On cherchera la base d'un cône *droit*, circonscrit à la sphère et dont la génératrice principale fasse avec le plan horizontal le même angle, que celle du cône proposé; le plan tangent à la fois à ce cône auxiliaire et au cône proposé satisfera à la question. (Il y a quatre solutions).

PLANS TANGENTS AUX SURFACES GAUCHES.

PLANS TANGENTS AU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

1. — Problème. *Par un point donné sur une génératrice d'un paraboloïde hyperbolique, mener un plan tangent.*

Solution. Outre la génératrice proposée, sur laquelle le point est donné, et qui est une première droite du plan tangent, on construira une seconde génératrice quelconque; on cherchera le point de rencontre de cette seconde génératrice avec un plan, mené par le point donné parallèlement aux deux directrices du paraboloïde; et la droite qui joindra ce point de rencontre avec le point donné, sera une seconde droite du plan tangent.

2. — Problème. *Déterminer le point de contact d'un plan qui passe par une génératrice donnée d'un paraboloïde hyperbolique.*

Solution. Le plan proposé coupe la surface suivant une ligne droite, dont le point de rencontre avec la génératrice proposée est le point de contact demandé.

Pour trouver la droite suivant laquelle le plan proposé coupe la surface, il suffit de chercher les points, dans lesquels ce plan rencontre deux génératrices quelconques de la surface.

Observation. Si le plan, qui passe par la génératrice, est parallèle au plan directeur, son point de contact se trouvera à l'infini.

3. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans tangents que l'on peut mener par un point donné à un paraboloïde hyperbolique;*

Autrement : *Déterminer la courbe de contact d'un cône, circonscrit à un paraboloïde hyperbolique et ayant son sommet en un point donné.*

Solution. Par le point donné et par chaque génératrice on mènera un plan, et l'on cherchera le point de contact de ce plan (probl. 2). L'ensemble des points de contact de tous ces plans constituera la courbe cherchée.

4. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans, parallèles à une droite donnée et tangents à un paraboloïde hyperbolique;*

Autrement : *Déterminer la courbe de contact d'un cylindre, parallèle à une droite donnée et circonscrit à un paraboloïde hyperbolique.*

Solution. Par chaque génératrice on mènera un plan parallèle à la droite donnée, et l'on déterminera le point de contact de ce plan (3). L'ensemble des points de contact de tous ces plans constituera la courbe cherchée.

5. — Problème. *Par une droite donnée, mener un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique. (Il y a en général deux plans tangents.)*

Première solution. On cherchera les courbes de contact de deux cônes, circonscrits au paraboloïde et ayant leurs sommets en des points donnés sur la droite proposée (probl. 3). Les deux points d'intersection de ces courbes de contact seront chacun le point de contact d'un plan tangent.

Seconde solution. Nommons M, M′ les deux points de rencontre de la droite proposée avec la surface. Par le point M passent deux génératrices G, g appartenant respectivement aux deux modes de génération de la surface. Par le point M′ passent de même deux génératrices G′, g' appartenant respectivement aux deux mêmes modes. Le point de rencontre de G avec g' et le point de rencontre de g avec G′, seront respectivement les points de contact des deux plans tangents, que l'on peut mener par la droite proposée.

Pour trouver les points de rencontre d'une droite avec le paraboloïde, on cherchera la courbe suivant laquelle un plan quelconque mené par la droite coupe le paraboloïde; ce qui revient à chercher le point de rencontre de chaque génératrice du paraboloïde avec ce plan; et les points de rencontre de la droite proposée avec cette courbe, seront aussi les points de rencontre de la droite avec le paraboloïde.

Observation. Le problème n'a qu'une solution, si la droite est tangente au paraboloïde; et il est impossible, si la droite ne rencontre pas le paraboloïde.

Il existe une solution directe, que nous avons donnée ailleurs, pour trouver le point de rencontre d'une droite avec le paraboloïde.

6. — Problème. *Parallèlement à un plan donné, mener un plan tangent à un paraboloïde hyperbolique.*

Solution. — On cherchera sur le paraboloïde la génératrice qui est parallèle au plan donné; le plan, conduit suivant cette génératrice parallèlement au plan donné, sera le plan tangent demandé; et il ne restera plus que d'en déterminer le point de contact.

Pour trouver la génératrice qui est parallèle au plan donné, il faut chercher l'intersection du plan donné avec le plan directeur, et mener par chaque *directrice* un plan parallèle à cette droite d'intersection; ces deux plans se couperont suivant la génératrice cherchée.

Cas impossible. La solution du problème proposé est impossible, si le plan donné est parallèle à la droite d'intersection des deux plans directeurs.

PLANS TANGENTS A L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

7. — Problème. *Par un point donné sur une génératrice d'un hyperboloïde à une nappe, mener un plan tangent.*

Solution. — Outre la génératrice sur laquelle se trouve le point donné, et qui est une première droite du plan tangent, on construira deux autres génératrices auxiliaires; la droite qui, passant par le point donné, rencontre ces deux génératrices auxiliaires, sera une seconde droite du plan tangent.

8. — Problème. *Déterminer le point de contact d'un plan, qui passe par une génératrice donnée d'un hyperboloïde à une nappe.*

Solution. — Outre la génératrice proposée par laquelle passe le plan, on construira deux autres génératrices auxiliaires, et l'on cherchera les points de rencontre du plan proposé avec ces deux génératrices.

La droite qui joindra ces deux points de rencontre, coupera la génératrice proposée au point de contact demandé.

9. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans tangents, que l'on peut mener par un point donné à un hyperboloïde à une nappe.*

Autrement : *Déterminer la courbe de contact d'un cône, circonscrit à un hyperboloïde à une nappe et ayant son sommet en un point donné.*

Solution. La solution ne diffère pas de celle qui a été donnée pour le paraboloïde (probl. 3).

10. — Problème. *Déterminer les points de contact de tous les plans parallèles à une droite donnée et tangents à un hyperboloïde à une nappe.*

Autrement : *Déterminer la courbe de contact d'un cylindre, parallèle à une droite donnée et circonscrit à un hyperboloïde à une nappe.*

Solution. Cette solution est encore la même que celle qui a été donnée pour le paraboloïde (probl. 4).

11. — Problème. *Par une droite donnée mener un plan tangent à un hyperboloïde à une nappe.*

Solution. Il y a deux solutions, qui sont les mêmes que pour le paraboloïde (probl. 5).

Observation. Le problème n'a qu'une solution, si la droite est tangente à l'hyperboloïde; et il est impossible, si la droite ne rencontre pas l'hyperboloïde.

12. — Problème. *Parallèlement à un plan mener un plan tangent à un hyperboloïde à une nappe.*

Solution. On construira les courbes de contact de deux cylindres, circonscrits à l'hyperboloïde et respectivement parallèles à deux droites du plan donné (probl .10). Ces deux courbes se couperont en deux points, dont chacun sera le point de contact d'un plan tangent.

Autre solution. Il existe une autre solution qui consiste à chercher sur l'hyperboloïde, au moyen de son cône asymptotique, les deux génératrices qui sont parallèles au plan donné, et à mener par chacune de ces deux génératrices un plan [parallèlle au plan donné.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES GAUCHES AUTRES QUE PARABOLOÏDE ET HYPERBOLOÏDE.

Principes. *Si deux surfaces gauches à trois directrices ont une génératrice commune et trois plans tangents communs en trois points différents de cette génératrice, elles auront même plan tangent en un point quelconque de* *cette génératrice; et l'on dit que ces deux surfaces se raccordent suivant cette génératrice commune.*

Si deux surfaces gauches, ayant même plan directeur, ont une génératrice commune et deux plans tangents communs en deux points différents de cette génératrice, elles auront même plan tangent en un point quelconque de cette génératrice, c'est-à-dire qu'elles se raccorderont suivant cette génératrice commune.

13. — Problème. *Par un point donné sur une génératrice d'une surface gauche à trois directrices, mener un plan tangent.*

Solution. Par le point de rencontre de la génératrice proposée avec chaque directrice, on mènera à celle-ci une tangente. On prendra ces trois tangentes pour directrices d'un hyperboloïde à une nappe, et par le point donné on mènera à cet hyperboloïde un plan tangent.

Observation. Cet hyperboloïde auxiliaire devient paraboloïde, si les trois tangentes sont parallèles à un même plan; et il est à observer qu'on peut toujours remplacer l'hyperboloïde auxiliaire par un paraboloïde. En effet, si par la génératrice proposée et chacune des tangentes aux trois directrices, on mène un plan, on aura trois plans tangents; et si dans chaque plan tangent et par son point de contact on mène une droite parallèle à un plan choisi arbitrairement, on aura trois droites parallèles à ce plan, lesquelles étant prises pour directrices de l'hyperboloïde auxiliaire, celui-ci se changera en paraboloïde hyperbolique.

14. — Problème. *Par un point donné sur une génératrice d'une surface gauche quelconque à plan directeur, mener un plan tangent.*

Solution. Par le point de rencontre de la génératrice proposée avec chaque directrice, on mènera à celle-ci une tangente; on prendra ces deux tangentes pour directrices d'un paraboloïde hyperbolique, ayant même plan directeur que la surface gauche proposée.

Le plan tangent mené par le point donné à ce paraboloïde, sera le plan tangent cherché.

APPLICATIONS DES DEUX PROBLÈMES PRÉCÉDENTS.

15. — Problème. *Par un point donné sur une génératrice du biais passé, mener un plan tangent.*

16. — Problème. Par un point donné sur une génératrice de l'arrière voussure de Marseille, mener un plan tangent.

17. — Problème. Par un point donné sur une génératrice d'un héliçoïde gauche, mener un plan tangent.

18. — Problème. Par un point donné sur une génératrice d'un héliçoïde gauche à plan directeur, mener un plan tangent.

INTERSECTIONS DE LIGNES AVEC DES SURFACES COURBES.

Les principes sur lesquels est basée la construction de l'intersection d'une ligne avec une surface et de l'intersection de deux surfaces entre elles, consistent dans la connaissance de surfaces auxiliaires, dont on sait construire les intersections avec la ou les surfaces données. Exemples de telles surfaces auxiliaires :

1. — *La surface donnée étant cylindrique.*

A. — Si un plan parallèle aux génératrices d'un cylindre coupe ce cylindre, il le coupera suivant une ou plusieurs génératrices.

B. — Pour qu'un plan parallèle aux génératrices d'un cylindre coupe ce cylindre, il faut que la trace horizontale du plan coupe la trace horizontale dn cylindre.

C. — Si deux cylindres parallèles se coupent, ils se couperont suivant une ou plusieurs génératrices.

D. — Pour que deux cylindres parallèles se coupent, il faut que leurs traces horizontales se coupent.

E. — La trace horizontale d'un cylindre, dont la directrice est une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection, est une circonférence de cercle de même rayon que celui de la directrice.

Si par le centre de la directrice, on mène une parallèle aux génératrices du cylindre, la trace horizontale de cette parallèle sera le centre de la base du cylindre.

2. — *La surface donnée étant conique.*

F. — Si un plan, passant par le sommet d'un cône, coupe ce cône, il le coupera suivant une ou plusieurs génératrices.

G. — Pour qu'un plan, passant par le sommet d'un cône, coupe ce cône, il faut que la trace horizontale du plan coupe la trace horizontale du cône.

H. — Si deux cônes, ayant même sommet, se coupent, ils se couperont, suivant une ou plusieurs génératrices.

K. — Pour que deux cônes, ayant même sommet, se coupent, il faut que leurs traces horizontales se coupent.

L. — La trace horizontale d'un cône, dont la directrice est une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection, est une circonférence de cercle d'un rayon différent de celui de la directrice.

La trace horizontale de la droite, qui unit le sommet du cône avec le centre de la directrice, est le centre de la base du cône.

3. — *La surface donnée étant de révolution.*

M. — Si un plan, perpendiculaire à l'axe d'une surface de révolution, coupe cette dernière, il la coupera suivant un ou plusieurs parallèles.

N. — Si deux surfaces de révolution, ayant même axe, se coupent, elles se couperont suivant un ou plusieurs parallèles.

O. — Pour que deux surfaces de révolution, ayant même axe, se coupent, il faut que leurs méridiens principaux se coupent.

P. — Si les axes, de tant de surfaces de révolution que l'on voudra, se rencontrent en un même point, la sphère dont le centre sera en ce point, coupera chacune des surfaces de révolution suivant un parallèle. Cela vient de ce que toute droite qui passe par le centre d'une sphère, peut être considérée comme un axe de révolution de la sphère.

4. — *La surface donnée étant un paraboloïde hyperbolique, ou un hyperboloïde à une nappe.*

Q. — Deux paraboloïdes hyperboliques qui ont une directrice commune et un plan directeur commun, ont une ou deux génératrices communes selon que la seconde directrice de l'un des deux paraboloïdes rencontre l'autre paraboloïde en un ou en deux points. Si cette rencontre n'existe pas, les deux surfaces n'auront pas de génératrice commune.

Deux paraboloïdes hyperboliques ne sauraient avoir plus de deux génératrices communes sans coïncider.

R. — Deux hyperboloïdes à une nappe, qui ont deux directrices communes, ont une ou deux génératrices communes selon que la troisième directrice de l'un des deux hyperboloïdes rencontre l'autre en un ou en deux points.

S'il n'y pas de rencontre, les deux surfaces n'auront pas de génératrice commune.

Deux hyperboloïdes à une nappe ne sauraient avoir plus de deux génératrices communes sans coïncider.

S. — Pour trouver l'intersection de deux courbes, situées dans un même plan, et dont le rabattement est plus facile à construire que leurs projections, on rabattra les deux courbes; et quand on connaîtra l'intersection des deux courbes rabattues, on remontera facilement aux projections de cette intersection.

Problème général.

Trouver le point de rencontre d'une ligne quelconque avec une surface quelconque.

Solution générale. Par la ligne proposée on fera passer une surface auxiliaire, dont on sait construire la ligne d'intersection avec la surface proposée.

Le point de rencontre de cette ligne d'intersection avec la ligne proposée sera le point demandé.

Application au plan.

Chercher les points de rencontre d'une ligne quelconque avec un plan.

Première solution. Par la ligne proposée on fera passer un cylindre auxiliaire parallèle à une droite quelconque du plan proposé; et on construira la trace horizontale de ce cylindre.

On déterminera les génératrices suivant lesquelles le plan proposé coupe ce cylindre (B).

A l'intersection de ces génératrices avec la ligne proposée se trouveront les points demandés.

Autre solution. On prendra pour nouveau plan vertical de projection un plan perpendiculaire à la trace horizontale du plan proposé, et l'on projettera la courbe sur ce nouveau plan, etc., etc.

La ligne donnée étant plane, son point d'intersection avec le plan donné devra se trouver sur la droite d'intersection du plan de la courbe avec le plan donné.

Application au cylindre.

Chercher le point de rencontre d'une ligne quelconque avec une surface cylindrique.

Solution. Par la ligne proposée on fera passer un cylindre auxiliaire parallèle au cylindre proposé. Ce cylindre auxiliaire coupera le cylindre proposé suivant une ou plusieurs génératrices, et les points de rencontre de ces génératrices avec la courbe proposée seront les points cherchés.

La ligne étant une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection, la base du cylindre auxiliaire mentionné sera une circonférence que l'on construira d'après (E).

La ligne étant une droite, le cylindre auxiliaire mentionné devient le plan mené par la droite parallèlement aux génératrices du cylindre proposé.

Application au cône.

Chercher le point de rencontre d'une ligne quelconque avec une surface conique.

Solution. Par la ligne proposée on fera passer un cône auxiliaire de même sommet que le cône proposé. Ce cône auxiliaire coupera le cône proposé suivant une ou plusieurs génératrices, et les points de rencontre de ces génératrices avec la courbe donnée seront les points cherchés.

La ligne quelconque étant une circonférence de cercle parallèle au plan horizontal de projection, la base du cône auxiliaire mentionné sera aussi une circonférence que l'on construira d'après (L).

La ligne quelconque étant une droite, le cône auxiliaire mentionné devient le plan qui passe par le sommet et la droite proposée.

Application aux surfaces de révolution.

Chercher le point de rencontre d'une ligne droite ou courbe avec une surface de révolution.

Solution. On prendra la ligne proposée pour génératrice d'une surface auxiliaire de révolution, ayant même axe que la surface proposée, et l'on construira le *méridien principal* de cette surface; les points d'intersection de ce méridien avec le méridien principal de la surface proposée, appartiendront *aux parallèles* dans lesquels la ligne proposée devra rencontrer la surface de révolution.

Cas particulier. Si la ligne quelconque est une droite et la surface de révolution un hyperboloïde à une nappe représenté par une génératrice rectiligne. Dans ce cas, après avoir ramené la génératrice de l'hyperboloïde dans la position, où la projection horizontale de cette génératrice est parallèle à celle de la droite proposée, la solution se trouve ramenée à résoudre le problème de géométrie plane : étant donnés deux points et deux droites parallèles, mener par l'un de ces points une sécante telle que sa partie, comprise entre les deux parallèles, soit la base d'un triangle insoscèle, ayant pour sommet l'autre des deux points donnés.

Dans le cas plus particulier où la droite proposée rencontre l'axe de l'hyperboloïde, on prendra cette droite pour *génératrice* d'un cône de révolution. On cherchera les points dans lesquels ce cône est rencontré par la génératrice de l'hyperboloïde; les *parallèles* de l'hyperboloïde, dont chacun passe par un de ces points de rencontre, seront les intersections du cône avec l'hyperboloïde

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES.

Les problèmes les plus importants que l'on puisse proposer sur l'intersection de deux surfaces, sont :

Problème I.

Construire les deux projections de l'intersection de deux surfaces.

Solution. Il faut couper les deux surfaces par une suite de surfaces auxiliaires, dont on sait construire les intersections avec chacune des deux surfaces proposées.

Chaque surface auxiliaire coupera chacune des deux surfaces proposées suivant une courbe et les points d'intersection de ces deux courbes appartiendront à l'intersection des deux surfaces proposées.

Observation. Les surfaces auxiliaires, par lesquelles il faut couper les deux surfaces proposées, seront en général des *plans*.

Autre solution. Sur l'une des deux surfaces on tracera un système de lignes dont on construira les points de rencontre avec l'autre surface.

La courbe d'intersection sera entièrement fermée, si aucun de ses points ne se trouve à l'infini; la courbe se prolonge au contraire à l'infini, si un ou plusieurs de ses points se trouvent à l'infini.

L'asymptote d'une courbe qui va à l'infini, est une tangente qui touche la courbe à l'infini. Les courbes qui se prolongent à l'infini, n'ont pas toutes des asymptotes.

Point conjugué. Un point d'une courbe est dit *conjugué*, lorsqu'il satisfait à la définition de la courbe et qu'il en est entièrement isolé. Si un plan, qui coupe une surface suivant une courbe, est tangent à la même surface en un point isolé de la courbe, ce point sera un point conjugué de la courbe.

Personne, que nous sachions, n'a ainsi envisagé ce point singulier.

Problème II.

Par un point donné sur l'intersection, mener une tangente.

Première solution. Par le point donné on mènera un plan tangent à la première surface et un plan tangent à la seconde surface; l'intersection de ces deux plans tangents sera la tangente demandée.

La tangente fournie par cette construction n'existe pas pour un point situé à l'infini, si les deux plans tangents mentionnés sont parallèles;

dans le cas contraire, l'intersection de ces plans tangents sera une asymptote de la courbe.

Tangente parallèle à un plan de projection. La tangente sera *parallèle au plan horizontal* de projection, si les deux plans tangents ont leurs traces horizontales parallèles, ou bien, si l'un d'eux est parallèle au plan horizontal.

La tangente sera *parallèle au plan vertical de projection,* si les deux plans tangents ont leurs traces verticales parallèles, ou bien, si l'un d'eux est parallèle au plan vertical.

Ces tangentes, nous les appellerons *tangentes limites,* et leurs points de contact, *points limites.* Les points limites sont de tous les points de la courbe d'intersection ceux dont les distances aux plans de projection sont des maxima ou des minima.

Observation. Si l'une des deux surfaces proposées est un plan, *les tangentes limites* devront être respectivement parallèles aux *traces* de ce plan.

Seconde solution. Au point donné on mènera une normale à la première surface et une normale à la seconde surface; la perpendiculaire, au plan de ces deux normales, menée par le point donné sera la tangente demandée.

Problème III.

Par un point donné hors de l'intersection, mener une tangente.

Solution. On construira la courbe de contact d'un cône, ayant son sommet au point donné, et circonscrit à la première surface.

On construira de même la courbe de contact d'un cône, ayant son sommet au point donné, et circonscrit à la seconde surface.

L'intersection de ces deux courbes sera le point de contact de la tangente.

Observation. Un cône ayant son sommet en un point donné et circonscrit à une surface, cylindrique, conique, et en général à une surface développable quelconque, se réduit au plan tangent que l'on peut mener par ce point à ces surfaces.

Problème IV.

Parallèlement à une droite, mener une tangente à l'intersection.

Solution. On construira les courbes de contact de deux cylindres, parallèles à la droite donnée et respectivement circonscrits aux deux surfaces proposées.

Ces deux courbes se couperont au point de contact de la tangente.

Observation. Si l'une des deux surfaces courbes est un plan, les tangentes limites sont alors les intersections de ce plan avec deux cylindres, circonscrits à l'autre surface, et dont l'un est parallèle à la trace horizontale du plan proposé, et dont l'autre est parallèle à la trace verticale du plan proposé.

Problème V.

Ayant construit les deux projections de l'intersection de deux surfaces :

1° *Vérifier si cette intersection est une courbe plane.*

Solution. On construira la trace horizontale d'un cône qui a pour directrice la courbe proposée et pour sommet un point quelconque de la même courbe. Cela fait, la courbe sera plane, si la trace de ce cône est une ligne droite.

2° *Construire le rabattement de la courbe d'intersection.*

Solution. Pour construire le rabattement de la courbe, la *trace horizontale* du plan de la courbe étant prise pour charnière, on mènera par chaque point à rabattre une parallèle à la *trace verticale* et l'on cherchera le point où cette parallèle rencontre la charnière; la distance du point proposé à ce point de la charnière étant connue, puisque cette distance se projette sur le plan vertical dans sa véritable grandeur, le problème du rabattement du point proposé peut être considéré comme résolu.

Observation. Lorsque par chaque point d'une courbe à rabattre passe *de fait*, dans le plan de la courbe, une horizontale ou une parallèle au plan vertical, le rabattement est aussi facile que si le plan de la courbe était perpendiculaire à l'un des plans de projection; remarque qui n'a pas encore été faite.

Problème VI.

Ayant construit les deux projections de l'intersection de deux surfaces, dont une au moins est développable, on demande de développer celle-ci et de construire la transformée de l'intersection ainsi que la tangente en un point de la transformée.

Solution. Nous n'examinerons que deux cas : le premier, où la surface développable est cylindrique; le second, où la surface développable est conique.

Développement du cylndre. Ne considérons de la surface du cylindre que la portion comprise entre la courbe proposée et une section droite quelconque, de sorte que par génératrice du cylindre il faut entendre la portion de cette génératrice comprise entre ces deux courbes. Cela posé :

La courbe proposée est donnée par un certain nombre de points, par chacun de ses points passe une génératrice, et toutes ces génératrices divisent la section droite en un certain nombre d'arcs; on *rectifiera* chacun de ces arcs et on portera sur une même droite, à la suite les uns des autres, tous ces arcs rectifiés; par tous les points de division on élèvera à cette droite des perpendiculaires respectivement égales aux génératrices qui passent par les points de division correspondants de la section droite; la courbe qui raccorde les extrémités de ces perpendiculaires sera la transformée de la courbe proposée.

Pour réaliser toutes ces opérations, en supposant connues les deux projections de la courbe proposée, il faut d'abord chercher le rabattement de la section droite, ce qui oblige à déterminer avant tout les projections de cette section, et puis chercher la véritable longueur de chaque génératrice.

Cas facile. Le cylindre se trouvera dans la position la plus avantageuse pour la détermination de ces divers éléments, lorsqu'il sera parallèle au plan vertical de projection. Dans ce cas une des deux projections de la section droite est connue, et suffit pour construire le rabattement de cette section; d'un autre côté, toutes les génératrices du cylindre se projettent sur le plan vertical dans leurs véritables grandeurs.

Application. Pour rectifier une courbe à double courbure, dont on a les deux projections, on cherchera la transformée de cette courbe, en la considérant comme existant sur un cylindre droit, et l'on construira une droite égale en longueur à cette transformée.

Tangente a la transformée. Pour construire une tangente à la transformée, il suffit de savoir que l'*angle*, qu'une tangente à la courbe d'intersection fait dans l'espace avec la génératrice qui passe par le point de contact, ne change pas, lorsqu'on développe le cylindre.

Développement du cône. On inscrira à la base du cône un polygone d'un nombre quelconque de côtés, dont chacun diffère très-peu en longueur de l'arc qu'il sous-tend : cela fait, on assimilera le cône à une pyramide de même sommet que le cône et ayant pour base ce polygone; on cherchera le développement de cette pyramide, ce qui se fait en construisant sur le plan de développement, les uns à côté des autres, une suite de triangles ayant tous même sommet et respectivement égaux aux faces latérales de la pyramide.

On connaîtra les trois côtés de chaque face latérale de la pyramide, quand on aura déterminé les longueurs de toutes les arêtes latérales de la pyramide, c'est-à-dire des génératrices du cône qui aboutissent à tous les sommets du polygone, base de la pyramide.

Pour construire maintenant la transformée de l'intersection proposée, il ne faut considérer de cette intersection que les points qui se trouvent sur les génératrices, arêtes de la pyramide; cela posé, comme les positions que prennent ces génératrices sur le plan de développement sont connues, il ne reste plus, pour pouvoir construire la position que prendra sur le plan de développement un point quelconque de l'intersection, que de connaître la distance de ce point au sommet du cône.

Autrement. On construira les deux projections de l'intersection du cône avec une sphère dont le centre est au sommet du cône. Dans le développement du cône, la transformée de cette intersection deviendra un arc de cercle d'un rayon égal à celui de la sphère. Cet arc de cercle devra être pris égal à la longueur de la même intersection; ce qui oblige à construire la transformée de cette dernière en la considérant comme située sur un cylindre vertical, etc., etc.

INTERSECTIONS DE SURFACES COURBES PAR DES PLANS.

1. — Problème. *Chercher la courbe d'intersection d'une surface cylindrique par un plan.*

Solution. Dans le cas où le plan et le cylindre ont des directions quelconques par rapport aux plans de projection, on coupera le cylindre et le plan proposés par une suite de plans auxiliaires, parallèles aux génératrices du cylindre et à l'une des deux traces du plan, par exemple, à la trace horizontale.

Rabattement. En prenant ainsi les plans auxiliaires parallèles à la trace horizontale du plan proposé, le rabattement de la courbe autour de la trace verticale devient tout aussi facile que si le plan proposé était perpendiculaire à l'un des plans de projection; parce que par chaque point de la courbe et dans le plan de la courbe passera de fait une horizontale.

Plans auxiliaires limites. Les plans auxiliaires limites sont ceux dont les traces sont tangentes à la base du cylindre. Ces plans limites sont tangents au cylindre et donnent les *tangentes limites.*

Cas facile. Dans le cas où le cylindre est vertical et le plan proposé perpendiculaire au plan vertical de projection, les deux projections de la conrbe d'intersection sont connues.

2. — Problème. *Chercher l'intersection d'une surface conique avec un plan.*

Solution. On coupera la surface conique et le plan proposé par une suite de plans auxiliaires, parallèles à l'une des traces du plan proposé et passant tous par le sommet du cône. Les plans auxiliaires *limites* se déterminent comme dans (1).

Rabattement. Même observation que dans le problème (1) pour ce qui concerne le rabattement de l'intersection.

Branche infinie. L'intersection peut avoir *une* ou *deux branches infinies*, circonstance que l'on peut reconnaître, avant de construire l'intersection, de la manière suivante :

Après avoir mené par le *sommet* du cône un plan auxiliaire *parallèle* au plan proposé, l'intersection sera composée *d'une seule branche infinie*, si le plan auxiliaire est *tangent* au cône, et de *deux branches infinies*, si le plan auxiliaire *coupe* le cône. Dans le dernier cas seulement les deux branches auront des *asymptotes*, dont voici la construction :

Par chaque génératrice suivant laquelle le cône est coupé par le plan auxiliaire en question, on mènera au cône un plan tangent, les droites d'intersection de ces plans tangents avec le plan proposé seront les *asymptotes.*

3. — Problème. *Chercher la courbe d'intersection d'une surface de révolution par un plan.*

Moyen de solution. On coupera la surface de révolution et le plan proposés par une suite de plans auxiliaires, perpendiculaires à l'axe, c'est-à-dire, parallèles au plan horizontal de projection.

Plans sécants limites. On mènera un plan méridien perpendiculaire au plan proposé; on construira la droite d'intersection de ces deux plans, ainsi que les points de rencontre de cette droite avec la surface de révolution. Les plans horizontaux dont chacun passe par un de ces points de rencontre, seront les plans sécants limites.

Rabattement. Le rabattement de l'intersection autour de la trace verticale est facile, parce que par chacun de ses points passe de fait une *horizontale.*

4. — Problème particulier. *Chercher l'intersection d'un plan avec un hyperboloïde de révolution à une nappe, représenté par sa génératrice rectiligne.*

Moyen de solution. La solution est la même que dans le cas général (3).

Plans sécants limites. La détermination des plans sécants limites se réduit à trouver les points de rencontre d'une droite avec l'hyperboloïde sans construire aucun méridien de ce dernier. (page 69.)

On demande de reconnaître, avant de la construire, l'espèce de courbe que l'on obtiendra.

Solution. Après avoir construit la base d'un cône de révolution, ayant son sommet au centre du cercle de gorge, et pour génératrice une parallèle à la génératrice de l'hyperboloïde, on mènera par le sommet de ce cône un plan auxiliaire parallèle au plan proposé. Cela fait, on reconnaîtra que la section est :

Une ellipse, si la trace horizontale du plan auxiliaire *ne rencontre pas* la base du cône.

Une parabole, si la trace horizontale du plan auxiliaire est *tangente* à la base du cône.

Une hyperbole, si la trace horizontale du plan auxiliaire *coupe* la base du cône.

5. — Problème. *L'intersection d'une surface gauche avec une autre surface quelconque.*

Solution. On cherchera les points de rencontre des diverses génératrices de la surface gauche avec l'autre surface proposée.

INTERSECTION DE DEUX SURFACES COURBES.

6. — Problème. *Chercher l'intersection de deux surfaces cylindriques.*

Moyen de solution. On coupera les deux cylindres par une suite de plans auxiliaires parallèles à la fois aux génératrices du premier et aux génératrices du second cylindre (A).

Plans auxiliaires limites. Tout plan auxiliaire, dont la trace horizontale est *tangente* à la base de *l'un* des cylindres et *coupe* la base de *l'autre*, est un plan limite.

Tout plan limite est tangent à l'un des cylindres et coupe l'autre suivant une génératrice, qui est *tangente* à l'intersection des deux cylindres.

Pénétration. Arrachement. La rencontre de deux cylindres a lieu par *pénétration*, c'est-à-dire, qu'il y aura une courbe d'entrée et une courbe de sortie, si les traces horizontales des deux plans limites sont chacune tangente à la *même base* de l'un des cylindres.

Dans tout autre cas, on dit qu'il y a arrachement, c'est-à-dire que la courbe d'intersection sera une courbe unique et non interrompue.

Branche infinie. Si les bases des deux cylindres sont des courbes fermées, il n'y aura pas de branche infinie.

Si l'une des bases ou toutes les deux sont des courbes ouvertes, alors, pour qu'il y ait une branche infinie, il faut que la trace horizontale d'un des plans auxiliaires sécants aille rencontrer l'une des deux bases *à l'infini*.

Points visibles. Un point de la courbe d'intersection sera visible, lorsqu'il se trouvera à l'intersection de deux génératrices visibles, *l'une et l'autre*, sur chaque surface considérée isolément.

Points invisibles. Un point de la courbe d'intersection sera invisible, lorsqu'il se trouvera à l'intersection de deux génératrices, dont l'une au moins est invisible.

Cas facile. Le cas le plus simple de la recherche de l'intersection de deux cylindres est celui où l'un d'eux est *vertical.*

7. — Problème. *Chercher l'intersection de deux surfaces coniques.*

Solution. Par la droite qui unit les sommets des deux cônes on mènera une suite de plans auxiliaires dont chacun coupe à la fois les deux cônes (G).

Plans auxiliaires limites. Les plans auxiliaires limites se déterminent comme dans la question précédente, et jouissent de la même propriété.

Pénétration. Arrachement. La règle pour déterminer s'il y a pénétration ou arrachement, est la même que dans la question précédente.

Branche infinie. Pour que les deux cônes se coupent suivant une courbe à branche infinie, il faut qu'une des génératrices de l'un des cônes soit parallèle à une génératrice de l'autre cône.

Pour reconnaître cette circonstance, on construira un cône auxiliaire ayant même sommet que le premier cône et dont les génératrices soient respectivement parallèles à celles du second; cela fait, si la base du cône auxiliaire touche ou coupe la base du premier cône, les deux cônes proposés auront une ou plusieurs génératrices parallèles.

8. — Problème. *Chercher l'intersection d'un cylindre et d'un cône.*

Solution. On coupera les deux surfaces par une suite de plans auxiliaires parallèles aux génératrices du cylindre et passant tous par le *sommet* du cône (A, F).

Plans auxiliaires limites. Les plans auxiliaires limites se déterminent comme dans la question (6) et jouissent de la même propriété.

Branche infinie. Si les bases des deux surfaces sont des courbes fermées, alors il n'y aura de branche infinie qu'autant qu'une des génératrices du cône sera parallèle aux génératrices du cylindre. Pour reconnaître cette circonstance, on mènera par le sommet du cône une parallèle aux génératrices du cylindre, et l'on vérifiera si cette parallèle coïncide avec une *génératrice* du cône.

Pénétration. Arrachement. La règle pour déterminer s'il y a pénétration ou arrachement est la même que dans la question (6).

9. — Problème. *Chercher l'intersection de deux surfaces de révolution.*

Solution. Nous examinerons trois cas d'après le nombre de positions que peuvent avoir entre eux les axes des deux surfaces de révolution.

1° *Si les axes sont parallèles*, on prendra les plans de projection, l'un perpendiculaire aux deux axes, l'autre parallèle au plan des deux axes, et l'on coupera les deux surfaces par une suite de plans horizontaux.

2° *Si les axes se rencontrent*, on prendra le plan horizontal de projection *perpendiculaire* à l'un des deux axes et le plan vertical *parallèle* aux deux, et l'on coupera les deux surfaccs par une suite de *sphères*, ayant leurs centres au point d'intersection des deux axes (P).

Points limites. Les points limites par rapport au plan horizontal se trouvent à l'intersection des *méridiens principaux* des deux surfaces.

3° *Si les axes ne se rencontrent pas et ne sont pas parallèles*, on disposera les plans de projection comme dans le cas précédent, et l'on coupera les deux surfaces par une suite de plans horizontaux. Dans ce cas la projection horizontale de l'intersection de chaque plan horizontal avec la surface de révolution, dont l'axe n'est pas vertical, devra se construire par points.

10. — Problème. *Chercher l'intersection d'une surface de révolution avec une surface cylindrique à base quelconque.*

Solution. On cherchera les points dans lesquels les différents parallèles de la surface de révolution rencontrent la surface cylindrique (page 68), en observant que les *parallèles limites* sont ceux dont chacun ne rencontre la surface cylindrique qu'en un seul point.

Chaque parallèle limite jouit de la propriété que, si on le prend pour directrice d'un cylindre auxiliaire parallèle au cylindre proposé, la base du cylindre auxiliaire sera tangente à la base du cylindre proposé.

Cas particulier. *Si la base du cylindre proposé est une circonférence de cercle*, alors on coupera le cylindre et la surface de révolution par une suite de plans horizontaux; et si le cylindre est vertical et à base quelconque, la solution reste la même et fournit un nouveau moyen de trouver les points de rencontre d'une courbe avec une surface de révolution.

11. — Problème. *Chercher l'intersection d'une surface de révolution avec une surface conique à base quelconque.*

Solution. On cherchera les points dans lesquels les différents parallèles de la surface de révolution rencontrent la surface conique (page 69), en observant que les *parallèles limites* sont ceux dont chacun ne rencontre la surface conique qu'en un seul point.

Chaque parallèle limite jouit de la propriété, que si on le prend pour directrice d'un cône auxiliaire, ayant même sommet que le cône proposé, la base de ce cône auxiliaire sera tangente à la base du cône proposé.

Cas particulier. *Si la base du cône est une circonférence de cercle,* alors on coupera le cône et la surface de révolution par une suite de *plans horizontaux*.

Enfin, *si la surface de révolution est une sphère dont le centre coïncide avec le sommet du cône*, alors on coupera ces deux surfaces par une suite de plans verticaux passant tous par le sommet du cône (page 67).

APPLICATIONS DIVERSES.

1. Trouver le centre et le rayon d'une sphère dont la surface passe par quatre points donnés arbitrairement dans l'espace.

Choix des plans de projection. On prendra, pour plan horizontal de projection, celui qui passe par trois des quatre points proposés; et pour plan vertical, un plan quelconque parallèle à la droite qui unit le quatrième point avec l'un quelconque des trois premiers.

2. Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire donnée, c'est-à-dire, trouver la position du centre de la sphère, et la grandeur de son rayon.

3. Construire les projections d'un point dont on connaît les distances à trois autres points donnés dans l'espace.

Choix des plans de projection. Prendre pour plan horizontal de projection celui qui passe par les trois points proposés, et pour plan vertical, un plan perpendiculaire à l'un des côtés du triangle qui a pour sommets les points proposés.

4. Construire les projections d'un point dont on connaît les distances à trois droites données dans l'espace.

5. Un ingénieur parcourant un pays de montagnes, soit pour étudier la forme du terrain, soit pour faire le projet de travaux publics qui dépendent de cette forme, est muni d'une carte topographique, dans laquelle non-seulement les projections des différents points du terrain, sont exactes, mais encore les hauteurs de tous ces points au-dessus d'une même surface de niveau sont indiquées par des nombres placés à côté des points respectifs, et auxquels on a coutume de donner le nom de cotes. Il rencontre un point remarquable qui n'est pas placé sur la carte, soit parce qu'il a été omis, soit parce qu'il a été rendu remarquable depuis la confection de la carte. L'ingénieur ne porte avec lui d'autre instrument d'observation qu'un gra-

phomètre propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb.

On demande que sans quitter la station, il construise sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote qui convient à ce point, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus de la surface de niveau ?

6. Les circonstances étant les mêmes, que dans la question précédente, avec cette seule différence que l'instrument n'est pas garni de fil-à-plomb, de manière que les angles avec la verticale ne puissent pas être mesurés; on demande encore que l'ingénieur, sans quitter la station, détermine sur la carte la position du point où il est, et qu'il trouve la cote de ce point, c'est-à-dire son élévation au-dessus de la surface de niveau à laquelle tous les points de la carte sont rapportés ?

7. Le général d'une armée en face de l'ennemi, n'a pas la carte du pays occupé par celui-ci, et il en a besoin pour faire le plan d'une attaque qu'il médite. Il a un aérostat. Il charge un ingénieur de s'élever avec l'aérostat, et de prendre toutes les mesures nécessaires pour faire la carte, et pour en donner un nivellement approché : mais il a lieu de croire que si l'aérostat changeait de station sur le terrain, l'ennemi s'apercevrait de son dessein; en conséquence il permet à l'ingénieur de s'élever à différentes hauteurs dans l'atmosphère, si cela est nécessaire; mais il lui défend de changer de station à terre. L'ingénieur est muni d'un instrument propre à mesurer les angles, et cet instrument est garni d'un fil-à-plomb : on demande comment l'ingénieur pourra exécuter les ordres du général ?

7. Solution. Dans la première station on dirigera un rayon visuel sur chacun des points que l'on veut rapporter sur la carte et l'on observera l'angle que fait chaque rayon visuel avec la verticale.

Dans la seconde station on répétera la même opération que dans la première, et l'on observera de plus les angles que fait le rayon visuel dirigé sur le premier point avec les rayons visuels dirigés sur tous les autres.

FIN.

Note. Ce précis de Géométrie descriptive est suivi de quelques mémoires où la Géométrie descriptive est employée pour rechercher et démontrer diverses propriétés de l'étendue.