This page intentionally left blank.

IX. — *Transformation du principe des moments en celui des vitesses virtuelles, et note sur une construction géométrique de la surface d'élasticité.*

PAR

J. B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

Définition du moment virtuel d'une force. — Si, sans changer la position d'une force, on fait décrire à son point d'application un chemin infiniment petit et par suite rectiligne, le produit de la force par la projection de ce chemin sur la direction primitive de cette force s'appelle moment virtuel de la force proposée.

Le moment virtuel est considéré comme positif ou négatif, selon que la projection tombe sur la force même ou sur son prolongement. Cela posé, le principe des vitesses virtuelles peut s'énoncer de la manière suivante :

Énoncé du principe des vitesses virtuelles. — Si un système de forces appliquées à des points matériels invariablement liés entre eux est en équilibre et que, laissant les forces dans leurs positions, on imprime au système des points matériels un mouvement infiniment petit qui ne détruise pas la liaison de ces points, la somme des moments virtuels de toutes ces forces sera nulle.

Nous allons démontrer, pour des forces situées dans un même plan, que ce principe n'est qu'une transformation de celui des moments ordinaires, et nous indiquerons la démonstration pour des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.

Supposons d'abord que le mouvement imprimé au système des points matériels soit un mouvement de rotation autour d'un centre quelconque O et que le mouvement soit assez petit pour que les arcs décrits par les points d'application des forces puissent être considérés comme de petites lignes droites ; représentons par

P, P', P'', etc. les forces données ;
m, m', m'', etc. les points d'application des forces ;
r, r', r'', etc. les rayons vecteurs des points d'application par rapport au centre O ;
b, b', b'', etc. les bras de leviers des forces par rapport au centre O ;
α, α', α'', etc. les angles que font les bras de levier avec les rayons vecteurs.

Puisque les forces sont en équilibre, la somme de leurs moments par rapport au centre O est nulle et l'on aura

$$Pb+P'b'+P''b''+\text{etc.}=o\,, \ldots\ \text{ou}\ \Sigma Pb=o\ldots\ (1)$$

or $b=r\cos\alpha$, $b'=r'\cos\alpha'$, $b''=r''\cos\alpha''$, etc.

Avec ces valeurs l'équation (1) devient

$$Pr\cos\alpha+P'r'\cos\alpha'+P''r''\cos\alpha''+\text{etc.}=o,\ldots\ \text{ou}\ \Sigma Pr\cos\alpha=o\ldots\ (2)$$

Faisons tourner maintenant le système des points m, m', m'', etc. d'une quantité infiniment petite autour du centre O ; dans ce mouvement ces divers points décriront des arcs semblables, qu'on pourra considérer comme de petites lignes droites, et les rayons vecteurs de ces points décriront des angles au centre égaux.

En désignant par
e, e', e'', etc. les arcs semblables ou chemins décrits par les points d'application m, m', m'', etc. ;
par ω l'angle au centre que décrit chaque rayon vecteur, on aura

$$e=r\omega\,,\quad e'=r'\omega\,,\quad e''=r''\omega\,, \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), après l'avoir au préalable multipliée par ω, on aura

$$Pe\cos\alpha+P'e'\cos\alpha'+P''e''\cos\alpha''+\text{etc.}=o\ldots\ \text{ou}\ \Sigma Pe\cos\alpha=o\ldots\ (3).$$

Dans cette équation, α, α', α'', etc. sont les angles que les bras de levier des diverses forces font respectivement avec les rayons vecteurs des points d'application des mêmes forces. Or ces angles sont respectivement égaux à ceux que font les forces avec les arcs décrits par leurs points d'application ; en effet, la force P est perpendiculaire au bras de levier b, et l'arc e est perpendiculaire au rayon vecteur r ; donc l'angle $\widehat{Pe}=\widehat{br}$, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'après cela, $e\cos\alpha$ est la projection de l'arc e sur la direction primitive de la force P ; $e'\cos\alpha'$ la projection de l'arc e' sur la force P', et ainsi de suite.

Si donc nous représentons par
ε, ε', ε'', etc. les projections respectives des arcs e, e', e'', etc., sur

P, P′, P″, etc. ; l'équation (3) deviendra

$$P\varepsilon + P'\varepsilon' + P''\varepsilon'' + \text{etc.} = o\,,\ \ldots\ \text{ou}\ \Sigma P\varepsilon = o\ \ldots\ (4)$$

ce qui est précisément l'équation du principe des vitesses virtuelles.

Dans cette équation, les signes des moments virtuels des forces sont les mêmes que ceux des moments ordinaires. Or il est facile de s'assurer que, pour deux forces dont les moments ordinaires sont de signes contraires, si la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'une tombe sur cette force, la projection de l'arc décrit par le point d'application de l'autre tombera sur le prolongement de cette autre force ; et c'est ce qui confirme la règle énoncée pour les signes à donner aux moments virtuels des diverses forces.

Pour que la démonstration que nous venons de donner de la transformation du principe des moments en celui des vitesses virtuelles soit générale, il suffira de prouver qu'en faisant mouvoir, d'une quantité infiniment petite, un polygone dans son plan, et cela d'une manière quelconque, les chemins décrits par les sommets de ce polygone seront respectivement les mêmes que ceux que l'on peut faire d'écrire aux mêmes sommets par la rotation du polygone autour d'un certain point. Cette belle propriété, que l'on doit à M. Chasles, se déduit comme corollaire d'un théorême de géométrie , que l'on peut énoncer et démontrer comme suit :

Deux polygones égaux et non symétriques, situés dans un même plan et placés d'une manière quelconque, l'un par rapport à l'autre, étant donnés, il existe toujours dans ce plan un point autour duquel faisant tourner le premier polygone supposé invariablement lié à ce point, on parvient à le faire coïncider avec le second.

Pour établir cette propriété, remarquons d'abord que, pour faire coïncider deux polygones égaux non symétriques, il suffit qu'un côté quelconque du premier vienne se placer sur son égal du second, de manière que les extrémités homologues coïncident. D'après cela pour démontrer le théorême énoncé, il suffit de prouver qu'étant données deux droites égales ab, $a'b'$, situées d'une manière quelconque dans un même plan, on peut toujours par un mouvement de rotation de la première autour d'un certain point, supposé invariablement lié à cette première, parvenir à la faire coïncider avec la seconde, de manière que a tombe en a' et b en b'.

Pour cela tirons les droites auxiliaires aa', bb' et par leurs milieux élevons les perpendiculaires p et p' ; je dis que le point c intersection de ces deux perpendiculaires sera le centre de rotation demandé.

En effet, les deux triangles abc, $a'b'c$, qui ont un sommet commun c, sont égaux ; car ab est donné égal à $a'b'$, et il résulte des constructions, que $ca=ca'$ et que $cb=cb'$. Or, deux triangles égaux qui ont un sommet homologue commun (ici le point c), peuvent être superposés par une rotation de l'un d'eux autour du sommet commun ; mais les deux triangles abc, $a'b'c$ coïncidant les deux côtés égaux ab, $a'b'$ coïncideront. Donc le point c est le centre de rotation cherché, et le théorème se trouve démontré.

Corollaire. — Lorsqu'on imprime un mouvement infiniment petit à un polygone invariable, chaque sommet décrit un petit arc qui coïncide avec sa corde ; et si l'on ramène le polygone dans sa position primitive, par une rotation autour du centre que nous venons de déterminer, l'arc décrit par le même sommet se confondera encore avec la même corde, et par suite les chemins décrits dans les deux cas, par les divers sommets, sont identiquement les mêmes. C'est en quoi consiste précisément la propriété de M. Chasles.

Il est ainsi démontré que le principe des vitesses virtuelles n'est qu'une nouvelle forme du principe des moments, et qu'il ne dit pas plus que ce dernier. Or, si la somme des moments des forces par rapport à un point est nulle, cela signifie que les forces ne peuvent pas faire naître la rotation du système autour de ce point. Donc de même, si la somme des moments virtuels est nulle pour un mouvement infiniment petit imprimé au système, cela signifie que les forces appliquées au système ne peuvent pas faire naître ce mouvement.

La question est donc de savoir combien de mouvements doivent être impossibles pour que tout mouvement le soit, autrement dit, pour qu'il y ait équilibre.

A cet égard, nous avons démontré (Tome 2, pag. 349) qu'il y a équilibre entre des forces situées dans un même plan et appliquées à un système de points invariablement liés entre eux, lorsque la somme de leurs moments est nulle par rapport à chacun de trois points quelconques, non en ligne droite.

Donc nous pouvons dire aussi qu'il y a équilibre pour le même système de forces, lorsque la somme de leurs moments virtuels est nulle pour chacun de trois mouvements quelconques infiniment petits, imprimés au système des points d'application de ces forces ; et encore les centres de rotations des trois mouvements infiniment petits ne devront-ils pas être en ligne droite.

Eu égard à cette dernière circonstance, s'il s'agit, pour un système de forces entièrement libre, d'exprimer qu'il y a équilibre, on ne devra jamais imprimer au système des points matériels trois mouvements infiniment petits de translation pure; car les centres de rotation de ces trois mouvements étant à l'infini, appartiennent à une circonférence d'un rayon infiniment grand et par suite doivent être considérés comme étant en ligne droite.

Le principe des vitesses virtuelles sert donc principalement dans les machines où le nombre des mouvements, qu'on peut imprimer au système, est limité à cause des obstacles fixes, et est toujours moindre que le nombre des conditions d'équilibre exigées en statique pour le cas d'un système libre.

Pour terminer nous allons indiquer comment on peut déduire du principe des moments celui des vitesses virtuelles pour des forces non situées dans un même plan. On démontrera : 1° que le principe des vitesses virtuelles existe pour une rotation infiniment petite autour d'un axe quelconque ; 2° qu'il existe pour une translation infiniment petite le long du même axe, car une translation n'est qu'une rotation autour d'un axe situé à l'infini ; 3° qu'il a lieu pour le mouvement diagonal composé des deux mouvements précédents ; 4° que, lorsqu'on imprime un mouvement quelconque infiniment petit à un solide, le chemin rectiligne décrit par chaque point du solide est la diagonale de deux chemins rectilignes que l'on ferait décrire au même point : l'un par rotation du solide autour de certain axe, l'autre par translation du solide le long du même axe. Cette propriété, que l'on doit encore à M. Chasles, se déduit comme corollaire d'un théorême de géométrie, que l'on peut énoncer et démontrer comme suit.

Deux polyèdres égaux non symétriques étant placés d'une manière quelconque dans l'espace, on peut toujours, en imprimant à l'un des polyèdres deux mouvements, l'un de rotation autour d'un certain axe, l'autre de translation le long du même axe, parvenir à le faire coïncider avec l'autre polyèdre, son égal.

Supposons connue un plan, sur lequel les projections des deux polyèdres égaux sont égales. Le centre, autour du quel il faudra faire tourner sur ce plan l'une de ces projections pour la faire coïncider avec son égale, sera sur ce même plan la projection de l'axe autour duquel devra s'effectuer la rotation et le long duquel devra ensuite s'effectuer la translation de l'un des polyèdres pour le faire coïncider avec l'autre polyèdre son égal.

Pour déterminer le plan de projection ci-dessus, remarquons que les projections de deux polyèdres égaux sont égales sur un plan, du moment que deux triangles homologues égaux, appartenant respectivement à deux faces homologues égales, ont leurs projections sur ce plan égales. Remarquons encore que la projection d'un triangle sur un plan quelconque donné ne change ni de forme ni de grandeur, quand le triangle se meut dans l'espace parallèlement à lui-même, de manière que ses sommets décrivent des droites égales et parallèles. Cela posé,

Désignons par abc, $a'b'c'$ deux triangles homologues égaux appartenant respectivement aux deux polyèdres proposés.

Transportons le triangle $a'b'c'$ parallèlement à lui-même, de manière que le sommet a' décrive la droite aa' et que les sommets b', c' décrivent des droites égales et parallèles à aa'. Le triangle transporté aura actuellement le sommet a de commun avec le triangle abc, et nous le désignerons dans cette nouvelle position par $ab'c'$.

Si dans cette position des deux triangles, nous tirons la droite bb', elle sera la base d'un triangle isoscèle bab'. De même en tirant la droite cc', elle sera la base d'un triangle isoscèle cac' ; et un plan quelconque parallèle aux bases de ces deux triangles isoscèles (1) sera un plan sur lequel les projections des deux triangles abc, $ab'c'$ sont égales, et partant sur lequel les projections des deux triangles abc, $a'b'c'$ sont pareillement égales. C. Q. F. D.

Note sur une construction géométrique de la surface d'élasticité.

L'équation de la surface d'élasticité, à laquelle est arrivé Fresnel, (Mémoire de l'Académie royale des sciences de l'institut de France, tome VII, 1827), est de la forme

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Il est facile de s'assurer que la surface représentée par cette equation est le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur tous les plans tangents à un ellipsoïde ayant pour équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

(1) Les deux côtés d'un triangle isoscèle sont également inclinés sur un plan quelconque mené par la base, ou parallèlement à la base du triangle isoscèle.