MÉMOIRE

SUR

DIVERS LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ,

DÉTERMINÉS

PAR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR

M. J.-B. BRASSEUR,

PROFESSEUR ORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS LIEUX GÉOMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ,

DÉTERMINÉS

PAR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

L'objet de ce mémoire est de déterminer par la géométrie descriptive la nature du lieu géométrique dont les distances de chaque point à deux autres lieux donnés sont dans le rapport constant k; chacun des lieux donnés étant à volonté ou un point, ou une droite, ou un plan.

Ce même sujet a déjà été traité d'une manière simple et élégante pour le cas particulier de $k = 1$, par M. Olivier, dans ses Développements de géométrie descriptive, où il ajoute (page 333) qu'il n'a pu parvenir à déterminer la nature géométrique du lieu dont il s'agit par des considérations de géométrie descriptive pure, lorsque k n'est plus égal à l'unité.

Nous avons pensé qu'il y aurait quelque mérite à traiter une question qu'un savant aussi distingué n'a pas jugée exempte de difficulté, et nous avons l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie le résultat de nos recherches sur ce point.

§ I.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS DE L'ESPACE DONT LES DISTANCES DE CHACUN A DEUX POINTS FIXES SONT DANS LE RAPPORT CONSTANT k.

—

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique, dont les distances de chaque point à deux points fixes sont dans le rapport constant k, est une sphère, qui a son centre sur la droite qui joint ces deux points fixes, et qui coupe cette droite en deux points, extrémités d'un même diamètre, et tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux deux points fixes est égal à k.

Lorsque $k = 1$, le lieu demandé se réduit au plan perpendiculaire élevé par le milieu de la droite qui joint les deux points fixes.

Démonstration. — Il est facile de reconnaître que le lieu cherché ne peut être qu'une surface de révolution autour de la droite qui joint les deux points fixes; il suffira donc de déterminer la nature d'un méridien de la surface; ce qui conduit à la question de géométrie plane : déterminer le lieu de tous les points d'un plan, les distances de chaque point à deux points fixes de ce plan étant dans le rapport constant k.

Par les deux points fixes A et B (*fig.* 5), traçons une circonférence quelconque ABn, et d'un point fixe quelconque C, pris sur le prolongement de la droite AB, menons la tangente Cn. La distance du point de contact n au point fixe C sera donnée par la relation

$$\overline{Cn}^2 = CA \cdot CB;$$

celle-ci montre que cette distance est indépendante du rayon du cercle ABn; si donc on fait varier le cercle ABn, le point de contact n restera sur une même circonférence dont le centre est en C.

D'un autre côté, si l'on tire les deux droites nA, nB, les deux triangles semblables nCA, nCB donnent la proportion :

$$nA : nB = Cn : CB;$$

les deux termes du second rapport de cette proportion étant constants, le premier rapport l'est aussi, et fait voir que les distances du point n, c'est-à-dire, d'un point quelconque de la circonférence C aux deux points fixes A et B, sont toujours dans un même rapport.

Lorsque la valeur de ce rapport est donnée égale à k, alors sur la droite qui joint les deux points fixes, on construira deux points m, m', tels que les distances de chacun aux deux points fixes A et B soient dans le rapport k; la droite mm' sera un diamètre de la circonférence qui satisfait à la définition du lieu géométrique plan qu'il s'agissait de déterminer. Si l'on fait tourner cette circonférence autour de ce diamètre, la surface sphérique engendrée jouira de la propriété que les distances de chacun de ses points aux deux points fixes sont dans le rapport constant k; ce qui était à démontrer.

Corollaire. — En coupant cette sphère par un plan, on déduit la conséquence suivante : si un point se meut dans un plan, de manière que le rapport de ses distances à deux points fixes, situés ou non dans ce plan, reste constant, il décrira une circonférence de cercle.

§ II.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS DE L'ESPACE DONT LES DISTANCES A UN POINT ET A UN PLAN DONNÉS SONT DANS LE RAPPORT CONSTANT k.

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique des points de l'espace, dont les distances respectives à un point et à un plan donnés sont dans le rapport constant k, est une surface de révolution engendrée par une courbe du second degré tournant autour de son grand axe.

Cette courbe a pour foyer le point donné, et pour directrice la droite d'intersection du plan donné avec un plan perpendiculaire mené par le point donné.

La surface sera :

Un ellipsoïde de révolution allongé, si $k < 1$,
Un hyperboloïde de révolution à deux nappes, si $k > 1$,
Un paraboloïde de révolution, si $k = 1$.

Démonstration. — On sait démontrer par la synthèse[1] que le lieu géométrique de tous les points d'un plan, dont les distances à un point et à une droite donnés dans ce plan sont dans le rapport constant k, est une courbe du second degré, savoir :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Une ellipse, si} & k < 1 \\ \text{Une hyperbole, si} & k > 1 \\ \text{Une parabole, si} & k = 1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\varphi).$$

On sait d'ailleurs que le point et la droite donnés sont respectivement un foyer et une directrice de la courbe du second degré et que le grand axe de celle-ci est toujours perpendiculaire à la directrice.

Si donc l'on fait tourner cette courbe du second degré avec sa directrice autour du grand axe, la courbe engendrera une surface de révolution du second degré et sa directrice un plan perpendiculaire à l'axe de révolution; et il est évident que les distances de chaque point de la surface au foyer et à ce plan sont encore dans le rapport constant k; d'où l'on déduit comme réciproque la propriété du lieu demandé.

Corollaire. — Si un point se meut dans un plan donné de manière que le rapport de ses distances à un point et à un plan fixes reste constant, il décrira une courbe du second degré, intersection de ce plan avec la surface de révolution définie plus haut. Cette courbe est toujours une ellipse,

[1] M. Dandelin, colonel du génie, a démontré (*Mémoires de l'Académie*) que la section faite dans un cône de révolution par un plan tangent à deux sphères inscrites à ce cône, est une courbe du second degré ayant pour foyers les deux points de contact. M. Olivier, dans sa *Géométrie descriptive*, a déduit de ce beau théorème que les droites dans lesquelles le plan tangent coupe les plans des cercles de contact des sphères avec le cône sont les directrices de la même courbe.

quand le plan donné rencontre la droite fixe. Si le plan donné est parallèle à la droite fixe, la courbe sera une parabole, si $k=1$; une hyperbole, si $k > 1$ et une ellipse, si $k < 1$.

§ III.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS DE L'ESPACE DONT LES DISTANCES A UN POINT ET A UNE DROITE DONNÉS SONT DANS LE RAPPORT CONSTANT k.

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique des points de l'espace, dont les distances à un point et à une droite sont dans le rapport constant k, est une surface de révolution, engendrée par une courbe du second degré qui tourne autour de son petit axe et qui a respectivement pour foyer et directrice le point et la droite donnés.

La surface sera :

Un ellipsoïde de révolution surbaissé, si $k < 1$,
Un hyperboloïde de révolution à une nappe, si $k > 1$,
Une surface cylindrique projetée sur le plan qui passe par le point et la droite dans une parabole qui a respectivement pour foyer et directrice le point et la droite donnés, si $k=1$.

Démonstration. — Nous ferons d'abord voir que le lieu cherché est une surface de révolution. A cet effet, désignons par D la droite donnée et par P le point donné. Prenons sur la droite un point quelconque C et imaginons la sphère auxiliaire, lieu des points de l'espace dont les distances aux points P et C sont dans le rapport k. Si par le point C nous menons un plan perpendiculaire à la droite D, ce plan coupera la sphère suivant une circonférence de petit cercle, qui appartiendra au lieu cherché, comme il est facile de le voir, si l'on fait attention que les distances des divers points de cette circonférence au point C sont aussi les distances des mêmes points à la droite D.

On aura de la même manière autant de circonférences du lieu cherché que l'on voudra bien considérer de points C sur la droite D : s'il arrivait que le plan, mené par le point C perpendiculairement à la droite D, ne coupât pas la sphère, ce serait une preuve que le lieu cherché ne s'étend pas jusqu'à ce plan.

Pour que ces circonférences, dont les plans sont, par construction, perpendiculaires à la droite D, appartiennent à une surface de révolution, il faut encore que leurs centres se trouvent sur une même droite parallèle à D.

Pour démontrer ce dernier point, remarquons que la parallèle à D, menée par le centre d'une sphère auxiliaire, doit passer par le centre de la circonférence fournie par cette sphère. D'après cela, si les centres de toutes les sphères sont sur une même droite parallèle à D, cette parallèle sera l'axe de révolution de la surface qui nous occupe.

D'abord le centre de la sphère auxiliaire, que nous avons considérée plus haut, se trouve sur la droite PC et par suite dans le plan PD. Soient m et n les points dans lesquels cette droite PC rencontre la sphère, mn sera un diamètre de cette dernière et l'on aura respectivement pour les deux points m et n :

$$mP : mC = k,$$
$$nP : nC = k.$$

Comme le point P est fixe, ces égalités prouvent que tandis que le point C se meut sur la droite D, les points m et n décrivent chacun dans le plan PD, une parallèle à D; donc le point milieu de mn, c'est-à-dire, le centre de la sphère décrit aussi dans le même plan une parallèle à D. Ainsi les centres de toutes les sphères se trouvent dans le plan PD sur une même parallèle à D; cette parallèle est donc l'axe de révolution de la surface.

Faisons voir maintenant qu'un méridien de la surface est une courbe du second degré dont le petit axe coïncide avec l'axe de révolution.

Le plan qui passe par le point P et la droite D, passant aussi par l'axe de révolution, coupe la surface dans un méridien. Les distances de chaque point de ce méridien au point P et à la droite D, devant être dans le rapport constant k, ce méridien est une courbe du second degré ayant respectivement pour foyer et directrice le point P et la droite D; ce sera, d'après la relation (φ) du paragraphe (2),

Une ellipse, si $k < 1$,
Une hyperbole, si $k > 1$,
Une parabole, si $k = 1$.

Puisque D est la directrice, le grand axe de la courbe du second degré coïncidera avec la perpendiculaire abaissée du foyer P sur D, et le petit axe sera parallèle à D et par suite à l'axe de révolution; or, le petit axe de la courbe devra de plus coïncider avec l'axe de révolution de la surface : sans cela, la courbe du second degré, en tournant autour d'une droite qui ne serait pas un de ses axes, engendrerait une surface de révolution qui pourrait être coupée par un plan perpendiculaire à cette droite, suivant deux circonférences de cercles. Mais les considérations, qui ont conduit à conclure que le lieu cherché était composé uniquement d'un système de cercles parallèles, excluent cette hypothèse.

Lorsque $k = 1$, le méridien de la surface de révolution est une parabole qui, tournant autour de son petit axe situé à l'infini, engendre une surface cylindrique projetée dans ce même méridien. On arriverait directement à la même conclusion, en remarquant que les sphères auxiliaires dont nous avons fait usage dans le cas général, se changent en plans dans le cas particulier de $k = 1$.

Corollaire 1. — En coupant par un plan la surface que nous venons de déterminer, on a le corollaire :

Si un point se meut dans un plan de manière que le rapport de ses distances à un point et à une droite fixes, situés ou non dans ce plan, reste toujours égal à k, il décrira une parabole, si $k = 1$; une ellipse, si $k < 1$, et une courbe du second degré dont la nature dépend de la position du plan, si $k > 1$.

Corollaire 2. — Lorsque $k = 1$, on a cet autre corollaire :

La courbe à double courbure, intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution qui ont des rayons égaux, se projette sur le plan, qui passe par le centre de la sphère et l'axe du cylindre, dans une parabole qui a respectivement pour foyer et directrice le centre de la sphère et l'axe du cylindre. La même courbe à double courbure se projette, sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, dans une circonférence de cercle, section droite du cylindre.

Mais cette propriété est plus générale et peut s'énoncer ainsi : toutes les courbes à double courbure, intersections d'une série de sphères concentriques avec une série de cylindres de révolution ayant même axe, pourvu que les sphères et les cylindres aient deux à deux des rayons égaux, se projettent, suivant une même parabole, sur le plan qui passe par le centre de la sphère et l'axe du cylindre. Ce centre et cet axe sont respectivement le foyer et la directrice de la parabole.

§ IV.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DONT LES DISTANCES DE CHAQUE POINT A UNE DROITE ET A UN PLAN DONNÉS SONT DANS LE RAPPORT CONSTANT k.

—

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique dont les distances de chaque point à une droite et à un plan donnés sont dans le rapport constant k, est une surface conique dont le sommet est au point de rencontre de la droite avec le plan. Toute section faite dans cette surface, par un plan perpendiculaire à la droite, est une courbe du second degré qui a pour foyer le point dans lequel le plan perpendiculaire rencontre la droite et pour directrice la droite dans laquelle le plan perpendiculaire rencontre le plan proposé : la courbe sera, en désignant par α l'angle de la droite avec le plan donné :

Une parabole, si $k \cos. \alpha = 1$,
Une ellipse, si $k \cos. \alpha < 1$,
Une hyperbole, si $k \cos. \alpha > 1$.

La section faite dans la surface conique par un plan parallèle au plan proposé est toujours une ellipse.

La surface conique sera de révolution autour de la droite, si celle-ci est perpendiculaire au plan donné.

Enfin la surface conique dégénère en surface cylindrique, si la droite est parallèle au plan.

Démonstration. — Que le lieu cherché est une surface conique, cela est une conséquence du principe suivant : « Si deux droites rencontrent un plan en un même point, les distances d'un point quelconque de la première droite à la seconde et à ce plan sont toujours dans un même rapport. » De là résulte en effet, en désignant par S le point dans lequel la droite donnée rencontre le plan donné, que si m est un point du lieu cherché, tous les points de la droite Sm appartiendront au même lieu; donc le lieu cherché est composé de toutes droites qui passent par le point S, et partant, une surface conique qui a son sommet en S.

En considérant un plan quelconque perpendiculaire à la droite proposée, il coupera celle-ci en un point D, le plan proposé dans une droite T et la surface conique en une courbe qu'il s'agit de déterminer. Si m est un point quelconque de cette courbe, la distance de m à la droite proposée sera mD; et si du même point m nous menons la perpendiculaire P au plan proposé et la perpendiculaire P′ à la droite T, nous aurons d'abord :

$$mD : P = k;$$

D'un autre côté, β désignant l'angle du plan perpendiculaire avec le plan proposé, on a la relation suivante entre P et P′ :

$$P = P' \sin. \beta.$$

Substituant cette valeur de P dans le rapport précédent, il devient :

$$mD : P = k \sin. \beta.$$

En désignant par α l'angle de la droite proposé avec le plan proposé, α sera complément de β, et le rapport précédent se change en

$$mD : P' = k \cos. \alpha.$$

Cette égalité signifie que le rapport des distances du point m au point D et à la droite T est constant et égal a $k \cos \alpha$; le point m appartient donc à une courbe du second degré qui a respectivement pour foyer et directrice le point D et la droite T; cette courbe sera

Une parabole, si $k \cos. \alpha = 1$,
Une ellipse, si $k \cos. \alpha < 1$,
Une hyperbole, si $k \cos. \alpha > 1$.

Ainsi se trouve démontré qu'un plan, perpendiculaire à la droite proposée, coupe la surface conique dans une courbe du second degré qui a pour foyer le point, dans lequel ce plan rencontre la droite proposée, et pour directrice la droite, dans laquelle ce même plan rencontre le plan proposé.

Il nous reste à faire voir que toute section faite dans la surface conique par un plan parallèle au plan proposé est toujours une ellipse.

Pour cela, ayant construit deux droites dont les longueurs d, d' soient dans le rapport constant k, imaginons le cylindre de révolution qui a pour axe la droite proposée et pour rayon d; imaginons également un plan auxiliaire parallèle au plan proposé et qui en soit distant de la quantité d', il est évident que la courbe d'intersection du cylindre avec le plan auxiliaire appartient au lieu cherché. Or, cette courbe est une ellipse; et comme on arrivera à la même conclusion si l'on fait varier ensemble d et d' sans faire varier leur rapport, il s'ensuit que le lieu demandé que nous savons être une surface conique, est composé d'une suite d'ellipses parallèles au plan proposé; ce qui était à démontrer.

En faisant les mêmes raisonnements pour le cas où la droite proposée est perpendiculaire au plan donné, on trouvera que le lieu cherché est une surface conique de révolution autour de la droite, et enfin, si la droite est parallèle au plan proposé, que le lieu demandé est une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite proposée.

Corollaire 1. — Si un point se meut dans un plan donné de manière que le rapport de ses distances à une droite et à un plan fixes soit constant et égal à k, il décrira dans le plan donné une courbe du deuxième degré, intersection de ce plan avec la surface conique examinée plus haut.

Corollaire 2. — Lorsque $k = 1$, l'on a le corollaire suivant : si une sphère variable de rayon se meut dans l'espace, de manière à toucher à la fois une droite et un plan fixes, le centre se mouvra sur une surface conique. Si le centre de la sphère est de plus assujetti à se mouvoir dans un plan donné, alors il décrira une courbe du second degré, intersection de ce plan avec la même surface conique. De là résulte également que l'axe du canal engendré par une sphère variable de rayon, laquelle est assujettie à toucher à la fois une droite et un plan fixes, tandis que son centre doit se mouvoir dans un autre plan donné, est une courbe du second degré.

La courbe décrite par le centre de la sphère est, dans tous les cas, une ellipse, si le plan dans lequel se meut le centre est parallèle au plan fixe; mais alors le rayon de la sphère est évidemment constant, et l'on a cet autre corollaire :

Corollaire 3. — Si une sphère de rayon constant R se meut de manière à toucher à la fois une droite et un plan fixes, le centre décrira une ellipse dans un plan parallèle mené à la distance R du plan fixe.

Cette ellipse, qui se projette dans une circonférence de rayon R, sur un plan perpendiculaire à la droite fixe, est en même temps l'axe du canal engendré par la sphère.

Corollaire 4. — Une droite de longueur R se meut de manière à toujours faire un même angle α avec une droite fixe; si l'une des extrémités de R se meut sur la droite fixe, l'autre extrémité décrira dans un plan fixe une ellipse. En effet, la courbe n'est autre que celle décrite par le centre d'une sphère de rayon R sin. α, laquelle serait assujettie à toucher à la fois la droite fixe et un plan parallèle mené à la distance R sin. α du plan fixe.

§ V.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS DE L'ESPACE DONT LES DISTANCES RESPECTIVES A DEUX DROITES SONT DANS LE RAPPORT CONSTANT k.

—

Premier cas. — *Les deux droites sont parallèles.*

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique dont le rapport des distances de chaque point à deux droites parallèles est constant et égal à k, est une surface cylindrique qui se projette sur un plan perpendiculaire aux deux parallèles, dans une circonférence dont le rapport des distances de chaque point aux deux points de rencontre du plan perpendiculaire avec les deux parallèles est constant et égal à k. Cela est évident et n'exige aucune démonstration.

Corollaire. — Si un point se meut dans un plan, de manière que le rapport de ses distances à deux droites parallèles est constamment égal à k, il décrira dans ce plan une ellipse, intersection de ce plan avec la surface cylindrique de révolution définie plus haut.

Deuxième cas. — *Les deux droites se coupent.*

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique, dont les distances de chaque point à deux droites qui se coupent sont dans le rapport constant k, est une surface conique qui a pour sommet le point d'intersection des deux droites. Cette surface est toujours coupée suivant une ellipse par tout plan parallèle à l'un ou à l'autre des deux plans bissecteurs [1] des angles des deux droites.

Lorsque $k = 1$, le lieu demandé se réduit aux deux plans bissecteurs des angles formés par les deux droites.

[1] Par plans bissecteurs des angles de deux droites, nous entendons deux plans perpendiculaires au plan de ces droites et passant respectivement par les bissectrices de leurs angles.

Démonstration. — Si l'on se donne un point du lieu demandé, c'est-à-dire, un point dont les distances aux deux droites proposées sont dans le rapport constant k, il résulte du principe, que nous allons citer, que la droite qui joint ce point avec le sommet de l'angle des droites proposées appartient au même lieu, et par suite que le lieu cherché est une surface conique dont le sommet coïncide avec celui de l'angle des deux droites. Ce principe est le suivant : « Si trois droites situées ou non dans un même plan, passent par un même point, les distances d'un point quelconque de l'une d'elles aux deux autres sont toujours dans un même rapport. »

Démontrons maintenant que le lieu cherché, qui est une surface conique, est toujours coupé suivant une ellipse par tout plan parallèle à l'un ou l'autre des deux plans bissecteurs des angles formés par les deux droites.

Désignons par D, D′ les deux droites proposées, et, dans leur plan, menons une parallèle quelconque à l'une d'elles, à D, par exemple, et désignons cette parallèle par d. Imaginons aussi la surface cylindrique de révolution dont les distances de chaque point aux deux parallèles D, d sont dans le rapport constant k. Cela fait, les deux plans bissecteurs des angles formés par d et D′ couperont la surface cylindrique dans deux ellipses, qui feront parti du lieu demandé, comme il est facile de s'en convaincre, si l'on fait attention que la distance d'un point quelconque de l'une de ces sections à la droite d est égale à la distance du même point à la droite D′; mais les plans bissecteurs des angles formés par d et D′ sont respectivement parallèles aux plans bissecteurs des angles des deux droites proposées D, D′; et ainsi se trouve établie la propriété énoncée.

Corollaire 1. — La courbe à double courbure, intersection de deux cylindres de révolution, dont les axes se coupent, se trouve sur la surface conique définie plus haut. Cette courbe se réduit à deux ellipses, lorsque les rayons des deux cylindres sont égaux. Cela vient de ce que le lieu des points de l'espace dont chacun est à égale distance des deux droites, se réduit aux deux plans bissecteurs des angles de ces droites.

Corollaire 2. — Si un point se meut dans un plan de manière que le rapport de ses distances à deux droites, qui se coupent, est constamment égal à k, il décrira une courbe du second degré, intersection de ce plan avec la surface conique définie plus haut.

Cette courbe, dont la nature dépend de la position du plan par rapport au cône, sera dans tous les cas une hyperbole, si le plan est parallèle au plan des deux droites, et une ellipse, si le plan est parallèle à l'un des deux plans bissecteurs des angles des deux droites.

Troisième cas. — Les deux droites ne sont pas situées dans un même plan et k est $>$ ou $<$ 1.

Propriété du lieu demandé. — Le lieu géométrique dont les distances de chaque point à deux droites non situées dans un même plan, sont dans le rapport constant k, est un hyperboloïde à une nappe.

Démonstration. — Nous présenterons d'abord la solution de la question proposée pour k, plus grand ou plus petit que l'unité, et nous examinerons à part les modifications que subit cette solution, lorsque k est égal à l'unité.

Par la plus courte distance entre les deux droites proposées, menons deux plans, l'un perpendiculaire à la première droite, l'autre perpendiculaire à la seconde droite. Ces deux plans, étant pris pour plans de projection, feront entre eux un angle supplément de celui des deux droites proposées; chaque droite se projettera en un point sur le plan auquel elle est perpendiculaire, et les perpendiculaires à cette droite se projetteront dans leurs véritables grandeurs sur ce même plan. Ces propriétés sont indépendantes de l'angle que les plans de projection font entre eux, pourvu que l'on projette orthogonalement.

Comme la considération des plans bissecteurs des angles, que font les plans de projection, nous deviendra nécessaire dans le courant de la démonstration, nous conviendrons de les nommer simplement *plans bissecteurs* et de désigner par B celui dont les deux projections de chaque point coïncident, et par B′ celui dont les deux projections de chaque point sont de part et d'autre à égale distance de la ligne de terre. Cela convenu, passons à la représentation des données.

Soit le point D, pris sur la ligne de terre (*fig.* 1), la projection horizontale de la première droite qui est perpendiculaire au plan horizontal de projection, et que nous désignerons par (D).

Soit le point D′, également pris sur la ligne de terre, la projection verticale de la seconde droite qui est perpendiculaire au plan vertical de projection, et que nous désignerons par (D′).

Les données étant représentées de la sorte, si n, n' sont respectivement les projections horizontale et verticale d'un point de l'espace, nD sera la projection horizontale de la distance du point (n, n') à la droite (D), et n'D′ la projection verticale de la distance du même point à la droite (D′); et comme les projections de ces distances sont respectivement égales à ces distances mêmes, il en résulte que, si le point (n, n') appartient au lieu demandé, l'on aura

$$nD : n'D' = k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varphi)$$

et réciproquement, si cette relation a lieu entre les deux projections n, n' d'un point de l'espace, ce point appartiendra au lieu demandé.

Cette considération ramène l'objet de nos recherches à un problème des deux dimensions et nous permet de démontrer que le lieu en question est une surface gauche doublement réglée et partant un paraboloïde ou un hyperboloïde à une nappe.

Ayant décrit la circonférence de cercle $m\ m'$, dont les distances de chaque point aux deux points fixes D, D′ sont dans le rapport constant k, de sorte que l'on a pour un point quelconque a de cette circonférence

$$aD : aD' = mD : mD' = k; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

si l'on considère le cylindre vertical projeté dans cette circonférence, les deux plans bissecteurs B, B′ couperont ce cylindre dans deux ellipses E, E′ qui font partie du lieu demandé.

En effet, soit (a, a) un point de ce cylindre; ce point est situé dans le plan bissecteur B, à cause que ses deux projections coïncident, et il appartient, d'après (φ) au lieu demandé, à cause que l'on a

$$aD : aD' = k.$$

Soit (a, a') (*fig.* 2) un point du même cylindre, mais situé dans le plan bissecteur B', ce qui donne $a\lambda = a'\lambda$; ce point appartiendra au lieu demandé, à cause de la proportion

$$aD : a'D' = k,$$

que l'on déduit du rapport précédent en y remplaçant aD' par son égal $a'D'$.

Les deux ellipses E, E' que nous venons de déterminer, nous permettent de faire voir que le lieu demandé est composé de deux systèmes de droites.

Par le point a (*fig.* 1), qui représente les deux projections d'un point de l'ellipse E, ayant mené na perpendiculaire à aD, et $n'a$ perpendiculaire à aD', je dis que la droite de l'espace, qui a respectivement pour projections horizontale et verticale na et $n'a$, fait partie du lieu cherché. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que, pour un point quelconque (n,n') de cette droite, on ait la relation

$$nD : n'D' = k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Or, les deux triangles nan' et DaD' sont semblables, comme ayant leurs trois côtés respectivement perpendiculaires, et donnent la proportion

$$na : aD = n'a : aD',$$

d'après laquelle les deux triangles rectangles naD, $n'aD'$, dont les hypoténuses ne sont pas tracées sur la figure, sont également semblables et fournissent cette autre proportion, dont le dernier rapport d'après (1) est égal à k,

$$nD : n'D' = aD : aD' = k,$$

laquelle prouve l'exactitude de la relation (2) : donc la droite $(na, n'a)$ appartient au lieu cherché.

Toutes les droites construites d'après le même procédé constituent une surface gauche.

En effet, soient (*fig.* 3) les deux droites quelconques $(na, n'a)$, $(nb, n'b)$, construites comme nous venons de l'indiquer, et supposons que le point n, intersection de leurs projections horizontales, puisse se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre avec le point n', intersection de leurs projections verticales, il en résultera que les deux triangles nan', DaD' sont semblables et donnent

$$na : aD = nn' : DD';$$

que les deux triangles nbn', DbD' sont semblables et donnent

$$nb : bD = nn' : DD'.$$

Ces deux proportions fournissent cette troisième :

$$na : aD = nb : bD,$$

de laquelle résulte que les deux triangles rectangles naD, nbD sont semblables ; et comme ils ont même hypoténuse nD, ils sont égaux, et l'on a

$$na = nb, \text{ et } n'a = n'b,$$

ce qui est impossible, à moins que b ne coïncide avec a, ce qui n'est pas ; donc la supposition que n et n' puissent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, est également impossible, et partant, les deux droites $(na, n'a)$, $(nb, n'b)$ ne sauraient se couper; et comme elles ne peuvent pas non plus être parallèles, elles ne sauraient donc jamais être dans un même plan ; donc, etc.

L'ellipse E' va nous servir pour construire le second système de droites, satisfaisant au lieu demandé.

Soit a, a' (*fig.* 2) les deux projections d'un point quelconque de l'ellipse E′; ayant mené na perpendiculaire à aD et $n'a'$ perpendiculaire à a'D′, je dis que la droite $(na, n'a')$ ayant respectivement pour projections horizontale et verticale na et $n'a'$, appartient au lieu cherché, c'est-à-dire que pour un point quelconque (n, n') de cette droite, on aura toujours la relation

$$nD : n'D' = k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Et, en effet, si l'on mène an'' perpendiculaire à aD′, on pourra considérer $na, n''a$ comme les deux projections horizontale et verticale d'une droite de la surface gauche déterminée plus haut; on aura donc, pour le point (n, n'') de cette droite, l'égalité

$$nD : n''D' = k.$$

Or, d'après la figure, on reconnaît facilement que $n''D' = n'D'$; et en remplaçant $n''D'$ par son égal $n'D'$, l'égalité précédente devient

$$nD : n'D' = k,$$

laquelle coïncidant avec l'équation (4), prouve la validité de cette dernière. Donc la droite $(na, n'a')$ menée par un point de l'ellipse E′ et toutes celles construites d'après la même loi par les différents points de cette courbe, appartiennent au lieu demandé.

Faisons remarquer que l'on passe de la droite $(na, n''a)$ menée par le point (a, a) de l'ellipse E, à la droite $(na, n'a')$ menée par le point (a, a') de l'ellipse E′, en faisant tourner $n''a$ autour de la ligne de terre, comme pour la rabattre en deçà de cette ligne.

Au moyen de cette remarque, on prouvera facilement que deux droites construites d'après la même loi que $(na, n'a')$, et menées par deux points quelconques de l'ellipse E′, ne sont jamais dans un même plan et par suite que la surface formée par toutes ces droites est également gauche.

Il nous reste à faire voir que les deux surfaces gauches que nous venons de déterminer, ne forment qu'une seule et même surface: et pour cela qu'une droite quelconque de la première surface gauche rencontre toujours une droite quelconque de la seconde. Soit (*fig.* 4), $(na, n'a)$ une droite de la première surface gauche et $(nb, n'b')$ une droite de la seconde; je dis que le point n, intersection de leurs projections horizontales, et le point n', intersection de leurs projections verticales, se trouvent toujours sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

En effet, si nn' n'est pas perpendiculaire à la ligne de terre, soit nyx cette perpendiculaire. Cela posé :

Pour le point (n, x) situé sur la droite $(na, n'a)$, on a

$$nD : xD' = k;$$

pour le point (n, y) situé sur la droite $(nb, n'b')$, on a

$$nD : yD' = k.$$

De ces deux égalités on déduit que l'oblique xD' = l'oblique yD'; ce qui n'est possible que dans le cas où x et y seraient situés de part et d'autre et à égale distance de la ligne de terre.

Mais dans ce cas a devrait coïncider avec b, les projections horizontales na, nb se confondraient, les deux droites seraient situées dans un même plan et il n'y aurait pas lieu à démonstration. Ainsi a ne coïncidant pas avec b, il est impossible que la droite nyx soit perpendiculaire à la ligne de terre; donc nn' est cette perpendiculaire, et partant les deux droites $(na, n'a)$, $(nb, n'b')$ se coupent et sont dans un même plan.

Le lieu cherché étant une surface doublement réglée, qui est coupée par les plans B, B′ suivant deux courbes fermées (ellipses), ne peut être qu'un hyperboloïde à une nappe.

Il est facile de s'assurer que la ligne de terre, plus courte distance entre les deux droites (D), (D′), est normale à l'hyperboloïde aux deux points m, m' dans lesquels elle le rencontre.

Corollaire 1. — La courbe à double courbure, intersection de deux cylindres de révolution de rayons différents et ayant respectivement pour axes deux droites non situées dans un même plan, appartient à l'hyperboloïde à une nappe, lieu des points de l'espace dont le rapport des distances respectives aux deux droites est constant et égal à celui des rayons des deux cylindres.

En faisant varier les rayons des deux cylindres, sans faire varier leur rapport, l'ensemble des intersections successives des deux cylindres constituera l'hyperboloïde mentionné.

De là on déduit aussi que le plan mené par les deux perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de l'hyperboloïde sur les deux droites proposées, est un plan normal en ce même point à l'hyperboloïde; car l'une des perpendiculaires est normale au premier cylindre et l'autre au second cylindre; donc leur plan est perpendiculaire à la tangente en ce point à la courbe d'intersection des deux cylindres, et par suite normal à l'hyperboloïde.

Corollaire 2. — Du corollaire précédent résulte cette autre propriété, qui n'a pu être établie jusqu'ici que par l'analyse, mais qui n'a plus qu'un intérêt scientifique dans la théorie des engrenages, depuis le travail de M. Olivier sur cette matière. Cette propriété consiste en ce que de toutes les droites qui s'appuient sur les deux droites proposées, la plus courte distance entre celles-ci est la seule normale à l'hyperboloïde.

En effet, supposons qu'une droite d, s'appuyant à la fois sur les deux droites proposées D, D$'$, soit normale à l'hyperboloïde en un point m. Ayant abaissé du point m deux perpendiculaires p, p' sur les deux droites proposées D, D$'$ respectivement, le plan de ces deux perpendiculaires sera, d'après le corollaire précédent, normal au point m à l'hyperboloïde, et, comme tel, devra renfermer la droite d qui est normale au même point m à l'hyperboloïde. Ainsi, les trois droites p, p' et d, partant du même point m, devront être dans un même plan; or, cela est impossible; car il en résulterait que les deux droites proposées D, D$'$, dont chacune rencontre d et l'une des deux perpendiculaires p, p', seraient dans ce même plan, ce qui est contraire à la définition des deux droites proposées D, D$'$. Donc il est impossible en général qu'une droite qui s'appuie sur les deux droites proposées puisse être normale à l'hyperboloïde. Mais cette impossibilité disparaît, c'est-à-dire que les trois droites p, p' et d pourront être dans un même plan, sans que les deux droites proposées D, D' y soient, lorsque la droite d coïncide avec la plus courte distance entre les deux droites proposées : alors les trois droites p, p', d coïncident; tout plan, passant par d, renfermant nécessairement p et p', sera un plan normal, et partant d sera normal à l'hyperboloïde.

Cette démonstration convient également au paraboloïde hyperbolique dans lequel se convertit l'hyperboloïde que nous venons de déterminer, lorsque $k = 1$.

Corollaire 3. — Si un point se meut dans un plan donné, de manière que ses distances à deux droites non situées dans un même plan, soient dans le rapport constant k, il décrira une courbe du second degré, intersection du plan donné avec l'hyperboloïde à une nappe mentionné.

Troisième cas. — *Les deux droites ne sont pas situées dans un même plan et* k = 1.

Propriété du lieu demandé. — Le lieu des points de l'espace, dont chacun est à égale distance de deux droites non situées dans un même plan, est un paraboloïde hyperbolique droit ayant pour plans directeurs les deux plans bissecteurs [1] des angles formés par ces deux droites.

Démonstration. — La circonférence (*fig.* 6) dont le rapport des distances de chaque point aux deux points D, D' est égal à k, et que nous avons considérée dans le cas précédent, se réduit, pour $k = 1$, à la perpendiculaire $a\lambda$ élevée par le milieu λ de DD'. Le cylindre vertical projeté dans cette circonférence, se réduit donc ici au plan perpendiculaire élevé par le milieu de DD'. Ce plan perpendiculaire, projeté en $a\lambda$, est coupé par les deux plans bissecteurs B,B' en deux droites que nous désignerons par δ, δ'

[1] Par plans bissecteurs des angles de deux droites non situées dans un même plan, nous entendons les deux plans menés par la plus courte distance entre ces droites et sur chacun desquels ces droites sont également inclinées.

et qui correspondent respectivement aux deux ellipses E, E′ du cas précédent. Les génératrices des deux surfaces gauches que l'on construira par le moyen des deux droites δ, δ' seront, ainsi que nous le ferons voir, respectivement parallèles aux deux plans bissecteurs B,B′, et par suite le lieu composé de ces deux surfaces sera un paraboloïde hyperbolique.

En effet, ayant pris sur la droite δ, située dans le plan bissecteur B, le point quelconque (a, a), si l'on mène na perpendiculaire à aD et $n'a$ perpendiculaire à aD′, la droite de l'espace $(na, n'a)$ appartiendra au lieu demandé. Or, les deux projections de cette droite font, chacune, le même angle avec la ligne de terre; donc cette droite et toutes celles construites, d'après la même loi, par les différents points de la droite δ, sont parallèles au plan bissecteur B′. De même, ayant pris sur la droite δ', située dans le plan bissecteur B′, un point quelconque (a, a') (*fig.* 7), on aura toujours $a\lambda = a'\lambda$, et si l'on mène na perpendiculaire à aD, et $n'a'$ perpendiculaire a a'D′, la droite de l'espace $(na, n'a')$ appartiendra au lieu demandé; or, il est facile de s'assurer que les deux projections na, $n'a'$ de cette droite sont parallèles, et par suite que cette droite est parallèle au plan bissecteur B.

Les deux systèmes de droites, qui composent le lieu demandé pour $k = 1$, étant respectivement parallèles aux deux plans bissecteurs B, B′, le lieu demandé est un paraboloïde hyperbolique ayant pour plans directeurs les plans B, B′. Ce paraboloïde est de plus droit, à cause que les deux plans bissecteurs B, B′ sont toujours perpendiculaires entre eux.

Il ne nous reste plus qu'à faire remarquer que les plans bissecteurs B, B′ des angles des plans de projection sont aussi les plans bissecteurs des angles des deux droites proposées.

Corollaire 1. — Deux cylindres de révolution de rayons égaux et ayant respectivement pour axes deux droites non situées dans un même plan, se coupent suivant une courbe qui existe sur le paraboloïde hyperbolique droit, lieu des points de l'espace à égales distances de ces droites.

Corollaire 2. — Si une sphère variable de rayon touche constamment deux droites non situées dans un même plan, le centre se mouvra constamment sur le paraboloïde hyperbolique droit, lieu des points de l'espace à égales distances de ces deux droites.

Corollaire 3. — Si le centre de la sphère est, de plus, assujetti à se mouvoir dans un plan donné, il décrira, dans ce même plan, une parabole ou une hyperbole, selon que le plan est parallèle ou non à la plus courte distance entre les droites proposées. En effet, la courbe décrite ne sera autre que la section faite dans le paraboloïde hyperbolique par le plan donné; et cela étant, il suffit de rappeler, pour reconnaître la nature de la courbe, que la plus courte distance entre les deux droites proposées est l'intersection des deux plans directeurs du paraboloïde hyperbolique.

Corollaire 4. — Le corollaire précédent donne aussi la solution de cette autre question : « déterminer l'axe du canal engendré par une sphère variable de rayon, laquelle est assujettie dans son mouvement à toucher à la fois deux droites données et à avoir son centre constamment dans un plan donné.

Corollaire 5. — Par deux droites non situées dans un même plan, on peut faire passer une infinité d'hyperboloïdes de révolution à une nappe [1].

Les axes de tous ces hyperboloïdes constituent un paraboloïde hyper-

[1] Si en un point quelconque de l'espace on construit un triangle isocèle dont les côtés égaux soient respectivement parallèles aux deux droites proposées, les deux côtés de ce triangle isocèle, et par suite les deux droites proposées, seront inclinées également sur chacun des plans, en nombre infini, que l'on peut conduire par la base de ce triangle isocèle.

Or, lorsque deux droites, non situées dans un même plan, sont inclinées également sur un plan, elles appartiennent toutes deux à un même hyperboloïde de révolution à une nappe, dont l'axe est perpendiculaire à ce plan et qui jouit de la propriété d'avoir chacun de ses points à égale distance de ces deux droites.

En considérant un plan quelconque sur lequel les droites proposées ont la même inclinaison, comme plan horizontal, si, après avoir construit deux horizontales, dont chacune s'appuie à la fois sur les deux droites, on élève par le milieu de chaque horizontale un plan perpendiculaire, qui sera vertical : l'intersection de ces deux plans verticaux sera l'axe de l'hyperboloïde passant par ces deux droites.

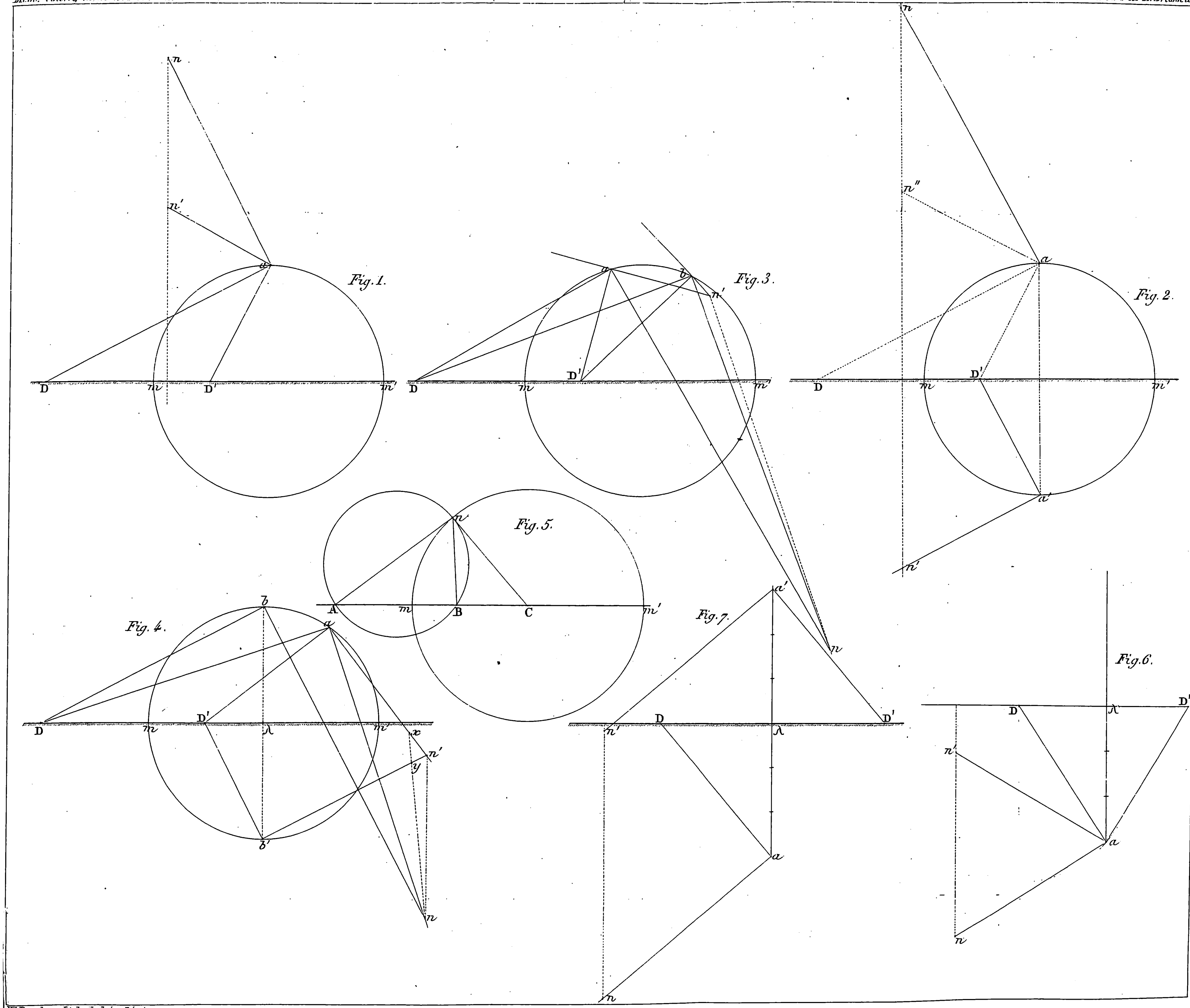
bolique droit, lieu des points de l'espace dont chacun est à égale distance de ces droites. Cela résulte de ce qu'un point quelconque de l'axe d'un hyperboloïde à une nappe est à égale distance de deux génératrices rectilignes quelconques de cet hyperboloïde.

CONCLUSIONS.

Le lieu géométrique dont les distances de chaque point à deux autres lieux donnés sont dans le rapport constant k, chacun des lieux donnés étant à volonté ou un point, ou une droite, ou un plan, est une surface du second degré.

Le lieu géométrique plan dont les distances de chaque point aux mêmes lieux donnés sont dans le rapport constant k, est une courbe du second degré.

FIN.



Vᵉ Degobert, Lith. de l'Académie.