This page intentionally left blank.

## VII. *Sur la double génération des surfaces du second degré par le mouvement d'un cercle*,

par M. J. B. BRASSEUR,

Professeur de géométrie descriptive et de mécanique appliquée à l'Université de Liége, etc.

(*Planche 4*).

Je me propose de traiter, d'une manière élémentaire, la double génération des surfaces du second degré par le mouvement d'un cercle variable de rayon et de déduire de cette génération quelques propriétés simples, qui mettent en état de résoudre par la géométrie descriptive les questions qui ont rapport aux plans tangents à ces surfaces ainsi qu'à quelques intersections. Je ne suppose connues que les notions les plus simples de la Géométrie analytique plane.

### PRINCIPES PRÉLIMINAIRES.

1. Principe. — *Si deux droites de l'espace, faisant chacune le même angle avec le plan horizontal, se coupent mutuellement en deux parties de manière, que le produit des deux parties de l'une égale le produit des deux parties de l'autre, la même relation existera entre les projections horizontales de ces mêmes parties.*

*Démonstration.* — Désignons par $(a)$, $(b)$ les deux parties de la première droite et par $a$, $b$ les projections de ces mêmes parties. Désignons de même par $(a')$, $(b')$ les deux parties de la seconde droite et par $a'$, $b'$ les projections de ces mêmes parties.

On donne : $(a) \times (b) = (a') \times (b')$ .... (1)

Il faut prouver que $a \times b = a' \times b'$ .... (2)

Or si $\alpha$ est l'angle que chacune des deux droites fait avec le plan horizontal, il suffira de multiplier les deux membres de l'équation (1) par $\cos^2\alpha$ pour la faire coïncider avec l'équation (2).

2. Réciproquement. — *Si deux droites de l'espace, faisant chacune le même angle avec le plan horizontal, se coupent mutuellement en deux parties, de manière que le produit des projections des deux parties de la première égale le produit des projections des deux parties de la seconde, la même relation existera entre les parties de ces droites dans l'espace.*

*Démonstration.* — Dans le cas actuel l'équation (2) est donnée et il s'agit de prouver l'équation (1). En désignant par $\alpha$ l'angle que chaque droite fait dans l'espace avec le plan horizontal, il suffira de diviser les deux membres de l'équation (2) par $\cos^2 \alpha$ pour en déduire l'équation (1) cherchée.

3. *Remarque.*—Nous remarquerons que deux droites qui se coupent dans un plan de l'espace feront des angles égaux avec le plan horizontal, lorsqu'elles font chacune le même angle avec une horizontale ou avec une ligne de plus grande pente de ce plan; ou bien, lorsque les projections de ces droites font le même angle avec la projection d'une horizontale ou avec la projection d'une ligne de plus grande pente de ce plan.

4. Définition. — ***Dans une courbe du second degré nous nommerons cordes anti-parallèles, deux cordes qui sans être parallèles, font chacune les mêmes angles avec un même axe, ou diamètre principal, de la courbe***

5. Principe. — ***Si deux cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré se coupent mutuellement en deux parties, le produit des deux parties de la première est égal au produit des deux parties de la seconde.***

*Démonstration.* — Cette propriété qui, à ma connaissance n'a pas encore été énoncée, je vais la démontrer pour le cas de l'ellipse qui peut être considerée comme la projection orthogonale d'un certain cercle de l'espace.

Lorsqu'un cercle se projette dans une ellipse, le diamètre horizontal du cercle se projette dans le grand axe, et le diamètre perpendiculaire au précédent, c'est-à-dire, le diamètre de plus grande pente se projette dans le petit axe de l'ellipse. Cela étant, deux cordes quelconques anti-parallèles de l'ellipse seront les projections de deux cordes du cercle, celles-ci faisant chacune, d'après la remarque (3), un même angle avec le plan de projection, ici plan de l'ellipse ; et puisque dans le cercle les deux cordes se coupent mutuellement en deux parties de manière que le produit des deux parties la première égale le produit des deux parties de la seconde, il suit d'après (1) que la même propriété existe pour deux cordes anti-parallèles de l'ellipse.

Cette propriété se démontre de la même manière pour les autres courbes du second degré, en les considérant comme projections centrales du cercle.

Voici la réciproque que nous laissons à démontrer:

Réciproque. — ***Deux cordes d'une courbe du second degré qui se coupent mutuellement en deux parties, de manière que le produit des*** *deux parties de l'une égale le produit des deux parties de l'autre, sont deux cordes anti-parallèles.*

On démontrerait de la même manière les deux théorèmes (6 et 7) que voici (ainsi que leurs réciproques) :

6. Principe. — *Si d'un point donné hors d'une courbe du second degré on mène deux sécantes anti-parallèles, c'est-à-dire, faisant chacune un même angle avec un même axe de la courbe, le produit de la première sécante entière par sa partie extérieure sera égal au produit de la seconde sécante entière par sa partie extérieure.*

7. Principe. — *Si d'un point donné hors d'une courbe du second degré on mène une tangente et une sécante anti-parallèles, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

8. Principe. — *Par les extrémités de deux cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré, on peut toujours faire passer une circonférence de cercle; mais par les extrémités de deux cordes parallèles, qui ne sont pas des cordes principales, on ne saurait jamais faire passer une circonférence.*

*Démonstration.* — La première partie de cette proposition est vraie, soit que les deux cordes anti-parallèles se coupent dans l'intérieur ou que prolongées elles se coupent hors de la courbe du second degré; ce que l'on démontre facilement en menant une circonférence par trois des quatre extrémités et en prouvant, au moyen de (5 et 6), que cette circonférence doit nécessairement passer par la quatrième extrémité. La seconde partie de la proposition est trop facile à établir pour devoir nous y arrêter.

En se référant aux réciqroques des propriétés énoncées aux numéros (5 et 6) on établira sans peine la suivante :

9. Principe. — *Si une circonférence de cercle coupe une courbe du second degré en quatre points, deux côtés opposés quelconques du quadrilatère qui a pour sommets ces quatre points, ou bien, les deux diagonales de ce quadrilatère seront deux cordes anti-parallèles.*

10. Principe. — *Si par différents points d'une même tangente à une courbe du second degré on mène des sécantes parallèles, le rapport entre le produit d'une sécante entière par sa partie extérieure, et entre le carré de la tangente comptée depuis le point où elle rencontre cette sécante jusqu'au point de contact, sera toujours constant.*

Cet énoncé doit être modifié de la manière suivante pour l'hyperbole, dans le cas où les sécantes rencontrent les deux branches de cette courbe :

*Si par tous les points d'une tangente à une hyperbole on mène des cordes parallèles comprises entre les deux branches de la courbe; le rapport du produit des deux segments que la tangente détermine sur une corde quelconque au carré de la tangente comptée depuis le point où elle rencontre cette corde jusqu'au point de contact, sera toujours constant.*

*Démonstration.*—Nous nous contenterons d'indiquer, que le principe énoncé est évident pour le cas du cercle et qu'on l'étend très-facilement aux autres courbes du second degré en considérant l'ellipse comme projection orthogonale, la parabole et l'hyperbole comme projections centrales du cercle.

## DOUBLE GÉNÉRATION DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

11. Deux diamètres égaux d'une courbe du second degré sont deux diamètres anti-parallèles et les cordes respectivement conjuguées à deux diamètres égaux constituent deux systèmes de cordes anti-parallèles. Cela posé, je dis que

12. Double génération. —*Les deux séries de circonférences de cercles, qui ont respectivement pour diamètres et pour projections deux systèmes de cordes anti-parallèles d'une courbe du second degré, constituent identiquement une même surface.*

13. Autrement. — *Si une circonférence de cercle variable de rayon, qui s'appuie sur une courbe du second degré prise pour directrice, se meut de manière que son centre parcourt l'un ou l'autre de deux diamètres égaux de la directrice et que son plan toujours perpendiculaire au plan de la directrice reste parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre, cette circonférence engendrera dans les deux cas identiquement la même surface.*

*Démonstration.* — Pour prouver que les deux séries de circonférences en question constituent identiquement la même surface, il suffit de prouver que deux circonférences se coupent dans l'espace, lorsqu'elles ont respectivement pour diamètres et pour projections deux cordes anti-parallèles qui se coupent dans une courbe du second degré.

Soient (*fig.* 1) $ab$, $a'b'$ deux cordes quelconques anti-parallèles de l'ellipse $aa'bb'$ se coupant au point $m$, je dis que les deux circonférences qui ont respectivement pour diamètres et pour projections ces deux cordes, se rencontrent dans l'espace au point projeté en $m$.

Soit $h$ la hauteur du point $(m)$ considéré comme appartenant à la circonférence $(ab)$, il viendra $h^2 = ma \times mb$.

De même, si $h'$ est la hauteur du point $(m)$ considéré comme appartenant à la circonférence $(a'b')$, il viendra également $h'^2 = ma' \times mb'$; or, les cordes $ab$ et $a'b'$ étant anti-parallèles, on a d'après (5) $ma \times mb = ma' \times mb'$; donc aussi $h^2 = h'^2$ et $h = h'$. Donc la verticale élevée au point $m$ rencontre les deux circonférences au même point, et par conséquent, ces deux circonférences se coupent.

14. Les surfaces, construites d'après la définition précédente, sont des surfaces du second degré (*), ce que nous démontrerons, plus loin, en prouvant qu'une droite ne peut les rencontrer en plus de deux points chacune.

15. *Directrice.*— La courbe quelconque du second degré, qui sert à construire une surface du second degré, sera nommée directrice, et son plan sera toujours pris pour plan horizontal de projection, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

16. *Lignes des centres.*— Les deux diamètres égaux respectivement conjugués aux deux systèmes de cordes anti-parallèles seront nommés lignes des centres, parce qu'en effet les centres des deux séries de circonférences se trouvent respectivement sur ces deux diamètres.

17. *Ombilics.*—Les extrémités des lignes des centres sont précisément les points que Monge a nommés les ombilics de la surface.

18. *Plans directeurs.*—Les deux plans verticaux, auxquels les plans des deux séries de circonférences sont respectivement parallèles, seront nommés plans directeurs.

19. Deux circonférences quelconques d'une même série seront nommées indifféremment génératrices circulaires, ou sections circulaires, parallèles; et deux circonférences quelconques appartenant respectivement aux deux séries seront dites génératrices circulaires, ou sections circulaires, anti-parallèles.

20. De ce qui précède, il résulte qu'une surface du second degré est entièrement définie : 1° par sa directrice et l'une de ses deux lignes des centres ; 2° par sa directrice et par la direction des cordes conjuguées à l'une des deux lignes des centres, c'est-à-dire, par sa directrice et la projection de l'un de ses deux plans directeurs.

Lorsque, dans le courant des démonstrations qui vont suivre, nous parlerons d'une ligne des centres, d'un plan directeur et de génératrices

(*) On trouve au Musée de l'Université l'ellipsoïde, le paraboloïde elliptique et l'hyperboloïde à une nappe que j'ai fait exécuter d'après cette définition.

circulaires, il faudra bien comprendre que ces trois éléments ont rapport à la même génération, c'est-à-dire, qu'il s'agit de génératrices circulaires parallèles à ce plan directeur et ayant leurs centres sur cette ligne des centres.

## Dénominations et propriétés des surfaces du second degré.

21. Une surface du second degré tire son nom principal de celui de sa directrice ; ce sera :

22. *Un ellipsoïde*, si la directrice est une ellipse ;

23. *Un paraboloïde elliptique* si la directrice est une parabole ;

24. *Un hyperboloïde à deux ou à une nappe*, selon que, la directrice étant une hyperbole, les deux lignes des centres rencontrent ou ne rencontrent pas les deux branches de l'hyperbole ;

25. *Un cône oblique à base circulaire*, si la directrice est le système de deux droites qui se coupent. Nous remarquerons que l'axe d'un système de deux droites qui se coupent divise en deux également l'angle formé par ces droites ;

26. *Un cylindre oblique à base circulaire*, si la directrice est le système de deux droites parallèles. Nous remarquerons que l'axe d'un système de deux droites parallèles, est une droite située dans le plan et à égale distance des deux proposées.

27. *Remarque.*—Toutes les surfaces du second degré deviennent de révolution si les deux lignes des centres coïncident avec l'un ou l'autre axe de la directrice.

28. Définition.—***Nous nommerons section méridienne, ou simplement méridien, toute section faite dans une surface du second degré par un plan passant par une ligne des centres.***

29. Propriété. — ***Toute section méridienne d'une surface du second degré est une courbe de même nature que la directrice de la surface.***

*Démonstration.*—Remarquons d'abord que deux plans quelconques, menés par une ligne des centres, coupent une même génératrice circulaire quelconque suivant deux diamètres égaux entre eux et conjugués à la ligne des centres, c'est-à-dire, ayant tous deux leur point milieu commun sur cette ligne. Cela posé :

Le plan sécant, en ce qu'il passe par la ligne des centres, coupe toutes les génératrices circulaires chacune suivant un diamètre ; et tous ces diamètres parallèles entre eux constituent pour la section un système de cordes conjuguées à la ligne des centres.

De même, le plan de la directrice coupe aussi la même série de génératrices circulaires chacune suivant un diamètre, et tous ces diamètres parallèles entre eux forment également pour la directrice un système de cordes conjuguées à la même ligne des centres.

Mais chaque corde de la section, d'après la remarque faite plus haut, a son égale dans la directrice, et cette corde et son égale rencontrent la ligne des centres au même point; d'où il suit que la seule différence qu'il y a entre ces deux systèmes de cordes, c'est que les cordes dans la section sont différemment inclinées, par rapport à la ligne des centres, que dans la directrice. Donc la section et la directrice sont, comme on sait par la géométrie analytique, des courbes de même nature.

30. *Rabattement d'un méridien.*—Pour rabattre, dans le plan de la directrice, la section faite dans une surface du second degré par un plan passant par une ligne des centres, cette dernière étant prise pour charnière : il suffit de rabattre une corde quelconque de la section (corde conjuguée à la ligne des centres), et de faire tourner toutes les cordes de la directrice conjuguées à la ligne des centres chacune autour de son point milieu jusqu'à ce qu'elles soient parallèles à la corde rabattue.

31. Propriété. — *Toute section méridienne d'une surface du second degré peut servir de nouvelle directrice pour l'une des deux générations, dont la surface est susceptible par le mouvement d'un cercle.*

*Démonstration.*—Comme un plan quelconque, passant par une ligne des centres, coupe chacune des génératrices circulaires qui ont leurs centres sur cette ligne, suivant un diamètre, et que tous ces diamètres parallèles entre eux constituent un système de cordes conjuguées à la ligne des centres; il suit réciproquement que, si dans une section méridienne d'une surface du second degré on construit toutes les cordes conjuguées à la ligne des centres, ces cordes seront toujours les diamètres des diverses génératrices circulaires dont la surface est composée ; seulement, le plan directeur ou ce qui revient au même les plans des génératrices seront inclinés ici par rapport au plan de la section, tandis qu'ils sont perpendiculaires au plan de la directrice.

32. Une surface du second degré est donc encore déterminée par une ligne des centres, en prenant pour directrice une section méridienne passant par cette ligne, si de plus on donne l'inclinaison du plan directeur sur le plan de la section. Delà le corollaire suivant :

33. *Si une circonférence de cercle variable de rayon, qui s'appuie sur une courbe de second degré prise pour directrice, se meut de manière que son centre parcoure un diamètre quelconque de la directrice et que son*

***plan, constamment incliné d'une même quantité sur le plan de la directrice, reste toujours parallèle aux cordes conjuguées à ce diamètre, cette circonférence engendrera une surface du second degré.***

34. Lorsqu'une section méridienne d'une surface du second degré est prise pour nouvelle directrice, nous la nommerons *directrice oblique*, afin de la distinguer de la directrice unique considérée jusqu'ici, que nous nommerons *directrice principale* (laquelle se réduit aux deux *arêtes principales* pour le cylindre ou le cône).

35. Une surface du second degré admet donc, pour une même génération, une infinité de directrices planes; mais de toutes ces directrices il n'y en a qu'une, la directrice principale, qui puisse servir à la double génération, parce que c'est la seule qui passe par les deux lignes des centres et qui, par suite, coupe les deux séries de génératrices circulaires de la surface. A cette occasion nous ferons la remarque générale : lorsqu'une surface a été engendrée par une certaine génératrice et un certain nombre de directrices; toute courbe, quelle qu'elle soit, qui coupe toutes les positions de la génératrice, peut remplacer l'une des anciennes directrices et servir avec les autres pour engendrer la même surface, par le moyen de la même génératrice.

36. Une surface du second degré étant donnée par une directrice oblique, une ligne des centres et l'inclinaison du plan directeur sur le plan de la directrice, ce qui permet de construire une série de génératrices circulaires; si l'on veut construire l'autre série, il faudra remonter à la directrice principale, en déterminant la section faite dans la surface par un plan mené par la ligne des centres perpendiculairement au plan directeur, ou perpendiculairement à une génératrice circulaire quelconque. De là résulte que :

37. *Lorsque deux surfaces du second degré ont une ligne des centres commune et même plan directeur, les plans de leurs directrices principales coïncident*; car par cette ligne on ne peut mener qu'un seul plan perpendiculaire au plan directeur commun.

38. Propriété. — *Dans toute surface du second degré, deux génératrices circulaires anti-parallèles quelconques sont toujours situées sur une même sphère, qui n'a d'autres points communs avec la surface que ceux de ces deux génératrices, et dont le centre est dans le plan de la directrice principale; mais deux génératrices circulaires parallèles ne peuvent jamais se trouver sur une même sphère.*

*Démonstration.*—Deux génératrices circulaires quelconques anti-parallèles se projettent sur le plan de la directrice principale dans deux cordes anti-parallèles, et la circonférence, que l'on peut toujours faire passer par les extrémités de ces deux cordes anti-parallèles (8), sera évidemment un grand cercle de la sphère, sur laquelle les deux génératrices circulaires seront situées. Que deux génératrices circulaires parallèles ne puissent se trouver sur une même sphère, cela résulte de la seconde proposition énoncée au numéro (8).

Pour prouver que la sphère n'a d'autres points communs avec la surface que ceux des deux génératrices circulaires, on coupera la surface et la sphère par des plans respectivement parallèles aux deux plans directeurs et l'on verra que les deux sections circulaires faites par un même plan, l'une dans la sphère, l'autre dans la surface proposée, ne se coupent pas, ou bien doivent se couper sur l'une des deux génératrices circulaires anti-parallèles proposées.

On déduira sans peine, en se référant au numéro (9), le corollaire énoncé ci-après.

39. Propriété, corol.— *Une sphère qui passe par une génératrice circulaire d'une surface du second degré ne peut couper de nouveau la surface que dans une génératrice circulaire anti-parallèle.*

40. Centre. — *Le centre de la directrice d'une surface du second degré est aussi le centre de cette surface, c'est-à-dire que le milieu de toute droite menée par le centre de la directrice et terminée de part et d'autre à la surface coïncide avec ce centre.*

*Démonstration.* — Une ligne des centres est un diamètre commun à tous les méridiens qui passent par cette ligne; les centres de tous ces méridiens coïncident donc avec celui de la directrice.

Or, toute droite, menée par le centre de la directrice et terminée de part et d'autre à la surface, est un diamètre du méridien dont le plan passe par cette droite et l'une des lignes de centres. Donc, le milieu de cette droite coïncide avec le centre de la directrice. Donc, etc.

41. *Autrement.* — On peut démontrer directement cette proposition en prouvant qu'une droite qui joint un point quelconque de la surface avec le centre de la directrice étant prolongée d'une quantité égale à elle-même, l'extrémité de la droite ainsi prolongée se trouve sur la surface.

Soient (fig. 6) l'ellipse $aba'b'$ la directrice principale de la surface, $c$ le centre de la directrice et $ll'$ la ligne des centres.

Soit $m$ la projection d'un point quelconque de la surface, $cm$ sera la projection de la droite qui unit ce point avec le centre de la directrice. En prolongeant $cm$ d'une quantité $cm' = cm$ ; $cm'$ sera la projection de la droite prolongée d'une quantité égale à elle-même si les hauteurs verticales des deux points $(m)$, $(m')$ situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan de projection sont égales.

Les deux cordes parallèles $ab$, $a'b'$ conjuguées à la ligne des centres et menées par $m$ et $m'$ sont les projections des deux génératrices circulaires.

Cela posé :

Le point ($m$) appartenant à la surface se trouvera sur la génératrice circulaire ($ab$) et en désignant par $h$ sa hauteur il viendra $h^2 = am \times bm$; pour que le point($m'$) soit sur la surface, il faut qu'il se trouve sur la génératrice circulaire ($a'b'$) et pour cela que l'on ait $h'^2 = a'm' \times b'm'$, $h'$ étant la hauteur du point ($m'$). Maintenant il reste à prouver que $h = h'$ c'est-à-dire, que $a'm' \times b'm' = am \times bm$.

A cause de $cm = cm'$, les deux cordes parallèles $ab$, $a'b'$ sont égales, et les deux triangles $t$, $t'$ égaux : d'où l'on déduit sans peine que les deux segments $am$, $bm$ sont respectivement égaux aux deux segments $a'm$, $b'm$ et par suite que $a'm' \times b'm' = am \times bm$. Donc etc.

En nommant diamètre d'une surface du second degré, toute droite menée par le centre et terminée de part et d'autre à la surface, on déduit de la démonstration précédente le corollaire que voici :

42. Corollaire. — *Les deux génératrices circulaires parallèles qui passent par les extrémités d'un diamètre sont égales.*

43. Plans principaux. — *Dans toute surface du second degré, le plan de la directrice principale et les plans verticaux projetés dans les axes de la directrice sont des plans principaux, c'est-à-dire, que chacun de ces plans divise en deux également toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires.*

*Démonstration.* — Par un point quelconque de la surface nous mènerons à l'un de ces plans une perpendiculaire que nous prolongerons d'une quantité égale à elle-même, et il suffira de démontrer que l'extrémité de la perpendiculaire ainsi prolongée se trouve sur la surface. De cette manière la démonstration sera générale, car il sera prouvé qu'une droite ne peut rencontrer une surface du second degré en plus de deux points. (Même observation à faire au numéro 41).

Soient (fig. 10) l'ellipse $abb'a'$ la directrice principale de la surface ; les cordes anti-parallèles $ab$, $a'b'$, les projections de deux génératrices circulaires anti-parallèles ; les axes $xx$, $yy$ de la directrice, les projections de deux plans verticaux, et $m$ la projection d'un point quelconque de la surface.

Cela posé, $mp$ perpendiculaire à $yy$ sera la projection de la perpendiculaire menée du point ($m$) au plan vertical $yy$, et $pm' = pm$ sera la projection de cette perpendiculaire prolongée d'une quantité égale à elle-même. Les deux cordes anti-parallèles $ab$, $a'b'$ menées par $m$ et $m'$ seront les projections de deux génératrices circulaires anti-parallèles de la surface.

Puisque le point $(m)$ est sur la surface, il est sur la génératrice circulaire $(ab)$ et l'on a $h^2 = am \times bm$, $h$ étant la hauteur du point $(m)$. Pour que le point $(m')$ soit sur la surface, il faut qu'il se trouve sur la génératrice circulaire $(a'b')$ et pour cela que l'on ait $h'^2 = a'm' \times b'm'$, $h'$ étant la hauteur du point $(m')$; et à cause que la droite $(mm')$ est une horizontale, il restera à prouver que $h = h'$ ou bien que $am \times bm = a'm' \times b'm'$.

Or, par construction $mm'$ est parallèle à l'axe $xx'$, et $mp = m'p$; d'où l'on conclut facilement que les deux cordes anti-parallèles $ab$, $a'b'$ sont égales et qu'elles sont divisées par $mm'$ de manière que $ma = m'a'$ et $mb = m'b'$. D'où $h = h'$. Donc etc.

On déduit de la démonstration précédente le corollaire que voici :

Corollaire. — *Les deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent respectivement par les extrémités d'une corde parallèle à l'un des axes de la directrice sont égales.*

Il est facile de démontrer la propriété ci-après sans faire usage d'aucune figure.

44. Propriété. — *Tout plan passant par une ligne des centres est un plan diamétral dont les cordes conjuguées sont parallèles au plan directeur et perpendiculaires à la direction de l'intersection du plan directeur avec le plan proposé.*

45. Propriété. — *La surface du second degré, qui a pour directrice le système de deux droites qui se coupent, est une surface conique.*

*Démonstration.* — Soient (fig. 12) le système des deux droites $sa'$, $sa''$ la directrice de la surface du second degré et les cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. inscrites dans l'angle $a'sa''$, les projections d'autant de génératrices circulaires de la surface. Cela posé, pour démontrer que la surface est conique, il suffit évidemment de prouver que toute droite, partant du point $s$ et qui rencontre une de ces génératrices circulaires, les rencontre toutes.

Soit $sabc$.. etc. la projection d'une droite partant du point $s$ et s'appuyant sur la génératrice circulaire $(a'a'')$ et soient $o$, $h$, $h'$, $h''$, etc. les hauteurs respectives des points $(s)$, $(b)$, $(c)$, etc. on aura :

$$sa : h = sb : h' = sc : h'' = \text{etc.}$$

$$\text{ou bien } \overline{sa}^2 : h^2 = \overline{sb}^2 : h'^2 = \overline{sc}^2 : h''^2 = \text{etc...} \quad (\alpha)$$

A cause que le point $(a)$ est sur la génératrice circulaire $(a'a'')$, il vient $h^2 = aa' \times aa''$ et pour prouver que les autres points $(b)$, $(c)$, etc. se trouvent respectivement sur les génératrices circulaires $(b'b'')$, $(c'c'')$, etc. il suffit de faire voir que

$$h'^2 = bb' \times bb'',\ h''^2 = cc' \times cc'', \text{ etc...} \quad (\beta)$$

Or la figure donne

$$\overline{sa}^2 : aa' \times aa'' = \overline{sb}^2 : bb' \times bb'' = \overline{sc}^2 : cc' \times cc'' = \text{etc...} \quad (\gamma)$$

comparant ($\alpha$) à ($\gamma$), en observant que $h^2 = aa' \times aa''$, on en conclura les égalités ($\beta$). Donc etc.

46. Propriété. — ***Une droite ne peut rencontrer une surface du second degré en plus de deux points.***

*Démonstration.* — Nous démontrerons d'abord qu'un cône, dont le sommet est en un point quelconque de la directrice d'une surface du second degré et qui a pour base une section circulaire quelconque de la surface, n'a d'autres points communs avec elle, à part le sommet, que ceux de la section circulaire. Ainsi il sera prouvé que toute droite menée d'un point quelconque de la directrice ne peut rencontrer de nouveau la surface qu'en un seul point.

Soient (fig. 5) l'ellipse $a\,b\,b'a'$ la directrice principale de la surface, et la corde $ab$ la projection d'une section circulaire, prise pour base d'un cône ayant son sommet en un point quelconque $S$ de la directrice; il faut démontrer qu'un point quelconque de l'espace, tel que celui projeté en $m$ et qui n'appartient pas à la section circulaire ($ab$), ne peut se trouver à la fois sur la surface du cône et sur la surface proposée.

Pour cela menons par le point ($m$) le plan vertical $a''b''$ parallèle à $ab$; il coupera le cône suivant une circonférence ayant pour diamètre $a''b''$ et la surface proposée suivant une circonférence ayant pour diamètre $a'b'$. Cela posé, ces deux circonférences devraient se couper pour que le point ($m$) pût se trouver à la fois sur la surface du cône et sur la surface proposée; mais cela est impossible, car deux circonférences ne sauraient se couper, lorsque leurs diamètres sont sur une même droite et que les extrémités de l'un de ces diamètres se trouvent entre les extrémités de l'autre.

Comme la démonstration que nous venons de donner ne cesse pas d'exister si l'ellipse $a\,b\,b'a'$, au lieu d'être la directrice principale, était une directrice oblique de la surface, il en résulte qu'une droite, menée par un point quelconque d'une surface du second degré, ne peut rencontrer de nouveau celle-ci qu'en un seul point. Donc etc.

*Remarque.*—La démonstration que nous venons de donner convient à l'ellipsoïde et au paraboloïde elliptique; pour l'étendre à l'hyperboloïde à une nappe, il faut établir au préalable la propriété ci-après.

47. Propriété.—***Par chaque point de l'hyperboloïde à une nappe passent deux droites qui rencontrent chacune toutes les génératrices circulaires de cette surface.***

*Démonstration.*—Soient (fig. 11) les cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. les projections d'un nombre quelconque de génératrices circulaires de l'hyperboloïde à une nappe et $a$ la projection d'un point quelconque de sa surface.

Imaginons le cône qui a pour base la génératrice circulaire $(a'a'')$ passant par le point $(a)$, et pour sommet le point de contact de la tangente $tabc$... etc. menée par $a$ à l'hyperbole directrice ; je dis que l'arête du cône qui se projette dans la tangente $tabc$... etc. rencontre, outre la génératrice circulaire $(a'a'')$, base du cône, encore toutes les autres génératrices circulaires de l'hyperboloïde.

L'arête ($tabc$.. etc.) étant une droite de l'espace, si $h$, $h'$, $h''$, etc. sont les hauteurs respectives des points $(a)$, $(b)$, $(c)$, etc. on aura :

$$ta : h = tb : h' = tc : h'' = \text{etc.}$$

$$\text{ou bien } \overline{ta}^2 : h^2 = \overline{tb}^2 : h'^2 = \overline{tc}^2 : h''^2 = \text{etc...} (m).$$

Le point $(a)$ étant sur la génératrice circulaire $(a'a'')$ on a : $h^2 = aa' \times aa''$ ; et pour démontrer que tous les autres points $(b)$, $(c)$, etc. de l'arête ($tabc$... etc.) se trouvent respectivement sur les génératrices circulaires $(b'b'')$, $(c'c'')$, etc. il suffit de prouver que

$$h'^2 = bb' \times bb'', \; h''^2 = cc' \times cc'', \text{ etc.}$$

Or toute tangente $tabc$.. etc. à une hyperbole divise un système quelconque de cordes parallèles $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, etc. menées entre les deux branches, de manière que l'on a (10)

$$\overline{ta}^2 : aa' \times aa'' = \overline{tb}^2 : bb' \times bb'' = \overline{tc}^2 : cc' \times cc'' = \text{etc}$$

comparant cette proportion à $(m)$ il vient :

$$h^2 : aa' \times aa'' = h'^2 : bb' \times bb'' = h''^2 : cc' \times cc'' = \text{etc.}$$

et de ce que $h^2 = aa' . aa''$, il en résulte que

$$h'^2 = bb' \times bb'', \; h''^2 = cc' \times cc'', \text{ etc.}$$

ce qu'il fallait démontrer. Par les mêmes raisonnements on établira que la seconde tangente à l'hyperbole, que l'on peut mener par $a$, est la projection de la seconde droite qui rencontre toutes les génératrices de l'hyperboloïde. Donc, etc.

Maintenant il sera facile de démontrer qu'une droite ne peut rencontrer l'hyperboloïde à une nappe en plus de deux points sans y être située tout entière.

48. *Le cône, qui a pour base une génératrice circulaire d'une surface du second degré et pour sommet le point de rencontre des deux tangentes à la directrice menées par les extrémités de la corde, projection de la génératrice circulaire, est un cône circonscrit à la surface.*

*Démonstration.* — Soit (fig. 9) l'ellipse $a\,b\,b'a'$ la directrice principale de la surface et la corde $ab$ la projection d'une génératrice circulaire. Soient *sa*, *sb* les deux tangentes à la directrice, menées pa les extrémités de cette corde : il s'agit de faire voir que le cône, dont le sommet est en *s* et qui a pour base la génératrice circulaire projetée en *ab*, n'a d'autres points communs avec la surface que ceux de cette génératrice.

Remarquons d'abord que les deux tangentes *sa*, *sb* sont les arêtes principales de ce cône, qu'elles se coupent sur le diamètre conjugué à la corde *ab* et par suite sur la ligne des centres *sc* de la surface proposée ; donc le cône et la surface proposée ont une ligne des centres et un plan directeur (*ab*) communs.

Maintenant, en supposant que le point quelconque projeté en *m*, et qui n'est pas situé sur la génératrice circulaire (*ab*), puisse appartenir à la fois à la surface du cône et à la surface proposée, si l'on mène par ce point (*m*) le plan vertical $a''b''$ parallèle à *ab*, ce plan coupera le cône suivant une circonférence, ayant pour diamètre $a''b''$ et la surface proposée suivant une circonférence, ayant pour diamètre $a'b'$ ; ces deux circonférences devraient se couper au point projeté en *m*, pour que le point (*m*) pût appartenir à la fois à la surface du cône et à la surface proposée. Or, ces deux circonférences sont concentriques et de rayons différents, et ne sauraient ni se couper ni coïncider. Donc etc.

49. Corollaire. — *Tout cône, qui touche une surface du second degré suivant une génératrice circulaire, a un plan directeur et une ligne des centres communs avec la surface proposée ; les arêtes principales de ce cône sont tangentes à la directrice principale de la surface.*

50. *Corollaire.* — Tous les cônes qui touchent une surface du second degré, dans une même série de sections circulaires, ont leurs sommets sur la ligne des centres de ces sections.

51. Corollaire. — *Toutes les tangentes, menées par un même point d'une ligne des centres d'une surface du second degré à tous les méridiens qui passent par cette ligne, forment un cône qui touche la surface suivant une génératrice circulaire ayant son centre sur cette ligne et par suite le cône et la surface touchée ont une ligne des centres commune et même plan directeur.*

52 Propriété. — *Si à toutes les génératrices circulaires d'une même série d'une surface du second degré, on mène des tangentes par les points dans lesquels ces génératrices sont rencontrées par une section méridienne, l'ensemble de ces tangentes constituera une surface cylindrique qui par construction sera circonscrite à la surface proposée.*

*Démonstration.* — Il faut démontrer que toutes ces tangentes sont parallèles entre elles : ayant construit dans la section méridienne toutes les cordes conjuguées à la ligne des centres, ces cordes seront, comme nous l'avons remarqué ailleurs, les diamètres d'autant de génératrices circulaires ; et si à ces diamètres et par leurs extrémités, on mène des perpendiculaires parallèles au plan directeur, ces perpendiculaires seront les tangentes aux diverses génératrices circulaires ; ces tangentes sont donc parallèles entre elles comme étant toutes parallèles au plan directeur et perpendiculaires à une même direction, celle des cordes conjuguées à la ligne des centres. Delà on tire comme corollaire la propriété qui suit :

Propriété. — *Tout cylindre, parallèle au plan directeur et circonscrit à une surface du second degré, touche celle-ci dans une section méridienne.*

### PLANS TANGENTS AUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

53. Problème. — *Par un point donné sur une surface du second degré mener un plan tangent.*

*Solution.* — Par le point donné on construira par rabattement une tangente à chacune des deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent par ce point ; la droite qui unit les traces horizontales de ces deux tangentes sera la trace horizontale du plan tangent. Nous ferons observer que la trace d'une droite est le point dans lequel cette droite rabattue rencontre la charnière qui a servi à la rabattre. Voyez (fig. 3).

L'ellipse $a\,a'b\,b'$ est la directrice principale de la surface, $d$, $d'$ sont les projections des deux plans directeurs, $m$ est la projection du point donné ; $ab$ parallèle à $d$ et $a'b'$ parallèle à $d'$ sont les projections des deux génératrices circulaires anti-parallèles qui passent par le point ($m$). $t'$ est la trace horizontale du plan tangent.

54. Problème. — *Par un point donné hors d'une surface du second degré mener un plan tangent dont le point de contact se trouve sur une génératrice circulaire donnée.*

*Solution.* — On construira d'après le numéro (48) le cône auxiliaire qui touche la surface proposée suivant la génératrice circulaire donnée ; le plan tangent à ce cône, mené par le point donné, satisfera à la question ; le point de contact du plan tangent sera à l'intersection de la génératrice circulaire avec l'arête dans laquelle le cône est touché.

Pour construire l'arête suivant laquelle le cône est touché par le plan tangent, on mènera par le point donné un plan vertical parallèle au plan de la génératrice circulaire ; ce plan coupera le cône suivant une circonférence à laquelle on menera, par le point donné, une tangente. La droite qui joint le point de contact de cette tangente avec le sommet du cône sera l'arête touchée.

Voyez (fig. 13). *sc* est la ligne des centres, *m* est la projection du point donné ayant une hauteur égale à *h*, la corde *ab* conjuguée à *sc* est la projection de la génératrice circulaire donnée, *s* est le sommet du cône qui touche la surface suivant la génératrice circulaire (*ab*), etc., enfin *x* est la projection du point de contact du plan tangent cherché.

Le problème précédent est possible tant que par le point donné on peut mener un plan tangent au cône auxiliaire qui touche la surface dans la génératrice circulaire donnée, c'est-à-dire, tant que le point donné est sur le cône ou hors du cône ; et il devient impossible lorsque le point donné se trouve dans l'intérieur du cône.

Or, parmi tous les cônes qui touchent chacun la surface dans une génératrice circulaire il s'en trouvera un dont une arête passera par le point proposé. Ce cône, que nous nommerons cône limite, touche la surface proposée dans la génératrice circulaire limite, c'est-à-dire que le problème est impossible pour toute génératrice circulaire située au-delà de cette génératrice limite.

55. Cône et génératrice circulaire limites. — ***Construire un cône qui doit toucher une surface du second degré suivant une génératrice circulaire à déterminer et dont une arête doit passer par un point donné.* (*Cette arête sera tangente au méridien dont le plan passe par le point donné.*)**

*Solution.*—Soient (fig. 7) *sc* la ligne des centres, *dd* le plan directeur de la surface et *m* la projection du point proposé ayant une hauteur égale à *h*. On mènera par le point proposé (*m*) un plan auxiliaire *a'b'* parallèle au plan directeur *dd* de la surface ; ce plan coupera le cône limite à construire suivant une circonférence de cercle qui aura son centre en *c* sur la ligne des centres *sc* de la surface et qui passera par le point proposé (*m*) ; on aura donc le rayon de cette circonférence en cherchant la distance du point proposé au point *c*. (*r* est cette distance ou ce rayon rabattu autour de la charnière *a'b'*).

Connaissant le rayon d'une section circulaire du cône, on pourra construire la projection *a'b'* de cette section, en prenant $ca' = cb' = r$. Cela fait, si par les extrémités de cette projection on mène les deux tangentes *aa'*, *bb'* à la directrice, ces deux tangentes seront les arêtes principales du cône limite et la corde *ab* qui unit les deux points de contact sera la projection de la génératrice circulaire limite cherchée.

56. Problème. — ***Parallèlement à une droite mener un plan tangent à une surface du second degré de manière qu'il touche la surface en un point d'une génératrice circulaire donnée.***

*Solution.* — On construira d'après le numéro (48) le cône auxiliaire qui touche la surface suivant la génératrice circulaire donnée ; le plan tangent à ce cône mené parallèlement à la droite donnée satisfera à la question ; son point de contact se trouvera à l'intersection de la génératrice circulaire avec l'arête dans laquelle le cône est touché.

Voyez (fig. 8). *sc* est la ligne des centres, *dd* est la projection du plan directeur, *ab* parallèle à *dd* est la projection de la génératrice circulaire donnée. Les tangentes *sa*, *sb* sont les arêtes principales du cône auxiliaire qui touche la surface dans (*ab*). Soit *sm* la projection d'une droite auxiliaire menée par le sommet du cône parallèlement à la droite donnée, le point (*m*) ayant une hauteur égale à *h*. *a'b'* est la projection d'une section circulaire faite dans le cône par le plan vertical *ma'b'*, parallèle à (*dd*) et mené par le point quelconque (*m*) de la droite (*sm*). *tt'* est le rabattement de la tangente menée par (*m*) à cette section circulaire, etc., etc, enfin *x* est la projection du point de contact du plan tangent cherché.

57. Cône et génératrice circulaire limites. — ***Construire un cône qui touche une surface du second degré dans une génératrice circulaire à déterminer et dont une arête soit parallèle à une droite donnée.***

*Solution.* Par un point quelconque de la ligne des centres, on mènera une parallèle à la droite donnée et l'on prendra cette parallèle pour l'arête d'un cône ayant même plan directeur et même ligne des centres que la surface proposée ; soit (fig. 2) *sm* la projection de cette arête ou de cette parallèle à la droite donnée, le point *m* ayant une hauteur égale à *h*. Ensuite on construira une section circulaire quelconque de ce cône, ce qui se fera en menant par le point quelconque (*m*) de cette arête le plan vertical *ab* parallèle au plan directeur *d* de la surface proposée ; la distance du point (*m*) au point *c* dans lequel ce plan rencontre la ligne des centres *sc* sera le rayon de cette section circulaire. *r* est cette distance ou ce rayon rabattu autour de la charnière *ab*. Prenant maintenant $ca = cb = r$, *ab* sera la projection d'une section circulaire du cône et *sa*, *sb* en seront les deux arêtes principales. Parallèlement à *sa*, *sb* menant à la directrice de la surface les deux tangentes *s'a'*, *s'b'*, ces tangentes seront les arêtes principales du cône limite et la corde $a'b'$ la projection de la génératrice circulaire limite. Cette solution est basée sur le principe suivant très facile à démontrer :

58. Propriété. — ***Deux cônes du second degré qui ont même ligne des centres et même plan directeur ont toutes leurs arêtes respectivement parallèles lorsqu'une arête de l'un est parallèle à une arête de l'autre.***

59. Au moyen des problèmes (54, 56) on résoudra facilement les deux suivants que nous nous contentons d'énoncer:

60. Problème.—***Construire la courbe suivant laquelle un cône circonscrit à une surface du second degré et ayant son sommet en un point donné, touche cette surface.***

61. Problème. — ***Construire la courbe suivant laquelle un cylindre circonscrit à une surface du second degré et parallèle à une droite donnée, touche cette surface.***

62. Problème.— ***Construire la courbe de contact d'un conoïde circonscrit à une surface du second degré et qui a pour plan directeur l'un des plans directeurs de cette derrière.***

*Solution.*—On prendra le plan directeur de la surface pour plan horizontal de projection et le plan de la directrice pour plan vertical de projection. Cela fait, on coupera la surface et la droite qui sert de directrice au conoïde par une série de plans horizontaux; chaque plan horizontal coupera la surface suivant une circonférence et la droite en un point, duquel menant deux tangentes à cette circonférence, leurs points de contact appartiendront à la courbe cherchée.

Problème.—***Par une droite mener un plan tangent à une surface du second degré.***

63. *Solution.*—On construira d'après(62) les courbes de contact de deux conoïdes circonscrits à la surface proposée et ayant pour directrice la droite proposée et respectivement mêmes plans directeurs que la surface proposée; l'intersection de ces deux courbes sera le point de contact du plan tangent cherché.

*Autrement.*— Le point de contact du plan tangent doit se trouver à l'intersection des courbes de contact de deux cônes circonscrits à la surface proposée et ayant leurs sommets en des points arbitrairement pris sur la droite ou bien à l'intersection de la courbe de contact de l'un de ces cônes avec la courbe de contact du cylindre parallèle à la droite donnée et circonscrit à la surface.

64. Problème. —***Parallèlement à un plan mener un plan tangent à une surface du second degré.***

*Solution.* — On cherchera l'intersection du premier plan directeur avec le plan proposé; parallèlement à cette intersection on imaginera des tangentes à toutes les sections circulaires parallèles à ce plan directeur; l'ensemble de ces tangentes constituera un cylindre parallèle au plan proposé et qui touchera la surface dans un méridien dont le plan passera par la ligne des centres et le point de contact de l'une des tangentes citées (52). Le point de contact du plan tangent devra se trouver sur ce méridien; il devra se trouver aussi sur un méridien que l'on obtiendra en opérant de la même manière avec l'autre ligne des centres et l'autre plan directeur; le point est donc déterminé par l'intersection de ces deux méridiens. Or l'intersection de deux méridiens passant respectivement par les deux lignes des centres doit se trouver sur la droite d'intersection des plans de ces méridiens. Mais cette droite d'intersection est un diamètre de la surface et la question est ainsi ramenée à chercher les points dans lesquels une surface du second degré est rencontrée par un de ses diamètres. Voyez ci-après la solution de ce problème.

65. Problème. — *Trouver les points de rencontre d'une surface du second degré avec une droite qui rencontre une ligne des centres.*

*Solution.* — Je prends cette droite pour arête d'un cône ayant même plan directeur et même ligne des centres que la surface proposée. L'intersection de ce cône avec la surface sera une ou deux génératrices circulaires qu'il suffit de déterminer pour que le problème soit résolu.

Soient (fig. 4) *sc* la ligne des centres, *dd* la projection du plan directeur, et *sm* la projection de la droite proposée, le point (*m*) ayant une hauteur égale à *h*. Cela posé, par le point (*m*) je mène le plan vertical *ab* parallèle au plan directeur *dd*; ce plan vertical coupera le cône suivant une section circulaire dont le centre sera en *c* et dont le rayon est la distance du point (*m*) au point *c*. On voit cette distance ou ce rayon rabattu en *r* autour de la charnière *ab*. Prenant maintenant $cb = ca = r$, *ab* sera la projection de cette section circulaire, et *sa*, *sb* seront les arêtes principales du cône qui coupe la surface proposée dans les deux génératrices circulaires projetées dans les cordes $a'b'$, $a''b''$. Donc $x$, $y$ sont les projections des points de rencontre de la droite (*sm*) avec la surface proposée.

66. Problème. — *Par un point donné mener un plan tangent à une surface du second degré de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.*

*Solution.* — Je conçois le cylindre qui touche la surface proposée suivant le méridien donné. Par le point donné je mène une parallèle aux génératrices de ce cylindre (52) et je détermine le point de rencontre de cette parallèle avec le plan du méridien.

De ce point de rencontre je mène, d'après (l'art. 55), une tangente au méridien donné, le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent cherché.

67. Problème.—***Parallèlement à une droite donnée mener un plan tangent à une surface du second degré, de manière que le point de contact se trouve sur un méridien donné.***

*Solution.*—Par un point quelconque de la droite proposée je mène une parallèle aux génératrices du cylindre circonscrit à la surface du second degré suivant le méridien donné ; je cherche l'intersection du plan, passant par la droite proposée et cette parallèle, avec le plan du méridien donné.

Parallèlement à cette intersection menant, d'après le numéro (57), une tangente au méridien donné, le point de contact de cette tangente sera aussi celui du plan tangent cherché.

## DE QUELQUES INTERSECTIONS.

68. Problème. — *Trouver l'intersection d'une surface du second degré avec un plan quelconque.*

*Solution.* — Prenons le plan de la directrice de la surface du second degré pour plan vertical de projection, et l'un des deux plans directeurs pour plan horizontal de projection. Cela fait, on coupera la surface et le plan proposé par une série des plans auxiliaires horizontaux; chaque plan horizontal coupera la surface suivant une circonférence de cercle et le plan suivant une horizontale ; les points de rencontre de l'horizontale avec la circonférence appartiendront à l'intersection commune.

69. Problème.—*Chercher l'intersection d'une surface du second degré avec une surface cylindrique quelconque.*

*Solution.* — Prenons pour plan horizontal de projection un plan parallèle au plan directeur de la surface du second degré, alors toutes les sections horizontales seront des circonférences de cercle parallèles au plan horizontal de projection; et la solution revient à chercher les points dans lesquels chacune de ces circonférences parallèles au plan horizontal rencontrera la surface cylindrique.

70. Problème.—*Construire l'intersection d'une surface du second degré avec une surface cônique à base quelconque.*

*Solution.* — En prenant, comme dans dans le cas précédent, pour plan horizontal de projection, un plan parallèle au plan directeur de la surface du second degré, la solution revient à trouver les points dans lesquels chaque section circulaire de la surface rencontre la surface cônique, ce que l'on sait faire.