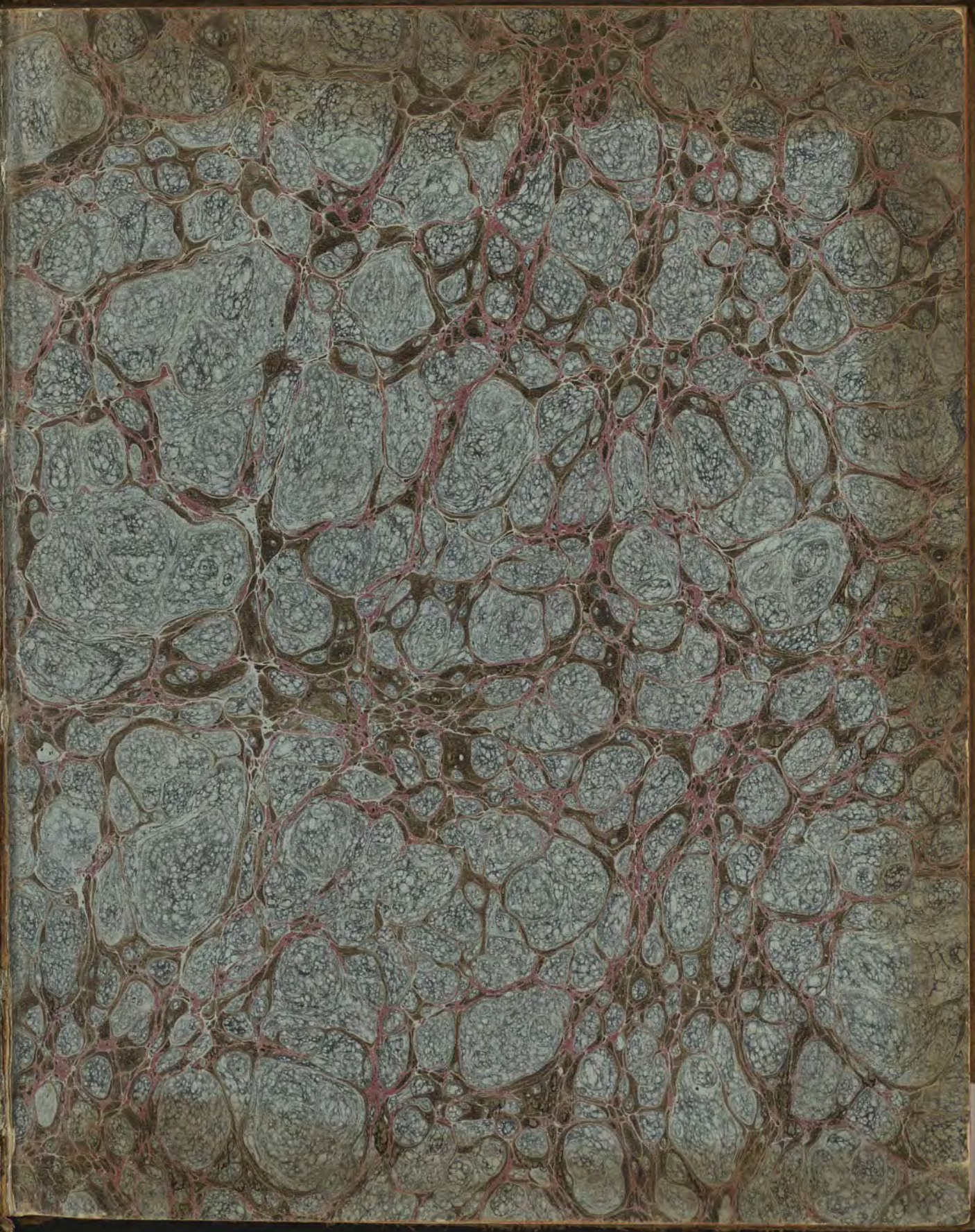


Dissertationes

Inaugurales Mathematicae

Universitatis

Leodiensis

A 1820 ad 1830.

DISSERTATIO INAUGURALIS PHYSICA,

DE

COMBUSTIONE,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI I. DENZINGER,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIMÈ CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die 23 Januarii 1821, horâ, 3a

AUCTOR

MARTINUS MARTENS, MOSÆ TRAJECTINUS.

LEODII, TYPIS P.-J. COLLARDIN, TYPOGRAPHI ACADEMICI.
MDCCCXX.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 du Règlement.

A MON PÈRE.

A MONSIEUR

J. P. MINCKELERS,

Ci-devant professeur de physique et de chimie à l'ancienne Université de Louvain, et en dernier lieu au Collége de Maëstricht, membre de la première classe de l'Institut royal des Pays-Bas, de l'Académie des sciences et belles-lettres de Bruxelles, etc. etc.,

Comme à celui qui a dirigé mes premiers pas dans les sciences physiques.

M. Martens.

Ignis ubique latet, naturam amplectitur omnem,
Cuncta parit, renovat, dividit, unit, alit.

DISSERTATIO PHYSICA INAUGURALIS

DE COMBUSTIONE.

COMBUSTIONIS HISTORIA.

1. Quanquam combustionis phœnomenon jam inde ab antiquissimis temporibus notum fuerit, causa tamen legesque quibus regitur, nostrâ tantum ætate, a chemicis detectæ sunt. Antiqui physici, qui omnia phœnomena causis mechanicis explicare studebant, ignem in corporibus diffusum ac incarceratum credebant, combustioque illis medium rumpendi ignis vincula videbatur, et terminata erat quum omnis ignis effluxisset. Anno 1665 Hooke theoriam combustionis edidit illi quam, nostris temporibus, Cl. Lavoisier stabilivit maxime affinem. Substantiam similem illi quæ in nitro fixa reperitur in aëre contineri credidit, et illius ex sententiâ nihil aliud fuit combustio quam corporis combustibilis in hâc substantiâ dissolutio. Aliquo post tempore Cl. Sthalius, qui primus chemica phœnomena in corpus doctrinæ conjungere studuit, inflammabile quoddam principium, cui *phlogistici* nomen indidit, veterum igni substituit, combustionemque ad effluvium hujus principii actione caloris productum reduxit. Medio fere sæculo decimo octavo, Macquer, phœnomenis rite perpensis, theoriam Sthalii modificandam aërisque actionem in combustione admittendam statuit. Putavit igitur phlogisticum, quod lumen esse corporibus infixum dixit, hisce tam firmiter adhærere ut ab iis separari non posset nisi aëris et caloris unitâ actione, aëremque in locum ignis quem conjunctionis vinculo expediebat succedere. Priestley, Crawford et Kirwan, Sthalii

theoriam adhuc perfectiorem reddere tentarunt. Primus asseruit phlogisticum, vigente combustione, evolutum cum aëre combinari, huncque ita combustioni sustinendæ imparem evadere : secundus eâdem combinatione effluvium caloris et lucis, quod durante combustione observatur, explicavit : tertius phlogisticum nihil aliud esse quam hydrogenium contendit. Omnes hasce theorias non longe abhinc evertit celeberrimus Lavoisier. Hic multis experimentis probavit in omni combustione, libero in aëre peractâ, unam aëris partem, *oxigenium* nempe, absorberi, combustionemque nonnisi hoc fluido sustentari : corpora conflagrantia absorptione oxigenii quoad qualitates mutari pondereque aëris absorpti augeri reperiit, nequaquam vero consumi, nec quoad naturam intimam immutari, cum, ablato quod absorpserant oxigenio, in pristinum statum restituantur. Corpora exinde, prout cum oxigenio vel combinari vel non combinari poterant, in *combustibilia* et *non-combustibilia* divisa fuere; et combustio deinceps a plerisque chemicis ut mera oxidatio habita fuit, nullo ad caloricum et lumen, eâ vigente, evoluta respectu habito. *Chlorum* autem combustioni non inservire nisi propter oxigenium ipsi insitum crediderunt. Postquam vero clarissimi Davy, Gay-Lussac et Thenard probarunt chlorum in omnibus phœnomenis uti corpus simplex sese habere, concludere necesse erat oxigenium non unice, ut antea creditum, combustionis alendæ proprietate gaudere, sive, ut accuratius loquar, caloricum et lumen dum sese cum corporibus combinat evolvere; et proinde combustionem in oxigenatione consistere amplius dici nequit. Tandem Davy constitutionem flammæ descripsit, ejus phœnomena investigavit, eaque in artium humanique generis utilitatem convertit.

COMBUSTIONIS DEFINITIO.

2. Per combustionem eum actum intelligo in quo corpus cum

alio corpore sese combinans calorem una et lucem producit. A definitione quam multi chemici de combustione præbent non absque ratione discedo. Hi combustionem dicunt esse phœnomenon in quo oxigenium cum corpore quodam sese combinat (*). Ast hujus definitionis si originem repetas, vitium illius facile agnosces. Cum enim conspicerent corpora nonnisi suâ cum oxigenio combinatione plerumque comburi, hâc in combinatione combustionem consistere prædicabant, ita ut quod pro causâ combustionis immediatâ haberi debuisset, pro ipsâ combustione habitum sit. Combustionem vero ab oxigenatione distinguendam esse animadvertit Lavoisier cum dicit : » L'oxigénation n'entraîne pas essentiellement l'idée de » combustion, puisque la combustion proprement dite ne peut » avoir lieu sans un dégagement de lumière et de calorique. » (**) Quin etiam nulla exstat ratio cur soli oxidationi combustionis nomen imponamus : nam licet combustionis phœnomenon quam plurimum ab oxidatione dependeat, non semper tamen ab ipsâ profluit, cum multæ substantiæ in chloro æque ac in oxigenio conflagrent.

Combustionis phœnomena.

3. Cum ea sit menti humanæ veritatem inquirenti via ut ab effectibus ad causas ascendat, primo examinanda erunt phœnomena quæ combustio exhibet, dein eorum causæ indagandæ. Differunt autem plura combustionis phœnomena prout corpora conflagrantia vel solida sunt, vel liquida, vel aëriformia. Solida enim et liquida, oxigenio haud permeabilia, in superficie tantum conflagrant : quæ vero aëriformi statu gaudent corpora, combustionem in totâ fere massâ plerumque exhibent, quia oxigenium totam massam potest

(*) Thenard. Traité de chimie, tom. 1.

(**) Lavoisier. Traité de chimie, 3e. édition, t. 2, pag. 92.

permeare : hoc in statu corpora flagrantia flammam constituunt quæ diversa phœnomena notatu digna studio nostro præbebit.

De flammâ.

4. Consistit flamma in fluido aëriformi quod suâ cum oxigenio vel alio gazo combinatione ita calefactum est ut caloricum una et lumen emittat. Hujus propositionis veritatem minime in dubium vocabit qui nullam unquam flammam absque fluido aëriformi in eâ conflagrante existere, omneque fluidum aëriforme conflagrans flammam producere consideraverit. Sic carbo candens tamdiu solummodo flammam fundit quamdiu volatilia ejus principia, hydrogenium nempe et oleum, nondum combusta sunt. Celeberrimus Newtonus in mirandis sub finem de opticâ libri sibi propositis quæstionibus constitutionem flammæ rite exposuit. » An non flamma, « ait, vapor est, fumus sive exhalatio candefacta; hoc est calefacta « usque eo ut lumen emittat? Corpora enim flammam non conci- « piunt, nisi si emittant fumum copiosum, qui porro fumus ardet « in flammâ..... Aliqua corpora motu vel fermentatione calefacta, « si utique calor iste sit magnus, fumum emittunt copiosum; sique « corpora ea satis admodum incalescunt, fumi isti lucebunt et « sese in flammam convertent. Metalla liquefacta flammam non « concipiunt, inopiâ fumi copiosi, zincum si excipias, quod et « fumum emittit copiosum eoque et flammas fundit..... Utique « fumus inter transeundum per flammam, fieri non potest quin « candescat, et fumus candefactus non potest non habere speciem « flammæ «. Dolendum sane tales ideas a Newtoni successoribus non sat perpensas fuisse : fortassis enim tum ad *lampadem*, sic dictam, *securitatis* detegendam, tum ad ejus effectus explicandos conduxissent.

5. Flamma in universum conica est, ejusque basis spectat corpus quo alimentum trahit. Pro variâ autem hujusce corporis naturâ

varios exhibet colores, ut flamma sulphuris, cæruleum, sebi flavum et camphoræ album. Ratio tum ejus levitatis, tum facilitatis quâcum levissimo flatu agitatur ab aëriformi ejus compositione repetenda est. Flamma pelluciditate quoque gaudet : per longum tamen tempus opaca habita est, quia objecta lumine debiliori fulgentia trans eam non conspiciuntur. Ast Cl. Rumfort demonstravit (*) opacitatem flammæ hoc in casu nonnisi apparentem esse, cum corpora quæ fortiori lumine lucent facile trans flammam cerni, lumenque aliorum corporum libere etiam per ipsam transmitti expertus sit : hæc vero trans illam ideo non conspiciuntur quod eorum lumen cum flammæ luce multo fortiori ad oculos perveniat.

6. Flamma calorem multo intensiorem exhibet quam solida corpora conflagrantia. Memorandum hujusce rei exemplum habetur in flammâ quam hydrogenii cum oxigenio mixtura Newmanni calamo expressa efformat : hæc enim flamma quamvis per diem vix conspiciatur, refractaria tamen corpora promptissime liquefacit, lumenque a solidis substantiis in ipsâ flagrantibus emissum tam vivum est ut ægre ab oculo feratur. Hinc intelligitur cur gaza eodem caloris gradu, quam corpora solida, luminosa non fiant, ut Wedgwood expertus est. Eo major esse videtur flammæ cujusvis temperatura quo major in fluidis ipsam formantibus hydrogenii copia continetur, idque gazum majorem quam cætera corpora calorem combustione suâ producit. (**)

7. Flammæ longitudo tum a quantitate fluidorum combustibilium quæ statuto tempore in illam affluunt, tum a minori, quâ eorum combustio peragitur, celeritate dependet. Sic, si flammam olei iis quas edit alcohol tali modo circumdamus ut minimum tantum inter ipsas intervallum intercedat, omnes, sed media præsertim, multo

(*) Transactions philosophiques, an 1794.

(**) Annales de chimie et de physique, t. 4, p. 269.

longiores evadunt (*) : quod eo explicari posse mihi videtur quia aëre frigido non ubique circumdatæ, ut cum segregatæ sunt, mutuoque contactu a causis frigoris protectæ, altiori temperaturâ debent gaudere; unde copiosior liquidorum illas efformantium volatilisatio: in mediâ vero flammâ, cujus temperatura intensior, volatilisatio fortior esse debet; quam ob rem flamma hæc cæteris longior. Ex dictis facile eruitur ratio cur flamma in universum apice acuto terminetur; nam major vaporis copia in ejus centrum affluit ut ex spatii obscuri formâ liquet; ideoque prope axim flamma longior esse debet. Non intellectu difficile est flammam quoque longiorem reddi posse combustione ejus retardatâ: sic si in superiorem flammæ candelæ partem corpus frigidum haud spissum, uti virgam ferream, horizontaliter immittimus, observamus : 1°. fluida flammæ combustibilia corpori frigido contigua rubro orbari calore, ita ut spatium obscurum circa illud in flammâ cernatur : 2°. fluida quæ corpus frigidum non tangunt, sed ad latera flammæ ascendunt minori cum intensitate conflagrare, copiosum fundere fumum, et altius ardentia efferri. Cur autem hoc in casu flamma longior fiat, facile intelligit qui considerat fluida combustibilia, in superiori flammæ parte refrigerata, lentius comburi debere, ideoque majorem attingere altitudinem antequam conflagrare desinant. (**)

8. Lumen flammæ omnem suam intensitatem a particulis solidis in ipsâ suspensis trahit. Cui enim flammæ harum particularum major copia, etiam luminis intensitas maxima est. Exemplo sit flamma camphoræ, quæ lumen vividissimum emittit, simulque tot particulas carbonarias continet, ut liquet ex denso harum particularum flumine quod in partem superiorem flammæ telâ metallicâ sectæ succedit. Augetur quoque mirum in modum lumen flammarum sulphuris, hydroge-

(*) Musschenbroek, Cours de physique expér. et math., §. 1653.

(**) In inferiorem flammæ partem si immitteretur corpus frigidum, imminutâ sevi volatilisatione, haud longior evaderet flamma.

nii, etc. injecto in ipsas subtilissimo oxidi zinci vel amianti pulvere. Hujus autem phœnomeni ratio in eo posita est quod solida multo plus luminis quam aëriformia corpora in combustione emittant. Unde intelligitur intensitatem flammæ adaugeri cum particulæ solidæ copiosius in ipsâ præcipitantur. Sic in flammâ hydrogenii carburati, cum quantitas aëris sufficiens ad ejus interiora pervenire impeditur, hydrogenium solum comburetur, carbonisque particulæ præcipitatæ in flammâ ardentes ejus intensionem augebunt. Hinc patet cur hydrogenium carburatum aëri communi mixtum, quale v. g. in fodinis carbonum occurrit, pallidiori cum lumine conflagret quam quod purum in atmosphærâ comburitur : calor vero in priori casu copiosius evolvitur, quod ex perfectiori combustione repetendum est. Phœnomena ista simplici experientiâ perspicua reddidit Cl. Davy. « J'ai tenu, dit-il, une toile métallique d'environ 900 ouvertures « au pouce carré sur un courant de gaz hydrogène carboné qui « sortait d'un petit tube, et j'ai allumé le gaz au-dessus de la « toile métallique qui étoit presqu'en contact avec l'orifice du tube : « le gaz brûla avec une vive lumière comme à l'ordinaire. La toile « métallique ayant été éloignée pour que le gaz pût se mêler avec « une plus grande quantité d'air avant d'être enflammé, la lumière « devint plus faible, et à une certaine distance, la flamme parut « précisément la même que celle d'un mêlange explosif qui brûle « dans la lampe. Cependant quoique la lumière fût si faible dans « ce dernier cas, la chaleur était encore plus grande que lorsque « la lumière était plus vive, et un bout de fil de platine tenu au « milieu de cette faible flamme bleue fut à l'instant chauffé jusqu'au « blanc. » (*)

Ex dictis hisce intellectu facile est sidera cadentia aliaque meteora ignea non posse inflammatione fluidorum aëriformium produci, ut

(*) Annales de chim. et de phys., t. 3, pag. 130.

multi crediderunt, cum fluida hæc nonnisi debilissimum lumen in combustione suâ emittant.

9. Neminem latet, flammam sub recipiente in quo aër non renovatur collocatam magis magisque intensitatem amittere, et demum extingui priusquam oxigenium omne in recipiente evanuerit. Multi præmaturam hanc flammæ extinctionem fluidis elasticis combustione procreatis, quæ oxigenii, ut putant, actionem reprimunt, adscripsêre. Ast tum omnes flammæ fluidum elasticum non producunt, tum etiam novissime Cl. Davy probavit citiorem, tardioremve flammæ extinctionem ab insufficienti quantitate oxigenii immediate non dependere, sed a gradu temperaturæ quo substantiæ flammam constituentes combustionem concipiunt; ita ut fluida elastica quæ minori caloris copiâ ad conflagrandum indigent, minus quoque oxigenii ad combustionem requirunt : quod sequenti experimento apprime monstravit. « Introduisez, dit-il, une bougie allumée dans une longue « bouteille à col étroit, laissez-la brûler jusqu'à ce qu'elle s'éteigne; « bouchez la bouteille avec soin et introduisez ensuite une autre « bougie allumée ; elle s'éteindra avant d'être au fond du col. A « présent, portez-y un petit tube contenant du zinc et de l'acide « sulfurique affaibli, après avoir allumé l'hydrogène qui se dégage « à son ouverture; ce gaz brûlera en quelqu'endroit qu'on place « le tube dans la bouteille. Après l'extinction de l'hydrogène, intro- « duisez du soufre allumé, il brûlera pendant quelques momens; et « quand il aura cessé de le faire, le phosphore sera aussi lumineux « dans la bouteille que dans l'air; si on l'y échauffe, il donnera « une flamme d'un jaune pâle et d'une intensité considérable. » (*)

Ex his eruitur ratio extinctionis flammæ in athmosphæris vitiatis vel in vacuo pneumatico. Cum corpus in aëre parvam oxigenii copiam continente conflagrat, parum tantum calorici evolvitur,

(*) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 281.

idque in ratione directâ est cum quantitate oxigenii in aëre qui combustioni inservit contentâ; ita ut, si proportio oxigenii magis magisque minuatur, sicut fit in recipiente pneumatico quo aër educitur, minor etiam evadat calorici emissi quantitas : temperatura igitur corporis conflagrantis sensim imminuetur; tandemque, si de flammâ agitur, (*) insufficiens erit ut gazum frigidum, quod continuo in flammam, quam alat, ascendit, in combustionem rapiat. Sequitur inde, gaza, quæ ad conflagrandum minorem calorem postulant, quæque intensiorem combustione producunt, diutius in vacuo pneumatico vel in athmosphæris vitiatis conflagrare, quod et experientia comprobat. Non desunt quoque experimenta quæ demonstrant frigus causam revera esse proximam extinctionis flammæ in vacuo pneumatico; hæc enim, servatâ temperaturâ, diutius in vacuo isto perdurat : sic cel. Davy expertus est flammam naphtæ, quæ sub recipiente pneumatico, aëre sexcies rarefacto, extinguitur, adhuc conspicuam esse sub gradu rarefactionis quintuplo altiori, cum naphta ferro ardenti imposita est : item flamma hydrogenii, quæ evanescit in aëre cujus densitas octuplo minor est facta, adhuc in aëre sedecuplo rariori conflagrat, si filum tenue platini spiraliter contortum in ipsâ suspenditur. Hoc in casu filum combustione hydrogenii ardens factum, cum calorem receptum lente amittat, combustionem gazi sustentabit donec ardere desierit. Davy novissime hanc proprietatem utiliter adhibuit ut flammam lampadis securitatis in athmosphæris vitiatis diutius conservet.

10. Si telam metallicam mediâ in flammâ horizontaliter tenemus,

---

(*) Dico *si de flammâ agitur*; nam cum corpora solida majori, cæteris paribus, massâ quàm fluida aëriformia gaudeant; multo diutius calorem servabunt, ita ut si massa ipsis sat magna sit, nec corporibus frigidis caloricum bene ducentibus applicentur, conflagrabunt sub recipiente pneumatico, usque dum tota oxigenii quantitas consumpta sit.

non potest hæc ad solitam altitudinem assurgere, quin fluida elastica ipsam componentia telæ interstitia permëent; sed cum inter transeundum per telam corpus frigidum calorem optime ducens tangant, necesse est ut majorem caloris sui partem illi cedant, et proinde temperaturæ gradum ipsis ad conflagrandum necessarium amittant; flamma igitur, dum transit per telam, extinguetur, ejusque in locum supra hanc succedet conus fluidorum combustibilium qui a parte flammæ infra telam positâ eo tantum differt, quòd minori temperaturâ gaudens nec luminosa sit nec conflagret; conus iste obscurus, admoto igne, incendi potest; et conflagrare perget, si ejus combustione calor sufficiens evolvitur, quo adversus causas refrigerantes defendatur : non autem ea, quam formabit, flamma, illi quæ infra telam posita est, contigua erit, nec cum ipsâ flammam unicam, ei quam, telâ detractâ, habebis plane similem, constituet; sed intervallo obscuro telâ occupato ab invicem distabunt : intervallum istud, frigore quo tela metallica fluida combustibilia ipsi proxima afficit procreatum, telâ incalescente, imminuitur, tandemque evanescit, si augeatur hujus temperatura eo usque ut fluida elastica ipsam permeantia infra caloris gradum eorum combustioni necessarium refrigerari non possint; hoc enim in casu flammam intercipere tela nequit.

11. Cum telæ metallicæ in flammam effectus ab ipsius refrigerandi vi solum dependeat, patet ejus actionem eo efficaciorem esse quo minora illius interstitia et quo major illius massa sit; tunc enim flamma, dum telam transit, majori cum materiæ quantitate in contactum venit; hinc fit ut tubus metallicus angustus multo melius quam exiguum foramen in tenui laminâ pertusum flammam intercipiat; sequitur etiam exinde, gazorum flammas, quæ minorem ad conflagrandum calorem postulant, difficilius telis metallicis intercipi, ideoque strictiores telas ab illis exigi; ista enim fluida majorem calorem amittant necesse est, ut temperatura eorum gradu caloris

combustioni necessario minor evadat; item flamma quæ plus calorici emittit, celerius telam metallicam transmeabit; non solum enim plus calorici amittere potest, priusquam extinguatur; sed et etiam, cum telam magis calefaciat, citius eam sibi intercipiendæ imparem reddet. Omnia hæc non solum theoriæ, sed et experientiæ conformia existunt sicut Davy probavit. (*)

12. Proprietati telarum metallicarum transitum flammæ impediendi superstructa est lampadum securitatis constructio. Notum jam fuit, ante earum inventionem, explosiones gazi inflammabilis non propagari trans tubos arctos nec trans exiguum in metallicâ laminâ pertusum foramen, uti quotidie videre licuit tum in novo gazi ope illuminandi modo, tum in calami Newmannii effectibus. Quibus sedulo perpensis, Davy lampadem excogitavit telâ circumdatam metallicâ filo tenui ferreo extructâ cujus pollex quadratus 748 foramina continet; initio autem imperfecta erat ex eo quòd non sat provisum esset effectibus caloris rubri quem tela in superiori parte, lampadis combustione, acquirere potest; inde explosiones in fodinis quandoque non impediit : cognito autem vitio, altera tela superiori lampadis parti adjecta fuit. Multa adhuc in ipsâ novissime perfecit Chevremont (**), ita ut credere liceat lampadem in posterum successu nunquam carere.

13. Flamma tum sevi, tum alcoholis aliarumve substantiarum spatium obscurum, in quo extremitas ellychnii demergitur, in centro exhibet; spatium hoc, flammæ formam referens, ad altitudinem pro ejus naturâ variabilem, sed nunquam usque ad illius verticem extenditur; hujus autem spatii ut constitutio mihi innotescat, flammam candelæ diversis ab extremitate ellychnii distantiis laminâ metallicâ horizontaliter secui, eâque paucis post minutis secundis

(*) Annal. de chim. et de phys. t. 4.

(**) Annal. général. des sc. phys. t. 1. Bruxelles.

extractâ, in superficie inferiori macula carbonaria circularis e particulis carbonis in flammâ suspensis sine dubio proveniens, cum supra conum obscurum flamma secta fuit, observabatur : cum vero infra apicem coni obscuri laminam in flammâ detinui, macula circularis ex adiposâ materie formata annuloque substantiæ carbonariæ circumdata in ipsâ conspiciebatur; macula ista partem laminæ, quæ spatio obscuro immissa fuerat, totam obtegebat, quo fit ut eò major sit, quò propius ad extremitatem ellychnii lamina teneatur; contrarium obtinet in annulo carbonario; hic enim eò largior fit quò lamina magis ab extremâ ellychnii parte recedit, cumque in parte flammæ prorsus lucidâ supra spatium obscurum lamina tenetur, evanescente sevi maculâ, abit annulus in maculam circularem nigram, quæ eò angustior evadit, quò flammæ apici lamina propior consistit : hæcce sæpius a me observata phœnomena diversarum flammæ candelæ partium constitutionem optime nobis ostendunt; ex illis enim perspicimus vapores sevi, non statim cum ex ellychnio erumpunt, conflagrare, ideoque spatium obscurum circumcirca relinquere, certâ vero distantiâ ab illo remotos flagrare, carbonis moleculas deponere, tuncque partem flammæ lucidam efformare; ista quoque conspicua fiunt, si tela metallica horizontali situ in flammam paulatim demittatur : tunc oculo supra telam posito, primum discus luminosus infra illam conspicitur, qui, telâ amplius demissâ, mox obscurus in centro evadit; ita ut flamma telâ inferior conum truncatum luminis intus obscurum referat; eo autem minùs spissum cernitur spatii obscuri luminosum involucrum, quo propius extremitati ellychnii tela tenetur. Multi, facto hoc experimento, flammam intus omnino obscuram se vidisse narrant, ideoque combustionem nonnisi in illius superficie fieri prædicant; idque plures impossibilitati aëris in interiorem flammam penetrandi adscribunt; ast non solum ista impossibilitas, ut postea videbimus, admitti nequit; sed et ego semper vidi, cum telam metallicam sensim sensimque de-

misi, primam flammæ sectionem penitus luminosam esse; quod et rationi et cæteris phœnomenis conforme est; notandum vero conum obscurum infra telam conspici priusquam hæc demissa ad locum pervenerit, in quo conus, trans flammam conspectus, desinere videtur. Hoc autem inde provenit quod conus obscurus, apicem versus, trans flammam conspici nequeat ob intensitatem luminosi involucri quo circumdatur; cum igitur spatium obscurum a vaporibus sevi non conflagrantibus occupatum in flammâ adesse nobis compertum sit, facile intelligemus fieri posse ut in flammam corpora maxime combustibilia immittantur quin ullo modo ignem concipiant, dummodo in obscurum conum detineantur; et reipsa cl. Murray in *philosophical magazine* narrat se spatulâ eburneâ in flammam candelæ pulverem tormentarium introduxisse, eumque extractum humidum fuisse : imo affirmat se per plura minuta secunda argentum fulminans in obscuro flammæ cono conservasse, quin detonaverit; ego, aliis corporibus combustibilibus adhibitis, eadem phœnomena observavi. Intelligi nunc potest, cur in candelâ ellychnium non omnino igne consumatur, licet valde combustibile sit et a flammâ circumdetur : occupat enim spatium in quo nulla occurrit combustio; inde etiam cùm longitudine multum accreverit, adeo ut lucidam flammæ partem tangat, brevi ad extremitatem consumitur. Sed causa defectûs combustionis circa ellychnium unde repetenda? An ideo quod oxigenium athmosphæricum huc penetrare nequit, sicut videtur pluribus physicis? An ex eo quod sevum magnam calorici quantitatem, dum vaporisatur, latentem reddens vapores circa ellychnium existentes infra temperaturam eorum combustioni necessariam refrigerat? Hæcce explicatio unice admittenda mihi videtur; etenim cum in conum obscurum flammæ candelæ virgam ferream mediocriter crassam eamque usque ad album calefactam horizontaliter immersi, conum obscurum magnâ ex parte evanescere, flammamque subito vividiorem fieri observavi : quo in-

dicatur vapores sevi conum obscurum constituentes, candente ferro, sat calefactos fuisse ut ignem ex parte conceperint; quod impossibile, si oxigenium in cono obscuro deficeret. Notandum vero istud phœnomenon instantaneum esse, quia virga ferrea calorem rubrum celeriter amittit; patet igitur conum obscurum in flammâ candelæ a frigore, quod vapores sevi nascentes continuo producunt, originem trahere; inde etiam major fit, cum, ellychnio crescente, sevi vapores copiosius evolvuntur; nec dubitandum quin ad conum hunc formandum frigor, substantiæ combustibilis volatilisatione productus, sufficiat, cum numquam flamma superficiem illius corporis tangat cujus vaporibus formatur, sed certo intervallo ab ipsâ semper remota maneat : præterea si calor ad combustionem determinandam sufficiens in cono obscuro adesset, pulvis tormentarius qui oxigenii athmospherici contactum, ad flagrandum, non requirit, in ipso comburi deberet, quod nullo modo fit. Objicietur fortasse hydrogenii flammam, aliasque ubi nulla fit volatilisatio, conum obscurum etiam exhibere; sed gazum in flammæ centrum continuo affluens frigus ibi producere debet, cùmque celeritate magnâ flammam ingrediatur, aërem athmosphericum plus minusve arcet a loco ubi in flammam prorumpit, impeditque sic ne in centro flammæ combustio rite peragatur : his autem ex causis conus obscurus in illis flammis produci debet, multo minor tamen quam in flammis liquidorum ac solidorum corporum, idque observatione comprobatur.

14. Si candelam accensam sibimetipsi relinquimus, quin superfluum ellychnium abscindamus, necessario hoc longius fit, quia in flammâ tantummodo incomplete comburitur (13) : simul major fit quæ tempore statuto consumitur sevi quantitas, flammæque calor ac lumen multum imminuuntur ; plures hujus phœnomeni causæ extant : primùm, auctâ ellychnii longitudine, augetur et ipsius massa quæ particulis carbonis e flammâ in illud depositis adhuc accrescit, et proinde hoc capite ellychnium flammam magis refri-

gerat; dein majorem, auctâ massâ, luminis flammæ copiam intercipit, aëremque fortius ab interiori flammâ arcet; demum cum majorem liquefacti sevi copiam admittat, major quoque hujus quantitas in vaporem abit; unde fortior sevi consumptio majusque productum frigus : ex his liquet intensitatem flammæ, aucto ellychnio, multum imminui, vaporesque sevi vel substantias in quas flammæ calore resolvuntur combustionem partim effugere debere : hinc fumus ille copiosus, quem candela, ellychnio non resecto, fundit.

COMBUSTIONIS CAUSÆ.

15. Expositis quæ corpora conflagrantia exhibent phœnomenis, de combustionis causis agamus. Demonstratum innumeris experimentis a celeberrimo Lavoisier fuit, recentiorumque chemicorum laboribus confirmatum, corpora omnia, non nisi initâ cum oxigenio combinatione, in aëre athmospherico comburi; combustionem, cessante hâc combinatione, sisti, oxigeniumque omnes fere combustiones alere, et proinde ut præcipuum combustionis agens posse considerari. Sed non oxigenium tantum, ut credidit Lavoisier, sed etiam chlorum quasdam alit combustiones. Neminem enim latet multas substantias hydrogenio imbutas in chloro conflagrare : sic candela accensa in hunc gazum immissa per aliquod tempus conflagrare pergit quia sevum hydrogenium continet, cujus cum chloro affinitas maxima est. Verum hoc in casu, omnia sevi elementa combustioni non inserviunt, quia chlorum pro carbone non sat magnam affinitatem habet. Hinc in aëre athmospherico, ubi totum fere sevum comburitur, multo intensior observatur flamma candelæ.

16. Combustio igitur a combinatione corporis cujusvis cum alio corpore et præsertim cum oxigenio dependet. Sed unde ex tali connubio caloricum et lumen emergunt? Quod ut intelligatur attendendum huic principio : *quotiescumque corpus, moleculis sibimet invicem propius admotis, in spatium minus contrahitur, calori-*

cum semper emittit. Cum autem corpus quoddam cum oxigenio vel chloro sese combinat, propiores evadunt eorum moleculæ, et proinde caloricum emitti debet. Præterea si, ut ratione et experimentis quibusdam indicatur, lumen non nisi caloricum modificatum sit, facile intelligitur calorici emissi partem quamdam in lumen posse converti, hocque evenit cum corpus conflagrans adeo calefactum est ut radios calorificos eâ, quâ pollet lumen, refrangibilitate præditos emittat (*); et quidem, teste experientiâ, corpora tunc tantum lucida evadunt cum eorum temperatura 550 aut 600 graduum est. Inde perspicies cur multæ oxigenationes sine calorici et luminis emissione peragantur : caloricum enim sufficiente copiâ non semper evolvitur, ut corpora combustibilia calore rubro perfundantur. Quod autem condensationi quam oxigenium chlorumve et sæpe etiam corpus combustibile in combustione experiuntur, caloris et luminis emissio attribuenda sit, probant sequentia : 1°. Oxigenium et chlorum forti percussione in tubo vitreo condensata caloricum et lumen emittunt. 2°. Corpora combustibilia solida vel liquida etiam caloricum nec non lumen compressione emittere posse probavit Dessaignes. 3°. Quo major est corporum conflagrantium condensatio, eo, cæteris paribus, major calorici emissi copia, ut patet hydrogenii combustione. 4°. Quando condensatio fere nulla est, parum calorici sæpiusque nullum lumen emittitur. Sic cum oxigenium corpori solido infixum alii copori offertur et cum hoc combinationem, alterâ solutâ, init, nullum persæpe caloricum emergere cernitur. Hinc etiam intelligitur cur dum combinatio corporis combustibilis cum oxigenio lentissime peragitur, licet hoc in statu aëriformi sit, nullus qui percipi queat calor emittitur, ut in lentis metallorum oxidationibus cernere est. Hoc enim in casu pedetentim evolvitur caloricum,

(*) Vide commentationem meam de identitate luminis et calorici, in annalibus acad. leod. anni 1819-1820.

ita ut quod singulo temporis momento emittitur nimis parvum sit ut percipi queat. Non prætermittendum tamen quasdam esse combustiones quæ supradictam theoriam valide infirmare videntur : sic oxigenium cum carbone sese combinans non solum non statum aëriformem amittit, sed carbonem etiam hunc in statum trahit, licet calorici et luminis copia ingens evolvatur. Imo in pulveris tormentarii inflammatione oxigenium nitro infixum una cum carbone a solido ad aëriformem transit statum, copioso licet emisso calore. Quæ ut explicentur, supponit Bruguatelli gazum oxigenium cum corporibus quandoque sese combinare magnâ caloris sui parte servatâ, hocque tantum in casu posse combustionis phœnomenon producere, dum corpora illa deserens in alia feratur ac cum iis connubium ineat. Berzelius vero supponit corpora combustibilia et oxigenium in diverso electricitatis statu versari, et, cum uniuntur, electricitates oppositas neutralisari, eâque neutralisatione caloricum et lumen combustionis produci : sed cum hypotheses istæ phœnomenis non rite consonent, iis difficile creditur. Facilius crederetur, me sentiente, in connubio carbonis cum oxigenio, hujus moleculas ab illius moleculis minori distare intervallo, quam eo quo in utroque corpore segregato moleculæ integrantes, vel quo in acido nitrico potassæ infixo azoti et oxigenii moleculæ ab invicem distant, etiamsi acidum hocce acido carbonico densius sit; sed hæc densitas præcipue pendere videtur ex intervallo quod inter moleculas *integrantes*, minime vero ex illo quod inter *constituentes* moleculas intercedit. Cum igitur oxigenium nitrum derelinquens ut carboni uniatur, compositum efformat in quo moleculæ constituentes sibi invicem propiores sunt quam in acido nitrico, ut majori inter ipsas affinitate res indicatur, caloricum et lumen istâ combinatione evolvi posse credo, licet moleculæ integrantes novi compositi, ob debiliorem inter ipsas attractionem, ita inter se disponantur ut gazum efforment. Sic etiam condensationi tribui licet lumen et caloricum

quæ in carbonis aut in pulveris tormentarii combustione evolvuntur. Cum corpora aëriformia, pari massâ, multo plus calorici contineant quam corpora solida et liquida majoremque in combustione subeant condensationem, patet in combinatione oxigenii cum corpore solido, ab illo præcipue caloricum et lumen emissa procedere, dum in combinatione ejus cum aëriformi corpore, hoc etiam emissioni calorici contribuat; idque sane ratio est cur fluida elastica majorem, quam corpora solida, calorici copiam combustione emittant. (6)

Nota. Cum perpaucæ sint combustiones quæ alio gazo quam oxigenio aluntur, istæque nihil peculiare exhibeant, lectorem moneo de iis solum quæ ab oxigenio pendent, in posterum sermonem esse.

17. Quoniam combustio mutuum corporis combustibilis et oxigenii contactum requirit, sequitur corpus in aëre libero non posse conflagrare, nisi aër ipsum circumdans, simul ac oxigenium suum combustione amiserit, renovetur. Hæc autem renovatio ipsâ combustione determinatur. Aër enim corpori flagranti proximus calore recepto levior factus, statim superiora petit, ejusque in locum succedit aër frigidior puriorque, qui subinde etiam calefactus suum æque locum puriori aëri occupandum ascendens cedit, hicque aëris fluxus, ut continuetur combustio necessarius, tam diu perdurat quam diu conflagrat corpus. Inde intelligitur cur candela accensa in tubo sat longo inferius clauso ad fundum usque demissa brevi extinguatur, impedito aëris circa flammam fluxu.

18. Vidimus ut corpus aliquod conflagret, necessario requiri ut cum oxigenio in contactu sit: verum hæc non unica conditio est ad ejus combustionem requisita. Debet insuper affinitate pro oxigenio sat magnâ gaudere, seu ad classem combustibilium, ut aiunt, corporum pertinere, sufficientique pollere temperaturâ. Cum igitur corporis combustibilis combustionem determinare volumus, illud cum oxigenio in contactu ponere, ejusque, quantum opus est, tempera-

turam augere debemus. Non tamen omnis corporis massa calefacienda, nec postquam conflagrare incepit, caloricum ad protrahendam combustionem ipsi adjungendum est, sufficit unam corporis partem ad temperaturam combustioni necessariam evehere; combustio tunc ab hâc parte incipit, et cum calor ab eâ evolutus partibus vicinis sese communicet, hæ eodem modo igne corripiuntur, combustioque ita propagabitur, totaque comburetur massa si caloricum emissum corpori flagranti temperaturam necessariam conservet. Si vero, ut fit in carbone segregato, calor productus justæ temperaturæ corpori servandæ impar sit, combustibili paulatim refrigerato, combustio cessabit; conjunctis autem pluribus carbonibus iisque ita dispositis ut aër per eorum intervalla fluere possit, caloricum combustione copiosiùs emittetur, aptâque temperaturâ combustibili servatâ, perget combustio.

19. Gaza combustibilia oxigenio mixta si uno in puncto inflammantur, combustionem instantaneam explosione stipatam subeunt; hujus phœnomeni rationem facile intelliget qui consideraverit gaza massâ infinite minori quam corpora solida pollere, majorem vero caloris copiam suâ combustione evolvere (6): hinc enim perspicitur caloricum puncto massæ incenso emissum sufficere posse ut totam massam ad eum temperaturæ gradum quo combustio ejus determinatur, subito evehat (*). In massâ nimis extensâ fieri tamen poterit ut solum misturæ partes puncto incenso proximæ hujus calore incendantur; sed cum caloricum illarum combustione evolutum reliquam massam subito inflammet, combustio totius massæ, licet non uno temporis momento peracta, insensibili tamen temporis spatio propter maximam celeritatem quâ per totam massam serpit ignis,

(*) Excipiantur gaza quæ calorem sat fortem combustione suâ non emittunt difficiliusque connubium ineunt. Sic azotum oxigenio mixtum in loco tantum in quo scintilla excitatur electrica comburitur; nullam enim exhibet explosionem, numerumque scintillarum fere infinitum requirit ut totum comburatur.

absolvitur, ideoque ut instantanea haberi potest. Cum autem calor tali combustione evolutus fortem ac celerem in massâ expansionem producat, fieri haud potest quin accedat explosio. Si calor puncto cuivis misturæ explosivæ admotus inflammationi producendæ impar est, sed lentam tamen combinationem misturæ procreare potest, caloricum minori emittitur dosi quam ut tota massa subito inflammetur, nec combustio instantanea, nec proinde explosio observatur; misturæ vero combinatio lente ac successive absque ullâ luminis evolutione peragitur : licet vero lentâ hacce combinatione non satis calorici evolvatur ut miscela lucida sit, fieri tamen poterit ut corpora firma, minori calore lucentia (6), in illam immissa, ardentia evadant; et revera Davy filum tenuissimum platini hoc modo calore rubro perfundi posse reperiit. (*)

20. Si misturæ explosivæ proportionibus rite determinatis factæ aliud misceatur gazum, ignisque dein illi admoveatur, facile conjicies quæ adventura sint; etenim si gazum alienum magnâ dosi mixturæ immistum est, non poterit hæc in puncto incenso solitâ cum intensione conflagrare, calorque istâ combustione evolutus debilissimus erit, sicut ille qui combustione in aëre vitiato peractâ producitur, nec proinde massæ explosivæ inflammandæ sufficiet, idque præcipue quod gazum superadditum permultum calorici fluido explosivo detrahat. Combustio igitur misturæ explosivæ, licet in puncto incenso fiat si ignis sat intensus ipsi apponitur uti ex supradictis (9) aliisque experimentis, de quibus postea (26), indicatur, non tamen ultra progredi poterit, cumque calor ac lux puncto massæ incenso evoluta, cum igne apposito sese confundant, mistura proprietate inflammabili omnino destituta apparebit; quod et experientia commonstrat. Ex dictis facile erues sequentia. 1°. Miscelæ explosivæ, quæ minimum ad conflagrandum calorem exposcunt, maximam fluidi elastici commiscendam copiam requirunt ut

(*) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, p. 347.

explosio impediatur et vice versâ. Hoc experientia plane confirmat. 2°. Quo frigidius est gazum misturæ explosivæ immixtum, eo majorem habet cohibendæ explosionis vim. Sic aquæ bullientis vapor, testante Davy (*), majori copiâ adhiberi debet quam gaza frigida ut explosio impediatur. 3°. Quo densius est gazum misturæ additum, quove majorem pro calorico capacitatem gerit eo facilius explosionem cohibet. Hujus tamen regulæ quædam dantur exceptiones quæ ab ignotâ circumstantiâ pendere videntur. Sic protoxidum azoti quod triplò fere oxigenio densius est, capacitatemque pro calorico majorem habet, minori tamen, teste experientiâ, hydrogenii cum oxigenio miscelæ explosionem cohibendi virtute pollet. An hoc autem non proveniret ex eo quod oxigenium in protoxido azoti magis condensatum sit et proinde ad ineundam combinationem aptius? An ex eo quod melius caloricum ducendi virtute polleat? Quemadmodum misturæ explosivæ inflammatio gazi cujusvis admistione, ita etiam sufficienti per imminutam aëris pressionem (**) rarefactione impeditur. Hoc enim in casu æque ac in præcedenti imminuitur materiæ quantitas quæ in loco ubi ignis apponitur conflagrat, et proinde minor ab ipsâ evolvitur calor quam ut tota miscelæ massa inflammetur. Sed facile concipimus misturæ particulas rarefactione magis quam gazo superaddito ab invicem remotas esse debere ut inflammatio reddatur impossibilis, quia gazum istud præterquam quod particulas dispergat, eas etiam refrigerat : sic hydrogenii cum oxigenio miscela quæ, volumine per oxigenii additionem

---

(*) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 284.

(**) Calore enim quantumvis rarefacta miscela explosiva non modo non virtutem explosivam amittit, sed et inferiori temperaturâ explosionem subit, quod non mirum ; etenim mixturam calefactam pauciori ad conflagrandum egere calore docet ratio.

triplicato, virtutem explosivam amittit, octodecuplo rarior debet esse facta ne fiat explosio.

21. Corpora combustibilia solida vel liquida quæ infra temperaturam caloris rubri in vaporem abeunt, conflagrare nequeunt nisi in vapores reducta sint, quia caloricum ad combustionem eorum requisitum volatilisatione ipsis perpetuo detrahitur. Sic camphora, sevum, oleum, alcohol, etc. solummodo flammâ conflagrant; hæcque certâ distantiâ ab eorum superficie semper remota stat, propter magnam quam volatilisatio ibi latentem reddit calorici copiam : temperaturæ autem gradus quo corpora ista flammam concipiunt tam a facilitate quâ in vaporem abeunt quam ab eorum pro oxigenio affinitate dependet; et revera si perficimus ut corpus vapores majori copiâ exhalet, citius quoque, teste experientiâ, flammam concipiet; sic phosphorus in vacuo pneumatico positus, cum vapores copiosius emittat, quam sub atmosphæræ pressione, fortiori fulget luce, minorique indiget calore (quod et observavit Bellanni de Monza (*)) ut flammam fundat; ita quidem ut, si lanugine obducatur quo vaporum et caloris præsertim eorum combustione evoluti dispersus impeditur, ignem sponte in vacuo pneumatico concipiat, quod jucundissimum visu (**). Item mixtura (*alliage*) stamni et plumbi ferro ardenti in vacuo imposita, fumum emittit atque etiam flammam. Eadem autem mixtura in aperto aëre, propter atmosphæræ incumbentis pondus, ne fumum quidem qui visu percipi possit emittit. (***)

22. In corporibus quæ e combustibilibus et oxigenio aliis affixo substantiis constant quorumque calor novis combinationibus productus major est eo qui ad oxigenium vinculo chemicæ conjunc-

---

(*) Thenard, Traité de chimie, 2me. édition, tom. 1, pag. 175.

(**) *Vide* Annales de chimie, tom. 21, mémoire de Mr. Van-Marum.

(***) Newton, lectiones opticæ, quæst. 11.

tionis solvendum requiritur, combustio semel incepta absque aëris concursu continuatur. Sic in pulvere tormentario ex sulphure, carbone et nitro composito, cum nitrum oxigenium azoto et potassæ unitum abunde contineat, oxigeniumque ab his multo minori disjungatur calore quam qui suâ cum sulphure et carbone combinatione eruitur, patet grano uno pulveris calefacto, oxigenium a nitro grani separatum et in carbonem et sulphur delatum, hâc conbinatione caloricum vividissimum evolvere, quo, calefactis vicinis granis, oxigenium ab eorum nitro æque separatur et cum carbone et sulphure sibi proximis connubium init, sicque combustio per totam serpit massam. Notandum vero combustionem diversimode peragi secundum proportionem eorum qui pulverem componunt et modum quo miscela confecta sit. Si enim ista proportio combinationi oxigenii cum carbone et sulphure quam maxime apta misturaque homogenea sit, combustione fere instantaneâ tota pulveris massa, uno licet in puncto solum accensa, conflagrabit : cujus rationem facile comprehendet, qui parvâ pulverem ad conflagrandum egere temperaturâ, permagnam vero calorici quantitatem combinatione oxigenii cum carbone et sulphure evolvi consideraverit. Si vero pulverem componentium proportio minus perfecta, miscelaque minus intima sit, lentior erit combustio sæpeque nullâ explosione stipata.

MEDIA QUIBUS COMBUSTIO INTENSIOR REDDITUR.

23. Vidimus (18) ut corpus combustibile conflagrare possit, duo requiri ; nempe gazum combustioni sustentandæ aptum et calorem ad combustionem determinandam sufficientem. Hinc duplex combustionis augendæ methodus : vel oxigenium majori copiâ corpori flagranti suppeditandum, vel sufficiens calorici quantitas ipsi tum servanda, tum subministranda est. Pluribus autem modis oxigenium corpori flagranti exhibetur : sic 1°. directe in corpus conflagran dirigi potest quod follibus et calamis fit, quorum actio eo efficacior

4.

quo oxigenium quod continent densitate majore gaudet, ac gazis alienis minus mixtum est. 2°. Indirecte in corpora ardentia oxigenium dirigitur, cum acceleratur aëris fluxus qui semper circa ipsa fit (17), et hoc medium ad flammarum intensitatem augendam præcipue adhibetur. Quæcumque igitur illi aëris fluxui favent ejusque celeritatem adaugent, combustionem intensiorem reddunt, eâque ratione utilitatem maximam exhibent tubi caminorumque spiracula quæ supra corpora flagrantia eriguntur : aër enim qui combustioni inserviit, vapores fuliginosi et gaza combustione producta, calore quem a corporibus ardentibus acceperunt, dilatata et proinde aëre exteriori leviora facta, in his tubis ascendunt; ibique dispergi cum nequeant, columnam aëris calidi componunt, quo tubi brevi calefacti fluidis insequentibus calorem conservabunt, quem in aëre libero, ubi disperguntur, ascendentia subito amitterent. Duplex igitur hisce tubis vel caminorum spiraculis commodum inest : impediunt enim gazi calefacti fumique dispersum, nec calorem nec inde sequentem dilatationem iis auferunt, et proinde illa in columnam aëris calidi cogunt. Quæ columna aëre exteriori levior magnâ cum celeritate in prædictis tubis eâque majori quam in aëre libero, ob majorem temperaturam, ascendit; aër frigidus ac purus majori proinde copiâ tempore dato ad corpora combustibilia affluit, sicque eorum combustionem auget. Affluentis aëris celeritas cum tuborum longitudine crescit : ratione enim et experientiâ constat aëris in tubo ascendentis calorem ipsiusque proinde ascensionalem vim eo magis decrescere quo a corporibus conflagrantibus magis recedat, idque multo celerius in brevi quam in longo tubo fieri, quia in hoc aër ascendens tardius atmosphæræ temperaturam induit. Alia adhuc eaque multo pretiosiora commoda caminorum spiracula exhibent. Educunt enim gaza noxia, fumumque combustione producta, quæ in interiorem domum si irrumperent, aërem ibi vitiarent. Quam ob rem veteres quorum camini nullis instructi erant spiraculis, focos

in aperto aëre constituere debebant, cumque interiora cubicula calefacere desiderarent, utebantur focis portativis, in quibus substantias parum fumidas comburebant. Mox, vivente nempe Horatio, aperturas in apice ædificiorum supra focos construebant, quibus nonnisi incomplete erumpebat fumus. Hoc saltem indicare videntur isti Horatii versus :

> Sordidum flammæ trepidant rotantes
> Vertice fumum.
>
> Oda X, lib. IV.

Quamquam in Homero, Herodoto et Aristophane quædam caminorum spiraculis armatorum vestigia reperiantur, videtur tamen eorum inventionem a Senecæ temporibus computandam esse (*). Multum vero tum aberat ut eâ gauderent perfectione ad quam sæculo præterito ipsos adduxere Ganger, Franklin et Rumfort : sed missâ de caminorum spiraculis longiori narratione, hoc unum dicam, ea quæ super focos cameris calefaciendis inservientes posita sunt non solum ita disponi debere ut aëris circa ignem renovationi quam maxime faveant; sed insuper, ut impediant ne fumus refluat, ut majorem, quam combustioni opus est, aëris frigidi copiam in cameram non trahant, caloricumque, quantum fieri potest, eâ quæ igni incumbit superficie, in cubiculum reflectant. Physici formas hunc ad finem aptiores indicârunt, quas enarrare longius foret. Qui plura desiderat, consulat doctum opus *Mécanique du feu*, 1713, *par Ganger*, eaque quæ de caminologiâ scripserunt Franklin, Rumfort et Clavelin.

3°. Alio adhuc modo potest oxigenium corporibus conflagrantibus, idque magnâ copiâ offerri; eorumque proinde combustio augeri; nempe si ipsis immisceantur substantiæ quæ oxigenium abunde

---

(*) Senecæ, epist. 70.

continent illudque facillime cedunt, ut nitrum vel chloras potassæ.

4°. Ultimus tandem combustionis, oxigenii ope, augendæ modus est, si corporum conflagrantium superficies, eâdem manente massâ, adaugetur. Inde enim puncta corporis numerosiora cum oxigenio in contactum veniunt, et proinde combustio, rapidior facta, caloricum abundantius evolvet, ideoque intensior erit. Sic flamma lampadis, cui forma conica est, quæque hoc capite plus minusve obstat quin aër sufficienti copiâ in interiora ejus penetret ut quidquid illic combustibile sit penitus comburatur, intensior fit minoremque fumi copiam fundit, cum, depresso ellychnio, illius superficies augetur.

24. Combustionis augendæ altera methodus in eo consistit ut corpora conflagrantia a frigore, quantum licet, defendantur et ut ipsis caloricum continuo subministretur. Sic si flamma mixturæ hydrogenii et oxigenii calamo Newmanni expressæ in corpora flagrantia dirigatur, eorum combustio mirum in modum augetur. Simili modo si calorem flammæ serves, imo augeas, lumen ab eâ emissum multo intensius erit. Physicos enim non latet clarissimum Rumfort, constructis lampadibus in quibus plura ellychnia plana situ parallelo posita flammisque operta semetinvicem a frigore tuentur, lumen produxisse sexaginta candelarum lumini æquale; nec lucis intensitatis quam hoc modo attingere possumus limites determinari posse putat; quod pharis utilissimum esse potest. (*) Ex dictis luculenter patet, combustionem, ut quam maxime intensa fiat, requirere ut, conjunctis unâ et alterâ methodo, tum oxigenii, tum calorici copia sat magna corpori flagranti exhibeatur. Id autem quodam modo in perfectioribus caminis ac lampadibus obtinet, quæ non solùm aëris fluxum circa combustibilia accelerant, sed et hisce calorem conservant. (**)

(*) Histoire de la 1ère. classe de l'institut de France, an 1811.

(**) Ann. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 344.

MEDIA QUIBUS COMBUSTIO REPRIMITUR.

25. Expositis combustionis augendæ mediis, facile intelligetur quænam adhibenda sint ut reprimatur vel etiam ut omnino impediatur. Duplici viâ id fieri potest; vel corporibus flagrantibus contactu oxigenii privatis, vel eorum temperaturâ diminutâ. Aqua corporibus conflagrantibus injecta utroque modo combustionem reprimit. Aërem enim athmosphæricum ab eorum superficie arcet, et in vaporem abiens permagnam calori copiam ipsis detrahit. Quod liquidum cum tantâ ad reprimendam combustionem vi polleat facileque et sufficienti copiâ obtineatur, omni ævo ad extinguenda incendia præ cæteris mediis adhibitum fuit. Notandum vero aquam, si non eâ quantitate in combustibilia effunditur ut maximam ipsis calorici partem auferat, eorum combustionem augere potius quam reprimere, si corpora conflagrantia essent oxigenii avidissima, ut carbo, ferrum, etc. : his enim in casibus decomponeretur aqua, præberetque tum magnam oxigenii copiam, tum gazum maxime inflammabile quibus fieret intensior combustio : et revera observatum novissime est vaporem aquæ ex arcto tubo prosilientem plurium corporum combustionem, cum in ea dirigitur, augere (*); quod non nisi decompositione aquæ fieri potest, licet rem alio modo sese habere putet inventionis auctor Dana. Quin etiam fabri, quos non latet illa aquæ proprietas, pulvere carbonis humido utuntur cum ignem acerrimum producere cupiunt.

26. Media quibus corpora flagrantia contactu oxigenii privantur ad combustionem impediendam, hæc, veluti omnibus notissima, non describam (**). Quod vero ad frigus attinet, ejus in reprimendâ

(*) Annales générales des sciences physiques, t. 2.

(**) Cl. Gay-Lussac nuperrime reperiit linteum phosphate ammoniaci imbutum, igne apposito, non comburi; idque ideo fit, quod, caloris actione dispulso

combustione efficaciam multa exempla commonstrant, quorum mihi satis erit pauca referre. Corpora conflagrantia frigidis corporibus iisque magnæ massæ imposita extinguuntur priusquam eorum combustio in totum peracta sit (*); corporibus autem minus densis minorisque voluminis imposita omnino comburuntur. Flamma quoque frigore subito extingui potest; cum enim in ipsam frigidum immittitur corpus quod temperaturam illius infra gradum combustioni necessarium imminuit, flammam pallescere subito necnon extingui, cernitur. Ex frigoris actione repetenda quoque est ratio cur flamma telam metallicam sat strictam permeare nequeat et inter transeundum extinguatur. In universum flammæ multo celerius frigore extinguuntur quam corpora solida, quia minori massâ præditæ citius caloricum deperdunt. Si calor flammæ sufficienti copiâ ad eam extinguendam non subtrahitur, minus intensa solum apparebit multoque plus fumi fundet : sic si flamma candelæ per orificium ipsâ aliquantulo angustius transit, videmus non solum ejus dimensiones verum etiam calorem et lumen multum imminui, fumumque abundantem fundi, quod incompletæ combustionis signum: coarctato autem paululum orificio, flamma subinde supra illud extinguitur, licet sat calefactum sit ut ejus transitum vix impedire queat. Ratio hujus extinctionis simplicissima est. Imminutâ enim magnitudine flammæ, imminuitur calor ab eâ productus, ita ut frigori ab affluente aëre frigido caloricique radiatu inducto haud resistere queat (**). Quam ob rem eo minor reddi potest flamma quo

---

ammoniaco, acidum phosphoricum residuum substantiam combustibilem induat eamque ab aëris contactu defendat. Alia adhuc salia in eundem finem adhiberi posse expertus est cl. Hemptinne (*ann. gen. des sc. phys.*, *t.* 6, *p.* 168 *et suiv.*)

(*) Musschenbroeck, Traité de physique, t. 2, p. 423.

(**) In telâ metallicâ foraminum exiguitas flammæ combustioni non obstat, quia magnitudo flammæ inde non imminuitur.

minori ad conflagraudum calore indigeat. Sic, v. g. minor cum sulphure quam cum hydrogenio, hocque cum gazo minor quam cum oleo componi potest flamma. Hinc etiam intelligitur cur conus obscurus in quem superius flammæ candelæ segmentum abit, cum ab infericri, telæ metallicæ ope, sejungitur, flammam vix concipiat, vel parvâ tantum cum intensitate, admoto igne, conflagret. Illud enim segmentum, si inflammatum esset, cum flammâ telæ subjacente in contactum non venit (10) ideoque ab ipsâ contra frigus non protegitur : adde ad hoc quod tela ipsa refrigeret, et proinde non sat altâ temperaturâ gaudebit flammæ segmentum ut combustione perfectâ conflagret. Simile exhibet phœnomenon candela in aëre vel vitiato vel rarefacto accensa. Defectus enim quantitatis sufficientis oxigenii primariam sed non immediatam candelæ extinctionis causam constituit : cum combustio hoc in aëre necessario incompleta sit, non satis calorici evolvitur ut fluidis combustibilibus temperatura ad propagandam combustionem necessaria servetur, hâcque ratione extinguitur flamma, ut experimentis allatis (9) luculenter patet. Ex eo etiam quod miscela explosiva, sive rarefacta, sive alii gazo mixta non satis caloris combustione suâ in puncto incenso evolvat, ratio habetur, cur non tota massa comburatur. Etenim calefactâ miscelâ ita ut minori calore ignem concipiat, inflammatio illius determinari potest. Sic Davy rarefactâ hydrogenii et oxigenii misturâ eo usque ut scintillâ electricâ non posset amplius inflammari, partem superiorem tubi gaza continentis calefecit donec vitrum mollescere inceperit, tuncque electricitate per miscelam transmissâ, observavit lumen debile haud longe in tubo sese extendens, ita ut sola gazi pars calefacta inflammari videretur. (*) Hoc experimento etiam patet miscelam explosivam, licet inflammationi concipiendæ impar sit facta, tamen in loco ubi ignis appo-

(*) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 267.

nitur debere conflagrare ut supra (20) dictum; idque etiam ex eo deduci posset quod gazorum combustibilitas rarefactione non imminuatur ut Davy reperiit (**). Plura adhuc notatu digna phœnomena ex frigoris in combustione reprimendâ actione procedunt; sic 1°. charta tenuis laminæ ferreæ apte applicata flammam, admoto igne, non concipit nisi ferrum contiguum temperaturam sat intensam acquisierit ut chartam suo calore incendere possit. 2°. Charta aquam continens sine ullo detrimento flammæ cuipiam applicatur, et aqua in ebullitionem rapi poterit, quin comburatur charta. Simili modo globus plumbeus linteo tenui apte involutus, appositâ flammâ, liquefit, quin linteum flammæ contiguum igne corripiatur. In omnibus hisce casibus cum charta vel linteum corpora tangant caloricum optime ducentia, quibus calor ad conflagrandum necessarius ipsis aufertur, combustio eorum peragi nequit, nisi ille, quo conflagrant, caloris gradus corporibus istis insit. Ast cum charta et linteum caloricum male ducant, magnam inter ignem et corpus refrigerans tenuitatem exhibere debent : aliàs enim eorum quæ igni proxima stat superficies comburi poterit, integrâ manente alterâ.

Proprietatem frigoris supra expositam consideranti in mentem poterit venire combustiones intensiores esse debere æstivo quam hiberno tempore : contrarium vero docet experientia hocque non mirum. Hieme enim aër densior est quam æstate, parique volumine majorem oxigenii quantitatem continet, et proinde combustioni alendæ aptior est.

(**) Annal. de chim. et de phys., tom. 4, pag. 264.

THESES.

I.

Solutio imaginaria problematis impossibilitatis non semper signum.

II.

Methodus variationum ut mera calculi differentialis extensio haberi potest.

III.

Phœnomena electrica, galvanica necnon magnetica eidem principio adscribenda esse monstrat experientia.

IV.

Corporum colores non chemicâ eorum naturâ sed particularum tenuitate ac vi refringente dependent.

V.

Ebullitio ab evaporatione simplici multum differt : in illâ enim vapores ab omnibus massæ fluidæ punctis in universum procedunt; in hâc vero a superficie tantum.

VI.

Affinitatem chemicam ad attractiones electricas reduci posse haud puto.

VII.

Duo tantum oxida ferri admitti debent.

VIII.

Azotum et oxigenium in aëre atmosphærico non combinata sed permista tantum sunt.

IX.

Salium definitio, qualis in universum a chemicis datur, haud valet.

X.

Aërolithos e lunâ in terram esse missos hypothesis probabilior mihi videtur.

XI.

Substantiam simplicem in corpore organico vi vitali produci posse non credo.

XII.

Terram viâ humidâ ortum suum duxisse verisimillimum est.

FINIS.

N°. 98.

DISSERTATIO INAUGURALIS PHYSICA

DE

IDENTITATE FLUIDI ELECTRICI ET MAGNETICI,

DEDUCTA EX THEORIA A CLARISSIMO *AMPÈRE* PROPOSITA,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI H. M. GAEDE,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS SCIENTIARUM PHYSICARUM ET MATHEMATICARUM

DECRETO

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET SCIENTIIS PHYSICIS HONORIBUS AC PRIVILEGIIS

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITE AC LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die Februarii 1823, hora

AUCTOR

MICHAEL GLOESENER, EX HAUT-CHARAGE
IN MAGNO DUCATU LUXEMBURGENSI.

LEODII, TYPIS P.-J. COLLARDIN, TYPOGRAPHI ACADEMICI.
MDCCCXXIII.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 du Règlement.

DOCTISSIMIS

FACULTATIS SCIENTIARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM

PROFESSORIBUS

H. M. GAEDE,

C. DELVAUX,

J. M. VANDERHEYDEN,

R. VAN REES.

NEC NON VIRIS DIGNISSIMIS

MOLL ET SCHROEDER,

IN ACADEMIA RHENO-TRAJECTINA PROFESSORIBUS,

HASCE PAGELLAS IN PERPETUUM REVERENTIÆ ATQUE GRATITUDINIS MONUMENTUM DICAT ATQUE VOVET

Michaël Glœsener.

Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phœnomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phœnomena reliqua.

NEWTON, *princip. præfat.*

PRÆFATIO.

Jamdiu physici phænomena electrica inter et magnetica consensum quemdam observarant. Hunc consensum postea cognitis turmalini effectibus electricis multum confirmatum esse, in posterumque magis adhuc confirmatum iri, opinio generalior evadebat. Ast licet perplura ambobus fluidis essent communia, nihilominus, multis diversis magnetismi atque electricitatis effectibus cognitis, analogiam inter utraque fluida illusoriam esse et apparentem potius, quam veram, plures credebant.

Admirandi pilæ Voltaicæ effectus quidem denuo faciebant, ut physici utriusque fluidi eandem esse causam, idemque principium conjicerent, effectus longe diversos, quos ambo edunt fluida, ab ejusdem tantum principii modificatione dependere dicentes. Diversa tentabantur experimenta, ut inter utraque fluida analogia physica detegeretur; ast labor erat irritus: frustra quærebatur id, quod nodum difficultatis solvisset, nimirum documentum ex quo constaret, fluidum electricum attractiones et repulsiones magneticas edere posse. Veram magnetismum inter et electricitatem existere affinitatem, demonstrandum *Oerstedio* reservabatur.

Quod in hunc usque diem physicis erat incognitum, videlicet electricitates, quæ per conductorem, polos apparatus electrici conjungentem permeant acum magneticam afficere, hoc nunc nos docent *Oerstedii* experimenta nuperrima, qui observavit, eundem polum acus magneticæ ad aliam terræ plagam deturbari, quum supra

acum conductor galvanicus eique parallelus, quam quum infra eandem ponatur; et ad aliam rursus regionem amoveri, si conductor ab acus latere dextero, ac si ab ipsius sinistro collocetur; ac demum apparatum inversum phænomena exhibere inversa.

Eandem rem ingeniose exploravit clar. *Ampère*, qui nos docuit, duos conductores electricos pila clausa pro conditione postea determinanda sese repellere aut attrahere, eosque, quum ad contactum pervenire possint, motu peracto sibi invicem conjunctos manere, quamdiu ipsa pila activa maneat. Idem auctor plurima alia circa eandem materiam detexit. Demum pauci sunt physici, qui non circa eam rem tentamina variatis apparatibus instituerint. *Arago*, *Davy*, pluresque alii electricitatem galvanicam non tantum sed etiam electricitatem, quæ frictione excitatur, magnetismum ferro impertiri experti sunt. Porro electricitates actiones chimicas edere, phænomena perplura docent. Itaque maximam probabilitatis speciem præ se fert opinio, fluida electrica revera producere attractiones et repulsiones magneticas. Cuncta illa phænomena, quæ inter duos conductores, apparatus electrici polos conjungentes, et quæ inter unum conductorem et unum magnetem seu ferrum magnetismo nondum præditum obtinentur, *phænomena electro-magnetica* primum dicta, sive communi nomine *electro-magnetismi* designata fuerunt. *Ampère* denominatione *electro-magnetismi* tanquam impropria habita, phænomena, quæ inter duos conductores electricos, inter unum conductorem et magnetem et demum inter duos magnetes eveniunt, una voce *electro-dynamica* appellat, quippe quod experimentis monstrare conatur, singula illa phænomena ab electricitate produci, quum hæc *se moveat*. Itaque triplicis generis effectus electrici distingui queunt.

1mo. Phænomena attractionis et repulsionis momentanea, quæ electricitates, interrupto suo æquilibrio naturali, in corporum superficiebus distributæ in statu quietis edunt, quæque *Ampère electro-statica* vocat. Hujus generis exemplum nobis præbent fila metallica

apparatus electro-motorii elementa opposita jungentia, sed a se invicem separata. 2do. Phænomena chimica quæ conductores pilæ Voltaicæ producunt, quum simul in contactum ponuntur cum corporibus, quæ decompositiones chimicas subire queunt. Demum 3^{tio}. phænomena, quæ fila conjungentia producunt, quum inter se et cum extremitatibus pilæ electricæ oppositis intimum alunt commercium, quæque supra *electro dynamica* a clarissimo *Ampère* vocari diximus. Hic physicus sagacissimus cuncta illa phænomena ad unam eandemque causam electricam reduxit: in suæ theoriæ basin posuit phænomenon ab experientia demonstratum et præterea admisit, sed simul variis experimentis confirmare studuit, in planis magnetis axi perpendicularibus circa magnetem et quidem circa quamlibet illius particulam fluere in directione motus solaris apparentis (si magnetem situm naturalem in meridiano occupare supponimus) fluctus electricos similes fluctibus, qui conductores electricos juxta longitudinem percurrant.

« *Oerstedius* ad eadem phænomena explicanda admisit electricitates positivam et negativam, conductorem in directione opposita transeuntes, lineam spiralem sinistrorsum factam, cujus spiræ fere circulares sint, describere, negativamque acus magneticæ polum borealem repellere et australem attrahere, positivam autem repellere australem et attrahere borealem. »

« *Faradey* supponit fluctus electricos magnetum et conductorum electricorum axes perpendiculariter ambire inque lateribus oppositis vim monstrare oppositam. Sententiam suam propriis suis experimentis roborat. »

« *Wollaston* et alii admittunt, electricitate per conductorem longitudinaliter transeunte, fluctum electricum oriri, qui conductorem perpendiculariter ambiens magnetes afficiat inque lateribus oppositis vim oppositam producat. »

« *Berzelius*, *Munckius* aliique admittunt, electricitate per con-

ductorem transeunte, vires magneticas, quæ quidem naturæ electricæ sint, excitari, easque in quibusdam tantum conductoris locis condensari, ita quidem, ut, si concipiamus, duas lineas in axi conductoris perpendiculares sese sub angulo recto aut recto proximo secare, a puncto intersectionis versus utramque extremitatem ejusdem lineæ dirigatur vis positiva et ab eodem puncto versus utramque extremitatem alterius lineæ dirigatur vis negativa. Quibus de singula intersectione transversaria dictis, intelligimus, in duobus planis sese sub angulo fere recto secantibus, et simul per conductoris axin transeuntibus præsertim sitas esse vires, quæ phænomena attractionis et repulsionis inter duos conductores, necnon inter unum conductorem et unum magnetem producant. Dictam sententiam, quam plures rejiciunt, alii tamen ardenter defendunt, propius quidem examinare conatus fui, ast missis iis omnibus hoc loco mens mihi solummodo est breviter doctissimi *Ampère* theoriam de phænomenis electrodynamicis exponere, eamque expositam pluribus phœnomenis applicare. Priusquam de ipso argumento disseram, prævia quædam phænomenis rite intelligendis necessaria præmittere non inutile duco. Dicam igitur.

§. 1mus.

Quid sit tensio et quid fluctus electricus.

Quando vi electro-motoria inter duas electricitates in corporibus existentes æquilibrium tollitur, ipsæ electricitates in partes oppositas propelluntur ita quidem, ut in una extremitate positiva, et in altera negativa accumuletur; at vis, qua ambæ sese expandere, inque unionem mutuam inire conantur, intenditur; quod si tum nullus adest conductor, mediante quo hæc conjunctio efficiatur, electricitates inclinant aut tendunt continuo ad mutuam conjunctionem, ast ad eam pervenire nequeunt, quam ob causam in statu *tensionis electricæ* esse dicuntur. Hujus rei exemplum nobis præbet pila,

polis haud conjunctis. Quod si vero conductoris ope apparatus electrici poli conjungantur, per illum electricitates in directione opposita transeuntes ad mutuum contactum, adeoque et ad mutuam conjunctionem perveniunt. Verum quum vis electro-motoria in pilæ elementis haud agere desinat, continuo novæ electricitates evolutæ ad polos propelluntur, et inde per conductorem transeuntes denuo se conjungunt. Atque ita decompositionibus ac compositionibus electricis pro gradu majoris aut minoris conductibilitatis conductoris sibi invicem sine intermissione succedentibus, continuum electricitatis fluxum in conductore ali, dicitur, quam ob causam ipse ille status electricus vocatur *fluctus electricus* (*Courant électrique*). Hic fluctus effectus prodit valde diversos ab effectibus, quos electricitas intensa producit, eique omnia debentur phænomena electrodynamica, itaquidem, ut fluctus directionem sequens inversam, phænomena edat inversa, quare summi momenti est 1mo. fluctus directionis sensum definire, 2do. ipsius directionem, quocunque apparatu electro-motorio adhibito, determinare et de polorum acus magneticæ denominatione convenire, quæ scire necesse est, ut inter experimentorum eventus harmonia observari queat.

§. 2dus.

Directionis fluctus electrici definitio.

In pila aperta celeberrimum *Volta* auctorem habente, elementorum contactu ambæ electricitates ex conjunctione sua naturali separantur, liberæque factæ, directiones sequuntur oppositas, ita ut electricitas positiva ad unam pilæ extremitatem tendat, et negativa ad alteram : jam vero nulla est ratio, cur eadem electricitatum separatio non obtineat in pila clausa æque ac in aperta; unde sequitur, per filum polos apparatus conjungens electricitatem positivam ab elemento positivo percurrere ad negativum, et ita porro, quamdiu ipsa pila maneat activa; et eodem plane modo electricitatem nega-

tivam in directione contraria per conductorem ab elemento negativo positivum versus, et ab hoc per pilæ conductorem liquidum ad polum negativum permeare. Cognita itaque directione electricitatis positivæ, simul cognoscimus, in quem sensum moveatur negativa, quam ob causam cum *Ampère*, *Gilbert* et pluribus aliis physicis per expressionem *fluctus electrici* intelligimus *fluctum electricum positivum*, sub-intelligendo electricitatem negativam per conductorem fluere in directione contraria. Ast si apparatus simplices adhibeantur, fluctus electricus positivus quidem ab elemento positivo tendit ad negativum, sed viam suam non per filum conjungens, verum per conductorem liquidum sumit, unde fit, ut a negativo per conductorem transeat ad positivum (a cupro ad zincum), utque proinde fluctus electricus in omni apparatu electro-motorio quidem ab elemento positivo ad negativum fluat, sed tamen in conductore pilæ Voltaicæ directionem contrariam sequatur, quam in conductore apparatus simplicis; quam ob causam fieri oportet, ut utroque apparatu in eundem situm v. g., in meridianum magneticum collocato, polisque homogeneis ad eandem terræ regionem v. g. ad meridiem conversis, idem polus acus magneticæ ad regionem oppositam amoveatur. Hisce dictis, monendum restat, aliquos ex physicis *polum borealem* vocare dimidiam partem cujuslibet magnetis, quæ vi magneticæ terrestri exposita omni motu peracto septentrionem respiciat et *australem* nuncupare partem, quæ meridiem spectet; alios e contrario *polum australem* appellare partem ad septentrionem spectantem, et *borealem* dicere partem oppositam, quam denominationem et nos in sequentibus sequemur.

PARS PRIOR.

THEORIÆ CLARISSIMI AMPÈRE DE PHÆNOMENIS ELECTRO-DYNAMICIS EXPOSITIO.

§. 1mus.

Actio reciproca inter duos conductores electricos.

OERSTEDIUS actionem reciprocam inter acum magneticam et conductorem electricum *primum* observavit : ast doctiss. *Ampère* detexit *primus*, quos effectus in se invicem producunt duo conductores electrici : nimirum duorum apparatuum electricorum polis conjunxit duo fila metallica parallela in eodem plano horizontali posita, quorum unum fixum et alterum mobile erat, sed ita suspensum, ut priori perfacile, sibi ipsi parallelum manens, accedere, vel ab eo discedere posset; quibus præstitis auctor vidit, fluctu electrico per utrumque filum simul transeunte ambo fila se mutuo repellere, quando fluctus per ea in directione opposita transibant, et contra sese attrahere, quando fluctus in eadem directione transibant, simulque animadvertit fila, quum ad mutuum contactum pervenissent, sibi invicem conjuncta manere in modum duorum magnetum, polis heterogeneis juxta-positis. Idem experimentum repetiit, quum conductores in plano verticali collocaret ita, ut mobilis fixo sibi parallelo accedere vel ab eo amoveri posset. Pariter illud in vacuo pneumatico æque ac in aëre felici cum successu instituit, necnon confirmatum vidit, quum fila cum unius ejusdemque pilæ polis communicarent, adeo quidem ut istius phænomeni veritas extra omnem dubitationis aleam posita sit.

Itaque quum electricitates *moventur*, effectus producunt valde

diversos ab effectibus, quos edunt in statu *tensionis*, quippe quod fila eandem pilæ electricæ extremitatem conjungentia sese attrahunt et unita manent, contra, electricitate quiescente, duo fila se non attrahunt, nisi quum communicent cum electricitatibus oppositis, et postquam in contactum pervenerunt, aut subito se repellunt, aut vi ipsius contactus electricitates oppositæ saturatæ in se nullam amplius actionem exercere queunt.

2do. *Ampère* experimentis demonstravit, duos fluctus electricos se mutuo tali modo afficere, ut, quæcunque eorum sit directio, vi actionis reciprocæ conductor mobilis transferatur in eam positionem, in qua ambo sint paralleli, in eundemque sensum directi. Hanc positionem monstravit, quum in plano verticali disponeret duos rectangulos, quorum unus fixus erat, et alter mobilis, qui circa axin verticalem utrique communem libere moveri poterat ita, ut modo ipse cum fixo in eodem plano verticali comprehenderetur, ipsiusque crura fixi cruribus essent parallela, utque modo mobilis crura cum fixi cruribus diversos angulos formare possent (1). Hisce effectis utrumque conductorem cum pila electrica conjunxit; at quum fluctus paralleli essent, et in eundem sensum dirigerentur, conductor mobilis e suo situ haud amotus a fixo attrahebatur; sed fluctibus per conductores in directione contraria transeuntibus, per aliquot momenta quidem in quiete relinquebatur, verum vi actionis reciprocæ crura conductoris mobilis a fixi cruribus ita afficiebantur, ut mobilis a fixo amoveretur, donec semiperipheria descripta, fixo iterum parallelus esset et uterque fluctus eamdem directionem sequeretur. Quod si conductor mobilis cum fixo angulum faceret quemcunque, fixus mobilem in eum situm transposuit, in quo fluctus essent paralleli et in eundem sensum directi.

---

(1) Vid. Mémoires sur l'action mutuelle de deux courans électriques, etc., par M. Ampère, 1820, pag. 23.

Ad idem argumentum probandum, *Ampère* filum metallicum ita incurvavit, ut ex eo duos faceret rectangulos in eodem plano verticali dispositos ea-ratione, ut eorum cruribus verticalibus in eandem rectam cadentibus horizontalia parallela essent, atque fluctus electricus in utroque rectangulo directionem oppositam sequeretur. Talis conductor motu perfacilis, pilæ extremitatibus junctis in omni positione quiescit, quippe quod ab actione terrestri conductores electricos afficiente, uti infra videbimus, sed tamen in nostro casu in utrumque rectangulum effectum edente contrarium, dirigi haud potest. Dei/aliud filum, cujus unam partem cum una pilæ extremitate junxerat, duxit ita ut in directione horizontali quacunque infra partem horizontalem et inferiorem conductoris mobilis, sed ei proximum extenderet, tumque ad alteram pilæ extremitatem reduceret: Fluctu electrico per utrumque conductorem simul transeunte, eadem omnino auctor observavit phœnomena, quæ jamjam indicavimus.

Præcedentium experimentorum eventum theoria quoque prævidet, namque si ex duobus conductoribus horizontalibus, qui in eodem plano verticali comprehensi se mutuo attrahunt, mobilem e suo situ in plano horizontali ita moveamus, ut cum fixo angulum faciat successive crescentem, utriusque conductoris partes, angulum inter se facientes acutum, sese attrahere pergunt, quia ambo fluctus in eundem sensum diriguntur, et necessario adhuc se attrahunt, cum angulum rectum faciunt; at quum angulus fit obtusus, partes conductorum angulum constituentes obtusum, attrahere se continuant, sed partes angulum acutum facientes sese repellunt, quia fluctuum directio contraria est, verum illæ attractiones et repulsiones conspirant, ut conductor mobilis transferatur in situm, in quo conductori fixo parallelus sit, et fluctus electrici in eundem sensum dirigantur.

---

(1) Exposé des nouvelles découvertes sur l'électricité, par Ampère et Babinet, 1822, p. 12.

3tio. Experimentis *Ampère* comparavit, quamnam actionem conductor rectus et sinuosus a recto haud multum differens in alium rectum ederent. Eum in finem conductori sinuoso in situm verticalem posito paralellum et in eodem plano verticali comprehensum erexit alium rectum, et in medio inter utrumque intervallo, sed iis parallelum collocavit conductorem mobilem. Ne conductorum partes, quarum actionem reciprocam physicus haud observare voluit, effectum observandum complicarent, eas ita disposuit, ut multum a conductore mobili distarent, prætereaque partes æquales æqualiterque distantes actionem oppositam ederent. Hisce peractis conductores apparatus electro–motorii extremitatibus conjunxit ea ratione ut per omnes tres conductores simul fluctus electricus eandem directionem sequeretur, quæ quum ita essent, conductorem mobilem in quiete relinqui observavit, quod signum erat, eum a sinuoso et recto vi æquali attractum fuisse, at mobilis aut recto aut sinuoso paululo propius admotus ad eum accessit, ipsique adhæsit, quippe quod propter minorem distantiam fortius attraheretur, oportebat. E contrario fluctu electrico per conductorem sinuosum et rectum fixum in eadem, per mobilem vero in opposita directione transeunte, mobilis inter utrumque situ gaudens symmetrico in quiete mansit; sed conductorem mobilem sive recto sive sinuoso paululo propius positum subito repelli vidit, donec rursus situm symmetricum inter utrumque occuparet, ex quibus sequitur, in priori casu conductorem rectum et sinuosum in mobilem repulsionem æqualem edidisse, in posteriori vero proximiorem effectum repulsivum majorem exercuisse. Itaque conductor rectus et sinuosus a recto parum differens se ejusdem longitudinis et eundem fluctum transmittens æqualem effectum produc~~ent~~ (1) quod argumentum verum esse quoque videmus, decom-

(1) Vid. Exposé des nouvelles découvertes sur l'électricité et le magnétisme, par *Ampère* et *Babinet*, 1822, p. 13 et 14.

posita qualibet particula partis sinuosæ in duas alias, quarum una est verticalis et altera horizontalis. Summa partium verticalium adæquat conductorem rectum; partes autem horizontales in alium conductorem, a quo æqualiter distant, fluctus transmittunt ita directos, ut dimidia illorum pars directionem oppositam sequatur quam altera pars, unde liquet ambas partes sibi invicem æquilibrio tenentes nullum in corpora ambientia effectum edere posse. — Ex facto jam exposito eruitur, proportioni parvæ curvilineæ fluctus electrici substitui posse portionem rectam a curva haud multum diversam, verum quum portio curvilinea repræsentari quoque possit per duas vel tres rectas, directionem quamcunque sequentes, etiam quælibet parva portio rectilinea per duas vel tres alias rectas in sensus arbitrarios directas repræsentari potest, quo principio posito *Ampère* feliciter explicavit actionem reciprocam conductorum rectorum angulum inter se facientium, ad quam rem inintelligendam supponamus, duas lineas in se esse perpendiculares, et secundum utramlibet ab anguli apice extremitates versus dirigi fluctum electricum; sumamus in utralibet duas portiones æquales, ad æqualemque distantiam ab anguli apice sitas, atque utramlibet portionem in duas alias decomponamus in se perpendiculares, qua decompositione facta, duæ portiones per quatuor repræsentantur, eosdem, experientia magistra, effectus edentes, atqui ex illis quatuor duæ sunt parallelæ, quæ se attrahunt, quia fluctuum directio eadem est: duæ aliæ in eandem rectam cadunt, quæ se pariter attrahunt, quippe quod fluctus in iis directionem sequitur oppositam, atque *Ampère* experimentis demonstravit, duos fluctus electricos eandem lineam in eadem directione sequentes, sese repellere et contra sese attrahere, si secundum eandem lineam in sensum inversum dirigantur (1). Demum actio duorum fluctuum unius portionis decompo-

(1) Vid. Annales de chimie et de physique, par MM. *Gay-Lussac* et *Arago*, tome XXI, Septembre 1822, p. 47.

sitæ perpendicularium in duos fluctus alterius portionis decompositæ, *Ampère* docente, nulla est. Si itaque eadem ratione singulas unius fluctus partes cum singulis fluctus alterius ad æqualem ab angulo distantiam sumptas comparemus, videmus, duos fluctus electricos angulum inter se facientes, sese mutuo attrahere, si ambo ab anguli apice avertantur, et proinde eos adhuc se attrahere, quum ambo anguli apicem versus dirigantur, quia virium decompositione facta, fluctus parallelos, et qui in eandem rectam cadunt, sese attrahere perspicimus, unde simul patet, fluctus electricos sese repellere, quum unus angulum versus dirigatur, alter vero ab eodem angulo avertatur. Ex omnibus hucusque dictis, quæ experientia de actione reciproca inter duos conductores docet, *Ampère* conclusiones deduxit sequentes : »

I^ma^. *Fluctus electrici sese attrahunt, si paralleli in eadem directione per conductores apparatus electro-motorii transeunt, et contra sese repellunt, si paralleli in directione opposita transeunt.*

II^da^. *Quæcunque sit duorum fluctuum electricorum directio, si ex filis, quæ illi percurrunt, unum est fixum et alterum mobile, hoc autem non nisi in plano parallelo conductori fixo circa axin utrique perpendicularem moveri potest, vi actionis reciprocæ, filum fixum transponit mobile in situm, in quo ambo fluctus paralleli in eundem sensum diriguntur.*

III^lia^. *Attractiones et repulsiones inter duos conductores, pilam electricam claudentes, omnino differunt ab attractionibus et repulsionibus, quas electricitates in statu* TENSIONIS *existentes producunt.*

IV^a^. *Conductor rectus et sinuosus seu flexuosus formæ cujuscunque, a recto haud multum differens sed ejusdem longitudinis eundemque fluctum transmittens, eandem omnino actionem edunt in conductorem alium, a quo æqualiter distant.*

V^a^. *Quando fluctus electrici angulum inter se constituunt, attractio locum habet, si ita diriguntur, ut ambo anguli apicem*

versus fluant, aut ambo ab anguli apice avertantur. E contrario repulsio incidit, quum unus ex fluctibus anguli apicem versus dirigatur, alterque ab eodem avertatur. Quodsi vero conductores in eodem plano haud comprehendantur, loco apicis anguli sumenda est perpendicularis, distantiam brevissimam inter fluctus repræsentans.

Examinatis duorum conductorum electricorum actionibus reciprocis, analysi submittendi sunt effectus inter unum conductorem et magnetem, nec non inter ducos conductores.

§. 2^{dus}.

Phænomena, quæ conductor electricus et magnes interse exhibent.

1mo. *Ampère* meditatus novas proprietates, quas ipse inter duos conductores et *Oerstedius* inter unum conductorem et acum magneticam obtineri viderant, observavit, actionum *naturam* ex utraque parte eandem videri, eandemque causam, quæ dirigat, attrahat aut repellat conductorem electricum etiam dirigere, attrahere vel repellere acum magneticam. Verum quum phænomena inter conductores electricos ab eorum statu electrico et a particulari dispositione, quam electricitates subeunt, cum per conductores *moveantur*, dependeant, inde deduxit, similem dispositionem electricam, si in magnetibus juxta directiones determinatas existeret, cuncta producere phænomena magnetica, aliaque fluida, quam electrica admittere, meram et gratuitam esse suppositionem, et simul perspexit, ut singula phænomena electro-dynamica ab eadem causa proveniant, requiri, ut fluctus electrici magnetem quemlibet in planis axi perpendicularibus ambiant.

Hocce ratiocinium confirmaturus, *Ampère* magnetes, in quantum potuit, per conductores electricos repræsentare studuit. Eum in finem in helicem circa tubum vitreum curvavit filum metallicum, cujus unam extremitatem immediate cum uno pilæ electricæ polo junxit,

alteram vero per medium tubum ad alterum polum reduxit ita quidem, ut ipsius helicis axin quasi formaret.

Quam primum fluctus electricus per helicem transibat, eum a magnete admoto affici vidit eodem plane modo, quo alius magnes in helicis locum substitutus affectus fuit. Ab uno magnetis polo una helicis extremitas attracta et altera ab eodem polo repulsa fuit. Sive helix mobilis et magnes fixus, sive versa vice helix fixa et magnes mobilis erat, inter helicem et magnetem nulla occurrit differentia, in quocunque situ magnes respectu helicis poneretur, unde *Ampère*, magnetem ut conductorem electricum helici descriptæ similem habendum esse deduxit. Et quidem helicis extremitas polum *australem* (1) repræsentans ad *sinistram* et extremitas helicis vicem agens poli *borealis* ad dextram observatoris sita est, qui in fluctus directionem ita poritur, ut ipse, faciem conductorem versus convertat, et fluctus ab ipsius pedibus ad caput dirigatur, quamobrem *Ampère* quoque conclusit, fluctuum electricorum, quibus omnis vis magnetica adscribenda, directio talis sit, oportere, ut magnetis polus *australis* ad eorum *sinistram* et *borealis* ad *dextram* situs sit, si ea vocabula in sensu mox exposito sumantur, quod eo redit, ut dicamus, *magnetem in situ suo naturali, id est in meridiano magnetico positum fluctus electricos perpendiculariter ambire, adeo ut in facie superiore ab occidente ad orientem, et contra in facie inferiore seu terræ proximiore ab oriente occidentem versus dirigantur.*

2do. *Ampère* ad eam conclusionem corroborandam construxit duas helices modo jam dicto, easque suspendit ita ut in plano horizontali una fixa esset, alteraque mobilis, hæc autem in eodem plano horizontali facile sibi parallela ad fixam moveri, vel ab ea amoveri posset. At fluctu electrico in eadem directione per utriusque helicis latera proxima simul transeunte, helices se attraxerunt, et contra se repu-

(1) Qui septentrionem spectat.

lerunt, quum fluctuum directio in lateribus proximis esset opposita. Hisce effectis, primum in locum helicis mobilis, dein vero in locum helicis fixæ magnetem posuit, relicta altera helice; at fluctu electrico per helicem transeunte, attractio aut repulsio locum habuit, prout magnetis et helicis fluctus proximi simul in eundem aut in oppositum sensum dirigebantur. Tandem in locum utriusque helicis duos magnetes substituit, verum hi sese attraxerunt vel repulerunt, prout positi erant ita, ut eorum fluctus proximi paralleli in eundem sensum dirigerentur, vel ita ut iidem fluctus proximi et paralleli directionem contrariam haberent, quæ attractiones et repulsiones phænomenorum magneticorum legi conformes fuerunt.

3tio. Ut physicus gallus completam redderet demonstrationem, magnetes suum magnetismum fluctibus electricis debere, duas parvas acus magneticas adhibuit (1) et primum unam conducturi horizontali rectilineo, qui sibi parallelus libero ad alterum fixum in eodem plano horizontali moveri poterat, verticaliter affixit ita quidem, ut fluctus electrici in conductore fixo et acus facie (côté) proxima paralleli essent et in eundem sensum dirigerentur, deinde acum ita posuit, ut fluctus proximi paralleli essent et in sensum oppositum dirigerentur, quibus effectis et fluctu electrico per conductorem fixum transeunte, acus in priore casu attrahebatur et in posteriore repellebatur eodem plane modo, quo, acu remota, conductorem mobilem per quem fluctus transit, a fixo attrahi vel repelli convenienter legi primordiali §. 1mi. experientia docet.

Dein fluctu electrico interrupto, conductori mobili unam acum et fixo alteram in situ verticali affixit et quidem ita, ut fluctus in faciebus parallelis et proximis primo in eundem et tum ita ut in

(1) Ces aiguilles étaient garnies d'un double crochet, au moyen duquel elles s'adaptaient sur des conducteurs horizontaux dans une situation, où la ligne, qui joint leurs pôles, étoit verticale, et où leurs courans, toujours parallèles aux conducteurs, étoient à volonté dirigés dans les mêmes sens ou dans des sens opposés.

oppositum sensum dirigerentur; ast eadem phænomena occurrerunt, quæ, si in priore casu fluctus electrici per utrumque conductorem in eadem, et in posteriore in contraria directione transirent.

4to. Actionem inter acum magneticam et conductorem electricum *Ampère* accuratiori; examini subjecit; nimirum acum *astaticam* construendam curavit, quam, ne a magnetismo terrestri afficeretur, in eum situm collocavit, ut moveri haud posset nisi in plano perpendiculari in directionem, quam ipsi globus terrestris imprimit : supra acum, eique parallelum conductorem duxit, qui pilæ extremitatibus junctis acum amovit ea ratione, ut cum fluctu electrico angulum rectum faceret, polusque australis ad fluctus *sinistram* (1) situs esset, quam positionem acus constanter occupavit, postquam illius celeritas motu acquisita, peractis pluribus oscillationibus, nulla evasisset. Eam legem *Ampère* semper observavit, quæcunque fluctus directio, et quiscunque illius angulus cum axi acus magneticæ fuerit. Quod si fluctus quidem cum axi acus angulum rectum faceret, sed polus australis ad illius dextram positus esset, acus a conductore repulsa semi-peripheriam descripsit, ut ille polus ad fluctus sinistram poneretur, quem situm, quum acus teneret, integra illius massa a conductore attrahebatur.

Posuit pariter auctor magnetem in situ horizontali infra vel supra conductorem horizontalem, qui circa axiu verticalem moveri, nec tamen ab actione terrestri agitari, poterat, et conductor in eum situm transferebatur, in quo ipse in lineam magnetis polus jungentem perpendicularis, simulque polus australis ad fluctus sinistram essent, quo incidente casu fluctus proximi paralleli erant, in eundem sensum dirigebantur, et ipse conductor a magnete attrahebatur. Ut *Ampère* attractionem et repulsionem inter conductorem et magnetem ab ac-

(1) Ad dextram vel ad sinistram fluctus electrici idem est ac ad dextram vel ad sinistram observatoris ita in fluctus directionem collocati, ut fluctus ab illius pedibus ad caput dirigatur et facies magnetem versus convertatur.

tione directrice sejunctas observarent, acum magneticam in plano verticali, ne ab actione terrestri afficeretur, fili bombycini ope suspendit, illiusque lateri prope centrum admovit conductorem horizontalem, qui clauso circuitu electrico acum ad se attraxit aut a se repulit, prout fluctus proximi paralleli eandem aut oppositam directionem sequebantur.

Experimentis expositis *Ampère* sibi persuasit, conductorem mobilem a magnete fixo vel magnetem mobilem a conductore fixo dirigi, attrahi et repelli eadem omnino ratione, qua conductorem mobilem ab alio fixo dirigi, attrahi et repelli ab experientia edoctus erat. — Vidit, conductores heliciformes esse magnetes et vice versa magnetes esse conductores heliciformes; una facies magnetis, parallelipipedi formam habentis repræsentat conductores rectos numero infinito juxta se positos, et totus magnes ex conductoribus infinitis, juxta se positis componitur. Magnes a conductore electrico attrahitur et repellitur, quia ipse est conductor electricus. Duo magnetes se attrahunt, polis heterogeneis juxta-positis, et sese repellunt, polis homogeneis juxta-positis, quia duo magnetes juxta-positi sunt duo conductores heliciformes ita juxta-positi, ut in priore casu fluctus proximi et paralleli eandem directionem et in posteriore casu oppositam directionem sequantur.

Omnia phænomena exposita satis conspirare Cl°. *Ampère* videntur ad ostendendum, omnis magnetismi causam dependere a fluctibus electricis magnetes per transversum ambientibus, ast ut clare pateat, illos fluctus in magnetis axin perpendiculares esse, observandum est, quamlibet helicis portionem infinite parvam in duas alias decomponi posse in se invicem perpendiculares, quarum una helicis axi parallela est; altera vero in plano helicis axi perpendiculari dirigitur, nihilque aliud est, nisi portionis decompositæ in illud planum projectio, quod quum de singulis portionibus infinite parvis unius spiræ integræ valeat, videmus, omnes portiones decompositas, quæ axi parallelæ

sunt, æquivalere parti conductoris recti, quæ spiræ altitudinem exhibet (1), et contra omnes portiones decompositas in axin perpendiculares, simul sumptas æquales esse fluctui circulari, helicis in axin perpendiculari, unde patet, eadem decompositione cujuslibet spiræ facta, actionem helicis integræ æqualem esse actioni, quam producunt 1mo. fluctus juxta lineam axi parallelam et æqualem transmissus. 2do. tot fluctus in planis circularibus inque axin perpendicularibus fluentes, quot helicis sunt spiræ, ast pars rectilinea conductoris per tubi, circa quem helix formatur axin, transiens æquilibrium facit fluctui axi longitudinali parallelo, adeoque helicis descriptæ in magnetem aut conductorem electricum ambientem effectus unice producitur a fluctibus circularibus et comprehensis in planis axi perpendicularibus. At quum helix quoad agendi modum omnino magnetem repræsentat, ab iisdem effectibus ad easdem causas conclusione facta *Ampère* statuit, omnem magnetem suam vim magneticam debere fluctibus electricis lineæ polos jungenti perpendicularibus. Convenienter præcedenter dictis poli magnetum non a se invicem differunt, nec effectus, quos edunt, a vi prope extrema residente præcipue dependet, sed contra a cunctis fluctibus transversariis simul sumptis, quod *Ampère* videtur probasse *Boisgiraud*, qui ceræ ope parvulam acum magneticam supra aquam fluitare curavit, et dein in sit horizontali supra acum perpendiculariter posuit conductorem, perquem primo fluctus ab occidente orientem versus transibat et postea contra ab oriente accidentem versus. Quum pila clausa conductoris et acus fluctus proximi paralleli in eundem sensum dirigerentur, conductorque acus centro corresponderet, hæc quiescebat, quoniam

(1) L'ensemble des actions exercées par les petits courans parallèles à l'axe, équivaut à un courant égal en longueur au pas de l'hélice et parallèle à son axe, tandis que l'ensemble de toutes les actions des petits courans transversaux se réduit à celle d'un courant circulaire égal en longueur à la circonférence de la section du cylindre, par un plan perpendiculaire à son axe.

utraque illius extremitas vi æquali a conductore attrahebatur. Ast quam primum conductor sive polo australi sive boreali propius admoveretur, acus pars longior conductorem accedebat, donec rursus acus centrum infra conductorem positum esset; quippe quod major fluctuum numerus majorem attractionem edere, oportebat. Eodem modo, fluctibus parallelis proximis in sensum oppositum directis acus in quiete manebat, quum illius centrum e regione conductori poneretur, quoniam repulsioni utramque partem æqualis erat; sed mox ac conductor aut polo australi aut boreali propius collocatus erat, pars longior repellebatur acusque continuo magis magisque a conductore recedebat. Præcedens experimentum *Ampère* magnum pondus suæ theoriæ addere, opinatur, quum monstret magnetum polos ejusdem generis actionem edere, et ex cunctis phænomenis supra expositis, necnon pluribus aliis hoc loco omissis, conclusiones deduxit sequentes :

I. *Actiones magnetum et conductorum electricorum apparatus electro-motorii polos conjungentium ab eadem causa electrica dependent, magnetesque suum magnetismum debent fluctibus electricis, qui dispositi in curvis in se ipsas redeuntibus magnetem et quidem quamlibet illius particulam perpendiculariter ambiunt ita quidem, ut in facie superiore ab oriente ad occidentem et contra in facie inferiore ab oriente ad occidentem dirigantur, supposito nimirum, magnetem suum situm naturalem in meridiano magnetico occupare.* »

II. *Poli magnetici ejusdem generis actionem edunt; nec aliud inter eos intercedit discrimen, nisi quod polus australis a fluctuum sinistra et borealis ab eorum dextra situs sit.* »

III. Phænomena cognita inter duos aut plures magnetes nec non inter unum magnetem et unum conductorem pilam electricam claudentem, submissa sunt legi primariæ inter duos conductores observatæ.

3.

IV. *Communicatio magnetica in eo tantum consistit, ut particulæ chalybeæ et ferreæ disponantur seu propriæ reddantur ad fluctus electricos in planis transversariis producendos, quales actio electro-motoria pilæ galvanicæ, turmalinus calefactus etc. producunt*, cum ea tantum differentia, quod in magnete electricitates inter particulas homogeneas ejusdem corporis, ut boni conductoris excitatæ nunquam in statu *tensionis* existant sed fluctus electricos forment continuos, qui attrahant et repellant alios fluctus sive conductorum sive magnetum juxta legem §. 1mo. expositam.

Omnis quoque magnetismus terrestris fluctibus electricis adscribendus, uti modo propius visuri sumus.

§. 3.

Actio reciproca globum terrestrem inter et conductorem electricum.

Ut experiretur *Ampère*, quemnam effectum in conductorem mobilem ederet magnetismus terrestris, filum cupreum in circulum incurvavit, ipsiusque extremitates tali modo disposuit, ut cum duobus filis platinicis, pilæ electricæ extremitates oppositas perbene conjungentibus, communicarent, totusque conductor in plano verticali libere moveri posset (1). Quam primum per conductorem fluctus electricus transiit, ille vi actionis terrestris movebatur ita ut illius planum in meridianum magneticum perpendiculare poneretur, et fluctus electricus in parte inferiore seu terræ proximiore ab oriente occidentem versus dirigeretur. Quum physicus sagacissimus loco conductoris circularis exhiberet helicem, qualem supra descripsi, idem qui modo relatus, eventus erat. Quod si auctor conductorem quidem in eo situ collocaret, sed fluctus in parte inferiore ab occidente orientem versus dirigeretur, eum moveri, integramque semi-

(1) Vid. Mémoires sur les courans électriques, par Ampère, 1820, p. 43.

peripheriam describere vidit, ut illius planum in meridianum esset perpendiculare, et simul fluctus electricus in parte inferiore ab oriente occidentem versus flueret. Hanc veritatem pariter *Ampère* confirmavit, conductoribus aliarum formarum adhibitis, et nullus est physicus, qui de ea dubitet.

2do. *Ampère* quoque motum acus inclinatoriæ imitari studuit : hunc in finem unam illius acus sectionem transversariam repræsentavit per conductorem rectangulum, quem axi horizontali affixit ita æquilibratum, ut nullam subiens inflexionem perfacile pila clausa inclinaret; axin simul in meridianum magneticum ad perpendiculum posuit, ut nimirum actio terrestris integra in conductorem influeret, diversæque illius partes ab uno et altero axeos latere sibi æquilibrium facientes, in omni positione gravitati subducerentur. Rectangulus rite cum apparatus electro–motorii extremitatibus oppositis communicans movebatur et vi actionis terrestris in talem transponebatur situm, ut illius planum in acus inclinatoriæ directionem esset perpendiculare, simulque fluctus electricus ab oriente occidentem versus flueret per partem horizontalem meridiem spectantem, quæ tamen, ipso rectangulo quiescente infra planum horizontalem per axin transiens inclinabat. Rectangulus in omni alio situ positus movebatur adeo ut positionem jam dictam accederet; ibique peractis pluribus oscillationibus in quiete relinqueretur.

3^tio^. Demum *Ampère* monstravit uti supra dictum, acum magneticam in situ horizontali positam a fluctu electrico deturbari ita ut e sua positione amota angulum rectum faceret cum conductore, polusque *australis* ad fluctus *sinistram* poneretur, et probavit, fluctu electrico ab oriente occidentem versus fluente, polum australem septentrionem respicere, si acus supra conductorem posita ab actione terrestri haud afficeretur. Ex altera parte ab experientia edocti scimus, acum magneticam soli actioni terrestri expositam ita dirigi, ut omni motu peracto polus *australis* septentrionem spectet. Ex

experimentis 1mo. collatis cum dictis in §. 2do. *Ampère* intulit, conductorem mobilem ab actione terrestri haud aliter affici, ac si in tellure fluctus electrici in directione in meridianum magneticum perpendiculari ab oriente occidentem versus fluerent.

Ex experimento 2do. patet non solum phænomena declinationis sed et inclinationis ita evenire, uti fieri ea, fluctibus electricis tellurem ab oriente occidentem versus ambientibus, lex primordialis §. 1mo. jubet. Rectangulus quidem situm in acus inclinatoriæ directionem perpendicularem haud tenet, sed contra inclinat, ast hoc ita sit, oportet, quoniam a loci, in quo experimenta fiunt, facie meridionali plures fluctus siti rectangulum ad se terram versus attrahunt fluctum horizontalem ab oriente ad occidentem directum, quum contra a se altum versus repellant fluctum ab occidente orientem versus fluentem (1).

Experimentis 3tio. *Ampère* probavit, actione magnetismi terrestris in conductorem mobilem et magnetem omnino *eandem* esse, et quidem talem, qualem fluctus electricus ab oriente ad occidentem directus produceret, et directe monstravit, fluctum electricum ab oriente ad occidentem fluentem eundem, quem magnetismus terrestris, edere effectum, adeoque monstravit ab iisdem effectibus ad easdem causas conclusione facta, talem fluctum veram causam omnis magnetismi terrestris repræsentare. — Cunctis experimentis relatis innixus *Ampère* in principium statuit : « *omnem magnetismum terrestrem non aliam causam habere, nisi fluctus electricos, qui ab oriente occidentem versus fluant, in æquatore magnetico maxima intensitate gaudentes.* »

Ast quum fluctus electrici sunt causa magnetismi terrestris, et ex altera parte globus ipse verum repræsentat magnetem, cujus polus

---

(1) Vid. Exposé des nouvelles découvertes sur l'électricite et le magnétisme, par Ampère et Babinet, 1822, p. 23.

australis meridiem respicit, posito, omnem alium magnetem ita esse collocatum, ut ipsius polus australis meridiem et borealis septentrionem respiciat, in eo magnete juxta modo dicta admittendi sunt fluctus electrici qui ab oriente ad occidentem directi illius axin perpendiculariter ambiunt. Quod non solum conforme est, sed et magnum addit pondus argumentis §. 2do. expositis probantibus, quemlibet magnetem suam vim magneticam debere fluctibus electricis juxta sensum ibidem dictum directis.

Perfacile nobis persuadere possumus fluctus electricos in tellure oriri posse in directione motus solaris apparentis (ab oriente ad occidentem) vi terræ rotationis, radiorumque solarium in globum actione calorifica, et effectu magnæ copiæ substantiarum heterogenearum, quæ in vasto telluris sinu atque in ipsius superficie dispersæ mutuo suo contactu in se invicem agentes non possunt non producere diversos processus chimicos.

Porro variationes declinationis et inclinationis magneticæ haud difficulter explicamus, attendentes ad variationes, quas fluctus modo descriptus propter variam solis in terram intensitatem, variamque mutationem situs globi partium patitur.

Ut theoriæ Ampereanæ expositio absolvatur, examinandum modo remanet, quomodo conductoris electrici et magnetis actio identica sit, quum chalybi aut ferro magnetismo haud prædito vim magneticam impertiantur.

§. 4.

Methodus vim magneticam communicandi.

Arago experimentis probavit, fluctus electricos non solum agere in magnetes, sed et in corpora, quæ magnetismum recipere queunt. Limaturas ferreas et particulas chalybeas a conductore attrahi, ipsique inhærere expertus est, at fluctu electrico interrupto, subito

eas ab illo separatas observavit. Idem auctor monstravit conductorem rectum vim magneticam impertiri acui chalybeæ, quæ ipsi sub angulo recto admoveretur, et contra nullos polos excitari, quum acus conductori parallela poneretur. Experimentis ducti et theoriæ face illustrati *Arago* et *Ampère* filum metallicum circa ferrum magnetismo haud præditum in formam helicis involverunt, in spem erecti, fore ut, fluctu electrico per helicem transeunte, ferrum reciperet polos magneticos, eo ordine excitatos, ut polus australis ad sinistram et borealis ad dextram situs sit observatoris, qui in fluctus directionem positus faciem ad conductorem vertit et pedes ad eam partem, a qua ipse fluctus venit. Ea omnia complete ab experientia monstrata viderunt, et confirmata experimentis clar. *Davy*, qui in acubus chalybeis, quas conductori in planis in ipsum fluctum perpendicularibus admovit, excitaret polos juxta sensum modo expositum, supposito observatorem se sistere in conductoris latere acui admotæ proxima. Itaque experientia docet, (et theoria quoque facile prævidet), omnem magnetismi communicandi methodum in eo consistere, ut in chalybe et ferro magnetismo haud prædito fluctus electrici excitentur in planis axi perpendicularibus, qui eamdem, quam fluctus excitantes directionem sequantur. Unde elucet, inversa fluctus electrici directione simul polorum excitatorum ordinem inverti, quod et distincte nos docuit *Arago* (1); porro patet, acum chalybeam polos recipere oppositos, quum supra conductorem heliciformem ponitur, ac si intra eundem collocetur. Tamdem patet, conductores helici–formes ad perpendiculum positos in ferrum magnetismo nondum præditum excitare fluctus in ferro, qui eandem quam qui in helice sunt, directionem sequuntur. Verum enim vero quum magnetes nihil aliud sint quam conductores helici–formes, etiam

(1) Vid. Exposé des nouvelles découvertes sur le magnétisme et l'électricité, par *Ampère* et *Babinet*, 1822, p. 69.

eodem modo magnetismum aliis corporibus impertiantur oportet, quod quoque clare explicat *Ampère* (1).

In genere magnetes haud aliter agunt, ac conductores electrici, sed in interpretandis phænomenis caute observare oportet, fluctus magnetis particulas ambientes, omnes simul sumptos, non solum qui conductori electrico aut alteri magneti proximi sint, attractiones et repulsiones magneticas producere. — Unius fluctus in alterum actio non solum a mutua eorum distantia dependet, sed et ab angulo, quem eorum directiones inter se faciunt, quam ob rem sæpe fit, ut ex duobus fluctibus in alium tertium agentibus remotior majorem effectum edat, quippe quod actionum utriusque fluctus valoribus inter se comparatis patet, remotioris intensitatem magis crescere, si angulorum, quam decrescere, si distantiarum ratio habeatur.

Præcedentibus de ipsa theoria dictis, ad alteram modo argumenti nostri partem transeamus.

---

(1) Vid. loc. modo citato, p. 79-83.

PARS POSTERIOR.

THEORIA EXPOSITA PLURIBUS PHÆNOMENIS APPLICATA.

§. 1mus.

Duorum conductorum actionis reciprocæ explicatio.

Quum conductores electrici sunt paralleli, lex primaria §. 1mi. partis prioris ipsa explicatio est; ast si angulum inter se faciunt et præsertim si unus rectilineus est, alter vero ex pluribus partibus rectis aut curvis constat, difficilius est videre, quemnam effectum conductor rectus in singulas alterius conductoris partes exerceat. Hujus reiexplicationem quidem nobis suppeditat principium VItum. §. 1mi. partis prioris, sed quum illud principium ibidem haud fuse tractaverimus, idem hoc loco experimentis haud inconvenienter applicabimus. Doctissimus *De la Rive* exploraturus, qua ratione singulæ partes conductoris rectanguli mobilis ab actione terrestri afficerentur, quamlibet partem successive suppressit, et primo quidem inferiorem abstulit et dein superiorem, quibus effectis, pilaque clausa, eadem occurrerunt phænomena, quæ rectangulus integer exhibuisset, dummodo fluctus directio eadem maneret in partibus verticalibus. Hoc experimento edoctus *De la Rive*, rectanguli motum præcipue ab illius partibus verticalibus dependere, partem superiorem et inferiorem sumul suppressit; at fluctu electrico locum habente perspexit, duas partes verticales, per quas fluctus directionem habebat contrariam, et quæ non nisi circa axin utrique communem verti poterant, ita ab actione terrestri affici, ut quum quiescerent, illorum planum in meridianum magneticum esset perpendiculare, fluctusque electricus ascenderet per partem occidentem versus sitam

et descenderet per partem ad orientem vergentem. Tandem suppressis utraque parte horizontali et una ex verticalibus idem physicus vidit conductorem verticalem, propagantem fluctum electricum, ab actione terrestri in situm transponi, in quo illius planum per axin, circa quem ille vertebatur, simul transiens, in meridianum magneticum esset perpendiculare, conductorque ipse, fluctu descendente, orientem versus, et ascendente fluctu, occidentem versus poneretur, ex quibus auctor conclusit, fluctu electrico per ambas partes verticales simul vel ascendente vel descendente nullum motum oriri posse, quippe quod ambæ partes versus eandem regionem propellerentur, adeoque et ipsæ quiescerent, quod et experimentis monstravit.

Ampère et *Faradey* probarunt 1mo. conductorem horizontalem immobilem actioni terrestri expositum in omni positione sibi ipsi parallelum in una aut altera directione moveri, non aliter ac si a viribus parallelis et æqualibus singula illius puncta afficerentur, 2do. eundem conductorem in omni positione quiescere, si nonnisi circa axin per ipsius punctum medium transeuntem moveri posset, et contra eum motu continuo circa axin rotari, quum punctum suspensionis prope unam aut alteram extremitatem positum esset.

Jam videamus, quomodo paucis præcedentia experimenta ex legibus electro-dynamicis derivemus. — Supponamus, duos fluctus, haud in eodem plano comprehensos, esse in se invicem perpendiculares, unumque in situ horizontali ab oriente ad occidentem fluere, et alterum a Zenith ad Nadir priorem versus dirigi, et dein fingatur perpendicularis, ab uno fluctu ad alterum distantiam brevissimam indicans. Sumatur nunc portio aliqua in parte fluctus horizontalis inter perpendicularem et illius extremitatem orientalem sita. Hæc portio attrahit portionem quamcunque in fluctu verticali sitam, quia fluctus ambo perpendicularem versus diriguntur (principium V^{tum}. §. 1^{mi}. partis prioris). Pariter in parte fluctus horizontalis perpendicularem inter et extremitatem occidentalem sumatur altera

4.

portio priori similis et æqualiter a perpendiculari distans. Hæc eandem portiunculam verticalem, quam attrahit prior, repellit, quippequod unus ex fluctibus perpendicularem versus dirigitur, et alter ab eadem avertitur. Ast quum portio attrahens et repellens sibi invicem sunt æquales, juxtaque lineas obliquas æquales suos effectus edunt, effectus attractivus et repulsivus conspirant, eorumque resultans parallela esse debet fluctui horizontali, et in nostro casu resultantis fluctus directionem sequitur oppositam directioni fluctus horizontalis, id est ab occidente orientem versus. Itaque, quum de conductoribus integris valeat, quod de eorum portiunculis diximus, patet, conductorem verticalem mobilem moveri in situ parallelo conductori fixo, talemque assumere positionem, ut, si in plano verticali contineatur, hoc planum conductori horizontali sit parallelum, ipseque conductor vertatur versus extremitatem attrahentem, id est versus orientem. Eadem ratione videmus, fluctu electrico per conductorem verticalem ascendente, hunc moveri ita ut planum verticale eum comprehendens parallelum sit fluctui horizontali, ipseque ponatur versus conductoris fixi extremitatem occidentalem. Igitur ex dictis, convenienter legibus electro-dynamicis, eruitur lex sequens : « *Quando conductor mobilis, angulum rectum cum conductore fixo constituens, totus ab uno latere fixi et plani horizontalis in mobilem perpendicularis et per fixum simul transeuntis positus est, vi actionis reciprocæ movetur mobilis fixo parallelus, et quidem in directione opposita directioni fluctus conductoris fixi, si fluctus conductoris mobilis versus fixum fluit, et contra in eadem directione, si fluctus conductoris mobilis a fixo avertitur :* » ea lex nihil aliud est nisi enunciatio experimentorum doctissimi *De la Rive* paucis verbis alio modo prolata. Ea explicat, quare conductor horizontalis mobilis ab actione terrestri ita agitetur, ut sibi ipsi parallelus ad unam regionem vel ad oppositam moveatur pro varia fluctus directione per conducto-

rem mobilem permeantis, quia singula illius puncta a fluctibus parallelis æqualiter unam regionem versus attrahuntur vel repelluntur. Dein quare quiescat conductor, si axi verticali per ipsius punctum medium transeunte suspenditur, quoniam hoc in casu flultus paralleli, eum æqualiter afficientes, sibi invicem necessario æquilibrium faciunt. Et demum quare conductor continuo circa axin verticalem per unam ex illis extremitatibus euntem rotetur, quippequod si conductor mobilis parallelus est fluctibus terrestribus, et eandem sequitur directionem, illius extremitas libera attrahitur a fluctibus terrestribus, ita ut cum æquatore magnetico conductor angulum faciat; quodsi jam fluctus versus æquatorem fluat, eadem extremitas vi legis modo expositæ orientem versus continuo movetur; si fluctus iterum sunt paralleli sed in sensum oppositum directi, extremitas mobilis repellitur vi legis primariæ, ita ut fluctus conductoris cum æquatore magnetico angulum faciat et simul ab eo avertatur, quo in situ extremitas mobilis vi principii supra dati occidentem versus propellitur, atque hac ratione intellectu facile est, talem conductorem phænomenon rotatorium exhibere. — Ex præcedentibus in unum collectis, clare videmus, cur rectangulus electro-dynamicus vi magnetismi terrestris moveatur, donec situm in meridianum magneticum perpendicularem occupaverit, fluctusque electricus in parte horizontali inferiore ab oriente ad occidentem dirigatur; etenim si rectangulus alium situm quemcunque teneat, secundum superius dicta non solum partes illius verticales, sed et horizontales fluctus terrestres ita afficiunt, ut ille haud quiescere queat, donec conditio mox enunciata adimpleta fuerit.

Ita pariter in oculos cadit, fluctus terrestres non solum in conductoris spiralis aut circularis latera (côtés) terræ parallela et proxima agere, sed simul fluctus ascendentes et descendentes cum ipsis angulos facientes afficere ita ut, vi actionis integræ in singula latera editæ conductor non in quiete relinquatur, donec plana fluctus com-

prehendentia in meridianum magneticum sint perpendicularia, fluctusque in lateribus inferioribus ab oriente ad occidentem dirigantur, adeoque in lateribus occidentem spectantibus ascendant et contra in lateribus orientem inspicientibus descendant.

Ex dictis simul patet, acum magneticam magnetismo terrestri expositam non solum moveri vi fluctuum terrestrium et ipsius fluctuum prioribus parallelorum, sed et præterea vi eorum, qui in terrestres sunt perpendiculares. Acu meridianum magneticum occupante, fluctus proximi sunt paralleli, inque eundem sensum directi, sed etiam verticaliter ascendentes occidentem et verticaliter descendentes orientem inspiciunt, quemadmodum id supra quoad rectangulum vidimus, qui unam tantum sectionem transversariam magnetis, parallelippedi formam habentis, repræsentat. — Expositis perplura alia phænomena inter magnetem et conductorem explicatu haud difficiliora sunt, uti modo visuri sumus.

§. 2^{das}.

Explicatio actionis reciprocæ magnetem inter et conductorem electricum.

Quando acus magnetica supra conductorem horizontalem, per quem fluctus a meridie septentrionem versus transit, in situ parallelo ponitur, polus australis ad orientem declinat, et acu infra eundem conductorem posita, idem polus occidentem versus amovetur, quoniam convenienter principiis in parte priore expositis, acus ita declinet, oportet, ut fluctus conductoris et acus fluctus conductori proximi, sint paralleli in eundemque sensum directi, qui casus haud incidit, nisi quum acus in conductorem sit perpendicularis et in priori casu supra relato polus australis orientem et in posteriori occidentem respiciat, — quodsi conductor in eodem plano horizontali, in quo acus est, sed ab ipsius latere orientali collocatur, acus non

declinat, sed ipsius polus australis elevatur, at conductore a latere orientali collocato idem polus in plano verticali deprimitur, quia nimirum in priori casu *sinistra* observatoris versus *Zenith* et in posteriori versus *Nadir* sita est. Hic observandum, acum vix unquam ita declinare ut in conductorem sit perpendicularem, quemadmodum id lex primaria exigit, et ne in hac re anomaliam esse, credatur, animadvertendum, acus magneticæ declinationem a duabus causis dependere, nimirum a fluctu terrestri et a fluctu conductoris. Prior semper eandem sequitur directionem, posterior vero pro vario apparatus electrici situ variam sequitur directionem, adeoque hic vel ita collocari potest, ut utrique fluctus in eundem sensum directi conspirent ad acum in meridiano magnetico firmius tenendam, si v. g. fluctus conductoris ab oriente ad occidentem sub angulo recto infra acum in suo situ naturali positam transit; vel ita conductor collocari potest, ut ambo fluctus sibi invicem directe oppositi sint, quo in casu acus in quiete relinquitur, si fluctus terrestris fortior est fluctu conductoris, et si contrarium obtinet, in situm oppositum transfertur, semi-peripheriam describens vi excessus fluctus conductoris supra terrestrem. In cæteris positionibus acus declinat vi, cujus magnitudo et directio per resultantem utriusque fluctus indicatur. Ut itaque phænomena cum lege primaria quadrent, prius effectum magnetismi terrestris tollere oportet, quo præstito rei facta legi conformia esse clare probat experientia.

Mutata fluctus electrici directione in contrariam, phænomena occurrunt inversa.

Quando conductor verticalis, per quem fluctus electricus ascendit, primum inter polum borealem et centrum acus, in meridiano magnetico quiescentis et dein inter polum australem et ejusdem acus centrum ponitur, polus conductori proximior occidentem versus declinat, sive ille a latere orientali sive ab occidentali collocetur: namque conductore a latere orientali posito, fluctus paralleli et

proximi directionem sequuntur oppositam, adeoque polus proximior repellitur a conductore orientem versus. (§. 1mi.) At conductore ad latus occidentale collocato fluctus proximi paralleli eandem directionem habent, quare acus occidentem versus a conductore attrahitur.

Verum eodem conductore verticali posito e regione polo australi aut boreali, vel a latere occidentali vel orientali acus magneticæ, sed ante extremitatem (devant l'aiguille), et demum inter extremitatem et polum, polus borealis æque ac australis orientem versus amovetur. Ut hanc declinationem ad legem primariam reducere possimus, animadvertendum est, actionem reciprocam inter fluctum conductoris ac fluctus repellentes et attrahentes acus magneticæ non solum a distantia dependere, sed simul ab angulis, quos fluctuum consideratorum directiones cum lineis eorum puncta media jungentibus faciunt; ast si illorum angulorum ratione habita supponimus prope magnetem horizontalem positum esse conductorem verticalem, in cujus portionem unam infinite parvam æstimamus actionem duarum portionum infinite parvarum magnetis, quæ ambæ in eodem plano verticali per magnetem transeunte sitæ sunt, una autem posita est in linea intersectionis illius plani et magnetis faciei, quæ fluctus attrahentes et conductori parallelos continet, altera autem sita est in linea intersectionis plani verticalis cum facie opposita et priori parallela : verum calculus factu facilis monstrat, conductorem in tali collocari posse situ respectu magnetis, ut actio reciproca inter fluctus parallelos proximiores minor sit, quam inter parallelos remotiores, et *Ampère* formulis algebraicis demonstrare studuit, punctum, ubi attractio in repulsionem et vice versa mutetur, quoad conductores heliciformes in ipsis extremis residere, quoad magnetes autem ab extremitatibus paululum magis centrum versus remotum esse, si conductor verticalis a latere conductoris helicis vel magnetis horizontalis a centro versus extremitates successive amoveatur. Itaque conductore posito e regione illius puncti sive a latere orientali sive ab occiden-

tali, acus in quiete manet, quia vires oppositæ sibi æquilibrium tenent, quod et experientia docet. At conductore posito inter illud punctum et extremitatem, vel ante extremitatem, polus proximior declinat vi fluctuum remotiorum, quamobrem conductor a latere acus orientali positus polum australem æque ac borealem ad se successive orientem versus attrahit, quia fluctus remotiores paralleli eandem directionem habent; et conductore successive prope utrumque polum a latere occidentali collocato, ambos a se repellit orientem versus, quippequod fluctus remotiores in sensum oppositum diriguntur. Fluctus acus horizontales et in conductorem perpendiculares sese mutuo tollentes hic in computum haud veniunt. Eadem omnino res est, quum conductorem collocamus in situ horizontali juxta magnetem, qui in plano verticali fili ope suspensus moveri potest. — Si conductor non multum a magnetis centro et a latere ubi fluctus propinquiores in eadem directione fluunt, ponatur, magnetem ad se attrahit v. g. meridiem versus, et conductor a latere, opposito collocatus eum a se meridiem versus repellit, ast conductor directe infra magnetis extremitatem positus, magnetem ad se attrahit septentrionem versus, et simul vi fluctuum directionem sequentium contrariam, eundem magnetem a se septentrionem versus repellit, unde elucet, a conductore inter extremitatem et centrum collocato magnetem repelli versus regionem oppositam, ac quum ex illius regione ante extremitatem ponatur. Hac ratione quoque explicanda est declinatio orientalis, quum conductor verticalis directe ponitur e regione polo boreali vel australi acus in meridiano magnetico quiescentis. Ast notandum tamen, conductoris situm respectu acus magneticæ talem esse posse, ut effectus, observatus in omni positione, fluctibus propinquioribus attribuendus sit, v. g. quando infra conductorem fluctum positivum ab occidente orientem versus propagantem acus magnetica ceræ ope libere supra aquam natans sub angulo recto ponitur, attrahitur acus aut repellitur pro varia direc-

tione fluctuum proximorum, sive conductor e regione puncto inter polum et centrum sito, sive inter polum et extremitatem, sive demum e regione extremitati acus collocetur. Conductore prope acus punctum medium posito, æquilibrium locum habet; in cæteris autem positionibus pars longior attrahitur aut repellitur, uti primus *Boisgiraud* observavit (1). Ut ad oculum pateat, quare attractio in nulla positione mutetur in repulsionem, quamdiu conductor supra acum tenetur, et vice versa repulsio in attractionem, quum infra acum tenetur, seu aliis verbis quare in omni conductoris positione respectu acus magneticæ, fluctus proximi majorem actionem edant, animadvertendum est, magnetismum terrestrem et ipsius acus gravitatem impedire, ne hæc ab aliis fluctibus, quam qui axi longitudinali paralleli sunt, moveatur; quare virium decompositione facta non partes in axin perpendiculares, sed contra partes axi parallelæ tantum computandæ sunt, ast hæ cum lineis jungentibus conductorem ac fluctus repellentes et attrahentes, simul in eodem plano verticali sitos, angulos formant eo minores, quo proximiores conductori sunt fluctus magnetis; verum quum fluctuum intensitas per cosinum illorum angulorum multiplicanda sit, ut vis directrix habeatur, et ex altera parte cosinus decrescat quum angulus crescat, videmus, magnetis fluctus proximi non solum majorem in conductorem edere effectum, quia proximiores sunt, sed et ideo, quia sub angulis acutioribus actiones suas exerunt. Contrarium incidit, cum fluctus in axin perpendiculares acum dirigant. Hi decompositione virium facta, angulorum ratione habita, minorem edunt effectum, si proximiores sunt, quam ob causam cernere facile est, conductorem respectu magnetis in tali situ collocari posse, ut fluctibus remotioribus, non autem propinquioribus acus motus attribuendus sit.

Biot et jam ante eum *Oersted* observarunt, acum magneticam

(1) Vid. Annales de chimie et de physique, tome 15, p. 279.

in plano horizontali positam, e cujus regione in eodem plano sed perpendiculariter juxta-ponitur conductor, haud declinare, sed inclinare in plano verticali; etenim hoc in casu, si conductoris et acus fluctus paralleli inferiores in eundem sensum dirigantur, acus altum versus attrahitur; et dein in eundem sensum propellitur vi fluctuum parallelorum directionem contrariam sequentium, unde fiat, necesse est, ut acus polus proximior a conductore in plano verticali elevetur; et contra ut deprimatur, si conductoris fluctus in sensum oppositum dirigatur.

Præcedentibus haud difficilius est explicare phænomena rotatoria, quæ inter conductorem electricum et unum polum cujusdam magnetis, ex quibus unus mobilis et alter immobilis redditur, *primi* obtineri viderunt *Faradey* et *Ampère*. Etenim si in magnetis faciebus oppositis consideramus duo puncta symmetrice sita respectu conductoris, hunc unum ex punctis attrahit, et alterum reppellit; ast utriusque actione in duas alias decomposita, quarum una in conductorem perpendicularis est et altera ipsi parallela, videmus duas perpendiculares vim æqualem sed oppositam edere, adeoque sibi mutuum tenere æquilibrium, ab una autem ex duabus parallelis conductorem repelli et ab altera attrahi versus eandem regionem. Hæ parallelæ quidem, quibuscum præterea docente clarissimo *Ampère* conspirant fluctus excitati in mercurio, cui conductor et magnes immerguntur (1), motum translationis et non rotationis producerent, nisi celeritas acquisita quolibet momento mercurii resistentia tolleretur.

Expositæ theoriæ face perplura alia phænomena illustratu sunt facillima; sed eam ulterius applicare limitibus præscriptis prohibeor. Ipsa theoria est sane pulchra, suique auctoris ingenium sat superque monstrat. Experimenta ad eam confirmandam instituta sine

(1) Vid. Expériences relatives aux nouveaux phénomenes électro-dynamiques obtenues, etc. Mois de Décembre 1822, par *Ampère*, p. 148.

omni contradictione ingeniosa sunt, et methodus logica, qua usus auctor suam hypothesin demonstrare studuit, ipsius sagacitatis documenta præbet haud æquivoca. Verum quæri tamen potest, utrum singulis phænomenis, quæ supra electro–dynamica vocavimus, interpretandis sufficiat? Ad hanc quæstionem respondere hujus loci esse nequit, quum examen criticum instituere experimentis innixum hujus argumenti angustia prohibet et a scopo proposito alienum est. At consulta experientia, et cum theoria exposita sigillatim comparatis omnibus phænomenis cognitis, reticere haud possum, graves adhuc mihi videri obesse difficultates. Interim tamen hypothesium significationis haud immemor sum : perbene scio, nemini mortalium concessum esse in naturæ secreta penetrare, et lubens cum immortali *Hallero* profiteor : « Ins Innere der Natur dringt kein erschaffener Geist, zu glücklich, wenn Sie Ihm die aüssere Schale weist. » rerum naturæ in perpetuum ignaris nobis opus sunt hypotheses, ad relationes inter eas intercedentes exprimendas. Hypotheses rerum solummodo imagines sunt, quibus haud raro fallimur; quandoque duæ simul probabiles videntur, ast neutra vera est, quippe quod vera rei ratio sæpe nos latet, in perpetuumque latebit. Continuatis disquisitionibus novæ rei imagines, novæ comparationes, alii intuitus, aliæque theoriæ se offerunt. Theoria est tantum modus inter se ligandi et explicandi phænomena, quæ observatio et experientia docent, et quæ hæc non præstat, rejicienda, quæ autem præstat, admittenda est, quæcunque speculatio ipsi originem dederit.

DIXI.

THESES.

I.

Affinitas chimica fluidis electricis tribuenda.

II.

Theoria atomorum et voluminum pro identicis habendæ.

III.

Quod combinationum vere chimicarum inorganicarum leges attinet, requiritur et sufficit, ut corpus compositum constet ex numero *simplici* et *integro* atomorum cujuslibet elementi ingredientis. Nec credo, ut naturæ legem admittendam esse legem a summo chimico *Berzelio* statutam, vi cujus in composito, duo vel plura corpora oxigenio conjuncta amplectente numerus atomorum oxigenii cujuslibet ingredientis compositi *multiplum* esse debet per numerum *integrum* et *simplicem* numeri atomorum oxigenii in oxido minimo contenti. Vi cujus v. g. in sale quocunque oxigenium acidi multiplum esse debet oxigenii oxidi.

IV.

Characteres externi in dignoscendis mineralibus non solum utilissimi sed et maxime necessarii : ast ad systema scientificum condendum in determinandis speciebus primum locum tenere nequeunt.

V.

In physica et chimia experientia quidem optima, sed non sola magistra.

VI.

In experimentis galvanicis conductorem liquidum simpliciter electricitatem vehere haud credo.

VII.

In physica uti in chimia hypotheses non solum utilissimæ sed et maxime necessariæ sunt.

VIII.

A suis elementis ipsa theoria caute distinguenda.

IX.

Summa perfectio, quæ in physica desiderari potest, in eo consistit, ut experimentorum eventus calculo inter se ligentur, legesque physicæ paucis et brevibus formulis analyticis exprimantur.

X.

Theoria de polarisatione mobili a sagacissimo *Biot* inventa, haud admittenda.

XI.

Theoria a *Berzelio* et *Munckio* de electro-magnetismo proposita haud sufficiens est.

XII.

Pila galvanica aquam haud ita decomponit, ut oxigenium a cupro ad zincum et hydrogenium a zinco ad cuprum nonnisi successivis et momentaneis compositionibus et decompositionibus accedat, sed contra ea in statu gazoso usque ad mediam partem aquæ transvehi, ibidemque rursus aquam formare, arbitror.

XIII.

Electricitas, quæ frictione excitatur, galvanicæ ad magnetismum impertiendum comparative anteponenda.

XIV.

Utrum chlorum sit substantia simplex an composita argumentis decisivis determinari nequit, sed tamen illud simplex esse, potius credo.

XV.

Theoria a doctissimo *Faradey* proposita ad phænomena electromagnetica explicanda non approbanda.

DISSERTATIO

Inaugralis Chimica

DE

LIGNI DISTILLATIONE

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI J. KINKER,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS SCIENTIARUM PHYSICARUM ET MATHEMATICARUM DECRETO

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET SCIENTIIS PHYSICIS

HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITE AC LEGITIME CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die 18 februarii 1829, hora 1

AUCTOR

Desiderium Leclercq, leodiensis.

LEODII,

TYPIS C. A. BASSOMPIERRE, TRANS-MOSAM, N°. 914.

1829.

Le *Specimen* sera soumis à la Censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs ; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté, ou de l'Université.

Art. 56 du Règlement.

Optimis Parentibus.

Doctissimis facultatis Scientiarum

MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM PROFESSORIBUS

G. Dandelin,

C. Delvaux,

S. Gaede,

R. Van Rees.

Sacrum.

PREFATIO.

Is est nostræ ætatis omnium motus, ut omnia denuo examinare soleant, et ad majorem perfectionis gradum ducere quærant. Et ideo doctrinæ publicæ campus de die in diem latius patet, gentesque omnes industriæ palmam sibi arripere certant. Verum hæc scientiarum prænobilis filia nonnisi doctrinarum quibus innititur progressibus ipsa progreditur. Nonne iis Cl. Lebon ad illuminationem ope hydrogenii carbonici peragendam et acidum aceticum e ligni distillatione eliciendum ductus est? Quod factum inter chimiæ recentis fructus pulcherrimos recensendum, apud quos doctrinarum physicarum notitia pene nulla, mirandum sane visum fuit, præsertim, quum iste pharum franciscopolensem, fluidis elasticis e distillatione ortis, illuminare tentavit. Sed, ut sæpius in novæ industriæ principio accidit, labores ejus successu haud coronati sunt; verum labore improbo multa evicta sunt, et nonnulla commoda inde evenerunt. Tunc fictæ rationes variæ, magis minusve ingeniosæ ad acidum pyro-ligneum, carbonem ratione tunc cog-

nita parando amissum, recuperandum. Fratres Mollerat acidum aceticum purum demum obtinuerunt, eorumque experimenta a chimico Collin iterata et confirmata fuere. Ab eo tunc tempore, tum in Gallia, tum in Germania conditæ sunt fabricæ quarum conditores faustus fuit eventus. Argumentum illud in variis operibus pertractatum, scilicet in diariorum, *Annales de chimie tomo* LXVI, *annales de chimie et de physique tomo* XII, Thenard Illustrissimi tractatu de chimiæ part. vegetabili gallice, in dictionnario technologico gallice, in chimia artibus applicata Cli. Dumas, gallice, in tractatu speciali Cl. Carpentier : *Manuel du Charbonnier et de la fabrication de l'acide acétique.*

Quum temporis nobis concessi partem doctrinarum humanitati adeo utilium studio implere consilium cœperimus, studiis academicis finem imposituri, de eodem argumento disserere nobis proposuimus, et quidem sub tribus capitibus, quorum quodvis in paragraphos dividitur.

Qua occasione data, ordinis physicorum et mathematicorum optimis et doctissimis Professoribus, gratitudinis et reverentiæ testimonium hoc publicum proferre liceat; eorumque nos semper memores fore, quum nunc eorum lectiones usui versuri simus, sibi persuasum habeant.

DE LIGNI DISTILLATIONE.

Caput Primum.

De ligno, et locis acidi pyro-acetici fabricæ erigendæ idoneis.

PARAGRAPHUS I.

DE LIGNI DELECTU.

Signorum, quibus variæ lignorum species ditinguuntur precipuum sane est densitas : etenim alia, aqua leviora, veluti lignum quercinum densitate numeros inter 1 et 0, 240 varia, alia e contra illa densiora vel graviora, ex verbi gratia, vitis, guajaci lignum, pondere specifico inter 1,5 et 1 vario gaudent.

Quod discrimen in effectus eventuros sane plurimum pollet, quod mox probaturi sumus. Sub volumine æquali, densitas a mole, et hæc a materiei in corpore contentæ copia pendet; quo hæc igitur major, eo illa major erit. Itaque densiora ligna, substantiæ vegetabilis majorem quantitatem ostendent. Substantiæ illæ aut omni-

bus communes veluti fibra lignea aut quibusdam peculiares sunt, uti resina pino et abieti, suberinum quercui suberi. Harum omnium fibra lignea in variis speciebus quam frequentissime et abundantissime occurrit, ideoque omnium ligni specierum 0,96as aut 0,98as partes ex 100 efformat. Distillationi subjecta, non secus ac aliæ substantiæ vegetabiles oxygenatæ, acidum aceticum, oleum empyreumaticum, vapores aquosos, gas acidum carbonicum, oxydum carbonii etc, exhibet.

Inde, quo major erit ligni cujusvis densitas, quo majorem fibræ ligneæ copiam continebit, eo majorem igne agente, productorum copiam fore certo concludere fas est.

Modo dicta experientia confirmantur. Quem ad finem, ligni quercini, ulmei, fraxinei, faginei, tiliacei, salicini, volumen æquale, in retorta terra fictili confecta cum excipiente tubuloso, eodem temperiei gradu constanter servato, et tubo securo (*tube de sûreté*,) ut aiunt, qui sub lagenis aqua repletis abit munito, destilletur. Juncturis bene clausis, et retorta in foco deposita, temperies ad eum gradum efferatur, qui retortæ colorem rubrum addat

Hac ratione, omnium ligni specierum in nostra regione nascentium, quercinum majorem productorum copiam exhibere certior factus sum. Sequuntur Buxus, Fagus, Fraxinus, Alnus, Prunus Malus, Cerasus, aliæ arbores veluti ulmus, Pyrus, juglans regia multo minorem productorum liquidorum copiam præbent, neque ad hunc usum adhiberi merentur. Lignum quercinum cæteris est anteponendum, eo quod carbonem densissimum et durissimum relinquit; attamen Fagus, Fraxinas aut Alnus, cum commodo, illius loco venirent, et hisce deficientibus, Acer, Ulmus, Prunus et Cerasus.

Etsi nonnisi instrumenta imperfecta nobis adessent, attamen ex

investigatione nostra productorum distillatione comparatorum copiam, cum variorum lignorum densitate imminui concludere posse credimus. In istis experimentis, modo ramea, modo trunci fragmenta, eademque instrumenta, eadem cura ne error admitteretur, adhibita sunt.

Neque tamen omnia ligna, etsi densa, distillationi æque apta sunt, præsertim si acidum aceticum elicere finis proponatur. Nonnisi ea quæ nec resinosa, nec colorantia sunt, convenire possunt, priora quoniam in illis substantiæ hydrogenio abundant, adsunt, posteriora propter eorum majus pretium.

Aliquando variorum momentorum causa, res aliter sese habet, et ligna adhibentur quibus solito uti non oportet; sed producta, in quibusdam regionibus in commercio versata elicere, aut carbonem, in quibusdam artibus pretiosum et qui optime venditur, obtinere finis est.

Nec immediate postquam cæsa fuerunt ligna, ob majorem fluidorum copiam, distillationi conveniunt; quo in statu enim acidum nimis dilutum elicitur, quod experimento sequenti, scilicet ligni diebus duabus aut sex vel novem mensibus post resectionem distillationi subjecti, productorum comparatione probatur. Ideoque, lucri causa lignum primo in statu haud adhibendum est, quo fit ut ejus magna copia comparetur nec sine multa pecunia.

Cæterum magnum incommodum ob parum lucri ex inde paratur, et, uti in tertio capite probabitur; ut acidum aceticum satis diluatur necesse est tu, purum deinde obtineri queat.

Quocumque modo res se habeat, nunquam ligno aeri libero diu exposito utaris, propterea quod inde vitiatur, porosius fit, et carbonem minime consistentem, in laminas et pulverem facile

abeuntem relinquit, qui in commercio versari nequit, eo quod ejus virtus, carbonis ex ligno primo resectionis anno parati virtute longe minor est.

PARGRAPHUS II.

DE SITU FABRICÆ.

Quum magna ligni copia distillationi committatur, talem fabricam in nemore, sylva aut in agris sylvaticis, aut saltem haud procul ab illis erigendam esse primum videtur. Quæ loca cæteris anteponenda essent, multumque commodi secum haberent, si via facilis, aut canalis proxima aut trans ea duceretur, aut si flumen vel fluvius (1) proxime aut trans ea flueret; quibus communicatio nunquam interrumperetur, et fabrica nunquam alimentis necessariis careret. Multum abest autem ut hæc momenta adsint, sæpissime sylvæ in vastissimis campis jacent sejuncta et a viis majoribus longe distant.

Tunc fabricam imo proxime condere minime decet; uti notum est enim, viæ a pago ad alterum, quum nonnisi usu et tempore factæ fuerint, sæpius asperæ et difficiles sunt, quo fit ut communicationes momentis variis aut in quibusdam tempestatibus, per plures dies tolluntur : Quæ intermissio damnum et incommoda satis gravia secum trahit, primum eoquod, ligna mitti nequeunt, et consummatores fabricæ alias producta ejus quærere cogun-

(1) Quod momentum si adesset, talem fabricam haud procul ab urbe condere congruum esset, ligna enim, minimo sub pretio, innatantia advenirent, uti res etiam nostra ætate peragitur.

tur, et secundo quod fabrica peragi quum non possit, opifices operam alias quærunt, et si jam quamdam laborum ordinandorum scientiam ceperint, alios eorum loco adhibere persæpe difficile est.

Plures ad illa omnino aut saltem partem vitanda damna, rationes occurrunt, quarum nonnisi duæ sequentes citandæ veniunt : prima, si venditio regularis fuerit neque ulli variationi obnoxia sit, collectiones in variis locis, unde omni tempore facile ligna ad fabricam, per semestrium ad minimum mitti possunt, stabilire est altera, fabricam juxta vias majores erigere. Præterea producta ad consummatores missa, nullam prorsus aut minimam alterationem quum subeant, lucro nullam aut levissimam variationem nonnisi afferent; sed ut ligni copia talis ut distillatio per tres aut quatuor menses peragi possit, conquirenda erit.

Modo dictis fabricam cum commodo juxta terras sylvis ornatas condi posse tacito supponitur. Tunc, cum ligni pretium, propter translationem, augeatur, productorum pretio translationis pretium a sylvis ad fabricam addi poterit, consummatores ea semper sub eodem pretio accipient, et fabricæ situs minime illis intererit.

Cæterum fabricæ juxta vias majores situs cæteris anteponendus est et magnum lucrum pollicebitur.

Caput Secundum.

De temperie et apparatibus ligni distillationi necessariis.

PARAGRAPHUS I.

DE TEMPERIE SUB QUA DISTILLATIO INSTITUENDA EST, UT ACIDI ACETICI MAXIMA COPIA OBTINEATUR.

Si substantiæ vegetabiles oxygenatæ caloris actioni expositæ, successive et in ordine sequenti, 1°. aquam et gas acidum carbonicum, 2°. gas oxydum carbonii et acidum aceticum, 3°. oleum empyreumaticum et gas hydrogenium-carbonicum præberent, nulla ligni distillationi difficultas inesset; etenim condensationis simplicis ope, acidum aceticum purissimum obtineretur, cum pice et gas hydrogenio carbonico. Verum omnia producta simul evolant, quoniam forte massa modo uniformi non calefacitur, et condensatione tunc producta mixta obtinentur. Quum autem cujusvis compositio et proportio a caloris intensitate imprimis pendeat, determinanda est temperies sub qua major acidi acetici copia obtinebitur.

Tubi porcellanei, leviter inclinati et focum reflectorium (*foyer à réverbère*) transeuntis extremitati retorta terrâ fictili confecta. Et

lignum continens addatur, altera vero, mediante tubo vitreo, cum excipiente tubuloso, unde exorietur tubus securitatis qui sub campanas aqua repletas abibit, in communicatione versetur; jam, omnibus ita dispositis, tubus porcellaneus igne incandescat, et retorta paulatim calefaciatur. Producta omnia trans tubum incandescentem permeare cogentur, acidum aceticum, oleumque empyreumaticum decomponentur, ideoque nonnisi aqua in excipiente condensata, et gas hydrogenium carbonicum, oxydum carbonii, et acidum carbonicum quæ vasa apparatum terminantia petierint, obtinebuntur. Præterea aliquando parum acidi acetici et olei empyreumatici obtinetur, qnæ iterum tubum porcellaneum introducta decompositione sua, carbonem, aquam et fluida gasformia modo dicta linquent: sæpe sæpius solummodo aqua et gas oxydum carbonii oriuntur. Horum effectuum diversitas in temperie altiori demissiorive cui tubus porcellaneus objectus est, quærenda nobis videtur. Quæcumque substantia vegetabilis, temperiei summæ exposita vix acidum aceticum et oleum empyreumaticum exhibebit, quum neutrum sub ista existere nequeat. Ne calor ideo vasorum distillatoriorum æquo major sit, ne gas varia aqua et carbo non nisi obtineantur.

Hic carbo sonorus, fragilis, eodem volumine ac lignum unde elicitur, apparet, citissime accenditur, qua proprietate artium et variorum usuum domesticorum operationibus ut idoneum quæritur.

Si, apparatus in paragrapho primo capitis secundi descripti ope, in cylindro calor ad lignum in carbonem adigendum necessarius emittatur, id est, si ignis caute moderetur, ita ut experientia per plures horas duraverit, decompositio lenta erit, et multo minor productorum varietas, et eo minor quo hæc longior, enascetur. Sic elementa quibus acidum et gas conflantur, sub temperie haud

elevata, in eo statu non versabuntur qui eorum cum carbone combinationi favebit. Inde major aquæ copia, carbonis relicti majus residuum, quod tamen ligno adhibito mole inferius est eo quod, durante distillatione, hoc lente et gradatim sive contraxerit. Ideoque carbo iste magis compactum, magisque artium laboribus convenit, quippe qui sub eodem volumine majorem carbonis copiam contineat; verum aliquando odor ingratus, quum immediate igni subjicitur, ab eo spargitur.

Temperies extrema, quum multum acidi acetici obtinendi consilium inest, utraque vitanda erit. Ut illius magna copia distillatione eliciatur, ne temperies congrua maxima sit: etenim si retortæ fundum ad colorem rubrum usque feras, decompositio cito, et multum infra istum gradum, efficitur, et, vase incandente, distillatio quasi peracta est.

Hoc sub gradu quum operaverimus, multo minor acidi acetici copia nobis continget quam sub calore minori, quia temperies incandescentiæ acido acetico decomponendo sufficit.

Substantiæ vegetabilis oxygenatæ, temperiei infra incandescentiæ gradum subjectæ elementa, in conditione ad acidum aceticum, picem, et gas efformandum maxime apta versantur; ideoque ad distillationem maximo cum commodo instituendam, ne vasorum in quibus lignum decomponitur temperies haud longius feratur, aut ut aliis verbis utamur, ne retortæ incandescant.

PARAGRAPHUS II.

DE APPARATIBUS DISTILLATIONI NECESSARIIS.

Productorum gasformium ex distillatione orientium, quum nonnulla inflammari possint, hæc sive ad fabricam illuminandam, sive ad distillationem ipsam sustinendam, adhiberi queunt, sive demum commercio tradi possunt. Quicumque sibi proponatur usus, ne unquam ea cum aere misceantur, ne inflammatio cum irruptione violenta qua vasa frangerentur, gravis simaque mala sequi possint, eveniat. Ideoque in vase clauso operatio instituatur, et consequenter experientiæ, in primo capite descriptæ, instrumentorum distillationi ligni necessariorum enumerationi et descriptioni inservient.

Porro, in istis experimentis, nobis aderat apparatus partibus pluribus distinctis constans, scilicet: 1°. retorta, 2°. tubo, 3°. globo excipiente et densante, 4°. tubo quo gasa campanas petunt, 5°. foco reflectorio cui imponitur retorta. In distillatione magna, eadem instrumenta prodesse possunt, sed paulisper immutata, quod mox indicaturi sumus.

Retortæ sunt caldariæ ferro percusso (*chaudières en tôle rivée*) quarum forma cum baseos figura varia est, et ne formam incandescentiæ gradus, cui vulgo sub operationis fine objiciuntur, amittant, in cylindris, e ferreis trabibus confectis modo solido includendæ sunt.

Omnium altitudo eadem, et vulgo ulnas belgicas (*Mètre*) duas metitur, ut lignorum quorum longitudo vulgo ulnaris, stratum duplex includi queat.

Baseos forma ad libitum, varia non secus ac superficies; attamen hæc a ligni distillandi copia pendet.

Caldariis repletis, earum margines argilla tenaci induuntur, operculum imponitur, quod claviculorum (*clavettes*) ope fixum tenetur. Hac ratione omnis communicatio cum aere atmosphærico præpeditur, nisi per cylindrum e ferro laminari (*en tôle*) infra marginem prominulum, et aliquando supra operculum verticalem. Quæ vasa sic clausa retortas amplas fingunt.

Retortarum omnium quum eadem sit altitudo, distillationis tempus pro ligni decomponendi quantitate varium esse debet. Etenim semidecasterii sive ulnarum 5 cubicarum ligni intra horas octo vel novem distillatio absolvitur, dimidia ejusdem quantitatis pars intra horas quatuor et dimidiam distillatur; distillationes istas in cylindris cum basi orbiculari fieri supponitur.

Verum cum massæ voluminibus proportionales sint, quum densitas eadem est, altitudinibus æqualibus, volumina inter se veluti bases inter se sunt; et illæ, si orbiculares, radiorum suorum potentiæ secundæ proportionales sunt; ideoque distillationis tempora circulorum, cylindrorum basin efformantium, radiorum quadrato proportionalia esse concludimus. (1)

Quo minor erit radius, eo brevior distillationis duratio, sed eo

(1) Quæ conclusio, de vasis ejusdem altitudinis, valida et deducta, cuivis apparatui distillatorio applicatur, quæcumque sint ejus dimensiones. Quem ad finem, lignum exile in cylindris duobus ferreis, ejusdem altitudinis, sed basium diversarum distillavimus, durationemque operationum annotavimus. Experimentum iteravimus cum uno eorum tertioque ejusdem baseos ac alterius, sed altitudinis majoris; duratio observata omnino eadem fuit. Tentamina cum variis substantiis distillationis capacibus iterum instituta præcedentia confirmaverunt, modo temperies eadem esset. Post multos infaustos conatus, cum gas hydrogenio carbonico hunc finem assecuti sumus.

majoris etiam ligni copiæ distillatio absolvetur ; etenim in retorta semi-decasterium distillando, nonnisi sterea quindecim intra nyctemerum distillari queunt, dum, cylindrorum duorum, quorum quivis sterea duo continet, ope, intra idem tempus, ligni sterea viginti quatuor decomponentur, et tamen impensa, in constructione et combustione eadem erit (1). Inde etiam conclusio sequens : *ligni distillandi, in tempore præfixo, copia cum retortæ baseos superficie in relatione inversa versatur.*

Si calor, caldariæ repletæ interiora penetrans, modo continuo et uniformi omnes ligni distillandi partes calefaceret, quæcumque foret copia distillationi subjecta, decompositio semper in eodem

(1) Focus non nisi retortam unicam admittere potest, diameter ejus cylindrorum diametro determinatur. Retorta semi decasterium continens, radium gerit-0,$^{uln.}$ 89, cylindrus duorum stereorum capax radio 0,$^{uln.}$ 56 gaudet.

Jam vero, si focorum parietum diametrum, et eorum inter et cylindrorum radios discrimen semper idem esse supponatur, includentium cylindrorum, foco tum interiorum, tum exteriorum, radii pro prima retorta erunt 0,$^{ulu.}$ 99 et 1,09, pro altera 0,$^{uln.}$ 166 et 0,76; et voluminum differentia, pro prioribus cylindris, æqualis erit formulæ sequenti : h. $\frac{22}{7}$. 0,2080; et pro posterioribus : h. $\frac{22}{7}$.0,1420 (radiorum differentiam $=0^{u}.1$ esse admittendo). Verum prior differentia posteriore circiter duplo major est. Ideoque, cum materie foco retortam semi decasterii capacem admissuro, erigendo necessaria, duo foci, quorum quivis retortam sterea duo continentem admittet, erigi poterunt. Areæ cylindri semi-decasterii capacis, et cylindri sterea duo continentis, respective sunt : 10, 588 et 5. 52, duplex ergo ferri laminari copia ad primum conficiendum quam ad alterum opus erit. Ideoque impensa ædificationis eadem erit, sive semi-decasterium simul, sive sterea quatuor in duobus cylindris distillare oportuerit.

temporis spatio absolveretur. Verum minime; calor igitur in omnes partes pariter haud agit, et consequenter distillationem gradatim a strato ad alterum et a parietibus centrum versus effici, admitti possumus.

Cæterum de hoc facto, experientia duce, nobis conscii sumus, et quidem sequenti ratione. Amylo, deinde ligni rasura, et ligno tenui cylindrum parvum e ferro laminari infundibulo ejusdem metalli obductum, implevimus, distillationem incœpimus, illum, quam citissime fieri potuit, ad temperiem necessariam ferendo, operationemque interiora inspecturi, identidem suspensimus. Sequentia obvenere: sub initio, strata cum parietibus in contactu posita omnino decomponebantur, dum centrum versus in carbonem redigebantur, centrum vix decomponi incipiebat, et strata intermedia pro parte distillationem subiebant, denique quum illa in carbonem acta essent, partes centro proximæ, et centrum ipsum omnino decompositionem subiebant.

Lignorum distillationi committendorum diameter ab uno ad tres pollices extenditur. Ea ita disposita esse concipere possumus, ut planum basi parallelum quodvis stratum secans, intersectionem figura basi similem gignat. Secundum istam hypothesin, radii longitudinem, lignorum ad strata conficienda adhibitorum diametri longitudine media dividendo, stratorum numerum obtinebimus.

Nam intra circumferentiæ baseos ambitum, periphæriæ plures cum radiis ab isto diametro medio discrepantibus pingantur, zonæ circulares enascentur, in quavis, tantum quantam continere poterunt, fragmenta lignea, ejusdem altitudinis et crassitudinis diametro medio æqualis collocabimus; qui acervus ab alio omnino simili superatus, cylindri capacitatem et onus repræsentabit.

Jam distillationis durationem baseos radii quadrato proportionalem esse reperiimus, sed radiorum loco stratorum numerum diametro medio multiplicatum ponere possumus, et proportio ista in sequentem mutabitur : *Duratio proportionalis est stratorum in quovis cylindro contentorum numero ad potentiam secundam elevato.* Quæ conclusio, etsi abstracta, generalior est, et cuivis retortæ, quæcumque sit baseos forma, applicatur.

Lignorum massa eo citius distillationem subierit, quo pauciora fuerint strata. Caldariæ, hoc ultimo commodo gaudentes, etiam cum igne in contactu magis multiplicato versabuntur (1). Sic conclusio deducta experientia confirmatur; tempus enim aquæ certæ quantitati vaporandæ necessarium eo brevius fore quo vas distillatorium plura puncta igni exposita habebit, cuique compertum est.

Retortæ semi-teretes magis commodæ erunt quam teretes ejusdem oneris capaces. Si semi-decasterium contenturæ sunt, basium radii respective erunt : 1,16 et 0,89. Verum retortæ semiteretis centrum solummodo in radii diametro perpendicularis media parte aderit, igitur 0,63 a centro distabit. Si lignorum diameter medius, 0,03 esset, retorta cylindrica strata 29 ad 30 contineret, dum in semi-terete nonnisi 21 reperienda essent. Hæ autem, ob earum margines, dilatatione inæquali certo certius fruuntur, et citissime formam amissuræ, sunt ideoque mox inutiles fieri debent. Eadem de retortis prismaticis, od eamdem causam, monendum habemus.

(1) Nam superficies convexæ, teretes et semi-teretes, quælibet semi-decasterium coutinentes, respective æquales sunt, $11^{u}.188$ et $12^{u}.96$. Retortæ prismaticæ, cum basi rectangulari, et ejusdem capacitatis superficies æquat 24^{u}, 984, si baseos altitudo $0^{u}.43$ adæquat.

Inter eas præstantiores habebuntur illæ quœ basi triangulari vel rectangulari, et altitudine baseos diametro minori gaudent; sed earumdem pretium retortarum teretium pretio majus, et, si quidquam illis deficiat, ad mutationem magis pecuniæ exposcunt. Retortæ cum basi elliptica omnium maxime proficuæ sunt, earum ædificationis pretium idem ac cylindricarum pretium, eademque duratione ac illæ gaudere debent, quum margines perpendiculares nulli sint. Præterea sub stratorum minori numero, et eo minori quo axium una brevior respectu alterius, idem onus sustinere valent. (1)

Nisi densationis rationes potentissimæ essent, stratorum numerum nimis imminuere haud oporteret; tunc enim distillatione promptiori major productorum copia densationem fugeret. Ad eas, quoties stratorum numerus determinandus erit, semper erit attendendum.

Foci, in quos vasa distillatoria introducuntur, focorum reflectoriorum quibus in officinis chimicis utuntur adinstar ædificantur, eorum forma pro retortarum accipiendarum forma varia est. Sunt igitur prismatici vel teretes, cavi et verticales; cinerarium (sit venia verbo.) focus et laboratorium confunduntur. Ex argilla cocta (*briques*), ferro fuso vel percusso in laminas redacto, sed interne argilla cocta (*briques*) induto conficiuntur, et ut calor reflectatur, operculo in centro perforato et ex argilla ædificato, aut e ferro percusso laminari solido, cui tectorium argillæ tenacis tri-vel quadri-policare additur, vulgo instruuntur. Aliquando he-

(1) Cum baseos aream stereorum numerum duabus ulnis belgicis altitudine vulgari, dividendo noscere possimus; axes juvante æquatione $abP = A\ A$ et P jam notis, determinabuntur; etenim data quantitate a vel b, altera quæretur et invenietur.

misphæra aut cono e ferro laminari solido et fumario instructo ornantur.

Foci altitudo ulnas duas et dimidiam metitur, diameter retortæ accipiendæ diametro major, ut spatium liberum materiei combustibili continendæ et porta, qua operatio moderatur, introducendæ destinatum remaneat. Adsunt præterea foramen laterale, quo cylindrus parvus, e ferro laminari confectus, et cuilibet retortæ adaptatus exorituri et interne eripus ferreus, solidissimus, paulo supra basim (*la sole*) positus, cui perpendiculariter insidet retorta. In focorum parte inferiori cernuntur foramina plura aut laminæ distantes (*galerie*), quibus aer modo regulari intrat, ut ignis distillationi necessarius sustineatur. Focos, quocumque numero adsint, in orbem circa gruem in cardine centrali sedentem, qua retortæ vinculis cruciatis (*croisillon*) sustentæ, auferuntur et iterum in focum introducuntur, disponere oportet.

Si retortæ duæ, tres, quatuor vel quinque eidem foco imponerentur onustæ, hic ratione sequenti disponendus esset.

In casu retortarum quinque, fornix semi-cylindrica ejusdem longitudinis ac retortæ introducendæ concipiatur, in ejusdem parte superiore, et prope parietem verticalem foraminibus aerem indroducentibus oppositam, foramen unum, vel duo foramina aperiantur, quibus unus vel ductus bini peti poterunt; hi in fornicis parte superiore a retortæ extremitate una ad alteram, ut demum fumarium intrent, ita disponantur. Trabeculæ e ferro percusso confectæ fornicem interne transibunt, alias super euntes quibus, mediantibus striatis cochleæ cavis (*écrous*), in situ conveniente retinebuntur. Quæ trabes e ferro fuso ita disponendæ sunt, ut, agente calore, nullo modo in parietes quibus insident, agere queant.

Cylindri in trabibus istis quincuncialiter et in duabus seriebus ordinantur, tres in inferiore, duo in superiore. Retortarum longitudo ulnis duabus paulo major sit, et illæ superficie curva projectione cylindrica armata terminentur; quæ projectio in foramine murali, et laminis e ferro laminari confectis aut obturamentis mobilibus clauso continebitur.

In foci anteriore pariete, orificia quinque aperiuntur, contra quæ retortarum latera veniunt. Ea pari commodo in lamina e ferro percusso confecta, fornici cylindricæ claudendæ destinata, et clavorum (*boulons*) ædificationem transeuntium ope fixa perforari possunt. Denique, retorta loco suo jam insidens, in orificio suo annulo cuneiformi cingitur. Circuli istius geminati faciem in retortæ lateribus collocare et constringere est.

Ne vasorum altitudo major sit, ita ut tubus lateralis in operculo adsit et flectatur.

Fornicis cylindricæ paries inferior horizontalis est, et 45 centimetris ad sex decimetra, sub serie inferiore jacet fundique (*sole*) vices implet.

Sub retortis inferioribus adsunt respective januæ tres, fissuris tribus perpendicularibus in longitudinis bis tertia parte perforatæ et 17 millimetra latæ. Hæ mensuræ vero, alia lamina, similiter perforata et in duobus canalibus (*coulisses*) hinc et illinc movenda, ita ut aeris accessus moderetur, imminuendæ sunt.

Omnia fornice cylindrica ex argilla cocta (*briques.*) sustinebuntur.

Ad distillationem instituendam combustibilia magnam flammam procreantia, uti carbo fossilis, lignum et præcipue lignum populinum etc, adhibenda erunt.

In isto systemate, retortæ fixæ sunt, neque auferuntur nisi ad

substitutionem aliarum aut ad reparationem. Jam vero ex dictis, focis retortas duas vel tres continentes ædificari posse credimus.

Retortis in focos illis proprios introductis, et cylindro laterali libero facto, calefactio quorumdam combustibilium ope incipit. Ligni humiditas sub vaporum albidarum forma abit, qui paulatim pelluciditatem amittunt, et fuliginosæ evadunt. Tunc cylindro laterali additamentum ponitur, quod exacte cum eo uniendum est, et cum densationis apparatu, mediante tubo altero vaginante, communicationem init.

Juncturas cum terra argillacea tenaci illinire, ne vapores aufugant, sedulo oportet. Additamentum istud, quod removeri potest, nihil aliud est quam cylindrus aut conus truncatus e metallo, vulgo e cupro, quoniam forte hoc acido acetico ægre læditur, confectus. Cum autem ferrum et cuprum juxta se invicem posita actionis galvanicæ elementa constituant, quo vapores emissi decomponi et hæc metalla lædi possent ita ut apparatus brevi inservire nequeat, ad hoc fugiendum, additamenta e terra cocta vel terra fictili confecta adhibere magis proderit.

In experimentis a nobis relatis, globus excipiens etiam vas densatorium erat, sed in praxi hæc sejunguntur; etenim si tali vase uterentur, illud amplissimum esse, ut vapores advenientes densari possent, necessarium foret, et multum vaporis densationem haud subiret.

Si retortæ horizontaliter et plures in eodem foco collocantur, densationis apparatus unicus sufficit : quo in casu enim, tubi laterales perpendiculares evadunt, additamentum et tubus cupreus eamdem directionem sequuntur, posterior vero replicatur ut descendendo tubum magnum petat, ab una extremitate clausum, et qui

ante focum collocari potest, atque cum densatorio tubo communicat eodemque modo ac ille dirigitur.

At, quum cylindri verticaliter foco proprio insident, tot vulgo densationis apparatus adsunt, quot illi. Additamentum et tubus densatorius eodem modo ac cylindrus lateralis, pro horizonte magis minusve inclinatus, diriguntur.

Apparatus densatorius tuborum quorum diameter sensim minuitur, solummodo series est, quoniam vapor jam densatus minus spatium quam sub pristino statu occupat. Attamen ut tuborum superficies quam maxima sit curare est, quia tunc, eorum parietes numerosiora contactus loca cum vaporum et gas mixtione offerent, ideoque hæc eo puriora erunt (*se dépouilleront mieux*), quo major vaporum densatorum copia erit. Hæc tuborum series etiam, quo plus ligni distillationi committetur, eo longior esse debet.

Vas densatorium pro locis varium est. Aqua deficiente, aer solus adhiberi potest ut refrigeratorius.

Tunc ut vapor spatium multo longius permeat necesse est, et cylindrorum superficies major esse debet. E cupro aut ligno hi confici possunt, sic V. G. doliorum sese invicem vaginantium series, quorum intersticia recte claudentur, inservire poterit.

Si aqua refrigeratoria sit, tubis metallicis uti multo magis prodest Qui tubi inclinantur, ut producta densata facilius fluant et multiplici ratione disponuntur; et primum sæpius spiraliter, sæpe etiam flexuose. Flexuræ modo secundum figuram sequentem ⊳ in plano duplici parallelo includuntur, et illis per totam longitudinem tangentes sunt, modo hanc] figuram repræsentant, cujus pars superior et inferior, nedum parallelæ convergunt et inclinantur. Quæ posterior dispositio, quum aqua rara est, usitatur. Sub duabus

prioribus formis, tubi in vasis colligentibus variis, aqua sub temperie constanti ratione varia servata repletis, aut in doliis eadem plenis, immerguntur. Sed in ultimo casu, interne et juxta eorum parietes adsunt tubi utraque extremitate hiantes, fundum fere hinc tangentes, illinc doliolum suum superantes, et aquæ sub eodem temperiei gradu servandæ inservientes. Aqua enim vapores refrigerando, ipsa calefit, dilatatur, et levior evadit, tunc si aqua frigida per tubum verticalem infundatur, hæc dolii fundum, aquam calefactam quæ foramine in dolii parte superiore cito effluit, arcendo petit.

Tubis tertia ratione indicata dispositis, partes horizonti inclinatæ vasis teretibus aut prismaticis, metalloideis aut ligneis, spatium aquæ satis magnæ copiæ effluendæ ad densationem sufficiens continentibus, et inter se, mediantibus tubis verticalibus aqua sese implentibus, communicantibus includuntur.

In hoc systemate, ad aquam renovandam, tubo verticali utrinque hiante, et ab extremitate inferiori oriente, vasque superius cui foramen ad aquam calidam emittendam adaptatur paulum superanti opus est.

Ingeniosa sane aquæ movendæ ratio hæc est, sed aquam vas refrigeratorium superare debere illi vitio verti potest; hujus loco altera multo magis proficua, modo systematis densatorii punctum summum infra decem ulnas jaceat, adhiberi posset, scilicet : si omnia dolia, aut vas superius, exacte pariete superiore, tubum verticalem cum clavi moderatrice (*Robinet*) 0,"03 ad 0,"07 altitudine metientem gerente clauderentur, et si deinde e quovis dolio aut vase inferiore et superiore tubi duo metallici ejusdem diametri, eodem modo, scilicet terram versus, directi, et quorum quilibet

ad extremum clavi moderatrice instructus, orirentur, si tubus a fundo ortus altero, qui a parte superiore parum infra processum marginalem abit, 0ᵐ,7, ad ulnam minor esset; si deinde claves inferiores tubos claudant, et superior aperiatur extremitas, dolium aut systema implebuntur; quo facto, clavis superior claudetur, et tuborum minor postquam in aquilegio ad altidudinem convenientem varia ratione servato, immersus fuerit, claves inferiores binæ aperientur; aqua tunc movebitur, et effluxus nunquam cessabit. Cum isto apparatu, qui nihil aliud est ac sipho cujus tubi brevioris pars superior inflata fuit, ad libitum aquæ motus facillime procreabitur aut præpedietur, modo clavi moderatrice tubus major claudatur aut aperiatur.

Tubi densatorii, a vase densatorio orti, canalem ex argilla cocta (*briques*) in terra demissum, sub inclinatum petunt qui, ut a cætero apparatu secludatur, tubo recurvo munitur ita ut in productis liquidis, quæ primum vas colligens adeunt, immergatur, juxta illud vas, aliud majus adest, quod fluida primi capacitatem superantia recipit.

Gasa emissa, ad focum, mediante tubo ex ductus parietibus ortis reducuntur. Tubus iste foci interiora penetrat sub cylindris; ut gasa modo unifario distribuantur, perpendiculariter et quidem pluribus centimetris fundum superat, et dilatatione, superficie convexa foraminibus instructa, ne cineres aut combustibilia eum obstruant, operta terminatur. Hujus forma a cylindri et focorum figura pendet.

Gasa sub retorta, ad distillationem efficiendam, nonnisi post aliquod tempus adhibere est: aliter aer in apparatu contentus et cum illis mixtus, combinationem iniret qua explosiones oriri pos-

sent maximo stipatæ periculo. Cæterum additamentum (*Manchon*) solummodo quum vapores fuligineæ evadunt, applicatur, aut quum odore gas emissum dignoscitur, quod vulgo post horæ quadrantem evenit. Attamen tubum gas reducens triplici clavi moderatrice armare oportet, prima quum additamentum cito adaptatur, aeri atmosphærico in apparatu contento emittendo, altera gas in foco emittendo destinatur. Ut producta gas-formia copiosissima evadunt, lignique in retortæ contenti distillationi efficiendæ plus quam paria sint, clavis secunda semi-clauditur, tertiaque aperitur quæ, mediante tubo, cæteros tubos gasa reducentes colligente, gas copiam excedentem, in alteram retortam onustam in foco suo tunc positam emittit.

Primæ clavi tubum alterum clavi moderatrice instructum et externe aerem atmosphæricum ducentem substituere prudentius actum nobis videtur, quo pacto mala ab opificum ignorantia, incuria aut malevolentia accidere possent.

Si, antequam introducantur, gasa mundarentur, apparatus modo descriptus necessario mutandus esset. Producta gas-formia ab acido carbonico separare, possent sive calcis solutionem ea permeare cogendo, sive ea cum calce semi liquida, aut sicca et pulverulenta in contactum pellendo. Harum rationum sequens tantummodo hic describenda est.

Gas per dolii exacte clausi partem inferiorem, sub fundum spurium foraminibus pluribus instructum ducatur; dividetur, calcis pulverem, quacum fœnum in diaphragmatibus pluribus in dolii parte interiore fixis depositum, aspersum fuerit, transire cogetur. Gas partem superiorem assequetur, acidis quibuscum mixtum erat orbatum, et mediante tubo, quo focum adibit, egredietur.

Sæpe sæpius calx diaphragmatibus, per strata haud comprimenda, imponitur. Ne ejus pulvis tenuior sit sedulo est cavendum propterea quod in illo casu gas eam ægre permearet.

Carbonem omnem productum esse flammæ colore agnosci potest. Hic, sub distillationis principio rubro-flavescens est, deinde cœrulescit, et demum omnino albidus evadit. Hoc signum autem vix tutum, aliudque majori certitudine gaudens nunc est proponendum, scilicet: In earum superficiem guttæ aliquot aquæ projiciuntur, et quum vaporantur, carbonis productio (*carbonisation*) peracta est.

Tunc additamentum (*allonge*) aufertur, tuborumque densatoriorum, laminarum e ferro laminato cum argilla aut terra fornacea (*terre à four.*) unitarum ope, orificia clauduntur

Hemisphæra coronans, si in faucis verticalibus distillatio efficitur, dein retorta aufertur, cujus loco altera prius onusta ponitur, priori refrigerata, operculum tollitur et carbo extrahitur.

Cylindri vero si fixi sint, combustilia e foco auferentur, et omnis apparatus per aliquod tempus refrigescet: operculum separabitur, et carbone abluto, novum onus imponetur. Operatio autem intra horæ et dimidiæ et ad maximum, horarum duarum spatium perficienda est.

Ea sunt principia quæ de ligni distillatione observare est; ex illis, veluti consequentiæ, variæ rationes ad lignum in carbonem agendum fictæ deduci queunt; sed de iis disserere finem nobis non proposuimus. De qua materia cæterum optima legi merentur et præsertim gallice, dictionnarium technologicum.

Caput Tertium.

De acidi pyro-acetici purificatione.

PARAGRAPHUS I.

VARIARUM RATIONUM EXPOSITIO.

Liquor acidus purificandus, spiritu pyro-acetico, acido acetico oleum empyreumaticum solutum continent et pice mixtis constat. Posterior harum substantiarum nonnisi materiei peculiaris resinosæ in oleo essentiali empyreumatico solutio est, sed quarumlibet substantiarum proprietatum ratione habita, ad acidum aceticum secernendum rationes propositæ sunt, quæ sequuntur. Primo loco venit distillatio, quum quavis operatione liquor residuum sensim minus relinquat. Verum producta separanda sunt; quia spiritus pyro-aceticus, prior vaporatus, liquorem per aliquod tempus sub graduum 65 ad 70 temperie servando, separatur; deinde reliquus liquor ad 100 effertur, ut acidum aceticum in vapores abeat et inde olei empyreumatici maxima parte liberetur, modo ne distillatio ad siccitatem usque feratur, et operatio sistat, quum liquor consistentia syruposa gaudeat. Distillatio iterum igne moderato rursus inchoatur et liquor obtentus albescit, sapore empyreumatico odoreque fumi gaudet. Verum carbone accenso tractatus et dein distillatus, nec sapore nec odore ab aceto distillato discrepat. Attamen nondum

purus haberi potest, quum iterum igne moderatissimo distillatus, materiam resinosam fusco-rubentem, olei empireumatici basin dimittit.

Si carbone liquorem tractandi loco, hic cum oxydo nigro manganii ad ebullitionem usque calefaceretur sal inde ortus, ope acidi sulfurici decompositus, acidum purius exhiberet. Pari cum commodo etiam hic sodæ carbonate saturari potest, et dein acetas sodæ, post crystallisationem torrefactus, per acidum sulfuricum decomponi posset.

Altera ratio, in acidi pyrolignei per lithargyrium saturatione, et acido nitrico, parva dosi, dissolutioni, quæ omnino purificatur, addendo constat. Oritur hypostasis rubens et granulosa, a qua liquor effusus carbonis opc decoloratur, dein sponte in crystallos speciosas abit. Quæbus crystallis iterum solutis, et sale subcarbonate calcis decomposito, carbonas plumbi et acetas obtinentur. Subcarbonas-sodæ etiam ad hanc decompositionem efficiendam obtineri potest. Dein acetate per acidum sulfuricum tractato, acidum aceticum parabitur.

Tertia ratio hæc est : primum acidum pyro-ligneum calce aut creta saturatur, 2°. acetas calcis sulfate sodæ decomponitur, 3°. liquor effunditur et densatur, deindeque crystallisationi objicitur, 4°. acetatis sodæ crystalla impura torrefaciuntur, 5°. solvuntur iterum et solutio filtro, ad carbonem sejungendum, imponitur, 6°. hæc vaporationi datur ut crystalli rursus efformentur, 7°. hæ acido sulfurico tractantur, et acidum aceticum separatum distillationi, pro variis usibus cui destinatur, committere oportet. Mutationes quasdam subiit illa ratio ; sulfas sodæ in acido pyro-ligneo solvebatur, addebatur cal aut creta et sic acetas sodæ oriebatur. Acidum purum, acetatem calcis solutum carbonis ab hydro-cvanatis

ferri fabrica producti ope tractando, et salem per acidum sulfuricum decomponendo etiam obtinere possunt.

Carbonate sodæ acidum pyro-lignosum tranctando, pyro-lignitem sodæ directe formaretur; sed tunc multum hydrogenii sulphurati emittitur, quod opificibus incommoda multa parit, quapropter ista ratio rejicitur.

Acetates solubiles, et temperie satis intensa haud decomponendi, olei empyreumatici vel minima particula liberantur, aquam cum pyro-lignitibus pluries distillando. Oleum essentiale empyreumaticum sub vaporum forma, cum aliis productis, emittetur, et nonnisi acetas sodæ, materiesque resinosa in aqua vix solubilis reliquæ erunt, quæ materies, pro maxima parte, residuum igne moderato exsiccando, et aqua illud lavando separabitur.

Verum istæ rationes majorem minoremve impensam exposcunt, et momenta peculiaria eorum usum solummodo commendant; quapropter tertia nobis sola describenda venit quoniam ex illa, quæ aliis operationibus pro cæteris indicatis necessaria sunt, deduci possunt. Unicum autem hoc monemus, scilicet: ut vasa forma rotundata gaudeant utpote quæ ignis actioni magis resistant.

PARAGRAPHUS II.

ACETATIS CALCIS CONFECTIO.

Hectolitra 15 acidi acetici, rubro-fusci, et gradus quinque areometri indicantia in caldariam ligneam aut e ferro laminari, duplicem quantitatem circiter continentem funduntur. Vas istud in parte inferiore clavi moderatrice instruatur, et a solo decimetris aliquot

distat. Successive et diversis vicibus libræ belgicæ sexaginta sub carbonatis-calcis infunduntur ; massa agitata, fermentatio vehemens statim exoritur cum spuma fusco-nigrescente ab oleo empyreumatico, et sedulo auferenda. Massa denuo agitata, liquor in diem sequentem quiescet. Ut materiarum silicearum et vegetabilium stasis efformatur, liquor, aperta clavi moderatrice, In caldariam cupream aut e ferro laminari, viginti hectogrammatum capacem æque profundam ac latam infunditur, quæ in fornacem ædificatam (*en maçonnerie*) qua cingetur, et cujus fumarium ambitum sequetur, introducetur.

Liquor deinde ad ebullitionem usque fertur, et saturatio, per partes calcis vividæ 20 ad 25 lib. belgicas in pulverem redactas addendo, perficitur, quam ad obtinendam liquor exagitatur, et operatio quum solutione heliotropii tinctura non amplius rubet; cessatura est.

Calx vivida, ad acidum pyroligneum saturandum, si adhibeatur, operatio facilius, citius et sub temperie demissiori terminatur. Sed hac ratione, magis onerosa quidem, calcis partem excedentem, qua materies resinosa solvetur et difficilius separabitur, addere poterimus.

PARAGRAPHUS. III.

ACETATIS SODÆ EFFORMATIO.

Saturatione peracta, sulfatis sodæ crystallisati libræ belg. 330, ebulliente liquore, adduntur : duplex fit decompositio, hinc acetas sodæ solubilis et inde sulfas calcis insolubilis præceps iens, efformantur : perdurat aliquo post tempore ebullitio ut hæc completa fiat; dein liquor quieti committitur, stasin procreat, effun-

ditur, et mediante ductu ligneo supra caldariam sito, acetatis sodæ solutio in aliud vaporatorium parum distans et paulo inferius abit. E ferro laminari conficitur, tres ulnas belgicas ad minimum longitudine, 2 latitudine et 0,". 31 altitudine metitur. Ut omni liquori simul continendo impar est, reliquus, sensim et, prout densatur infunditur.

Focus in una extremitate collocatur, fumariumque inferne repit ita ut illud modo æquali ubique calefaciat, et alterum perpendiculare petit, quod alii caldariæ vaporatoriæ, uti infra dicemus, inservire potest.

Sulfas calcis stasin efformans, et stasis in acetate calcis conficiendo orta, aqua calida pluries, donec areometer nihil indicet, lavari solent. Aquæ lotionum, gradu 12 ad 14 insignes, cum acetate calcis soluto miscentur, ut densentur et in sulfatem sodæ transformentur. Aquæ minus saturatæ e contra novis lotionibus destinantur.

PARAGRAPHUS IV.

ACETATIS SODÆ DENSATIO ET CRYSTALLISATIO.

Acetatis sodæ solutio densationis causa, ad ebullitionem fertur, ejusque spuma identidem est auferenda, et quum liquor gradus 22° indicat, in caldariæ fundo præcipitatur sulfas sodæ qui, spumatorii ope colligitur, tunc cum heliotropii tinctura quærendum num saturatio completa sit; in casu contrario carbonas sodæ, donec liquore heliotropii charta non rubescat, addendus erit.

Vaporatio, usque dum adsint gradus 27 aut 28, pro anni tempestate, protrahenda erit; quum is fuerit solutionis gradus, per ductum ligneum in crystallisationis vasa, a terra paulum distantia a caldaria vaporatoria haud remota solutio ducetur.

Quæ vasa sunt caldariæ e ferro laminari tenui, 2, 5 hectolitra circiter continentes, et in parte inferiore et anteriore foramine clavulo ligneo claudendo perforatæ; numerus earum viginti quatuor est, propterea quod crystallisatio nonnisi post tres vel quatuor dies, pro vasorum capacitate, perficitur. Tunc clavulo ablato, aquæ ductum ligneum ante omnia aquaria situm, petunt, quo in aliud aquilegium subterraneum ad vasorum crystallisationis seriei finem positum fluunt.

Hac prima crystallisatione efformantur prismata rhomboidea, valde colorata, et satis magna faciebus et angulis nitidissimis, quæ rite aqua orbata erunt antequam torreantur.

Ad salia in aquis contenta iterum iterumque elicienda, illæ vaporationi subjiciendæ sunt, sed tandem adeo viscosæ evadunt, ut vaporatio ad siccitatem usque protrahatur; ad picem comburendam accenduntur, dein residuum, carbonis separandi causa, solvitur, et vaporationis ope, obtinentur carbonatis sodæ crystalli.

PARAGRAPHUS V.

DE ACETATIS SODÆ TORRE FACTIONE.

Hæc operatio ad salem oleo empyreumatico, quo scatet, liberandum instituitur; quem in finem libræ belgicæ 15 ad 20 istius salis nigri in caldaria tenui e ferro fuso $0^{m}.63$ diametri, $0^{m}.45$ altitudinis deponuntur. Caldariæ torrefactoriæ novem adsunt (1) quarum quævis foco clathrato, ædificatione ad marginem usque præter pollicis nonnullos cincto, (quia fundus solus ignis actioni exponendus est.) seorsim insidet.

(1) Vulgo foci 3 pro acidi acetici gradus 5 metientis mundandi hectolitris 5.

Focum et cinerarium, utraque, porta qua ignis moderari possit, munire oportet. Post quamlibet operationem caldariæ a foco, mediante ansa marginali, removentur. Foci in orbem, juxta se invicem ita disponuntur, ut spatium liberum remaneat, quo materies in vasis contentæ agitari queant; atque in loco aeri bene exposito erigi, necnon integumentum (*Hotte*) communi in parte superiore amplo fumario terminato et prope terram, præter pedes tres descendenta, instruendi sunt.

Statim ac acetatis sodæ crystalla nigra in caldariis deponuntur, ignis accenditur, et hæc in aqua crystallisationis funduntur, sed, dum prima hæc fusio operatur, massa sedulo est agitanda. Igne protracto, hæc sensim exsiccatur, pulverem nigrum simulat, atque continuo agitanda est, ne caldariæ parietibus adhæreat. Immediata post in pulverem reductionem, materia fundi incipit et levior evadit. Lequefactione facta et pergente, agitatur iterum, ut conathetus puncta multiplicentur, et oleum empyreumaticum decomponatur. In fusione valde est procavendum, quum hæc operationis nodum constituat: tota massa enim decomponi vel non mutari potest. (1)

Cæterum ne calor ubique æqualis sit, etenim si materiei portio decompositionem subit, hæc tam celeriter propagatur, ut eam coercere vix liceat; neque calor adeo intensus sit, ut fumus emittatur.

Quum acetas liquefactus quiescit, neque ejus superficies tumescit, operatio consummata est. Tunc retorta amovetur, et materies ad refrigerationem usque agitatur, aut massa liquida in aquariis ligneis

(1) Torrefactio ista, vulgo (*fritte*) appellata, summam curam et consuetudinem longam exposcit; ideoque ut inparva copia tentetur antea necesse est.

deponitur, sed, ne mala ex deflagratione oriantur, hæc trabibus solidissimis operienda, et infodienda sunt.

PARAGRAPHUS VII.

DE ACETATIS SODÆ DEPURATIONE ET DECOMPOSITIONE.

Materies refrigerata in aquæ frigidæ quantitate quater pondere suo æquali solvetur, operatioque in duobus (*buquets*) aquariis vulgaribus instituetur. Facta solutio filtro papyraceo aut laneo imponetur, atque inde liquor limpidus obtinebitur, cui aquæ residuo carbonaceo lavando adhibitæ addentur. Carbo hic divisus per decantationem, præsertim quum liquor 15° indicat, separari potest.

Hæc acetatis sodæ albi solutio usque ad 28°. areometri salium Cl. Beaumé, in caldaria plana e ferro laminari, 2^{u}. 81 longa, 1^{u}. 3 lata, et 0^{u}. 31 profunda, densabitur. Foco illi quem de primo caldaria vaporaria agentes descripsimus simili, et illi proximo, ut eodem fumario gaudeat imponitur istud. Solutum densatum crystallisationi in vasis (*terrines*) terra fictili confectis committetur: qua facta, aquæ infunduntur, quæ denuo densantur, et si nihil amplius exhibeant, sive acetate sodæ torrefacto solvendo inserviunt, sive acetatis impuri soluto adduntur, ut non secus ac illud tractentur. Acidi sulfurici in acetatem sodæ actione, acidum aceticum obtinetur; cum reactio vehementissima sit, multumque acidi acetici sub vaporum forma emittatur, decompositio in vasibus (*cuviers*) e ligno populino, ferreis circulis cinctis, sursum deorsumque clausis, est intituenda. In eorum parte superiore adest orificium 0,^{u} 16 diametro metiens operculoque clausum, quo sal depositum extrahi posset; in parte inferiore vero aliud, clavulo clausum, quo acidum

aceticum e salis decompositione ortum manat. Crystalla acetatis sodæ rite exsiccata, conteruntur et in doliolum introducuntur, quod operculo clauditur: deinde acidi sulfurici, 66° indicantis libræ belgicæ 55, infundibuli vitrei ope, cujus rostrum operculum permeat adduntur, et reactio consectaria per nyctemerum vel minimum protrahenda est. Sulfatis sodæ crystalli aut pulvis deponuntur, parsque altera in acido acetico soluta remanet.

Clavulo inferiore deinde ablato, acidum effluit, sed sal, nonnisi quum rite exsiccatum est, extrahitur. Hac methodo calor magnus enascitur quo acidi acetici magna copia in vapores abit, cui incommodo autem occurritur acidum sulfuricum una vice infundendo, quod fundum occupans, in partes quibuscum in contactum venit, solummodo agit, et calor procreatus in majori massa diffunditur

PARAGRAPHUS. VIII.

ACIDI ACETICI DISTILLATIO.

Jam multum abest ut acidum aceticum purum haberi possit, ut sulfatem sodæ et acidum sulfuricum contineat; cuicumque usui vel domestico vel alii destinetur, distillationi subjiciendum erit. Primum usum quod attinet, in cururbita et tubis argenteis distillatio instituenda est, et quidem igne moderatissimo, sub temperie 110°. haud superante. Operatio autem ad siccitatem usque non est proferenda. Reliquiæ in caldaria plana e ferro fuso deponentur, in quo ad hunc terminum distillatio efficietur. Sal post illam extractum aqua orbatum est, et ad usum, in pulverem redigetur, acidum empyreumate scatens cupri et plumbi acetatibus conficiendis inservire debet.

Acidum etiam in retortis vitreis additamento et sphæra (*ballon*) instructis distillari poterit, quæ, numero decem, in balneo arenaceo, ad ebullitionem levem tantum obtinendam, leniter calefaciendo disponentur. Post aliquot horas, sulfas sodæ efformatus est, qui ebullitione sublatus, in vasis fundum prolabitur idque frangere valet. Suspenditur tunc operatio, et post refrigerationem, sulfas depositus extrahitur. Dein distillatio iterum instituitur donec omne liquidum pene vaporatum fuerit, remanet tunc nonnisi acidum sulfuricum. Acidum hac ratione paratum album est, odore et sapore puris gaudet. Si acidum in artibus adhibendum sit, apparatu cupreo utuntur, verum ut orificium ad sulfatem sodæ, panium forma ortum, extrahendum, satis late pateat, monendum habemus. Acidum aceticum tunc cœruleo inficitur colore ab oxydo cupri; post quamlibet distillationem apparatus sedulo lavandus est.

Ea sunt, quæ hucusque ad acidum pyro-ligneum purificandum adhibentur, operationes dies quindecim ad minimum perdurant; et ex 15 hectolitris, 120 libræ belgicæ acidi 8°. ad 7°. indicantis, et 55 ad 60 lib. ejusdem 3°. ad 4°. indicantis, obtinentur.

Oleum empyreumaticum quod attinet, in fabrica ipsa tanquam combustibile usitari potest, cum cineribus aut argilla mixtum et exsiccatum; si contra tanquam pix illud adhibere consilium inest, igne moderatissimo distillandum est, ad aquam et acidum pyro-ligneum quibus viciatur, et quæ prius avolant sejungenda. Si haud satis fluida esset pix, cum olei terebinthinæ parva miscenda esset.

TANTUM.

THESES.

I.

Affinitas chemica a fluidis electricis pendet.

II.

Combustionis phænomenon fluidorum electricorum combinationi, qua neutra fiunt, tribuendum est.

III.

Acidum nitrosum aqua orbatum (*anhydre.*), quale in Cl. Thenard opere describitur, acidi nitrici cum acido hypo-nitroso combinatio mihi videtur.

IV.

Etiamsi atomorum et voluminum theoriæ pares haberi possint, attamen prior alteri anteponenda est.

V.

Werneri de carbonis fossilis (*houille*) ortu doctrinam admitti non posse censeo.

VI.

Aerolithorum originem cosmicam esse verisimilius est.

VII.

Préférez, ait III. Laplace, (*Ecoles normales, tom.* I *v. p.* 249. *les méthodes générales, attachez-vous à les présenter de la manière*

la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont toujours les plus faciles. Cujus verbis, eas in institutione tutissimas esse, addo.

VIII.

Gasa omnia vapores sunt.

IX.

Corporum decompositio pila voltaïca non tam ab electricitatis intensitate dependet, quam ab eo quod fluctus electricus bene instituatur.

DISSERTATION

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

IMPRESSIONS PRODUITES PAR LA LUMIÈRE SUR L'ORGANE DE LA VUE,

PRÉSENTÉE ET SOUTENUE,

SOUS LE RECTORAT DE Mr J. KINKER,

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LIEGE,

LE 3 Juin 1829, A 4 HEURES,

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

PAR

JOSEPH PLATEAU, DE BRUXELLES.

LIÉGE,

H. DESSAIN, IMPRIMEUR-LIBRAIRE, PLACE DU PALAIS.

MDCCCXXIX.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 *du Réglement.*

A Monsieur **A. QUETELET,**

Directeur de l'Observatoire de Bruxelles, Professeur au Musée des sciences et des lettres, &c.

A Monsieur **R. VAN REES,**

Professeur à la Faculté des sciences mathématiques et physiques de l'Université de Liége

Hommage de respect et de reconnaissance,

J. Plateau.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

IMPRESSIONS PRODUITES PAR LA LUMIÈRE

SUR L'ORGANE DE LA VUE.

Tout le monde sait que si l'on agite rapidement et dans l'obscurité un charbon enflammé, on voit une courbe lumineuse et continue, comme si le charbon laissait dans l'air la trace de son passage. Ce fait prouve que les sensations produites en nous par la lumière ont une certaine durée, qu'elles subsistent encore quelque temps après la disparition des objets qui les ont fait naître (Newton, opt. liv. 1, part. 2, prop. 5.) On peut d'ailleurs se convaincre directement de cette vérité en regardant un morceau de papier blanc exposé au soleil, et fermant subitement les yeux; on voit alors l'image blanche du papier subsister encore pendant un temps très-sensible.

Il est naturel de croire que ces impressions ont une durée et une énergie différente suivant l'intensité et l'espèce de la lumière qui les a produites. Le but que je me suis proposé est d'examiner, sous le rapport de leur durée, de leur énergie et de l'action qu'elles exercent les unes sur les autres, les impressions produites par les différentes couleurs.

Si l'on suppose que notre charbon décrive un cercle, il suffira évidemment, pour que le cercle entier paraisse lumineux, que le charbon repasse en chaque point de sa course précisément à l'instant où l'impression produite par son passage précédent va s'évanouir. Il n'est pas moins évident que si l'on parvenait à donner exactement cette vitesse au charbon,

la durée d'une révolution entière serait égale à celle d'une impression. Il semble que l'on peut conclure de là que pour mesurer la durée de l'impression produite sur l'organe de la vue par la présence d'un petit objet quelconque, il suffira d'imprimer à cet objet un mouvement circulaire, en augmentant progressivement la vitesse, jusqu'à ce que la trace apparente de l'objet forme un cercle complet, et de mesurer alors la durée d'une révolution : cette durée sera celle de l'impression. La détermination de la durée d'une révolution ne présente d'ailleurs aucune difficulté : il suffit pour cela de connaître le nombre de révolutions décrites dans un temps donné.

C'est par ce moyen que le chevalier d'Arcy (Mém. de l'Acad. des sc. 1765) a cherché à déterminer la durée de l'impression produite par un charbon enflammé : il la trouve égale à 8 tierces, ou 0″, 133. Ce physicien s'était proposé de tenter les mêmes expériences sur des corps non lumineux par eux-mêmes, mais éclairés par une forte lumière et diversement colorés; il ne paraît pas qu'il ait exécuté ce projet. Young (a course of lectures on natur. philos. tom. 1, pag. 455) affirme, mais sans citer aucune expérience, que la durée de l'impression de la lumière sur la rétine est en général de 0″,01 à 0″,50 ou plus, et dit que cette durée paraît être d'autant plus considérable que la lumière qui a produit la sensation est plus intense. Il n'est pas à ma connaissance que d'autres physiciens se soient occupés du même sujet.

En me servant du même moyen que d'Arcy, j'ai essayé la détermination de la durée pour le cas d'objets colorés diversement et éclairés par la simple lumière du jour ; mais dès les premiers pas j'ai rencontré des obstacles que je vais faire connaître.

1° Les impressions, comme on doit naturellement le supposer, ne passent pas subitement de leur maximum d'intensité à une nullité absolue ; elles décroissent graduellement, de sorte qu'il est impossible de saisir avec précision l'instant où elles s'évanouissent. Ce fait que toutes les analogies nous portent à admettre, est pleinement confirmé par l'expérience : que l'on donne à un morceau de papier blanc un mouvement circulaire trop peu rapide cependant pour produire l'apparence d'un cercle complet ; l'objet

paraîtra s'allonger, de manière à occuper un plus grand espace sur la courbe qu'il décrit, et l'extrêmité postérieure de cette image allongée, au lieu d'être nettement terminée, comme cela arriverait si la sensation s'évanouissait brusquement, paraît au contraire se confondre graduellement avec le fond sur lequel elle se dessine (1). Il suit de là que nous devons renoncer à l'espoir d'obtenir des résultats précis : nous ne pourrons que déterminer à peu près le temps pendant lequel chaque impression conserve une intensité bien sensible.

2° De cette première difficulté en naît une seconde : l'objet qui se meut circulairement retrouve, en chaque point de sa course, l'impression précédente considérablement affaiblie, de sorte que chaque point du cercle présente une succession continuelle de teintes vives et faibles : de là un tremblement, une espèce de vibration qui fatigue l'œil et qui rend bien difficile la détermination précise de la vitesse à donner à l'objet.

3° De même qu'il faut un certain temps pour qu'une impression une fois formée disparaisse complètement, de même aussi un certain temps est nécessaire à sa production complète; chacun sait qu'un objet qui passe devant l'œil avec une très-grande rapidité ne s'aperçoit point ou ne s'aperçoit que faiblement. Il suit de là que l'objet qui se meut circulairement pourra fort bien ne produire qu'une impression imparfaite, de sorte que la durée de cette impression donnée par celle d'une révolution serait moindre que la durée d'une impression complète.

J'ai taché d'atténuer autant que possible l'influence de ces trois difficultés capitales et je vais rendre compte des moyens que j'ai employés à cet effet, ainsi que de ma manière d'opérer.

L'instrument dont je me suis servi consistait, comme celui de d'Arcy, en un système de roues verticales mu par un poids, de telle manière que la dernière roue pouvait acquér. une vitesse considérable, celle du poids étant très-petite. L'axe de cette roue portait une aiguille terminée par une

---

(1) Pour faire cette expérience convenablement, il faut se servir d'un instrument analogue à celui que nous décrirons bientôt, et donner au morceau de papier la figure indiquée page 9.

pince destinée à retenir les objets colorés. En augmentant ou diminuant le poids, on pouvait faire passer l'aiguille par tous les degrés de vitesse nécessaires, et son mouvement, qui dans les premiers instants était accéléré, devenait uniforme après quelques minutes, parce que les frottements et autres résistances augmentant avec la vitesse finissaient par détruire l'accélération due à la pesanteur. L'instrument était d'ailleurs muni d'un volant pour en régulariser la marche et tout l'appareil était placé à la hauteur de l'œil à quelque distance en face d'une fenêtre. L'extrêmité de l'aiguille décrivant une circonférence de cercle et pouvant acquérir tous les degrés désirables de vitesse, l'objet coloré se trouvait dans les conditions requises, et pour connaître la durée d'une révolution, il suffisait de faire mouvoir l'instrument pendant un temps déterminé, de compter le nombre de tours décrits par l'une des premières roues, dont la vitesse était peu considérable, et d'en déduire ensuite, d'après la connaissance du nombre des dents des roues et des pignons, le nombre de révolutions de la dernière; divisant alors le temps par ce nombre, le résultat était la durée d'une révolution.

Pour obvier autant que possible à la première des difficultés ci-dessus énumérées, j'ai placé derrière l'aiguille un carton recouvert de velours noir, comme présentant la teinte la plus foncée possible, et par conséquent comme propre à faire ressortir mieux que toute autre chose les dernières nuances des impressions.

Quant à la seconde difficulté, le seul moyen qui se soit présenté à moi pour en diminuer l'influence, a été de répéter chaque expérience un assez grand nombre de fois, et de prendre ensuite la moyenne entre les divers résultats. En opérant ainsi j'avais encore pour but de corriger les irrégularités provenant de l'instrument.

On peut éviter complètement la troisième difficulté en donnant à l'objet coloré une largeur considérable : en lui faisant occuper, par exemple, un quart de la circonférence qu'il décrit; mais alors il faut bien observer que la durée d'une impression n'est plus égale à celle d'une révolution, comme lorsqu'il s'agissait de petits objets dont on pouvait négliger la largeur sans commettre une erreur sensible; il faut évidemment ici déduire de la

durée d'une révolution le temps qui s'écoule entre le passage d'une des extrêmités de l'objet et celui de l'extrêmité opposée : ainsi lorsque l'objet occupe un quart de la circonférence, la durée d'une impression est égale aux trois quarts de celle d'une révolution. Cette manière d'opérer a, selon moi, deux avantages : d'abord l'objet étant plus large met plus de temps à passer devant l'œil, de sorte que l'impression produite est complète; en second lieu, la durée d'une révolution surpassant celle d'une impression, la vitesse de l'objet est moindre, la succession des nuances vives et faibles est moins rapide et l'œil moins ébloui peut distinguer avec plus de certitude l'instant où il faut cesser d'ajouter de nouveaux degrés de vitesse.

Dans mes expériences, je me suis servi de bandes de papier colorées (Fig. 1), terminées par deux arcs de cercle ayant leur centre sur l'axe de l'aiguille, et par deux rayons faisant entr'eux un angle droit. Les expériences ont été faites sur les couleurs blanche, jaune, rouge et bleue (1); en voici les résultats avec les moyennes correspondantes : ils expriment la durée d'une impression en secondes sexagésimales :

	Blanc.	Jaune.	Rouge.	Bleu.
	0″, 34	0″, 36	0″, 33	0″, 31
	0″, 33	0″, 36	0″, 37	0″, 30
	0″, 35	0″, 36	0″, 37	0″, 34
	0″, 35	0″, 35	0″. 33	0″, 30
	0″, 38	0″, 36	0″, 35	0″, 34
	0″, 37	0″, 34	0″, 32	0″, 36
Moyennes	0″, 35	0″, 35	0″, 34	0″, 32

Une première chose que l'on ne peut manquer d'observer, à l'inspection de ces résultats, c'est la grande différence qui existe entre eux et celui de d'Arcy, que nous avons donné plus haut. En effet, un charbon

(1) Les papiers étaient colorés avec de la gomme gutte, du carmin et du bleu de Prusse. C'est de ces mêmes couleurs que j'ai fait usage dans toutes les expériences suivantes.

enflammé vu dans l'obscurité paraît devoir produire sur la rétine une action plus énergique qu'un papier blanc exposé à la lumière diffuse; comment admettre d'après cela que l'impression due au premier ne dure que 0″, 13, tandis que l'impression due au second durerait 0″, 35 ? Je suis porté à croire que d'Arcy n'a pas eu égard au décroissement graduel de l'impression, et qu'il a augmenté la vitesse jusqu'à ce qu'il obtint un anneau lumineux d'un éclat uniforme : en effet, il ne fait aucune mention de ce décroissement, et il dit quelque part que l'anneau parut dans toute son *égalité*. Peut-être aussi le charbon n'ayant que peu de largeur ne produisait-il qu'une impression imparfaite dont la durée devait être moindre que si la sensation eût été complète ; peut-être enfin la disposition des yeux est-elle différente dans l'obscurité. Quoiqu'il en soit les résultats que nous venons d'obtenir ne doivent être considérés que comme approximatifs; ils sont environnés, comme on l'a vu plus haut, de trop de causes d'erreur et sont déduits d'expériences trop peu nombreuses pour qu'on puisse les regarder comme parfaitement exacts. Tels qu'ils sont ils montrent que, parmi les couleurs principales, le blanc et le jaune produisent les impressions les plus durables ; que le rouge vient ensuite, et en dernier lieu, le bleu. Toutefois les différences sont si légères qu'on ose à peine s'y fier, surtout si l'on considère les grands écarts qui existent entre les résultats isolés qui ont donné les moyennes. Heureusement nous verrons bientôt de nouveaux résultats ajouter à la probabilité des premiers, au moins quant à l'ordre dans lequel les couleurs sont rangées.

Voici maintenant d'autres expériences, susceptibles de beaucoup plus de précision et qui, sans nous conduire à la valeur de la durée des impressions, nous fournissent des données sur leur énergie relative et sur la loi suivant laquelle décroissent les impressions une fois formées.

Que l'on divise un cercle de papier (fig. 2), en un certain nombre de secteurs égaux, par exemple vingt-quatre; que l'on trace ensuite deux circonférences concentriques, de manière à intercepter sur chaque secteur un trapèze curviligne tel que *abcd;* que douze de ces trapèzes soient peints d'une même couleur, et que les douze autres soient noircis, de manière que chaque surface colorée se trouve entre deux surfaces noires; il

vaut mieux encore découper ces dernières à jour et faire en sorte que derrière le cercle se trouve un carton recouvert de velours noir. Si l'on adapte ce cercle à l'instrument de manière que son centre soit sur l'axe de la dernière roue, tout l'espace compris entre les deux circonférences concentriques tournera sur lui-même et les surfaces colorées et obscures se succéderont l'une à l'autre avec rapidité. Si la vitesse est peu considérable, l'œil placé devant l'instrument n'apercevra qu'un tremblement, une succession rapide de teintes brillantes et obscures; mais si l'on augmente graduellement la vitesse, cette confusion diminuera et il arrivera un point où la teinte perçue sera uniforme. Alors tout l'espace divisé en portions noires et colorées ne présentera plus qu'une surface parfaitement unie et dont la couleur sera celle qu'on obtiendrait en mélangeant d'un peu de noir la teinte des portions colorées. De plus, si les portions noires ont été découpées à jour, notre surface sera transparente, et des objets placés derrière, entre le cercle et le velours noir, s'apercevront comme à travers une gaze colorée.

Avant d'aller plus loin, cherchons à rendre raison de ces faits. L'explication qui se présente naturellement est la suivante : lorsque la vitesse a atteint un certain degré, le temps qui s'écoule entre les passages de deux portions colorées successives est trop petit pour que l'impression produite par la première ait décru d'une quantité sensible lorsque la seconde arrive; de sorte que les impressions se succédant sans interruption et sans décroissement, l'œil ne peut percevoir qu'une teinte uniforme. Mais pourquoi cette teinte uniforme tire-t-elle sur le noir, si les impressions ne sont pas sensiblement affaiblies? C'est que chaque portion colorée passe devant l'œil avec trop de rapidité pour y laisser une impression complète; l'impression imparfaite qu'elle produit subsiste sans altération sensible jusqu'à l'arrivée de la portion suivante; pendant le passage de cette dernière, l'impression précédente s'évanouit et une seconde se forme, et ainsi de suite. Quant à la transparence de la teinte uniforme, elle s'explique aussi aisément : si les portions noires sont découpées à jour, un objet placé derrière le cercle est alternativement vu et caché par la succession des ouvertures et des surfaces colorées qui passent devant lui: il doit donc produire sur la rétine une suite d'impressions

qui, lorsque la vitesse sera considérable, n'en formeront plus qu'une continue mais imparfaite, et combinée avec celles des surfaces colorées.

Tout ce qui précède étant bien conçu, soumettons maintenant les différentes couleurs à cette expérience, et cherchons pour chacune d'elles la vitesse précisément nécessaire à la production d'une teinte uniforme (1). Ces vitesses sont très-différentes, comme le prouve le tableau ci-joint des résultats que j'ai obtenus en me servant de cercles contenant chacun douze trapèzes colorés et douze noirs. Ils expriment la durée d'une révolution :

	Blanc.	Jaune.	Rouge.	Bleu.
	0″, 191	0″, 201	0″, 248	0″, 323
	0″, 194	0″, 201	0″, 230	0″, 295
	0″, 198	0″, 202	0″, 227	0″, 264
	0″, 182	0″, 192	0″, 224	0″, 297
Moyennes	0″, 191	0″, 199	0″, 232	0″, 295

Ces résultats sont, comme on le voit, inverses de ceux de la page 9; voyons le parti qu'on peut en tirer. Chaque cercle contenant vingt-quatre trapèzes tant noirs que colorés, il est évident que si l'on veut avoir le temps qui s'écoule entre les passages de deux trapèzes colorés successifs, ou en d'autres termes, le temps pendant lequel une impression s'est maintenue sans perte sensible, il suffira de diviser par 24 la durée d'une révolution. Or l'inspection des moyennes ci-dessus montre que cette opération donnerait des nombres qui iraient en croissant depuis le blanc jusqu'au bleu ; il s'ensuit que l'impression bleue subsiste plus long-tems que la rouge sans décroissement sensible ; celle-ci plus long-temps que la jaune et cette dernière plus long-temps que la blanche. Mais subsister plus long-temps sans décroissement sensible est évidemment ici la même chose que décroître moins rapidement ; ainsi nous arrivons à ce résultat singulier et

(1) J'entends par là la vitesse qu'on obtient en augmentant graduellement le poids qui fait mouvoir l'instrument, jusqu'à ce que la teinte soit devenue uniforme et en s'arrêtant précisément à ce point.

en opposition apparente avec celui de la page 9, que les impressions décroissent avec une inégale rapidité, et que sous ce rapport les couleurs doivent être rangées dans l'ordre suivant :

Bleu, Rouge, Jaune, Blanc,

le décroissement de l'impression bleue étant le plus lent, et celui de la blanche le plus rapide.

Mais de ce que l'impression bleue, par exemple, s'efface avec plus de lenteur que la rouge, faut-il en conclure que sa durée totale est plus longue, et qu'ainsi les résultats de la page 9 sont inexacts ? Je ne le crois pas : la disparition graduelle d'une impression est le passage d'un état accidentel de l'organe à son état normal : or lorsque les corps inorganiques nous présentent de semblables passages, par exemple lors du refroidissement des corps, lors de la déperdition de l'électricité dans l'air, etc., la marche du phénomène est en général d'autant plus lente que les corps sont moins écartés de l'état normal, tandis que sa durée totale est d'autant moins considérable ; ainsi de deux corps chauffés inégalement et abandonnés ensemble au refroidissement, le moins chaud se refroidira par degrés moins rapides, mais mettra cependant moins de temps que l'autre à revenir à la température extérieure. Il me semble qu'on peut attribuer par analogie les mêmes propriétés au décroissement des impressions : alors tous les résultats s'expliquent et s'accordent. En effet admettons, et nous en verrons plus loin plus d'une preuve, que les couleurs doivent être rangées dans l'ordre de la page 9 quant à l'énergie des impressions qu'elles font naître, depuis le blanc qui produirait l'impression la plus intense, jusqu'au bleu qui produirait la plus faible. Il résulte de l'analogie ci-dessus que l'impression blanche sera la plus durable, mais qu'elle décroîtra avec le plus de rapidité ; que l'impression jaune durera moins et décroîtra aussi moins rapidement ; que dans cet ordre l'impression rouge suivra la jaune et qu'enfin l'impression bleue sera la moins durable et offrira le décroissement le moins rapide. Or, c'est précisément là ce que nous apprennent les résultats des pages 9 et 12 (1).

(1) A la vérité, d'après les résultats de la page 9 l'impression du jaune durerait autant que celle du blanc ; mais comme nous prouverons bientôt d'une autre manière

Mais nous pouvons aller plus loin : ce que nous venons de dire relativement aux impressions des différentes couleurs peut s'étendre aux divers états d'une impression qui s'efface : dans le premier moment le décroissement sera très-rapide parce que l'impression est encore énergique ; mais ensuite, à mesure qu'elle perdra de sa force, le décroissement se ralentira. C'est aussi ce qui arrive dans le refroidissement, etc. et ce que mettront, j'espère, hors de doute les expériences suivantes :

Divisons deux cercles A et B (Fig. 3) en secteurs alternativement blancs et noirs ; que les secteurs blancs aient une largeur égale dans les deux cercles, mais y soient en nombre différent, de sorte que les intervalles qui les séparent diffèrent en étendue d'un cercle à l'autre. Faisons tourner successivement ces deux cercles avec la vitesse précise que chacun d'eux exige pour produire une teinte uniforme, et rappelons-nous qu'alors la durée du passage d'un intervalle est le temps pendant lequel l'impression se maintient sans perte sensible. Comme les intervalles sont plus grands dans le cercle A que dans le cercle B, la vitesse du premier devra nécessairement l'emporter sur celle de l'autre, afin que la rapidité du passage des intervalles compense leur étendue ; c'est ce que l'expérience confirme. Mais si le cercle A se meut plus vite que le cercle B, les secteurs blancs du premier produiront dans l'œil une impression moins parfaite, et par conséquent plus faible, que ceux du second ; c'est ce que l'expérience confirme encore en nous montrant que la teinte uniforme du cercle A est plus sombre que celle du cercle B. On voit que par ce moyen simple nous nous sommes procuré deux impressions de même nature, c'est-à-dire dues à la même couleur, mais inégales en intensité, et dont nous pouvons comparer les vitesses de décroissement. Si nous trouvons ces vitesses inégales et telles que la plus petite corresponde à l'impression la plus faible, il faudra nécessairement en conclure qu'une même impression décroît plus ou moins rapidement selon qu'elle est plus ou moins énergique, et que

---

que le blanc produit une impression plus intense que le jaune, il est extrêmement probable que des expériences plus nombreuses nous auraient donné une légère différence entre leurs durées.

par conséquent lorsqu'une impression s'efface, la marche du décroissement se ralentit à mesure que l'impression approche de sa fin, ce qu'il fallait démontrer.

Or pour comparer les vitesses de décroissement, il n'y a qu'à chercher, pour chacun de nos cercles, le temps pendant lequel l'impression a subsisté sans perte sensible, c'est-à-dire la durée du passage d'un intervalle. (Le calcul n'offre aucune difficulté, puisque l'on connaît la largeur des intervalles et la durée d'une révolution entière.) J'ai déterminé ce temps dans quelques cas et j'ai constamment trouvé qu'au cercle qui produisait l'impression la plus faible correspondait un temps plus long, c'est-à-dire une vitesse de décroissement moindre. Ainsi lorsque les intervalles du cercle A sont, comme dans la figure, quadruples de ceux du cercle B, le temps pendant lequel l'impression relative au premier se maintient sans perte sensible étant 1, le temps pendant lequel se maintient l'autre impression n'est que 0,76. Donc etc.

Voici une autre expérience dont le résultat est plus frappant encore : divisons deux cercles A et B (fig. 4) en secteurs blancs et noirs ; que ces secteurs soient en même nombre dans les deux cercles, mais donnons aux secteurs blancs du premier peu de largeur relativement aux intervalles qui les séparent, et faisons le contraire dans le second, de telle manière que les secteurs blancs du premier soient égaux aux intervalles noirs du second, et vice-versâ. Faisons les tourner successivement avec la vitesse précisément nécessaire à la production d'une teinte uniforme, et mesurons pour chacun d'eux la durée d'une révolution ; nous trouverons toujours ces deux durées égales entr'elles, quelle que soit la différence entre les largeurs des secteurs de l'un et de l'autre cercle.

Ce fait, me semble-t-il, fournit une preuve bien convaincante de la vérité de la loi trouvée pour le décroissement des impressions. En effet il résulte d'abord de l'égalité de vitesse des deux cercles, que les secteurs blancs de A, qui sont beaucoup moins larges que ceux de B, produiront une sensation beaucoup moins énergique, et c'est ce que prouve la teinte uniforme qui est beaucoup plus sombre pour ce cercle que pour l'autre : ainsi nous avons encore ici deux impressions de même nature, mais

d'intensité différente, et dont nous pouvons comparer les décroissements. Or de l'égalité de vitesse des cercles il résulte encore que les intervalles de A, qui sont très-larges relativement à ceux de B, mettront beaucoup plus de temps que ces derniers à passer devant l'œil; d'où la conséquence nécessaire que le temps pendant lequel l'impression relative au cercle A se maintient sans perte notable est beaucoup plus long que celui pendant lequel se maintient l'impression relative au cercle B, ou en d'autres termes, qu'une impression faible décroit plus lentement qu'une impression énergique; d'où enfin notre loi de décroissement.

En multipliant les expériences de ce genre, il est probable qu'on parviendrait à appliquer le calcul à la détermination précise de la loi suivant laquelle s'effacent les impressions, et peut-être arriverait-on ainsi à une nouvelle méthode bien plus rigoureuse que la première, de mesurer leur durée totale.

Probablement aussi cette loi s'étend aux impressions des autres sens, que tout nous porte à regarder comme douées également d'une durée appréciable : ainsi l'on admet qu'un son est une répétition de chocs successifs trop rapprochés pour que l'oreille puisse distinguer les intervalles qui les séparent; ce qui veut dire en d'autres termes que chacun de ces chocs produit sur l'organe une impression qui subsiste sans altération sensible jusqu'à la production du choc suivant; d'où il résulte évidemment que les impressions de l'ouie survivent comme celles de la vue à la cause qui les a produites. Et si l'on considère que toute la différence des tons aigus et graves provient de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle se succèdent les impressions partielles dont l'ensemble constitue le son, l'on en conclura que ces impressions doivent jouir, quant à leur durée, de propriétés particulières dont l'étude pourrait conduire à des résultats curieux. Mais revenons à notre sujet.

Pour compléter ce travail sur les propriétés des impressions de la vue considérées sous le rapport de leur durée, il faudrait encore déterminer le temps qu'exige une impression pour sa production entière; il faudrait aussi établir, par des expériences plus positives, que la durée totale d'une impression est d'autant plus grande que l'impression est plus énergique;

il faudrait enfin mesurer cette durée dans un plus grand nombre de cas: par exemple, en exposant les couleurs à la lumière du soleil, en opérant sur des corps lumineux par eux-mêmes, comme des charbons allumés, des flammes de diverses espèces, etc. Je n'ai pu jusqu'à présent me livrer à ces recherches.

Il me reste maintenant à parler des cas dans lesquels s'observent le plus fréquemment les effets de la durée des impressions produites par la lumière, et à indiquer quelques applications assez curieuses que l'on peut faire de cette propriété; mais auparavant je ne crois pas inutile de rappeler en résumé quels sont les résultats auxquels conduisent les expériences dont j'ai donné le détail; ces résultats sont les suivants :

1° *Une impression quelconque exige un temps appréciable pour se former complètement, de même que pour disparaître complètement.*

2° *Les impressions ne disparaissent pas brusquement, mais diminuent graduellement d'intensité.*

3° *Lorsqu'une impression s'efface, la marche de son décroissement est d'autant moins rapide que l'impression est plus près de sa fin.*

4° *Les différentes couleurs éclairées par la simple lumière du jour produisent des impressions qui diffèrent très-peu quant à leur durée totale. Sous ce rapport les couleurs paraissent devoir être rangées dans l'ordre suivant, en commençant par celle qui produit l'impression la plus durable:*

Blanc, Jaune, Rouge, Bleu.

5° *Cette durée totale, comptée depuis l'instant où l'impression a acquis toute sa force jusqu'à celui où elle n'est plus qu'à peine sensible, est à peu près de* 0″, 34, *terme moyen.*

6° *Enfin il résulte accidentellement de mes expériences que les couleurs ci-dessus doivent être aussi rangées, relativement à l'intensité de leurs impressions, dans l'ordre : Blanc, Jaune, Rouge, Bleu en commençant par celle qui produit l'impression la plus énergique.*

Quoique la durée d'une impression soit très-petite, elle ne laisse pas que de donner lieu à une foule d'illusions auxquelles on fait généralement peu d'attention à cause de la fréquence même de leur production : ainsi les feux d'artifice doivent à cette durée une partie de leur effet; les

metéores ignés laissent ordinairement après eux une longue trainée lumineuse qui probablement est due à la même cause ; une corde qui vibre nous présente la forme d'un fuseau applati ; les roues des voitures qui se meuvent avec une grande rapidité semblent avoir perdu leurs rayons, et les objets placés de l'autre côté se voient comme à travers une gaze légère; une tache sur la surface d'une toupie se change en un cercle lorsque celle-ci est en mouvement; la chûte de la pluie ou de la grêle présente l'aspect d'une série de droites parallèles et non de corps arrondis qui tombent, etc., etc. Toutes les fois enfin que nous regardons des objets qui se meuvent rapidement, la durée des impressions modifie les apparences.

C'est de la durée des impressions que dépend l'effet d'un amusement imaginé par le docteur Paris et que l'on trouve décrit sous le nom de *Thaumatrope* dans le manuel de physique amusante de Mr. Julia-Fontenelle. Il consiste à dessiner deux objets différents des deux côtés d'un cercle de carton, de telle manière que si l'on fait tourner rapidement ce cercle autour d'un diamètre comme axe, le mélange des impressions laissées par les deux dessins en produise un troisième. Ainsi en dessinant un oiseau d'un côté et une cage de l'autre, l'oiseau sera vu dans la cage, etc.

Mr. Roget, dans un mémoire inséré dans les transactions philosophiques (année 1825 page 131), donne l'explication d'une illusion d'optique très-curieuse et qui doit aussi sa naissance à la durée des impressions. Voici ce dont il s'agit : lorsqu'on aperçoit à travers une série d'ouvertures verticales, par exemple celles d'une palissade, une roue de voiture roulant sur le sol avec une grande rapidité, on ne distingue plus les rayons en mouvement, mais on voit à leur place des courbes immobiles sur la surface de la roue. La forme de ces courbes est représentée fig. 5. Les conditions sont les plus favorables lorsque la roue est fortement éclairée, tandis que les barres de la palissade sont obscures.

Voici maintenant comment Mr. Roget explique ce phénomène : observons d'abord qu'on peut transporter le mouvement de translation horizontal à la palissade et supposer que la roue tourne autour d'un centre fixe : les résultats seront évidemment les mêmes ; cela posé, considérons, pour plus de simplicité, un seul rayon et une seule ouverture verticale : ces deux

lignes droites dont l'une tourne autour d'un centre fixe et dont l'autre s'avance parallelement à elle-même se couperont en apparence suivant une série de points dont l'ensemble formera une courbe déterminée : or si le rayon est fortement éclairé et que l'ouverture soit percée dans une surface obscure, chacun de nos points d'intersection produira sur la rétine une image brillante, et la suite de ces images devra présenter l'aspect d'une courbe continue, parce que l'impression de la première subsistera encore lors de la production de la dernière, par la même raison qu'un charbon allumé semble laisser une trace lumineuse. La forme de la courbe dépendra des positions initiales du rayon et de l'ouverture, c'est pourquoi lorsqu'il y a plusieurs rayons et plusieurs ouvertures, il y a aussi plusieurs courbes formées en même temps, et l'on voit qu'en supposant les deux mouvements uniformes, toutes les fois que les rayons et les ouvertures reviennent aux mêmes positions relatives, les mêmes apparences doivent se reproduire : de là l'immobilité des courbes en question. Il est aisé de construire ces courbes géométriquement, et d'en chercher l'équation : c'est aussi ce que fait l'auteur que nous venons de citer.

Passons maintenant à une autre illusion du même genre, mais dont les effets sont beaucoup plus généraux et dont l'explication est différente. J'avais observé que si l'on faisait tourner rapidement une roue garnie de dents perpendiculaires à son plan, et que l'on plaçât l'œil à quelque distance dans le prolongement de ce plan, de manière que les dents d'une moitié de la roue fussent cachées par celles de l'autre moitié, on apercevait l'image d'une série de dents parfaitement immobiles ; que de même deux roues tournant l'une derrière l'autre autour du même axe, avec des vitesses considérables et en sens contraire, produisaient dans l'œil l'apparence d'une roue dont les rayons étaient immobiles ; que de plus lorsque les roues se mouvaient autour de deux axes différents, l'image fixe se composait de courbes. J'avais fait peu d'attention à ces effets singuliers ; mais après avoir lu le mémoire de Mr. Roget, frappé de l'analogie du phénomène qu'il décrit avec ceux que j'avais observés, je résolus d'examiner ces derniers plus attentivement, et j'arrivai au résultat suivant :

Si l'on suppose deux courbes brillantes situées dans des plans parallèles ;

que chacune d'elles tourne avec une vitesse considérable mais uniforme autour d'un axe perpendiculaire à son plan ; enfin que la vitesse de l'une soit un multiple exact de celle de l'autre, l'œil placé devant le systême distinguera, au milieu de l'espèce de gaze produite par le mouvement des deux lignes, l'image immobile d'une troisième courbe plus sombre que le fond sur lequel elle se dessine.

Ce spectre curviligne est le lieu des points d'intersection apparents des courbes en mouvement.

Les courbes mobiles peuvent, par exemple, être découpées dans du papier blanc épais, et tout le systême être placé devant un carton noirci.

Ce phénomène nous permet donc d'offrir à l'œil, d'une façon toute nouvelle, les courbes les plus variées ; en voici l'explication : soient AB et A'B' (fig. 6) deux positions successives de la première ligne, CD et C'D' deux positions successives de la seconde, de sorte que les deux courbes partant ensemble des deux premières positions, arrivent ensemble aux deux secondes ; soit enfin *mrn* la ligne des points d'intersection apparents des deux courbes dans ce trajet.

Les deux courbes brillantes s'étant croisées sur tout le cours de la ligne *mrn*, chacun des points de cette ligne n'a pu envoyer à l'œil que l'impression provenant de la courbe la plus rapprochée du spectateur, tandis que tous les autres points du quadrilatère curviligne *mpnq*, ne recevant que successivement chacune des lignes mobiles, envoient à l'œil deux impressions successives : la ligne *mrn* doit donc paraître moins brillante que le reste du quadrilatère, et il doit en être de même pour toute la suite des points d'intersection ; maintenant puisque la vitesse de l'une des courbes est un multiple de celle de l'autre, après une révolution de la courbe qui a la moindre vitesse, elles seront revenues toutes deux à leurs positions initiales et le même phénomène se répétera : il doit donc en résulter une image fixe qui subsiste tant que dure le mouvement des deux courbes. On conçoit d'ailleurs que la vitesse doit être assez considérable pour que l'œil ne puisse distinguer les lignes en mouvement.

Il résulte de l'explication précédente que le phénomène se produirait encore si la courbe de devant, au lieu d'être brillante, était noire : car

alors, pour tous les points de la ligne d'intersection, cette courbe noire intercepterait la lumière venant de la courbe brillante, tandis que tous les autres points enverraient à l'œil l'impression produite par cette dernière : ceci est parfaitement d'accord avec l'expérience; les courbes fixes sont même plus distinctes par ce moyen que par le premier.

La courbe de devant peut encore être une fente percée dans une surface noire, la courbe de derrière étant brillante; dans ce cas l'image fixe paraît plus claire que le fond sur lequel elle est tracée, et le phénomène doit s'expliquer comme celui que décrit Mr. Roget.

Lorsque la vitesse de l'une des courbes n'est pas un multiple de celle de l'autre, les deux lignes ne se retrouvent plus dans les mêmes positions après une révolution de la plus lente, de sorte qu'il se produit une nouvelle courbe à chacune de ces révolutions, et que l'œil, au lieu d'apercevoir l'image d'une ligne fixe, ne peut voir qu'une succession rapide de lignes différentes; cependant si la plus grande vitesse ne diffère que très-peu d'un multiple de la plus petite, la différence entre deux images consécutives sera très-peu considérable, de sorte que l'œil ne pourra les distinguer l'une de l'autre et que le spectre produit paraîtra changer peu à peu de forme pour passer par tous les cas différents qui peuvent résulter de la différence des positions initiales. Ce n'est pas une des particularités les moins curieuses du phénomène que de nous faire pour ainsi dire assister à ces passages entre des courbes qui n'offrent souvent aucune ressemblance, passages que l'on peut ralentir à son gré, si l'instrument dont on se sert permet de faire varier par différences très-petites le rapport des vitesses (1).

Lorsqu'on connaît les deux courbes mobiles, le rapport des vitesses, le sens de chacune d'elles, la distance apparente des centres de mouvement et les positions initiales, la courbe fixe est complètement déterminée, et il est aisé d'en chercher l'équation; je ne donnerai pas ici la marche à suivre

---

(1) C'est ce qu'on obtient aisément, en imprimant le mouvement aux deux courbes au moyen de poulies, parce qu'alors, en faisant varier la tension des cordons, leur diamètre varie aussi d'une petite quantité, et le rapport des vitesses peut ainsi être augmenté ou diminué aussi peu que l'on veut.

pour y parvenir, ce serait m'écarter de mon sujet ; j'indiquerai seulement comme exemples, quelques courbes connues que l'on produit par le mouvement de deux droites qui passent par leurs centres de rotation :

1° Les vitesses étant dans le même sens et dans le rapport de 1 à 2, la courbe fixe est une focale qui a son sommet au centre du mouvement le plus rapide, et son point multiple à l'autre centre de rotation. Cette focale devient un cercle traversé par une ligne droite, lorsque, dans leurs positions initiales, les deux droites mobiles se sont superposées.

2° Les vitesses étant égales et dans le même sens, la courbe fixe est un cercle passant par les deux centres de rotation.

3° Les vitesses étant égales et en sens contraires, l'image fixe est une hyperbole passant aussi par les deux centres de mouvement.

On peut se donner l'image fixe et l'une des courbes mobiles ; dans ce cas une construction géométrique très-simple fera connaître l'autre ; or rien n'empêche de prendre pour image fixe une figure quelconque : une tête, un homme, un mot, etc. : alors la construction dont nous venons de parler produira une figure difforme qui, venant à tourner en même temps que la ligne mobile que l'on s'était donnée, fera naître une image parfaitement régulière.

Voilà donc une espèce toute nouvelle d'anamorphoses ; pour qu'elles réussissent complètement, il faut que la figure difforme soit noire et tourne devant une ligne blanche, ou qu'elle soit blanche et tourne derrière une fente percée dans une surface noire ; dans le premier cas l'image régulière est noire sur un fond blanchâtre ; dans le second elle est blanchâtre sur un fond noir.

Ici se termine la partie de mon travail relative à la durée des impressions. Il me reste à examiner ces dernières sous le double point de vue de leur énergie et de l'action qu'elles exercent les unes sur les autres.

Pour comparer les sensations des différentes couleurs sous le rapport de leur énergie, voici comme je raisonnai : si je divise un cercle en secteurs de deux couleurs différentes, par exemple bleus et rouges, et que je lui imprime un mouvement de rotation suffisamment rapide pour qu'il en résulte l'apparence d'une teinte uniforme, cette teinte participera des deux couleurs employées et tendra d'autant plus vers l'une d'entr'elles que l'impression de celle-ci sera plus énergique et que les secteurs peints de cette couleur seront plus larges relativement aux autres : si donc je fais varier le rapport de largeur des secteurs jusqu'à ce que j'obtienne une teinte uniforme qui ne tienne pas plus de l'une des deux couleurs que de l'autre, il est évident qu'alors les secteurs les moins larges correspondront à la couleur qui produit la sensation la plus énergique. Ainsi, par exemple, que les deux couleurs employées soient le bleu et le rouge; donnons aux secteurs peints de chacune d'elles des largeurs telles que la teinte résultante soit le violet le plus pur possible ; si, pour parvenir à ce résultat, nous avons été obligés de donner aux secteurs bleus plus de largeur qu'aux rouges, la raison en est évidemment que le bleu, pour agir sur l'œil autant que le rouge dans la sensation violette résultante, doit compenser sa moindre énergie par le temps plus grand qu'il met à passer devant l'œil.

Il semble d'abord que pour obtenir les rapports de largeur entre les secteurs de deux couleurs données, il suffit de se servir de la méthode imaginée par Newton pour déterminer la teinte provenant du mélange des couleurs du prisme dans des proportions données (Opt. liv. 1, part. 2, prop. 6.) Mais outre que Newton dit lui-même qu'il ne la regarde pas comme mathématiquement exacte, il est aisé de se convaincre qu'en l'appliquant à deux couleurs seulement elle conduit à des résultats qui s'éloignent beaucoup de la vérité. J'ai donc eu recours à l'expérience; mais avant d'en exposer les résultats, je ferai les deux observations suivantes :

1° Ces résultats ne doivent pas être considérés comme donnant les rapports d'énergie entre les impressions ; tout ce qu'ils peuvent nous apprendre, c'est que telle couleur produit une impression plus énergique que telle autre.

2° Le degré d'intensité des couleurs a, dans ce cas, une très-grande influence; de sorte que si quelqu'un répète ces expériences, il n'obtiendra

les mêmes rapports de largeur qu'en employant des couleurs exactement aussi foncées que les miennes. Je me suis du reste servi de couleurs très-intenses, comme dans mes expériences sur la durée des sensations, afin que la différence fut mieux marquée entre les effets des différentes couleurs.

Voici maintenant mes résultats :

1° Un cercle divisé en secteurs bleus et jaunes m'a donné une teinte uniforme qui ne tendait ni vers l'une ni vers l'autre des deux couleurs, lorsque la largeur des secteurs bleus était à peu près quadruple de celle des jaunes.

2° J'ai obtenu un violet magnifique en employant le bleu et le rouge dans un rapport peu différent du précédent, c'est-à-dire le bleu étant à peu près quadruple du rouge.

3° Enfin le rouge et le jaune dans le rapport approché de cinq à trois m'ont donné un orangé qui paraissait exactement intermédiaire.

Ces résultats établissent, comme on le voit, d'une manière bien probable, d'abord que l'impression bleue est moins énergique que la jaune et la rouge; ensuite que la rouge l'est moins que la jaune; et comme il est d'ailleurs évident que le blanc produit une impression plus intense que toutes les autres couleurs, il s'ensuit que l'ordre dans lequel doivent être rangées les couleurs principales quant à l'énergie de leurs impressions, est le suivant :

Blanc, Jaune, Rouge, Bleu;

ordre qui coïncide avec celui que nous avons déjà déduit d'autres considérations (pag. 17, 6e résultat.)

La place qu'occupe ici le rouge ne s'accorde pas avec l'opinion généralement reçue qu'il est la couleur la plus fatigante pour les yeux; mais il me suffira, je pense, de faire observer qu'on ne doit pas nécessairement regarder la fatigue de l'organe comme ne dépendant que du degré d'intensité de la sensation : les sons les plus forts ne sont pas toujours ceux qui fatiguent le plus l'oreille.

Cet ordre dans lequel les couleurs viennent de se ranger est positivement indiqué par Newton (Opt. liv. 1, part. 1, prop. 7); il ne cite aucune expérience, mais il jugeait sans doute de l'intensité d'action des couleurs d'après l'aspect du spectre solaire. On voit, et de nouvelles preuves vont se présenter encore, que son opinion est parfaitement confirmée par l'expérience.

Buffon, dans son mémoire sur les couleurs accidentelles (Mém. de l'acad. des sc. 1743), dit que l'image bleuâtre produite dans ses yeux par le jaune lui semblait s'effacer plus difficilement que l'image verte produite par le rouge; *ce qui*, ajoute-t-il, *semble prouver ce qu'a soupçonné Newton, que le jaune est de toutes les couleurs celle qui fatigue le plus nos yeux.* Il observe ensuite que la couleur accidentelle provenant du bleu ne subsistait pas à beaucoup près aussi long-temps que les deux précédentes.

Enfin j'ai fait d'autres expériences qui, indépendamment de ce qu'elles confirment les résultats précédents, ne me semblent pas dépourvues d'un intérêt propre, et pourraient peut-être recevoir d'autres applications : j'ai cherché sous quel angle visuel chacune des quatre couleurs blanc, jaune, rouge, bleu cesse d'être visible pour mon œil. A cet effet, j'ai pris de petits cercles de papier d'un centimètre de diamètre et peints chacun de l'une des couleurs ci-dessus. J'attachais l'un de ces cercles sur une surface noire placée verticalement dans une plaine et je m'en éloignais lentement jusqu'à ce que l'objet coloré ne me parut plus que comme un petit nuage à peine perceptible et qui s'évanouissait complètement pour quelques pas de plus; je marquais l'endroit où je m'étais arrêté, et mesurant ensuite la distance de ce point à celui où se trouvait l'objet, le calcul me donnait l'angle compris entre les deux rayons visuels qui, partant de mon œil, aboutissaient aux deux extrêmités d'un diamètre du petit cercle.

Je n'ai pas besoin de faire observer que si telle couleur est visible sous un angle visuel plus petit que telle autre, ou, ce qui est la même chose, si un objet peint de la première est visible à une plus grande distance qu'un objet égal peint de la seconde, on peut l'attribuer à ce que la rétine est affectée d'une manière plus énergique par la première que par la seconde. Remarquons en passant que ces expériences offrent l'avantage de nous permettre de comparer le blanc aux autres couleurs. Elles ont été faites successivement à l'ombre et au soleil; en voici les résultats dans les deux cas:

	A L'OMBRE.	AU SOLEIL.
Blanc	18″	12″
Jaune	19″	13″
Rouge	31″	23″
Bleu	42″	26″

On voit que les couleurs suivent encore ici l'ordre déjà trouvé : le blanc se voit sous l'angle visuel le plus petit, c'est-à-dire qu'il agit le plus puissamment sur la rétine ; puis vient le jaune, puis le rouge et enfin le bleu. On voit aussi, comme on devait s'y attendre, que les angles visuels sont plus petits au soleil qu'à l'ombre : les premiers sont à peu près les deux tiers des seconds.

Les résultats que je viens d'exposer, joints à toutes les autres preuves rapportées précédemment, établissent d'une manière qui me paraît incontestable l'ordre des quatre couleurs principales quant à l'intensité de leur action sur la rétine ; je regrette seulement de n'avoir pu jusqu'à présent soumettre aux mêmes épreuves les autres couleurs du spectre solaire.

Passons maintenant à l'action mutuelle des impressions. On sait que Newton est parvenu à produire du blanc en faisant se succéder avec une grande rapidité sur la rétine les impressions des différentes couleurs fournies par un prisme ; (Opt. liv. 1, part. 2, prop. 5) on sait encore que l'on produit un blanc très-imparfait, c'est-à-dire un gris plus ou moins foncé, en partageant un cercle en secteurs peints des sept couleurs du spectre solaire dans certaines proportions, et en lui donnant un mouvement de rotation assez rapide pour qu'il en résulte une teinte uniforme.

A ces faits connus j'ajouterai ici une série d'observations que j'ai faites à l'occasion de mes expériences sur l'énergie relative des impressions, et qui ne me semblent pas entièrement dénuées d'intérêt : on verra que l'action réciproque des impressions produit quelquefois des effets assez singuliers et tout différents de ceux qu'on paraissait devoir en attendre.

Si l'on fait tourner un cercle divisé en secteurs de deux couleurs différentes avec une vitesse trop petite pour produire une teinte uniforme, on apercevra bientôt, au milieu de la confusion résultant de la succession des impressions, des couleurs très-vives différentes de celles qui existent sur

le cercle et de leur mélange : ainsi, quand les couleurs en mouvement seront le jaune et le bleu, on distinguera des nuances très-prononcées de blanc brillant et d'orangé ; si les couleurs sont le jaune et le rouge, les nuances étrangères seront d'un très-beau vert. Pour que ces expériences réussissent complètement, il faut plusieurs conditions : la vitesse n'est pas indifférente ; on obtiendra celle qui convient le mieux en la rendant d'abord très-petite et en l'augmentant graduellement ; l'œil de l'observateur doit être fixé sur le centre du cercle ; enfin les deux couleurs doivent être plus ou moins foncées, suivant la teinte étrangère que l'on veut produire : ainsi pour que le bleu et le jaune donnent un beau blanc, le bleu doit être très-intense, et de plus il doit occuper beaucoup d'espace relativement au jaune : les secteurs bleus doivent être cinq à six fois plus larges que les jaunes. Pour que les mêmes couleurs produisent un bel orangé, il faut que le jaune soit intense et le bleu assez pâle. Le jaune et le rouge ne donnent une belle teinte verte que lorsqu'ils sont tous deux intenses, etc. Ce qu'il y a de plus singulier dans ces phénomènes, c'est la production du blanc : car ce blanc ne ressemble aucunement à la couleur sombre que l'on obtient par le mouvement rapide d'un cercle portant les sept couleurs primitives ; il est au contraire très-vif.

Pour faire naître les phénomènes précédents, nous n'avons donné à nos cercles que peu de vitesse ; faisons-les maintenant tourner assez rapidement pour qu'ils offrent une teinte uniforme. Alors se présente un autre fait : c'est que la combinaison des impressions de deux couleurs différentes, opérée par ce moyen, est loin de produire toujours la même teinte que le mélange matériel des deux couleurs employées. Faites un mélange en proportion convenable de gomme gutte et de bleu de Prusse et peignez-en un papier blanc, vous aurez un beau vert ; mais partagez un cercle en secteurs dont les uns soient peints de cette même gomme gutte et les autres de ce même bleu de Prusse, en ayant soin de donner beaucoup d'intensité aux deux couleurs et de faire en sorte que les secteurs aient un rapport de largeur tel que ni le jaune ni le bleu ne domine dans la teinte résultante ; lorsque ce cercle tournera avec rapidité, la teinte uniforme produite sera parfaitement grise, sans la moindre apparence verdâtre. Ce n'est qu'en

employant un bleu pâle qu'on parvient à donner à ce gris une légère nuance de vert, et c'est sans doute d'un tel bleu que s'est servi d'Arcy, qui a cherché quel serait le résultat du mouvement de rotation d'un cercle qui porterait du jaune et du bleu : car il dit avoir obtenu du vert. La combinaison des impressions jaunes et rouges, ou des impressions rouges et bleues ne présente pas d'effets analogues, c'est-à-dire qu'elle donne sensiblement la même teinte que le mélange matériel des deux couleurs : ainsi dans le premier cas on obtient de l'orangé, et dans le second du violet ; ce dernier est même plus éclatant que celui que présente un papier peint du mélange des mêmes rouge et bleu.

En cherchant à découvrir quelle pouvait être l'influence du degré de foncé des couleurs sur l'énergie de leurs impressions, j'ai été conduit à observer un troisième fait : c'est qu'il existe pour la plupart des couleurs une certaine teinte placée entre les teintes foncées et les teintes très-pâles, laquelle exerce, dans le mélange des impressions, le maximum d'influence. Ainsi supposons que l'on ait divisé un cercle en secteurs rouges et bleus, comme l'indique la fig. 7 : c'est-à-dire en donnant aux secteurs rouges une teinte uniforme et en graduant au contraire les teintes bleues, à partir d'une teinte très-pâle vers le centre, jusqu'à une teinte très-foncée vers la circonférence (1). Lorsque ce cercle tournera avec une suffisante rapidité, l'œil ne percevra plus que des bandes violettes concentriques ; mais en partant du centre, on verra l'influence du bleu devenir de plus en plus grande jusqu'à une certaine bande après laquelle elle ira en décroissant jusqu'à la circonférence : de sorte que si cette bande intermédiaire est d'un violet pur, toutes les autres, en allant soit vers le centre soit vers la circonférence, présenteront un violet tirant de plus en plus sur le rouge : la teinte bleue correspondant à cette bande intermédiaire produit donc une impression qui, en se combinant avec une impression rouge, a plus d'influence que les teintes plus pâles ou plus intenses ; ce qu'il y a de singu-

(1) Les lignes qui traversent les secteurs bleus dans la figure citée, séparent les diverses nuances de bleu indiquées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, la teinte *a* étant très-pâle, et la teinte *g* très-foncée.

lier, c'est que ce bleu lui-même est pâle : c'est celui du ciel dans ses parties les plus colorées.

Le rouge nous offre un phénomène tout à fait semblable, et sa teinte *maximum* est proportionnellement aussi pâle que celle du bleu. Le jaune paraît faire exception : il agit d'autant plus sur les autres impressions qu'il est plus intense.

Je n'ai soumis à ces expériences que le jaune, le rouge et le bleu ; mais il est probable que les autres couleurs, qui toutes peuvent être formées par le mélange de ces dernières, nous donneraient des résultats analogues : ainsi je pense que le vert aurait une teinte *maximum*, parce qu'on peut le composer avec du jaune et du bleu et que le bleu possède une semblable teinte.

Lorsqu'une couleur a atteint sa teinte *maximum* à l'égard d'une autre, cette teinte conserve son maximum d'influence, quelque soit le degré de foncé de la seconde couleur ; c'est du moins ce que m'a montré le petit nombre d'expériences que j'ai tentées à ce sujet : ainsi la teinte bleue qui jouit du maximum à l'égard d'un certain rouge le conservera à l'égard de toutes les autres teintes rouges plus foncées ou plus pâles que ce dernier. Ce fait peut aisément se constater en peignant, pour chaque couple de couleurs, plusieurs cercles semblables à celui de la fig. 7, mais tels que les secteurs qui reçoivent une teinte uniforme, comme les rouges dans la figure citée, différent d'un cercle à l'autre par l'intensité de leur couleur, tandis que les secteurs gradués demeurent exactement les mêmes dans les différents cercles ; on verra en les mettant en mouvement que la bande qui correspond au maximum occupera la même place sur chacun d'eux.

Enfin il resterait à examiner si la teinte maximum d'une couleur à l'égard d'une autre est la même quelle que soit cette autre : par exemple, si la teinte rouge qui possède le maximum relativement au bleu, le possède aussi relativement au jaune, au vert, etc. Je puis affirmer que le bleu jouit de cette propriété à l'égard du rouge et du jaune.

En terminant ici l'exposé de mes observations sur l'intensité et l'action réciproque des impressions, je crois avantageux de rappeler en résumé,

comme à la suite des expériences relatives à leur durée, à quels résultats ces observations conduisent.

1° *Des preuves nouvelles confirment le 6e résultat rappelé page* 17, *savoir que, sous le rapport de l'énergie de leurs impressions, les couleurs doivent être rangées dans l'ordre suivant, en commençant par celle qui a le plus d'action :*

Blanc, Jaune, Rouge, Bleu.

2° *Les angles visuels sous lesquels mon œil cesse d'apercevoir ces différentes couleurs, sont les suivants :*

	A L'OMBRE.	AU SOLEIL.
Blanc.	18″	12″
Jaune.	19″	13″
Rouge.	31″	23″
Bleu.	42″	26″

les angles observés au soleil étant à peu près les deux tiers des angles correspondants observés à l'ombre.

3° *Lorsque les impressions de deux couleurs différentes se succèdent alternativement sur la rétine avec une vitesse insuffisante pour qu'il en résulte une impression unique, il se manifeste généralement de vives nuances étrangères aux deux couleurs employées et à leur mélange; on peut même par ce moyen produire un beau blanc, et cela en ne se servant que de jaune et de bleu.*

4° *Lorsque deux impressions se succèdent alternativement avec assez de rapidité pour qu'elles paraissent n'en former qu'une seule, cette dernière n'offre pas toujours la même couleur que le mélange matériel des deux couleurs employées : ainsi en combinant de cette manière, et dans certaines proportions, l'impression du jaune avec celle du bleu foncé, on produit une couleur parfaitement grise, sans la moindre nuance de vert.*

5° *Les impressions de certaines couleurs, (peut-être n'y a-t-il d'exception que pour le jaune) n'agissent pas, dans leur combinaison avec d'autres impressions, en raison de l'intensité de ces couleurs; leur maximum d'influence réside dans une certaine teinte pâle, en deçà et au-delà de laquelle cette influence diminue : ainsi la teinte bleue qui possède ce maximum à l'égard du rouge et du jaune est celle du ciel dans ses parties les plus colorées.*

Il y a d'autres phénomènes qui se rattachent plus ou moins directement aux propriétés des impressions produites par la lumière, et qui ont été l'objet des observations d'un grand nombre de physiciens : tel est, par exemple celui des couleurs accidentelles, tel est peut-être encore celui des ombres colorées. Je terminerai ce mémoire en indiquant ci-après, autant que mes recherches à cet égard me le permettent, les noms de ces physiciens ainsi que les sujets qu'ils ont traités et les ouvrages qui renferment leurs dissertations.

Buffon. Sur les couleurs accidentelles et les ombres colorées. Mém. de l'acad. des sciences 1743.

Franklin. Couleur accidentelles. Journal de Physique, vol. 2. 1773.

Mongez. Couleurs accidentelles. Journal de Phys., vol. 6. 1775.

De Godart. Couleurs accidentelles, ombres colorées. Journal de Phys., vol. 7, 1776; vol. 8, 1776, pages 1, 269 et 341.

OEpinus. Couleurs accidentelles, ombres colorées. Nouv. Mém. de l'acad. des sciences de Pétersbourg. Tome 10.

Scherffer. Couleurs accidentelles, ombres colorées, effet des lunettes dont les deux verres sont colorés différemment. Journal de Phys., vol. 26. 1785.

R. W. Darwin. Couleurs accidentelles. Philos. trans. vol. 76, ann. 1786; ou à la fin du second volume de la Zoonomie d'Erasme Darwin.

Dissertation sur les couleurs accidentelles sans nom d'auteur. Journ. de phys., vol. 30. 1787.

Rumford. Couleurs accidentelles. Cet auteur est cité par Hauy; je n'ai pu savoir où se trouvait sa dissertation.

Prieur de la Côte d'or. Couleurs accidentelles. Cité par Hauy.

Hauy. Couleurs accidentelles. Traité élém. de Phys. Tome 2, page 267.

Léonard de Vinci. Ombres colorées. Traité de la peinture, chap. 156, 157, 158 et 1328. ann. 1716,

Beguelin. Ombres colorées. Mém. de l'acad. de Berlin, 1767.

Bouguer. Ombres colorées. Traité d'opt., liv. 3, sect. 5.

Mongez. Ombres colorées. Journ. de Phys., vol. 12. 1778.

Rumford. Ombres colorées. Philos. trans. 1794.

De Grotthuss. Ombres colorées. Voyez Schweigger, Beytrag zur chemie und physik. Tome 3, page 148.

Hassenfratz. Ombres colorées. Journ. de l'Ecole polyt. Tome 4, 11e cahier. An X.

De Schrank. Ombres colorées. Mém. de l'acad. de Munich. 1812.

Zschokke. Ombres colorées. Bibl. univ. Tome 32, sciences et arts. 1826.

B. Prevost. Son opinion sur la blancheur. Ombres colorées. Bibl. univ., 1828.

Voyez encore sur les ombres colorées le tome 1 de la Bibl. Britann., pag. 339 et 372.

Sur l'effet que présente un petit espace éclairé par la lumière blanche, lorsque tous les objets environnants reçoivent une lumière colorée. Bibl. univ. Tome 29. Sciences et arts. Note de la page 326. Ann. 1825.

Chevreul. Influence mutuelle de deux couleurs juxtaposées. Mém. lu à l'acad. le 7 avril 1828.

Du Tour. Sur ce qui arrive lorsque chacun des deux yeux reçoit en même temps l'impression d'une couleur différente. Mém. des savants étrangers. Tome 3. 1760.

Magendie. Sur le même sujet. Physiologie. Tome 1, page 73.

Monge. Effet des lunettes colorées; considérations sur le jugement que nous portons sur les couleurs; effet que présente un petit espace éclairé par la lumière blanche et entouré d'objets qui reçoivent une lumière colorée. Ann. de chimie. Tome 3. 1789.

Beguelin. Illusion qui change le noir en rouge. Mém. de l'acad. de Berlin. 1771.

Amici. Limite à laquelle l'œil juge la coïncidence de deux lignes différentes. Bibl. univ. vol. 24. Sciences et arts. 1823.

FIN.

POSITIONS.

1.

L'intérieur du globe terrestre est dans un état de fusion ignée.

2.

La couleur qui agit avec le plus d'intensité sur la rétine n'est pas le rouge : c'est d'abord le blanc, ensuite le jaune.

3.

Les sulfures solubles mis en contact avec l'eau ne la décomposent point.

4.

Le calcul des infiniment petits s'appuie sur des principes rigoureux et doit être préféré, dans l'application, à toutes les autres méthodes.

POSITIONS.

L'intérieur du globe terrestre est dans un état de fusion ignée.

2

La couche qui sait avec le plus d'intensité sur la terre n'est pas le rouge : c'est absolument le blanc, comme le jaune.

3

La nature [illegible] qui en contient [illegible] leur ne la décomposent point.

4

Le calcul des mouvement petits s'applique aux deux premiers principes de cette proposition, il [illegible] les autres matières.

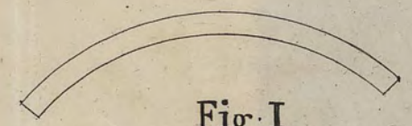


Fig. I

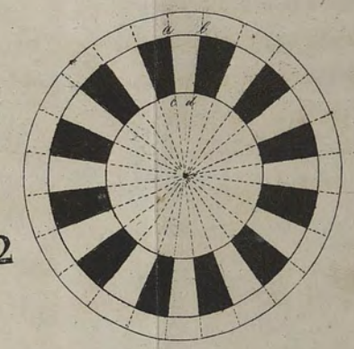


Fig 2

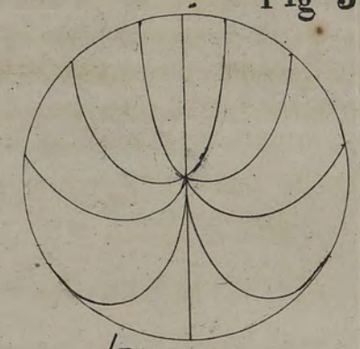
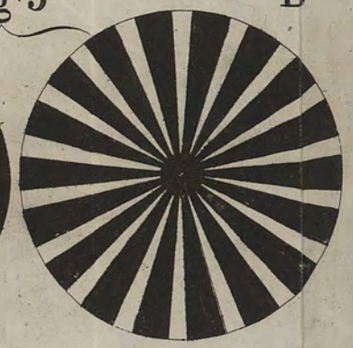


Fig. 5

A

Fig. 3

B



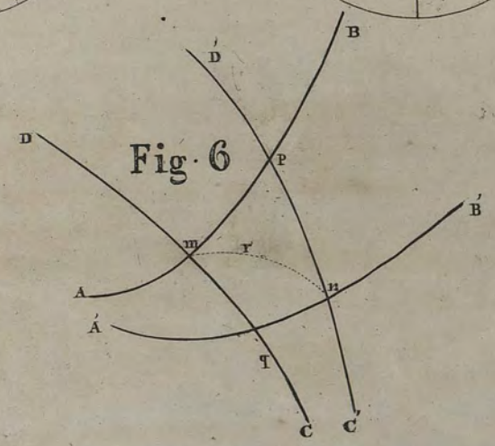


Fig. 6

A

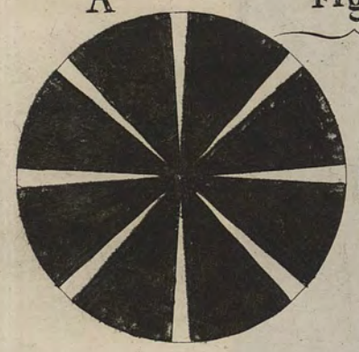


Fig. 4

B

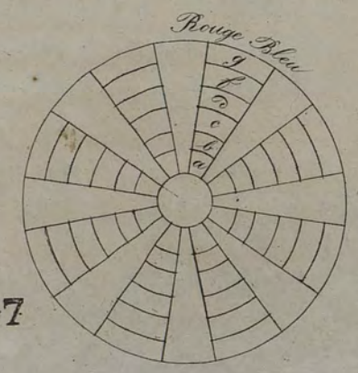


Fig. 7

DISSERTATIO

INAUGURALIS MATHEMATICA

DE

SERIEBUS,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI JOANNIS KINKER,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS SCIENTIARUM PHYSICARUM ET MATHEMATICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS

SUMMISQUE IN MATHESI ET SCIENTIIS PHYSICIS HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIME CONSEQUENDIS, PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

DIE JULII 1829, HORA

AUCTOR

Benedictus Valerius, Diekirchensis.

LEODII,
TYPOGRAPHIA H. DESSAIN, PROPÈ PALATIUM.

MDCCCXXIX.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 *du Réglement.*

CLARISSIMO VAN REES,

MATHESEOS PROFESSORI IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

TESSERÆ

GRATI ANIMI ATQUE VERECUNDIÆ.

B. VALERIUS.

PRÆFATIO.

Doctrinæ de convergentia et divergentia serierum in infinitum progredientium, quam hic exponere mihi proposui, præmittenda videbatur disquisitio circa usum serierum; ita ut omnis dissertatio in duas partes discerpatur, quarum prior quando series in subsidium vacari queant docebit, posterior vero de criteriis convergentiæ divergentiæque serierum tractabit.

Quod ad historicam hujus scientiæ partem attinet, hanc quo melius intelligamur, rem ipsam tractantes, enucleabimus. Hoc tantummodo non possum non monere, quod eximiam dissertandi materiam, omnes fontes in hunc finem necessarios, nonnullaque consilia, quibus destitutus aliquoties in errorem incidissem, officiis illustrissimi Professoris Van Rees, debeo.

Quæ præterea, per triennium meum academicum a nobilissimæ scientiarum mathematicarum physicarumque facultatis Professoribus, Van Rees, Gaede et Delvaux necnon hoc anno a clarissimo Lévy in me beneficia sunt collata, eorum me semper memorem fore, hac data occasione publice adhuc prædicasse juvabit.

PARS PRIMA.

DE USU SERIERUM.

1. Notissimum est *seriem* dici indefinitam continuationem quantitatum:

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; u_3, \; \text{etc.}$$

secundum legem quandam determinatam sese excipientium; ipsasque hasce quantitates esse *terminos* sive *membra* seriei de qua agatur. His positis, sit:

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_{n-1}.$$

summa n primorum terminorum, littera n numerum quemlibet integrum denotante; si ipsius n valoribus crescentibus, summa s_n propius propiusque ad certum limitem s accedit, series vocatur *convergens*, limesque de quo sermo appellatur seriei *summa*: sin autem quantitate n in infinitum excrescente summa s_n ultra omnem limitem finitum excrescit, series dicitur *divergens*, summaque caret; denique seriem, quæ neque convergit neque divergit, vocamus *indeterminatam*, quia per se nullius summæ determinatæ capax est. In quolibet harum serierum genere terminus indici n respondens, scilicet u_n exhibet quem vocant *terminum generalem*, quo per indicem n dato, series prorsus cognita est.

Serierum simplicissimum exemplar præstatur progressione geometrica

$$1, \; x, \; x^2, \; x^3, \; \text{etc.}$$

cujus terminus generalis est x^n sive n^{ta} ipsius x potentia. Quod si in hac serie summa n primorum terminorum computetur, emerget

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x},$$

cumque crescentibus ipsius n valoribus fractionis $\frac{x^n}{1-x}$ valor numericus vel versus zero vergat, vel ultra omnes limites excrescat, prout numericum

ipsius x valorem unitate vel minorem vel majorem assumseris, sequitur priore hypothesi admissa, progressione $1, x, x^2, x^3$, etc. exhiberi seriem convergentem summa hacce $\frac{1}{1-x}$ præditam, posteriore autem in casu eandem progressionem pro serie divergente nullius summæ capace esse habendam.

Denique pro tertii generis serierum exemplo seriem citamus sequentem

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$$

2. His positis duplex in analysi serierum infinitarum est usus, nimirum, tum forma sua proprietates functionum e quibus originem trahunt exprimere, tum certum terminorum numerum actu colligendo nos ad earundem functionum valores numericos propius propiusque cognoscendos ducere queunt. Utrumque hoc seriebus convergentibus præstari usque ad hodierna tempora ad unum omnes consentiebant; quousque autem ista sententia valeat, videbitur infra. Quod jam ad series divergentes attinet, per se sequitur, ex hisce duobus usibus posteriorem iis esse denegandum; sed possuntne ejusmodi series saltem ceu transformationes quantitatum ex quibus resultant in auxilium vocari, atque ad sequentem calculum commodiorem reddendum adhiberi? De hac quæstione magnus erat dissensus inter mathematicos, dum alii negarent, alii affirmarent seriebus divergentibus in analysi locum esse concedendum. Ingenti Eulero ultimum placuit, (cf. Comm. Acad. Petrop. T. V) atque ad ejus partes plurimi geometræ accesserant, donec recentioribus indagationibus (cf. Journal de l'école polytechnique, cah. 19, p. 501 etc.) clariss. Poisson nonnulla ex seriebus divergentibus deducta falsa esse monstrasset, atque adeo omnibus persuasissset, ab usu ejusmodi serierum penitus esse abstinendum. Hanc rem sequenti exemplo claram reddere studebo.

3. Contemplemur integrale definitum

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} A\,B\,dx = z,$$

in quo habeatur $A = (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $B = (1 - 2bx + b^2)^{-\frac{1}{2}}$, litteris a et b constantes datas designantibus. Evolvendo quantitates A et B primum juxta ascendentes ac dein juxta descendentes $\tau\omega\nu$ a et b potentias, series emergent quatuor hae,

$$A = 1 + aX_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 + \text{etc.},$$
$$B = 1 + bX_1 + b^2 X_2 + b^3 X_3 + \text{etc.},$$
$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} X_1 + \frac{1}{a^3} X_2 + \frac{1}{a^4} X_3 + \text{etc.},$$
$$B = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} X_1 + \frac{1}{b^3} X_2 + \frac{1}{b^4} X_3 + \text{etc.};$$

ubi litteræ X_1, X_2, X_3, etc. functiones ipsius x proprietatibus cognitis gaudentes exhibent. Integrando inde ab $x = -1$ usque ad $x = +1$, habetur

$$\int X_m X_n \, dx = 0,$$

quando indices m et n inter se differunt, et

$$\int X_n X_n \, dx = \frac{2}{2n+1},$$

quando coïncidunt. Quod si jam ex ordine singuli ipsius A valores modo inventi cum singulis ipsius B valoribus in usum vocentur, prodibunt hae quatuor quantitatis z expressiones, nimirum

$$\left.\begin{aligned}
z &= 1 + \frac{ab}{3} + \frac{a^2b^2}{5} + \frac{a^3b^3}{7} + \text{etc.},\\
z &= \frac{1}{b} + \frac{a}{3b^2} + \frac{a^2}{5b^3} + \frac{a^3}{7b^4} + \text{etc.},\\
z &= \frac{1}{a} + \frac{b}{3a^2} + \frac{b^2}{5a^3} + \frac{b^3}{7a^4} + \text{etc.},\\
z &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{3a^2b^2} + \frac{1}{5a^3b^3} + \frac{1}{7a^4b^4} + \text{etc.};
\end{aligned}\right\} (a)$$

His positis, si, a signis abstrahendo sint $a < b$ et $b < 1$, quatuor serierum (a) duæ priores convergent; alterutra igitur ad computandum quantitatis z valorem adhiberi posse videtur; cum autem hinc pro z valores inter se inæquales profluerent, una a veritate esse aliena debet. Falsam hanc seriem esse secundam ex eo elucet, quod ex combinatione primi valoris τοῦ A per seriem convergentem expressi, cum secundo valore τοῦ B juxta seriem divergentem evoluto originem traxit; prima autem series veram solutionem exhibet, quippe quæ ex primorum τῶν A et B valorum, scilicet serierum convergentium confluxu resultat. Quamcumque quantitatibus a et b magnitudinem assignaveris, binæ ex quatuor seriebus (a) convergent; unica autem duntaxat conveniet, quam ipsarum A et B evolutiones convergentes subministraverint. Quamobrem in præsente exemplo facta evolutione functionis juxta seriem divergentem in errorem delaberemur, quamquam functio quæsita per seriem convergentem sit expressa. Si quis plura hac de re legere velit, conferat cl. Poissonii schediasma supra laudatum.

4. Cum jam res ita sese habeant, nulli amplius dubio locus est, quin series divergentes ex analysi sint proscribendæ. Cæterum alia adhuc difficultate premitur usus serierum in genere, quam cl. Cauchy nuper palam fecit, quæque in eo consistit, quod functionum indoles et vis non omni capite exprimuntur seriebus infinito terminorum numero compositis, saltem quamdiu valores finitos hi termini sortiuntur. Sic v. gr. substituta serie Maclaurini pro functione $f(x)$, positoque per consequens

$$f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(o) + \text{etc.....} \quad (1)$$

admittebant datum semper systema finitorum valorum τῶν $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$, etc. valori unico functionis $f(x)$ respondere. Contemplemur majoris perspicuitatis gratia casum simplicissimum, quo nimirum quantitates $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$, etc., omnes simul evanescunt. Hac hypothesi ex æquatione (1) functionem $f(x)$ et ipsam in zero abire concludi debere videtur. Nihilominus hæc conclusio falsa esse potest; quod si enim statuatur

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ emerget $f(o) = o$, $f'(o) = o$, $f''(o) = o$, etc.

Idem valet de functione $e^{-\left(\frac{1}{\sin. x}\right)^2}$; sive de hac $e^{-\frac{1}{x^2(a+bx+cx^2+\text{etc.})}}$, designantibus a constantem positivam et $a + bx + cx^2 +$ etc. functionem integram ipsius x; sive simpliciter de $e^{-\frac{1}{x}}$, variabili x semper signum affirmativum servante, etc.

Datur ergo infinitus functionum diversarum numerus, quarum evolutiones in series ordinatas juxta potentias ascendentes ipsius x in nihilum convertuntur. Quocirca, datis quantitatibus $f(o)$, $f'(o)$, $f''(o)$, etc., ex æquatione (1) ipsius $f(x)$ valor depromi non poterit, posito etiam convergere seriem in secundo membro comprehensam. Quod si enim scriptione $\varphi(x)$ denotetur functio juxta seriem convergentem Maclaurini theoremate explicabilis, atque præterea seriei summam exhibens; charactereque $\chi(x)$ alia functio indicetur, cujus evolutio in zero abeat: duæ functiones diversissimæ $\varphi(x)$ et $\varphi(x) + \chi(x)$ in eandem seriem convergentem duci poterunt. Functiones v. gr. hæ e^{-x^2} et $e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}$ unam eandemque seriem convergentem præbent, scilicet

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \text{etc.}$$

cujus summa alterutri æquipollet.

Rebus ita se habentibus, series functionibus indistincte substituere non licet; utque asseverare queas te ab omni errore esse alienum, hanc substitutionem iis tantummodo casibus efficias, quibus functiones in series convergentes duci possunt atque serierum summis æquivalent.

5. Ex hisce omnibus facile sequitur nonnullas theorias hactenus pro stabilitis habitas magna vi jam impugnari posse. Hoc in specie de methodo coefficientum indeterminatorum valet. Data v. gr. æquatione:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = \alpha + \beta x + \Gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

pro omnibus quantitatis x valoribus, ipso valore zero non excepto, locum habente, concludere solent esse $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \Gamma$ etc. quia admittunt quantitates $bx + cx^2 + dx^3 +$ etc. et $\beta x + \Gamma x^2 +$ etc., $cx + dx^2 +$ etc. et $\Gamma x + \delta x^2 +$ etc., etc.; posito $x = 0$ simul in nihilum abire; quod autem sine exceptione non defendi potest, nisi præmissis seriebus convergentia gaudentibus; si enim coefficientes a, b, c, etc.; α, β, Γ, etc. ita essent compositi, ut termini infinitesimi, aut solummodo serierum summæ pro $x = 0$ in zero non converterentur, quod posito series propositas divergere usu potest venire, facta antea suppositio atque consectaria inde deducta in avia te atque devia raperent.

Si quis plura hac de re legere velit, conferat clarissimi Cauchy opusculum, ubi v. gr. videbit non sufficere Euleri de solutionibus singularibus æquationum differentialium theoriam, (cf. calc. integr. vol II, p. 72), atque adeo in errorem incidisse hunc secutos, Laplace (cf. acad. de Berlin pour l'année 1772), Lagrange (cf. leçons sur le calcul des fonctions, leçon 15e, p. 232), atque Lacroix (cf. traité du calcul intégral, p. 353 et sqq.).

6. Hæc saltem de ejus modi seriebus in infinitum progredientibus dicta putes : quod si vero residui, quod vocant, sive mantissæ habeatur ratio, uti in hac serie,

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \text{etc.} \mp a^n \pm \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

quæ posito $a > 1$ divergit, non est, cur talis evolutio ipsarummet functiorum instar non tractetur. Quare in omnibus his casibus inconcussa fides seriebus tribuenda est. Sic in specie si quis methodo rigorosa maxima minimave functionum, sive veros valores fractionum formam $0/0$ indutarum determinare velit, utitur serie Tayloriana non spectata tanquam terminorum infinito numero composita, sed tanquam terminata mantissa, cujus valor certos limites excedere nequeat.

Præterea tantum abest, ut Eulerus defendendo serierum divergentium usum progressibus analyseos nocuerit, ut potius contrarium sit admittendum. Sic hac de re loquitur cl. Ettingshausen : « Mathematici sæpe ad « detegenda miratu dignissima viam sibi aperuerunt audacia, calculum « analyticum ultra limites extendendi, quibus conditionum ab initio in « computum adhibitarum causa ejus validitas circumscripta erat. Huc « pertinet in primis Euleri error. » (cf. Vorlesungen ueber die hœhere Mathematik, Vorrede.) Quæ cum ita sint, credo equidem series divergentes et adhuc tanquam viam facilem quærendi nova in auxilium vocari posse, dummodo dein inventa rigoroso examini submittantur.

7. Cognito jam, quibus limitibus usus serierum in genere coërceatur, videamus, quid de tertia serierum classe sit censendum, quæ nimirum neque sunt convergentes neque divergentes, verum inter convergentiam divergentiamque fluctuant. In hunc finem contemplemur seriem quam ex aliunde demonstratis quantitas $\frac{\sin. q + p \sin. (x-q)}{1 - 2p \cos. x + p^2}$ profert, nimirum, $\sin. q + p \sin. (x+q) + p^2 \sin. (2x+q) + p^3 \sin. (3x+q) + \text{etc.}$, quæque tamdiu converget, atque hanc quantitatem pro summa habebit, ita, ut ponere liceat,

$$(b)\ldots\ldots \frac{\sin. q + p \sin. (x-q)}{1 - 2p \cos. x + p^2} = \sin. q + p \sin. (x+q) + p^2 \sin. (2x+q) + \text{etc.},$$

quamdiu fuerit $p < 1$: fractio autem hæc p ab unitate differre poterit quantitate quantulacumque, atque si fingamus ipsam p ad unitatem omni dabili propius accedere, seriei valor non minus exhibebitur priore membro æquationis (b). Hujus igitur formulæ limes respondens valori $p = 1$ ita sese habet,

$$(c)\ldots\ \frac{1}{2} \sin. q + \frac{\cos. q \cos. \frac{1}{2} x}{2 \sin. \frac{1}{2} x} = \sin. q + \sin. (x+q) + \sin. (2x+q) + \text{etc.}$$

Nova hæc series neque convergens est neque divergens, atque adeo ad censum nostrum pertinet. Eidem dico in se spectatæ determinatum valorem assignari non posse. Vocetur enim y summa m primorum hujus seriei terminorum, ut habeamus

$$y = \sin. q + \sin. (x+q) + \sin. (2x+q) + \ldots + \sin\Big((m-1)\,x+q\Big);$$

multiplicetur utrumque hujus æquationis membrum per 2 cos. x, unde

$$2y \cos. x = \sin. (q-x) + \sin. q + 2 \sin. (x+q) + 2 \sin. (2x+q) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + 2 \sin.\Big((m-2)x+q\Big) + \sin.\Big((m-1)x+q\Big) + \sin. (mx+q),$$

sive, id quod eodem redit,

$$2y \cos. x = \sin. (q-x) - \sin. q + 2y - \sin.\Big((m-1)\,x+q\Big) + \sin. (mx+q),$$

hinc

$$(d) \ldots y = \frac{1}{2} \sin. q + \frac{\cos. q \cos. \frac{1}{2} x}{2 \sin. \frac{1}{2} x} - \frac{1}{2} \sin (mx+q) - \frac{\cos. (mx+q) \cos. \frac{1}{2} x}{2 \sin. \frac{1}{2} x}$$

Jam vero, quo prodeat seriei (b) usque in infinitum continuatæ valor, ponendum erit $m = \infty$ in hacce ipsius y expressione, atque luce clarius est, eam ob quantitates sin. $(mx+q)$ et cos. $(mx+q)$ quas in se complectitur factum iri indeterminatam, cum evidenter sinus atque cosinus arcuum infinitorum sint quantitates prorsus indeterminatæ.

Præterea ipsius y valor etiam sub hac exhiberi forma valet, nimirum

$$y = \frac{1}{2}\sin.q + \frac{\cos.q\cos\frac{1}{2}x}{2\sin.\frac{1}{2}x} + \frac{\sin.\left((m-1)x+q\right) - \sin.(mx+q)}{2(1-\cos.x)}$$

unde quidem concludi posse videtur, cum posito $m = \infty$ ratio duorum arcuum $(m-1)x+q$ et $mx+q$ ab unitate non nisi quantitate infinite parva differat, eorum sinus esse æquales, atque adeo partem hujus formulæ indeterminatam sponte evanescere; longe autem aliter sese res habet; tantum enim abest ut sinus duorum arcuum infinitorum $(m-1)x+q$ et $mx+q$ sint aquales, ut contra in ratione indeterminata versentur. Quod si enim arcus x sit commensurabilis cum tota circuli peripheria, i. e. si habeatur $x = \frac{2n'\pi}{n}$, n et n' numeros integros utcumque magnos denotantibus, τοῦ m valor repræsentari poterit per $m = i'n + i$, i' et i pariter numeros integros exhibentibus, quorum posterior sit minor quam n: tum multiplum $i'n$ ex ipsius y valore egredietur, prodibitque simpliciter:

$$y = \frac{1}{2}\sin.q + \frac{\cos.q\cos.\frac{n'\pi}{n}}{2\sin.\frac{n'\pi}{n}} + \frac{\sin.\left(\frac{2(i-1)n'\pi}{n}+q\right) - \sin.\left(\frac{2in'\pi}{n}+q\right)}{2\left(1-\cos.\frac{2n'\pi}{n}\right)}$$

Posito $m = \infty$ erit $i' = \infty$, nec ullo modo impedimur, quo minus τῷ i valorem integrum quemlibet inde ab $i = 0$ usque ad $i = n - 1$ tribuamus; per consequens hoc in casu quantitati y, n valores diversi competent, inter quos, quisnam eligi debeat, neutiquam determinabitur. Quod si autem arcus x rationem habeat irrationalem ad peripheriam circuli, numerus n fiet infinite magnus, atque seriem indeterminatam esse, ne dubitari quidem poterit.

Ex hisce jam dictis satis superque elucet, seriebus hujus generis immediate consideratis nullum inesse significatum; nihilominus mox videbimus

quomodo antiquiores, in his D. Bernoullius hasce objectiones a se propellere atque pedem e laqueis expedire studuerint. Sed alia datur hasce series accipiendi ratio, qua admissa, litem penitus componere licet; nimirum considerari possunt tanquam limites serierum convergentium, sive tanquam compositæ terminis ex ordine per crescentes quantitatis p ad unitatem pro lubitu accedentis potentias multiplicatis; atque sub hoc respectu quælibet harum serierum summa determinata, atque significatu in analysi gravissimi ponderis gaudebit.

Veteres, in his D. Bernoullius atque Eulerus variis methodis multarum hujuscemodi serierum summas invenerunt. Hodiernis temporibus Poissonius in schediasmate jam laudato, et ex quo præsentem theoriam excerpsimus, omnes via uniformi ex æquatione (c) deduxit.

8. Antiquiores, atque in specie Bernoullius, (cf. nov. Comm. Acad. Petrop. T. XVIII) mirabili quadam harum serierum proprietate potiti sunt, quam hic etiam rigoroso nostro examini submittere ad institutum pertinet. In hunc finem observo omnes præfatas series, excepto casu, quo arcus x in ratione irrationali cum circumferentia circuli versari ponitur, suis gaudere periodis, post quas singulas perfecte recurrunt eaedem, simulque ipsos periodi terminos, modo affirmativos, modo negativos, se invicem destruere, ita ut integra periodus ad nihilum reducatur; atque adeo, si per u_n n^{tus} hujuscemodi seriei terminus designetur, atque per i terminorum numerus ex quo periodus quælibet componitur, necessario esse debeat:

$$u_{n+i} - u_n = 0.$$

His positis, censuerunt veteres, si series periodica proposita in infinitum continuetur, summam seriei, pro termino periodi cum quo desinere putetur, n nancisci valores diversos, u_1, $u_1 + u_2$, ... $u_1 + u_2 + \ldots u_i$, quorum summa per i divisa præbeat ipsam seriei summam. Sic v. gr. credebant esse

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.} = \frac{1}{2},$$

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \text{etc.} = \frac{2}{3},$$

$$1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + \text{etc.} = \frac{3}{4}.$$

Quod insigne paradoxon cum veritate mirum in modum conspirare cernentes, sequentibus rationibus illud explicare studebant; nimirum dicebant primo, hisce valoribus serierum per divisionem continuam sive alia quacumque ratione evolutis ipsasmet series ex quibus hi valores provenerint, denuo reproduci posse, ac dein, in abstracto, sive ubi ad infinitesimam periodum perventum fuerit, æquum jus cadere debere in singulas summas peculiares u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, etc., atque adeo verum seriei valorem, secundum sana axiomata metaphysica exhiberi summa harum quantitatum, divisa per earundem numerum.

Iisdem vestigiis insistentes dicebant porro, in æquatione (d), si pro m numerus infinitus sumatur, loco quantitatum sin. $(mx+q)$ et cos. $(mx+q)$ poni debere medium valorem terminorum omnium ex quibus constarent periodi in seriebus, quarum termini generales essent hisce quantitatibus æquales, i. e., summam horum terminorum per eorum numerum divisam. Cum autem in hujusmodi seriebus summa omnium ejusdem periodi terminorum nihilo sit æqualis, per se patere, in abstracto quantitates sin. $(mx+q)$ et cos. $(mx+q)$ sponte esse evanituras, atque adeo emergere summam totius seriei æqualem summæ æquatione (c) expressæ. Atque hoc non solum obtinere, si quantitas x commensurabilis sit cum circumferentia circuli, sed etiam si contrarium admittatur; fieri namque hoc in casu numerum cujuslibet periodi terminorum et ipsum infinite magnum, hocque non obstare, quominus mente periodos concipiamus, easque infinities repetitas putemus.

9. Quantam repugnantiam hæc ratiocinia in se involvant vel ex eo elucet,

quod ipse Bernoullius rem incongrue sive metaphysice tantum sed non geometrice veram esse prædicavit. Sed videamus jam nos, quibus nodum extricandi facultas competit, quid de ipso theoremate sit censendum, atque loco seriei propositæ contemplemur sequentem:

$$p\,u_1, + p^2\,u_2 + p^3\,u_3 + \text{etc.}$$

ubi quantitas p significatu solito gaudet. Hanc seriem propter $u_{n+i} = u_n$ ita exhiberi posse:

$$(pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \ldots + p^iu_i)\ (1 + p^i + p^{2i} + p^{3i} + \text{etc.})$$

observo; indeque summam seriei in infinitum continuatæ esse =

$$\frac{pu_1 + p^2u_2 + \ldots + p^iu_i}{1 - p^i};$$

quæ quantitas cum posito $p = 1$ in $\frac{0}{0}$ convertatur, notissimum theorema in usum voco, mihique prodit

$$-\frac{1}{i}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + iu_i)$$

sive addendo quantitatem $\frac{(i+1)}{i}(u_1 + u_2 + \ldots + u_i)$ quæ per se nulla est,

$$\frac{1}{i}\Big(iu_1 + (i-1)\,u_2 + (i-2)\,u_3 + \ldots + 2u_{i-1} + u^i)\Big);$$

Quod cum memorato theoremate plane coïncidit.

Monstrari etiam directa via posset, cur duæ series periodicæ tantum zero inter terminos interposito inter se differentes, diversas nanciscantur summas, nimirum multiplicando singulos serierum propositarum terminos ex ordine per crescentes quantitatis quam proximè ad unitatem accedentis

potestates. Eademque omnino ratione probaretur, duas hujus generis series non nisi terminis nihilo æqualibus diversas non semper variis gaudere summis; atque hoc in specie pro serie non convergente

$$\frac{1}{2} = 1 + \cos. x + \cos. 2x + \text{etc.}$$

si certi valores arcui x assignentur, usu venire; esse nimirum

$$1 + \cos. x + 0 + \cos. 2x + \cos. 3x + 0 + \cos. 4x + \cos. 5x + 0 + \text{etc.} = \frac{1}{2}$$

æque ac seriem propositam, pro omnibus ipsius x valoribus qui functionem cos. $2x$ unitati æqualem non reddunt. Ista autem indagine supersedemus, cum hoc in loco sufficiat, filum præstitisse, quo quisque in tanto rerum dædalo salutem quærere ipse possit. Sed hæc quidem hactenus; jam transeamus ad alia.

PARS POSTERIOR.

DE CRITERIIS CONVERGENTIÆ DIVERGENTIÆQUE SERIERUM INFINITARUM.

10. Ex principiis in primo paragrapho positis sequitur, ut series

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, u_{n+1}, \text{etc.} \ldots \quad (1)$$

convergat, necessum esse et sufficere, summam

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.} + u_{n-1}$$

pro crescentibus ipsius n valoribus certo cuipiam limiti s propius propiusque

accedere : sive quod idem est, necessum esse atque sufficere, summas

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \text{etc.} \ldots$$

pro valoribus numeri n infinite magnis a limite s et per consequens a se invicem quantitatibus infinite parvis differre. Cum cæterum differentiæ inter primam summam s_n et singulas sequentes ex ordine determinentur æquationibus his :

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\text{etc.} \ldots\ldots$$

liquet, quo series (1) convergat, primum requiri, ut terminus generalis u_n magis magisque decrescat, dum n augeatur. Hæc autem conditio non sufficit, postulatur præterea, ut crescente ipsius n valore, variæ summæ

$$u_n + u_{n+1}, u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \text{etc.}$$

i. e. summæ quantitatum, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc. . . . numero arbitrario sumptarum, a prima inchoando, tandem perpetuo valores omni limite assignabili minores sortiantur. Duabus hisce conditionibus adimpletis, vice versa asseverare licet, seriem esse convergentem.

Contemplemur v. gr. seriem sic dictam harmonicam,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \text{etc.}$$

Hæc etsi termino generali $\frac{1}{n}$ eo magis decrescente, quo majores quantitati n valores tribuuntur, tamen non est convergens; summa enim termini $\frac{1}{n+1}$ atque subsequentium usque ad terminum $\frac{1}{2n}$, scilicet :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

perpetuo, quantuscumque pro n numerus accipiatur, superat productum $n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, atque adeo hæc summa pro valoribus ipsius n semper crescentibus omni quantitate cogitabili minor non evadit, quod tamen si series convergeret, usu veniret.

Eadem omnino ratione dijudicari posset quando progressiones geometricæ convergunt quandoque divergunt : quam autem rem nimiæ facilitatis causa mittimus.

11. Cum convergentia locum habente, sit

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$$
$$= s_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.}$$

sive $\quad s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.}$

sequitur membris u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, etc. novam constitui seriem convergentem, cujus summam, quam *complementum* seriei ab n^{to} termino proficiscendo vocant, scriptione r_n designabimus ; est igitur $s - s_n = r_n$.

Si series (1) divergit, complementum r_n quantuscumque pro n numerus finitus accipiatur, æque pro infinito est habendum ac ipsius seriei valor. Sin autem series (1) est convergens, complementum r_n eo magis decrescit, quo majorem numero n valorem tribuimus. Secundus hic convergentiæ character primum in se involvit atque adeo solus requiritur sufficitque.

Nihilominus quoties proposita series ita est constituta, ut signa + et — saltem alicubi inchoando alternatim sese excipiant, sola terminorum decrescentia convergentiam satis probat.

Sic v. gr. series hæc :

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \pm u_{n+2} \mp \text{etc.}$$

$$\text{dat } r_n = \mp \left(u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots \right)$$

$$\text{et } r_n = \mp \left(u_{n+1} - u_{n+2} + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots\ldots \right).$$

Terminis autem u_{n+2}, u_{n+3}, ... in infinitum decrescentibus, omnes differentiæ uncinulis inclusæ in hisce æquationibus affirmativos sortiuntur valores, atque adeo numericus complementi r_n valor inter u_{n+1} et $u_{n+1} - u_{n+2}$ cadit; posito igitur terminum u_{n+1}, crescente in infinitum numero n, omni dabili evadere minorem, valor ipsius r_n et ipse fiet infinite parvus; unde seriei convergentia elucet.

Eadem omnino ratione positum theorema demonstrares, si plures affirmativi vel negativi termini se immediate adeo sequerentur, ut semper idem positivorum terminorum numerus eodem negativorum terminorum numero stipatus esset.

Sæpe igitur tantum opus est signorum turbare uniformitatem, ut ex divergentia enascatur convergentia: sic v. gr. series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. divergit, dum hæc $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc. convergit.

12. Quoties dijudicandum est, utrum series quæpiam data sit convergens necne, rem facillime absolvere poteris comparando seriem istam cum aliis seriebus, quas aut convergentes aut divergentes esse jam constat, vocatis in usum hisce ex indole convergentiæ divergentiæque deductis theorematibus.

Series quælibet, cujus termini alicubi incipiendo, nullo ad signa habito respectu, omnes ad unum minores sunt, quam respondentes meris ejusdem signi terminis compositæ seriei convergentis, convergit et ipsa; atque series quæcumque cujus termini alicubi inchoando, eodem sunt affecti signo, et quoad valores numericos, divergentis cujuspiam seriei terminos superant, divergit.

Quod si jam subsidiis hactenus allatis addere velis methodum recta via quærendi utrum seriei cujuspiam datæ summa, infinito terminorum numero in unum collecto, infinita evadat, necne, cujus exemplum in primo paragrapho dedimus, adumbrationem consequeris angusti campi qui antiquioribus patebat. Clarissimus Cauchy, vocatis in usum principiis modo positis, ex comparatione cum progressionibus geometricis atque cum serie harmonica primus præcepta generaliora deduxit. Iisdem vestigiis insistendo atque hæc probe examinando ad alias series pertingemus, quibus simili ratione adhibitis, viam ad majora sternere licebit. Quare jam tempus est, ut de his methodis habeamus sermonem.

Prius autem observo nos hic et in sequentibus seriem (1) ceu ex meris positivis terminis compositam esse spectaturos; quod si enim signa + et — sese regulariter exciperent, sola terminorum continua decrescentia seriei convergentiam innueret; si vero abnormi ratione, quod raro usu venire potest, termini affirmativi et negativi inter se commixti essent, unius termini instar tractari possent singulæ terminorum catervæ eodem signo gaudentes, seriesque ex meris positivis terminis constaret.

Sic etiam breviore notandi ratione uti licet; cum nimirum in termino generali hujusmodi seriei character sit inustus, scribere possumus Σu_n pro his verbis: series cujus terminus generalis est u_n. En nunc theoremata cl. Cauchy. (cf. Cours d'analyse, 1re partie.)

13. *Si pro crescentibus ipsius* n *valoribus ratio* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *propius propiusque ad certum limitem* A *accedit, series* Σu_n *divergit convergitve, prout habetur* $A > 1$ *aut* $A < 1$.

Etenim ex hypothesi $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = A$ facile efficitur, quamvis proxime quantitatem B limiti A accedere statueris, numericum tamen differentiæ $\frac{u_{n+1}}{u_n} - A$ valorem, simul ac valor ipsius n numerum satis magnum r superaverit, semper minorem fore valore numerico differentiæ $B - A$;

atque igitur perpetuo rationem $\frac{u_{n+1}}{u_n} <$ sive $>$ B, *i. e.* quantitatem u_{n+1} $<$ sive $>$ Bu_n esse permansuram, prout fuerit B $>$ sive $<$ A.

Priore in casu seriei $\Sigma\, u_{r+n}$ singuli termini fient minores, posteriore vero hypothesi admissa, majores evadent terminis respondentibus in progressione geometrica $\Sigma\, B^n u_r$.

Quod si jam A ab unitate differt, quantitatique B valor quispiam inter 1 et A situs tribuitur, emergit B $>$ sive $<$ A, prout A $<$ sive $>$ 1 cogitamus; primo autem in casu est quoque B $<$ 1 atque progressio $\Sigma\, B^n u_r$ convergens, ac in altero casu B $>$ 1 progressioque $\Sigma\, B^n u_r$ divergens; quocirca convergit etiam series nostra si A $<$ 1, divergitque si A $>$ 1.

14. Series v. gr. hæc $\Sigma\, \frac{1}{1.2.3...n}$ dat $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3...n}{1.2.3...n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$; sive $A = \frac{1}{\infty} = 0$, atque adeo pro convergente est habenda.

Contemplemur adhuc series quæ juxta ascendentes, integrisque et positivis exponentibus præditas quantitatis variabilis cujuspiam x dignitates in infinitum procedunt, quarumque forma hæc est $\Sigma\, a_n x^n$, ubi cœfficientibus a_0, a_1, a_2, etc. quantitates constantes per se seriem aliquam constituentes designantur. Quæri potest, pro quibus ipsius x valoribus hæc series convergat, ac pro quibus divergat. Quod si series nostra, variabili x valorem specialem nacta, in hanc $\Sigma\, u_n$ transit, quotumque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ crescente in infinitum numero n, ad limitem quemdam A sine fine accedit, convergentiæ divergentiæve locus est, prout A $<$ 1 sive $>$ 1 invenitur.

Jam vero pro memorato ipsius x valore prodit:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x,$$

per consequens, $\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = x \lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$; atque adeo $A = \alpha x$,

si statuimus $\lim. \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$.

Quare tota quæstio de convergentia divergentiaque seriei propositæ huc redit, ut quæratur, utrum valor peculiaris, quem quantitati variabili x assignaveris, ita sit comparatus, ut habeatur $\alpha x < 1$ sive $\alpha x > 1$.

Quod si ergo quotum $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ crescente in infinitum numero n versus limitem α vergit, series nostra pro omnibus ipsius x valoribus qui a signis abstrahendo minores sunt, quam $\frac{1}{\alpha}$, *i. e.* inter limites $-\frac{1}{\alpha}$ et $+\frac{1}{\alpha}$ cadunt, ceu convergens spectari debet; dum e contrario pro divergente est habenda pro omnibus variabilis x valoribus, qui extra limites assignatos positi sunt.

15. Cum criteria convergentiæ divergentiæque serierum hactenus enucleata non sufficiant, si unitati reperitur æqualis limes ad quem ratio $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, crescentibus ipsius n valoribus, sine fine accedit, alia subsidia in usum vocando vacuum explere auctores studuerunt. Cl. Cauchy primo in hunc finem sequens notatu dignissimum exposuit theorema.

Si termini seriei Σu_n *in infinitum decrescunt, convergit divergitve hæc series simul cum sequente* $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$.

Nam ex decrescentia terminorum seriei Σu_n sequitur:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2\, u_2 &= 2\, u_2 \\ 4\, u_4 &< 2\, u_3 + 2\, u_4 \\ 8\, u_8 &< 2\, u_5 + 2\, u_6 + 2\, u_7 + 2\, u_8 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 \\ 2\, u_2 &> u_2 + u_3 \\ 4\, u_4 &> u_4 + u_5 + u_6 + u_7 \\ 8\, u_8 &> u_8 + u_9 + \ldots\ldots + u_{15} \\ &\text{etc.;} \end{aligned}$$

atque designando per S_n summam n primorum terminorum seriei $\Sigma\, u_n$, et per T_n similem pro serie $\Sigma\, 2^n u_{2^n}$ summam, additis hisce inæqualitatibus, positoque compendii causa m loco $\tau o\upsilon\ 2^n$ prodibit:

$$T_n < 2S_m - u_1 \text{ atque } T_n > S_{2m-1}$$

unde facile conficitur, crescente in infinitum numero n, quantitates S_n et T_n sive simul fieri infinite magnas, sive simul ad certos limites accedere. Quod erat demonstrandum.

Eadem omnino ratione probari posset duas hasce series $\Sigma\, u_n$ et $\Sigma\, a^n u_{a^n}$, littera a numerum quemcumque finitum designante, simul convergere simulve divergere.

16. Sic v. gr. duæ series hæ $\Sigma \frac{1}{n^r}$ et $\Sigma\, 2^{n(1-r)}$ simul sunt convergentes divergentesve. Posterior est progressio geometrica, cujus convergentia ex conditione $r > 1$ pendet; prior igitur series eatenus duntaxat convergit, quatenus est $r > 1$. Convergentia autem locum obtinet, quantulacumque quantitate unitatem superari abs r ponas. Unde per se sequitur, si terminus generalis seriei cujuspiam $\Sigma\, u_n$, crescente in infinitum numero n, propius quam quantitas quæcumque assignabilis ad limitem $\frac{1}{n^\alpha}$ accedat, hanc seriem convergere vel divergere, prout constans exponens α sit unitate vel major vel minor, quantulacumque præterea quantitate numerum α ab unitate distare assumseris.

Ex præmissis cl. Cauchy theorematibus sequentes non sine momento in hac theoria deduco propositiones.

Si pro serie $\Sigma\, u_n$ sumatur hæc $\Sigma \frac{1}{nln}$, fiet series $\Sigma\, a^n u_{a^n} = \Sigma \frac{1}{n}$, posita scilicet loco ipsius a basi quadam integra systematis logarithmorum; unde sponte sequitur, 1° seriem $\Sigma \frac{1}{nln}$ esse divergentem; 2° quantitatem ln ab hacce $\sqrt[v]{n}$, littera v numerum quemlibet positivum finitumque designante,

semper superari, simul ac numerus n valorem satis magnum sit nactus: atque 3° ex termino generali semper logarithmos ipsius n exterminari posse, multiplicando nimirum per a^n atque ponendo ubique a^n pro n.

Quibus rebus fit ut series $\Sigma \frac{1}{n(ln)^{1+\frac{1}{v}}}$, littera v, significatum modo acceptum servante, abeat in hanc $\Sigma \frac{1}{n^{1+\frac{1}{v}}}$, cujus convergentia convergentiam seriei propositæ innuit.

Idem valere de seriebus $\Sigma \frac{1}{nlnlln}$ et $\Sigma \frac{1}{nln(lln)^{1+\frac{1}{v}}}$ scilicet priorem divergere, posteriorémque convergere non habeo, quod ulterius probem; et sic porro.

Quamobrem in genere series $\Sigma \frac{1}{n\,ln\,lln\ldots \text{etc. } l^m n}$, littera m numerum quemlibet integrum, positivum finitumque indicante, scriptioneque $l^m n$ m^{tum} ipsius n logarithmum exhibente, divergit; simul autem ac aliquis ex denominatorum factoribus primam dignitatem superat quantitate quantulacumque, series emergit convergens.

17. Hisce jam dictis principalia continentur præcepta, quæ ad hoc tam anceps negotium dirimendum hactenus excogitata fuerunt. Illustrissimus quidem Gauss inter series pro quibus quotum $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sumta quantitate n satis magna, versus limitem 1 vergit, in comment. soc. reg. scient. Gottingensis recentior. Vol. II, in schediasmate, cui titulus: Disquisitiones generales circa seriem infinitam, etc. seriem contemplatus est ita comparatam, ut habeatur

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^h + A_1 n^{h-1} + A_2 n^{h-2} + \ldots + A_h}{n^h + a_1 n^{h-1} + a_2 n^{h-2} + \ldots + a_h},$$

coefficientibus A_1, A_2, etc.; a_1, a_2, etc. ab n non pendentibus; sed quamvis

quæ præstitit magni ingenii characterem in se gerunt, atque eorum ope quæstionem propositam non raro facilius expedire licet quam methodis hactenus expositis, tamen, quia res jam in supra explanatis contineri videtur, id quod ex sequentibus elucescet, atque idem momentum brevius generaliusque absolvendi mox facultas nobis erit, hac indagine supersedemus.

Aliam adhuc methodum cl. Ludovicus Olivier in opere cui titulus, Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 2ten Bandes 2tes Heft, publici juris fecit; sed istam methodum in errorem ducere posse, nuperrime cl. Abel in ejusdem operis quaternione sequente monstravit. Cum nondum satis perspectum esse videatur, ubi lateat erroris fons, et quousque pateat methodus; hanc rem accuratiori examini submittemus, postquam methodo nova eaque generali exposita, argumentum magis perspicuum reddendi copiam nobis creaverimus.

Nuper cl. Cauchy idem argumentum denuo aggressus in opere, cui titulus: Exercices de mathématiques, 2e année, tria publici juris fecit theoremata, hic autem etiam non exponenda, quippe quibus ulterius quam modo enucleatis nonpromoveri videmur.

18. Cum ad instar clarissimi Gauss aliam quoti $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ formam examinare desiderarem, vocatis in subsidium quæ in §§ 12, 16 posuimus, sequens orta est methodus.

Adeo in series producantur quota $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pro seriebus $\Sigma \frac{1}{nlnlln\ldots l^m n}$ et $\Sigma \frac{1}{nlnlln\ldots(l^m n)^{1+\frac{1}{v}}}$, ubi littera v significatum supra acceptum servat, ut unus quilibet harum serierum terminus, sumto pro n numero satis magno coram immediate præcedenti evanescat. Quo facto habebimus ex ordine:

$$(\alpha) \ldots \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nln} - \frac{1}{nlnlln} - \ldots - \frac{1}{nln\ldots l^m n} - \text{etc.}$$

(α) pro serie $\Sigma \frac{1}{nln\ldots l^m n}$; et

$$(\beta)..\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nln} - \ldots - \frac{1 + \frac{1}{v}}{nln \ldots l^m n} - \text{etc.}$$

$$(b)\ \text{pro serie}\ \Sigma \frac{1}{nln \ldots (l^m n)^{1+\frac{1}{v}}}.$$

Cum jam sciamus serierum (a) et (b) priorem divergere, posterioremque convergere, facile erit serierum (α) et (β) auxilio diremtu, utrum series quæcumque data convergens sit, necne. Ponamus enim pro serie hacce quotum $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pariter esse ductum in ejusmodi seriem, primumque terminum, quo differre incipiat ultima hæc series a serie (α), esse $(m+2)^{tum}$, atque repræsentari per $\frac{1}{\phi(n)}$. His admissis, ex contemplatione serierum (α) et (β) sequitur, si $\phi(n)$ sit quantitas positiva sive quantitas negativa cujus valor numericus sit major quam $n\,ln\,lln \ldots l^m n$; seriem, de qua agitur, esse divergentem; contrario autem casu convergentiam obtinere. Priore enim hypothesi admissa, si n numerum satis magnum r superaverit, ut summa terminorum post $(m+2)^{tum}$ in seriebus quota $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ exhibentibus positorum coram hocce $(m+2)^{to}$ termino negligi queat, singula seriei dijudicandæ membra ab r^{to} incipiendo fient majora singulis membris respondentibus in serie divergente (a): dum vi posterioris hypotheseos singula seriei dijudicandæ membra pariter ab r^{to} proficiscendo minora evadent singulis membris respondentibus in serie convergente (b). Unde divergentia convergentiave seriei propositæ efficitur.

19. Quod si quis methodo tam generali supersedere velit, observo, pulsis secundum præcepta in § 16 tradita logarithmis ex utriusque serierum (a) et (b) termino generali, hasce series abire in $\Sigma \frac{1}{n}$ et $\Sigma \frac{1}{n^{1+\frac{1}{v}}}$ æqua-

tionesque (α) et (β) converti in sequentes :

$$(\alpha') \,..\, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \text{etc.}$$

$$(\beta') \,..\, \frac{u_{n+1}}{u_n} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{v}} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{v}}{n} + \text{etc.}$$

Unde sequens liquet propositio pro omnibus functionibus hactenus in analysi occurrentibus sufficiens, nimirum, *pulsis ex termino generali seriei propositæ logarithmis, ad convergentiam necessum esse atque sufficere, pro valoribus ipsius* n *valde magnis existere* $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{1}{n}$, *sive, quod idem est* $\frac{n(u_n - u_{n+1})}{u_n} > 1$.

Cujus præterea propositionis etiam directam demonstrationem ex schediasmate jam citato clarissimi Gauss depromere licet. Sed mittatur hoc, atque contemplemur formam ab ipso tractatam. Pro ea est $\frac{n(u_n - u_{n+1})}{u_n} = a_1 - A_1$; atque adeo convergentia obtinebit, si sit $a_1 - A_1 > 1$, nec obtinere poterit nisi hac sub conditione.

20. Hisce jam perpensis, juvat penitius perscrutari Ludovici Olivier conamina. Proficiscitur auctor a propositione hac, nimirum, seriem propositam esse convergentem, si summa terminorum post n^{tum} positorum, *i. e.* seriei complementum r_n pro $n = \infty$ in nihilum convertatur; hoc autem nequaquam obtinere nisi seriei membra in infinitum decrescant.

Cui conditioni satisfieri prædicat, si productum n^{ti} termini per n æquetur nihilo pro $n = \infty$. Ad quam sententiam tuendam sequentibus innititur ratiociniis : cum ex hypothesi admissa, ait, seriei membra constanter decrescant, productum n^{ti} membri per n majus erit summa terminorum inde ab n^{to} ad $2n^{tum}$ Cum ergo, posito $n = \infty$, hæc summa æquet complementum r_n, illud una cum nu_n in zero abibit. Præterea, complementum r_n

nihilo æquale esse non potest pro $n = \infty$, si productum nu_n finitum sortitur valorem. Cum enim admittatur seriei membra constanter nihilo propius accedere, complementum r_n sive summa n terminorum post n^{tam} positorum, necessario majus erit, quam productum $2n^{ti}$ termini per n; atque in genere r_n comprehendetur inter limites nu_n et nu_{2n}; sed nu_{2n} nihilo æquale esse non potest, nisi jam habeatur $nu_n = 0$ pro $n = \infty$, cum n et $2n$ simul in infinitum transeant.

Ex his concludit: *si in serie infinita productum* nu_n *reperiatur nihilo æquale pro* $n = \infty$, *convergentiam obtinere; et vice versa, seriem a convergentia alienam esse, si pro* $n = \infty$ *non habeatur* $nu_n = 0$.

21. Series v. gr. hæc, $\Sigma \frac{1}{n}$ dat $nu_n = 1$, atque adeo divergit. In serie autem hac

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \text{etc.}$$

ubi littera n numerus impar quicumque designatur, n^{ta} terminorum caterva idem signum servans, (revocetur nempe in memoriam in ejusmodi seriebus singulas terminorum catervas eodem signo gaudentes unius termini instar tractari) ita sese habet,

$$u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)}; \text{ ideoque } nu_n = \frac{1}{2(2n-1)};$$

quod productum cum sumto $n = \infty$ in nihilum reducatur, series erit convergens. Hæc cum methodis supra expositis conspirant. Sed si jam contemplemur cum cl. Abelo seriem $\Sigma \frac{1}{n\,l\,n}$ de cujus divergentia ex præcedentibus constat, inveniemus $nu_n = \frac{1}{l\,n}$; quæ quantitas posito $n = \infty$ annihilatur. Unde seriem allegatam esse convergentem concludi deberet, quod autem repugnat. Quamobrem hac methodo nubem aliquis pro Junone amplexari posset.

Sed hac in re non acquievit Abelus, demonstravit etiam inveniri non posse functionem $\phi(n)$, ita comparatam, ut series quæcumque Σu_n, cujus omnes terminos eodem signo gaudere supponimus, sit convergens si $\phi(n) . u_n$ æquetur nihilo pro $n = \infty$, atque divergens casu contrario. Probatio hujus veritatis sequenti superstructa est theoremati :

Si series Σu_n convergit divergitve, idem de serie $\Sigma \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}$ est prædicandum; quod ita demonstratur : est $l(1 + x) < x$; nam si $x > 1$, res per se patet; si vero $x < 1$, emergit :

$$l(1 + x) = x - x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} x\right) - x^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} x\right) \ldots$$

unde etiam sequitur $l(1 + x) < x$. Per consequens

$$l(u_0 + u_1 + .. + u_n) - l(u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}) = l\left(1 + \frac{u_n}{u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}}\right)$$

$< \frac{u_n}{u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}}$. Hinc posito ex ordine $n = 1, 2, 3$, etc. emergit, $l(u_0 + u_1) - l\, u_0 < \frac{u_1}{u_0}$,

$$l(u_0 + u_1 + u_2) - l(u_0 + u_1) < \frac{u_2}{u_0 + u_1};$$

. . . . . .

$$l(u_0 + u_1 + .. + u_n) - l(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) < \frac{u_n}{u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}};$$

atque addendo,

$$l(u_0 + u_1 + .. + u_n) - l\, u_0 < \frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + .. + \frac{u_n}{u_0 + u_1 + .. + u_{n-1}}.$$

Quod si ergo summa n primorum terminorum seriei Σa_n in infinitum

excrescere valeat, idem de summa n terminorum seriei $\Sigma \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}$ valebit. Unde conficiendum sponte liquet.

His positis fingamus $\phi(n)$ talem esse ipsius n functionem, ut series Σu_n convergat divergatve prout productum $\phi(n) u_n$ posito $n = \infty$ in nihilum abeat, vel secus; tum series $\Sigma \frac{1}{\phi(n)}$ erit divergens, seriesque hæc $\Sigma \left(\frac{1}{(\phi n)\left(\frac{1}{\phi(1)} + \ldots + \frac{1}{\phi(n-1)}\right)} \right)$ convergens; prior enim posito $n = \infty$ præbet $\phi(n) u_n = 1$, posterior autem $\phi(n) u_n = 0$. Jam vero ex theoremate modo stabilito, posterior series necessario simul cum priore divergit; atque adeo talis functio, qualem supposuimus, non datur. Si $\phi(n) = n$, duæ series de quibus agitur, abeunt in $\Sigma \frac{1}{n}$ et $\Sigma \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)}$, quæ per consequens ambæ divergunt.

22. Quamquam autem res ita sese habeant, cum methodus hæc pro tanto serierum numero valeat, ut auctor Olivierus, qui plurimis exemplis eam illustravit, hanc circumstantiam non animadverterit; cum præterea hujus methodi usus sit revera quam facillimus, multum interest scire, unde derivetur error, cur pro tot casibus sufficiat methodus, et quousque pateat subsidium ex ea sperandum. Quod ad primam quæstionem attinet, ego paralogismi fontem deprehendo in prima suppositione qua proficiscitur auctor. Tantum enim abest, ut pro seriebus divergentibus, si $n = \infty$, complementum r_n non æquetur nihilo, ut potius æque pro his, ac pro seriebus convergentibus contrarium sit defendendum, nisi omnem omnino infiniti naturam tollere velimus. Nonne enim dicendo terminum quempiam esse infinitesimum, subaudiri debet, cum termino hocce seriem desinere?

Quod jam ad alteram quæstionem spectat, singulare hoc phænomenon facile explicatur, si modo attendere velimus, dicendo, productum nu_n in

zero abire debere si pro n numerus infinite magnus accipiatur, ut series convergere queat, nil aliud postulari præter hoc, ut nimirum n^{tus} seriei terminus sit vel æqualis quantitati $\frac{1}{n\phi(n)}$, vel minor hacce quantitate, $\phi(n)$ designante functionem, quæ posito $n = \infty$ infinita evadere potest. Jam vero ejusmodi functiones hactenus potissimum usitatæ, exceptis logarithmis, omnes superant functionem $n^{\frac{1}{v}}$, littera v quemcumque numerum positivum integrumque denotante, dummodo pro v numerus satis magnus accipiatur; cumque series $\Sigma \frac{1}{n^{1+\frac{1}{v}}}$ (§§ 16. 12) sit convergens, series $\Sigma \frac{1}{n\phi(n)}$ a fortiori converget. Præterea series $\Sigma \frac{1}{nln}$ divergens est, quocirca diverget a fortiori series $\Sigma \frac{1}{An}$, littera A constantem exhibente; qui casus occurrit, quando nu_n æquatur quantitati cuipiam finitæ. Hisce simul tertiam quæstionem absolvimus; nam ex dictis sequitur, posteriorem theorematis allegati partem, qua nimirum nullam seriem convergere posse infertur nisi sit $nu_n = 0$ pro $n = \infty$, utique cum natura rerum conspirare; quoad alteram autem partem eatenus tantummodo dici posse seriem quamcumque esse convergentem, si habeatur $nu_n = 0$ pro $n = \infty$, quatenus terminus generalis nec logarithmos, nec alias functiones præter hucusque solito usitatas in se complectatur. Sequitur etiam et hocce theorema, quatenus cum veritate congruit, et ea quæ celeberrimus Gauss reperit, jam implicite contineri in clarissimi Cauchy theoremate (§ 16).

23. Rebus ita se habentibus, licet etiam generaliorem eruere methodum, et quidem sequentis theorematis auxilio:

Series $\Sigma \frac{1}{nln\ lln\ llln \text{ etc.}}$ cujus factorum numerus utcumque magnus sed finitus est, quæque divergit, adeo limitem omnium serierum divergentium exhibet, ut denominator termini generalis augmentum capere nequeat, quin simul series, ad quam pertinet, in convergentem immutetur.

Quod vel ex enucleatis in § 19 concludi, vel etiam recta via demonstrari potest, ut sequitur.

Etenim sit $\phi(n)$ functio quæ tanquam factor denominatori accedit; aut hæc functio talis est, ut reliquorum factorum aliquem, quisquis sit, ad dignitatem unitate majorem evehat; tuncque seriem propositam convergentem evadere, jam constat; aut adeo est exigua, ut ne hoc quidem obtingat, tunc vero seriem in eodem statu versari, ac si revera denominator termini generalis non increverit, exinde liquet, quod semper penes nos est, factorum logarithmicorum numerum adhuc augere. Ejusmodi functionum exemplar in § 22 deprehendimus.

His præmissis, en nunc theorema cujus ope, si recte judico, casum incertum quemcumque extra dubium ponere poterimus.

Si series proposita ita sese habet, ut productum n^{ti} ejus membri per $n\, ln\, lln \ldots (l^m n)^{1+\frac{1}{v}}$, ubi litteræ m et v supra explicato significatu gaudent, pro valoribus $\tau\omega\nu$ n et v valde magnis vel unitati æquale reperiatur, vel minus, series de qua agitur convergit; et vice versa, si huicce conditioni, quantuscumque pro v numerus finitus accipiatur, satisfieri nequit, series divergens est.

Quod autem non sine grano salis sumendum esse, atque sagacitatis auxilio multum frequentissime operæ parceri valere, non habeo quod moneam. Sic quam sæpissime penes te erit, multiplicatores n^{ti} termini forma simpliciori præditos, veluti $n^{1+\frac{1}{v}}$, $n(ln)^{1+\frac{1}{v}}$, $n\, ln(lln)^{1+\frac{1}{v}}$ etc., in subsidium vocare. Quoties productum n^{ti} termini per harum quantitatum quamlibet, pro valoribus ipsius n valde magnis, vel unitati æquale invenitur, vel minus, asseverare licet, seriem esse convergentem: contrario autem obtinente, nondum sequitur seriem propositam divergere; hoc ex sola functionum in termino generali contentarum examine concludi debet. Sic v. gr. si, termino generali per factorem $n^{1+\frac{1}{v}}$ multiplicato pro valoribus ipsius n valde magnis emergit productum unitate majus, quantuscumque pro v nu-

merus accipiatur, series in genere divergens haberi non potest, si vel logarithmi vel aliæ functiones præter hactenus solito occurrentes in n^{to} hocce termino continentur: tunc autem ut quæstio dirimatur, ad alios multiplicatores confugiamus oportet. Præterea, quidquid de casu quo factor $n^{1+\frac{1}{p}}$ assumitur, valet, mutatis mutandis de reliquis factoribus quos in usum vocare licet, prædicari potest.

Quare quæstionem nobis propositam ita absolvimus, ut jam nihil desiderari amplius videatur præter hoc, ut nimirum exemplis genuinam methodi indolem et vim illustremus; cum autem in hoc argumento omne punctum Olivierus ipse tulerit, ad ejus egregium schediasma mittimus lectorem, quem simul rogamus ut primis hisce conaminibus indulgentiam non denegare dignetur.

DIXI.

POSITIONES.

I.

Atmosphæra terræ non in infinitum extenditur.

II.

Carbo fossilis (houille) ex regno organico originem trahit.

III.

Diversitas characterum inter carbonatem calcis atque arragonitidem ex terra strontiana, quam in hac detegerunt, non pendet.

DISSERTATIO

INAUGURALIS MATHEMATICA

DE RESOLUBILITATE

FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM INTEGRARUM IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI DEODATI SAUVEUR,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS SCIENTIARUM PHYSICARUM ET MATHEMATICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS

SUMMISQUE IN MATHESI ET SCIENTIIS PHYSICIS HONORIBUS AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIME CONSEQUENDIS, PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

DIE ~~OCTOBRIS~~ Decembris 4 1829, HORA 4

AUCTOR

Joannes-Baptista Brasseur,

EX ESCH AD ALZETTE IN MAGNO DUCATU LUXEMBURGENSI.

LEODII,

TYPOGRAPHIA H. DESSAIN, PROPÈ PALATIUM.

MDCCCXXIX.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 *du Réglement.*

PATRI

NEC NON

CLARISSIMIS MATHESEOS PROFESSORIBUS

J. N. NOËL

IN ATHENÆO LUXEMBURGENSI,

VAN REES ET DANDELIN

IN UNIVERSITATE LEODIENSI

SACRUM

J. B. Brasseur.

PROŒMIUM.

Quamquam hoc seculo geometræ theoriæ æquationum omni studio incubuere, tamen primum hujus theoriæ principium primo aspectu evidens, hodiernis tantum temporibus rigorosa demonstratione a cl. Gauss et Cauchy stabilitum est; hoc principium consistit in eo, ut æquationi gradus cujuscumque functionis rationalis atque integræ variabilis cujuspiam, valore reali imaginariove formæ $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ satisfieri possit.

Dum æquationi $f(x) = 0$ radices reales sunt, existentia illarum probatur valoribus positivis negativisque, quos $f(x)$ acquirit dum loco x successivè diversi valores reales substituuntur.

Sed quum patuerit, valores reales variabilis non amplius æquationi satisfacere, ex analogia quatuor primorum graduum suspicari possumus, radices imaginarias formæ $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ subesse æquationi. Duplici vero ratione hujus theorematis demonstratio tentari potest. Sufficit enim demonstrasse, quantitates α et β, quas reales supponimus, semper ita sumi posse, ut facto $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ primum æquationis $f(x) = 0$ membrum ad nihilum reducatur. Hæc methodus directa est : alterâ magis indirectâ ad scopum pervenitur demonstrando divisibilitatem functionis integræ $f(x)$ per factorem realem secundi gradus. Hic enim factor iterum in duos factores reales aut imaginarios primi gradus decomponi potest.

Analytici hanc rem tractantes, alterutram quoque viam secuti sunt. Itaque tota commentatio ipsâ questione duce in duo capita dividitur; in priori exponere conabimur methodos quibus probare instituerunt, omnem æquationem cujusvis gradus dividi posse per factorem realem secundi gradus. In posteriori commemorabimus eruditos, qui omni æquationi satisfacere tentarunt radice imaginaria primi gradus formæ $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, in qua valoris quoque realis casus singularis continetur.

Teneatur præterea indagationes nostras minime meras contemplationes

esse, cum decompositio æquationis in factores reales scundi gradus necessaria sit, ad functiones primitivas sive integrales functionum rationalium fractarum unius variabilis inveniendas.

Quamquam probe intellexi, nihil novi a me in hac disquisitione in lucem prolatum esse, tamen hæc pulcherrima operæ meæ merces erit, si specimen hoc, ad quod conscribendum optimis quibuscunque quæ ab aliis parata erant, usus sum, lectori, virisque disciplinarum mathematicarum peritis haud displicet.

PARS PRIMA.

DE RESOLUBILITATE ÆQUATIONIS IN FACTORES REALES SECUNDI GRADUS.

§ 1. Eruditi, qui in æquatione per factorem secundi gradus dividenda ingenium suum exercuerunt, omnes, ratione habita analogiæ graduum inferiorum, admiserunt omni æquationi tot radices esse, quot maximo exponenti variabilis unitates, quæ positio minimè probari potest, nisi ponamus omnem æquationem unam saltem radicem habere, quod ab iis non demonstratum est.

Rationes tamen, quibus res extra dubium ponatur, validissimas afferre licet. Jam pridem demonstratum est, æquationes gradus imparis unam saltem radicem habere, æquationes vero gradus paris, quarum terminus ultimus negativus sit, duas. Valor autem illarum radicum, cum pendeat valore coefficientium æquationis propositæ, ratione quadam cum hisce coefficientibus compositus, aut functio quædam eorum sit, necesse est. Quamquam forma hujus functionis haud statui potest, existentia ejus nihilominus evidens est, auxilio enim methodi serierum et calculi differentialis evolutionem ejus adipiscimur.

Quibus positis clarum erit, functionem hanc, mutato signo termini

ultimi æquationis propositæ, adhuc existere et radicem exprimere novæ æquationis, cujus scilicet terminus ultimus positivus sit. Fieri potest ut hac mutatione signi, functio illa non amplius realis sit; semper vero tanquam expressio analytica gaudebit proprietate, quam omnes æquationum radices communem habent, ut nempe æquationi satisfaciat (1).

Hisce præmissis, adumbranda videntur quæ viri doctissimi de hac re sive nullo modo sive ex parte tantum difficultatem solventes docuere. Cum vero omnis æquatio gradus imparis reduci possit ad æquationem gradus paris, satis nobis habebimus, dum consideremus in hoc capite æquationes gradus paris.

§ 2. Cartesius et Hudde (2) modo directo rem aggredientes, æquationem $f(x) = 0$ quarti vel sexti gradus divisibilem esse per factorem secundi gradus $x^2 - yx + u = 0$, invenerunt; quum vero ad æquationes quibus in utroque casu pendet y pervenerint non nisi effectis longis difficilibusque calculis, ultra ire non tentarunt.

§ 3. Saunderson (3) primus attulit rationem, cur, in divisore $x^2 - yx + u = 0$ æquationis quarti gradus, coefficiens y pendeat ab æquatione sexti gradus. Quæ ratio consistit in eo, quod nimirum y summa esse debet duarum radicum æquationis quarti gradus, summaque talis sex modis diversis inter quatuor radices æquationis quarti gradus effici potest.

§ 4. Idem argumentum Leseur (4) magis generali modo consideravit combinationumque theoriâ demonstravit, cum æquationem gradus m per æquationem gradus minoris n dividere instituerimus, coefficientes hujus posterioris datos esse æquatione gradus $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$; quoniam enim divisor, quod evidens est, n radices cum æquatione pro-

(1) Compl. d'Alg. de Lacroix, 4e éd., p. 87.

(2) De reductione æquationum.

(3) Alg. 1740.

(4) Calcul intégral imprimé à Rome 1748.

positâ communes habeat necesse est, tot varii divisores effingi possunt, quot modi exstant capiendarum quantitatum n inter quantitates m; hinc quoque elucet, cognito uno ex illis coefficientibus, cæteros esse non posse nisi functiones rationales illius, adeo ut singulis ejus valoribus respondeant singuli valores reliquorum coefficientium. Quod si enim non obtineret, eundem diversorum valorum numerum habere non possent.

Hinc statuit, omnem æquationem gradus $4m + 2$ semper divisibilem esse per factorem realem secundi gradus, quia factoris illius coefficientes pendeant ab æquatione gradus imparis atque ideo valorem realem habeant. Quodsi vero æquatio sit gradus formæ $4m$, divisor secundi gradus pendebit æquatione gradus paris, et realitas hujus divisoris non amplius patet.

§ 5. Euler (1) idem argumentum altius perscrutatus est. In eo autem potissimum se continebat ut probaret, omnem æquationem cujusvis gradus, qui exprimatur potentia $\tau\omega$ 2, resolvendam esse in binas æquationes gradus dimidio minoris. Hunc ad finem æquationem secundi sui termini orbatam admittit, quo fit ut coefficiens hujus termini idem maneat cum signis diversis in duabus æquationibus, quarum proposita productum est; atque theoria combinationum probat hunc coefficientem datum esse æquatione gradus paris, potentiis carente imparibus, cujus terminus ultimus est quadratum functionis radicum æquationis propositæ, negative sumptum.

Euler hanc functionem radicum posse determinari rationaliter coefficientibus æquationis propositæ putat, indeque concludit: quadratum de quo agitur necessario positivum esse et proin æquationi, quâ coefficiens de quo jam mentio facta est determinatur, duas subesse radices reales. Quod revera locum habet pro æquatione quarti gradus, pro æquationibus vero gradus superioris demonstratio a priori requiritur quam Euler non tradidit, hæc autem eo magis necessaria, quod functio hæc haud eodem modo radices continens non videatur determinari posse func-

(1) Acad. de Berl. 1749.

tione rationali coefficientium qui et ipsi functiones sunt in quibus radices omnes æquabili ratione inveniuntur.

Considerat porro æquationes quarum gradus numeris $2i$, $4i$, $8i$, etc. exprimantur, posito i numero impari et invenit divisores reales graduum 2, 4, 8, etc. ab iis esse admissos, ita ut hac ratione omnis æquatio resolvi possit in æquationes reales graduum qui potentia $\tau\omega$ 2 exprimantur, quas quando excedunt quartum gradum, si iterum decomponere velimus, theoria Euleriana uti supra monuimus, nullo modo sufficit. Si quis plura de his legere cupiat, videat Lagrangium (1) qui Euleri theoriam explevit.

§ 6. Foncenex (2) qui nonnisi divisorem gradus secundi inspexit, hanc difficultatem vitavit. Nam sit $2^m \nu$ gradus æquationis propositæ et ν numerus impar; si eam dividamus per æquationem secundi gradus $x^2 - ux + v = 0$ inveniemus auxiliante theoriâ combinationum, coefficientem u determinatum esse æquatione gradus

$$\frac{2^m \nu\,(2^m \nu - 1)}{2} = 2^{m-1}\nu\,(2^m \nu - 1) = 2^{m-1}\pi;$$ cum π ut patet sit numerus impar.

Quod si igitur $m = 1$, æquatio erit gradus imparis et radicem realem necessario habebit; ita ut æquatio proposita divisorem rationalem secundi gradus habeat et sic reducatur ad gradum duabus unitatibus minorem.

Si vero m unitate major sit, æquatio quâ pendet u eodem modo dividetur per æquationem secundi gradus, veluti $u^2 - tu + \tau = 0$ et coefficiens t exprimetur æquatione gradus

$$\frac{2^{m-1}\pi\,(2^{m-1}\pi - 1)}{2} = 2^{m-1}\pi\,(2^{m-2}\pi - 1) = 2^{m-2}\rho$$

cum ρ ut perspicuum est, sit numerus impar.

---

(1) Acad. de Berl. 1772.

(2) Miscellanea Taurin. 1759.

Quod si igitur sumserimus $m = 2$, hæc æquatio erit gradus imparis, et radicem realem habebit; t et τ igitur fiunt valores reales, et in æquatione $u^2 - tu + \tau = 0$, u habebit valorem realem vel imaginarium formæ $p + q\sqrt{-1}$; primo in casu u et v quantitates reales evadent; in secundo casu, quantitates illæ erunt imaginariæ ejusdem formæ, quia v est functio rationalis $\tau\omega$ u. Æquatio autem $x^2 - ux + v = 0$ efficit $x = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2}{4} - v\right)}$; qui valor quoque ad formam $p + q\sqrt{-1}$ reduci potest.

Quodsi m major est 2 eodem modo calculos subducere pergimus et necessario pervenimus ad divisorem secundi gradus, cujus coefficientes reales sunt, hincque ascendendo vicissim ad divisores antecedentes secundi gradus, inveniemus coefficientes eorem reales vel imaginarios esse formæ $p + q\sqrt{-1}$, adusque divisorem $x^2 - ux + v = 0$ æquationis propositæ, qui divisor pro x etiam valorem realem vel imaginarium ejusdem formæ producit.

Hæc demonstratio rigorosa est quando admittimus principium, coefficientes æquationis secundi gradus quæ divisor est æquationis gradus p, nonnisi unâ radice æquationis gradus $\frac{p(p-1)}{2}$, pendere. Quod principium universe verum est, Lagrangius autem (1) illud exceptionibus, quibus demonstratio præcedens vitiosa esset, subjectum annotavit.

§ 7. Laplace (2) eodem fere modo atque Foncenex hæcce demonstravit. Jam primum observavit omni æquationi cujusvis gradus p factorem esse realem secundi gradus, quando omnis æquatio gradus $\frac{p(p-1)}{2}$ factorem habeat realem, seu primi seu secundi gradûs.

Designemus per (p) æquationem gradus p, ejusque radices per α, β,

(1) Equat. num. not. IX.

(2) Ecol. norm. 1re édit., tom. 2, pag. 315.

Γ, δ, etc. Hisce positis animadvertendum est, factores secundi gradus hujus æquationis, qui necessario efficiuntur multiplicandis binis factoribus primi gradus, esse :

$$x^2 - (\alpha + \beta)\, x + \alpha\beta$$

$$x^2 - (\alpha + \Gamma)\, x + \alpha\Gamma$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x^2 - (\beta + \Gamma)\, x + \beta\Gamma.$$

etc., etc.

eosque pendere investigatione functionum formæ $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ perspicuum est. Quæ functiones determinatæ essent, si duæ tantum hujus formæ $\alpha + \beta + m\alpha\beta$, $\alpha + \beta + m'\alpha\beta$ notæ essent; m et m' significantibus numeris datis. Nam si ponamus $\alpha + \beta + m\alpha\beta = n$ et $\alpha + \beta + m'\alpha\beta = n'$, inveniemus

$$\alpha + \beta = \frac{m'n - n'm}{m' - m}, \qquad \alpha\beta = \frac{n' - n}{m' - m}$$

ut autem perveniamus ad æquationem, quâ pendeat functio $\alpha + \beta + m\alpha\beta$, omnes valores, quos admittit, fingamus necesse est, ponendis vicissim pro α et β omnibus radicibus α, β, Γ, δ, etc. æquationis propositæ binis sumptis; undè numerus combinationum de quibus agitur, $\frac{p(p-1)}{2}$ efficitur, simulque apparet, æquationem indagatam, quam per (q) designamus, crescere ad gradum $\frac{p(p-1)}{2}$.

1° Quodsi, in hac æquatione, unâ semper admissâ radice reali, numero m permultos valores tribuamus, totidem quoque æquationes similes habebimus, quarum unicuique radix realis erit quâ contineatur una e com-

binationibus binariis radicum æquationis propositæ (p). Cum autem numerus illarum combinationum circumscriptus sit, eadem combinatio cum variis valoribus $\tau\omega\ m$ sæpius repetatur necesse est. Affirmare igitur possumus, binas saltem functiones existere formæ

$$\alpha + \beta + m\alpha\beta,\ \alpha + \beta + m'\alpha\beta,$$

quæ habeant easdem radices α et β et quarum valores n et n' reales sint; inde sequitur valores respondentes $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ itidem reales esse.

2° Si vero æquatio (q) nullas habeat radices reales, sed factorem tantum realem secundi gradus, cujus radices imaginariæ sint, tribuendo $\tau\omega\ m$ numerum infinitum valorum, obtinebimus multitudinem infinitam functionum $\alpha + \beta + m\alpha\beta$, quarum expressio hujus formæ erit : $a + b\sqrt{-1}$; et demonstrabimus ut supra, plures esse illarum functionum quæ nulla in re inter se differant, nisi valoribus $\tau\omega\ m$; est igitur

$$\alpha + \beta + m\alpha\beta = a + b\sqrt{-1}$$

$$\alpha + \beta + m'\alpha\beta = a' + b'\sqrt{-1}$$

unde sequitur esse

$$\alpha + \beta = \frac{m'(a + b\sqrt{-1}) - m(a' + b'\sqrt{-1})}{m' - m}$$

$$\alpha\beta = \frac{a' + b'\sqrt{-1} - a - b\sqrt{-1}}{m' - m}$$

Si terminos reales inter sese conjunxerimus, ut et terminos imaginarios, pro illis expressionibus obtinemus formam :

$$2(c + d\sqrt{-1}) \text{ et } e + f\sqrt{-1}$$

quo factor $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ erit

$$x^2 - 2(c + d\sqrt{-1})x + e + f\sqrt{-1} \ldots (1)$$

cujus factoris existentiâ, alter oritur scilicet

$$x^2 - 2(c - d\sqrt{-1})x + e - f\sqrt{-1} \ldots (2)$$

omnis enim expressio realis, quæ habeat factorem formæ $a + b\sqrt{-1}$, necessario alterum factorem habebit formæ $a - b\sqrt{-1}$.

Jam si polynomia (1) et (2) nullum habent divisorem communem, quatuor factores simplices æquationis (p) in iis continentur qui, inter se invicem multiplicati efficiunt factorem quarti gradus cujus coefficientes reales sunt; cæterumque notum est, omnem æquationem quarti gradus resolvi posse in factores reales secundi gradus.

Quod si bina polynomia (1) et (2) divisorem communem habeant iisque hanc formam tribuamus:

$$x^2 - 2cx + e - (2dx - f)\sqrt{-1} = (x - k - l\sqrt{-1})(x - i)$$

$$x^2 - 2cx + e + (2dx - f)\sqrt{-1} = (x - k + l\sqrt{-1})(x - i)$$

sequitur $x - k - l\sqrt{-1}$, $x - k + l\sqrt{-1}$ et $x - i$ tres esse factores æquationis (p). Ambo priores inter sese multiplicati efficiunt factorem realem secundi gradus; et si dividimus æquationem (p), cui gradus par est, per tertium factorem, obtinebimus quotum gradus imparis, quod et ipsum factorem realem primi gradus habebit, qui cum eo, per quem diviserimus, multiplicatus, alterum factorem realem secundi gradus efficiat.

Itaque demonstratum est, omni æquationi (p) gradus paris unum saltem factorem secundi gradus esse, quando nimirum æquatio (q) semper factorem realem habeat seu primi seu secundi gradus. Quibus positis, omnis numerus par, qui necessario obtinetur multiplicando numero impari per potentiam integram τοῦ 2, continebitur formulâ $2^m n$, quando nimirum m significat numerum integrum qualemcumque et n numerum imparem; gradus igitur æquationis (q) qui exprimitur in universum quan-

titate $\frac{p(p-1)}{2}$ æqualis erit

$$\frac{2^m n\,(2^m n - 1)}{2} = 2^{m-1} n\,(2^m n - 1)$$

quodsi fingamus $(2^m n - 1)\,n = n'$, n' quoque numerus impar erit, quia producitur multiplicandis binis numeris imparibus n et $2^m n - 1$; et ex supra dictis perspicuum est, æquationi gradus $2^m n$, futurum esse factorem realem secundi gradus, si æquatio gradus $2^{m-1} n'$ factorem realem habeat seu primi seu secundi gradus.

Tali modo pergentes, progrediemur per seriem æquationum, quarum gradus his formis exprimentur :

$$2^m n,\ 2^{m-1} n',\ 2^{m-2} n'',\ 2^{m-3} n''',\ \text{etc.}$$

positis n, n', n'', n''' etc. numeris imparibus et postremo perveniemus ad æquationem gradus imparis, quæ necessario factorem realem primi gradus habebit, hincque sequitur fere extremam ut et unamquamque cæterarum, usque ad propositam ipsam, habere factorem realem secundi gradus. Si deinde fingimus æquationem propositam divisam esse per factorem secundi gradus cujus existentiam supra demonstravimus, quotum quod adhuc gradus paris est, unum saltem factorem realem secundi gradus habebit, per quem rursus dividi possit, et sic deinceps. Omnis igitur æquatio gradus paris, semper resolvi potest in factores reales secundi gradus.

Quæ demonstratio quamquam omnino rigorosa, modo possibilitatem decompositionis æquationis in factores reales secundi gradus demonstrat et Lagrangius (1) eandem quæstionem resolvit, cum insuper regulas exposuerit, quibus re ipsa æquatio data in factores reales secundi gradus decomponi posset.

---

(1) Eq. num. not. X.

PARS SECUNDA.

DEMONSTRATIO DIRECTA, OMNEM ÆQUATIONEM ALGEBRAICAM RADICEM HABERE SIVE REALEM SIVE IMAGINARIAM FORMÆ $p + q\sqrt{-1}$.

In unaqualibet methodo prioris capitis attentionem specialem ad gradum æquationis præbuerunt, sæpiusque a proposita ad alias gradus superioris transiverunt. Quas considerationes viri, quorum labores hoc capite expositurí sumus, a quæstione omnino alienas habuerunt. Crediderunt enim modo directo demonstrandum esse cuilibet æquationi satisfieri posse tribuendo incognitæ valorem sive realem sive imaginarium formæ $p + q\sqrt{-1}$.

D'Alembert (1) primus demonstravit, quantitatem quamcunque algebraicam, quæ tot imaginariis formæ $p + q\sqrt{-1}$ composita sit quot velimus, semper ad eandem formam reduci posse.

Quo posito D'Alembert considerat curvam quamcunque cujus ordinata y sit $= 0$, quando abscissa $x = 0$. Quæcunque jam sit æquatio curvæ, semper valor y quando x infinite parva est, evolvi potest auxilio parallelogrammi Newtoniani in seriem convergentem hujus formæ:

$$y = ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{r}{s}} + cx^{\frac{t}{u}} + \text{etc.}$$

ubi exponentes τοῦ x crescere finguntur, terminosque omnes reales ponimus quando x positiva est. Nam statuere possumus positivas x respondere parti curvæ quâ y reales sint. Quodsi x negativam ponamus, termini, in quibus x habeat potentias fractas quarum denominator sit numerus par, imaginarii erunt; juxta autem theorema a D'Alembert demonstratum, semper reduci possunt ad formam $p + q\sqrt{-1}$, quo casu p et q quan-

(1) Acad. Berl. 1746.

titates reales sunt. Omnis igitur series, ut et valor y, si imaginarius est, ejusdem formæ erit quoad x perparva fuerit.

Demonstrat porro, valorem y, si imaginarius sit, semper ejusdem formæ manere, quantuscumque sit valor x. Quæ cum ita sint, aptissime hanc conclusionem ad æquationes gradus cujusvis unius incognitæ transferre licebit; nam si y hancce incognitam æquationis habeamus ac ponamus ultimum terminum æqualem $= x$, obtinebimus æquationem $f(y, x) = 0$ ubi $x = 0$ efficit $y = 0$, cuique demonstratio præcedens apta erit. Ergo, quicunque est valor termini ultimi x, valor y, quando imaginarius est, formæ erit $p + q\sqrt{-1}$.

Æquatio cum habeat radicem imaginariam illius formæ, alteram necessario habebit formæ $p - q\sqrt{-1}$, quoniam calculus unus idemque est pro binis radicibus, propter ambiguitatem signi radicis $\sqrt{-1}$; itaque habebit binos factores $y - p - q\sqrt{-1}$ et $y - p + q\sqrt{-1}$, qui efficiunt duplicem factorem realem $y^2 - 2py + p^2 + q^2$, ideoque divisibilis erit per huncce factorem.

Hæc autem demonstratio, quemadmodum animadvertit Lagrangius, non sic satis perfecta est; quamquam in æquatione binarum indeterminatarum unam illarum semper exprimere liceat serie potentiarum crescentium alterius incognitæ, fieri tamen possit ut coefficientes terminorum seriei pendeant et ipsi æquationibus quæ careant radicibus realibus, quâ aliæ imaginariæ, quam quæ ex potentiis indeterminatæ oriantur, in seriem inducerentur.

Lagrangius (1) iisdem principiis nisus, demonstrationem rigorosiorem eamque generaliorem ac simpliciorem hoc modo instituit.

Ponamus $f(x) + v = 0$ æquationem propositam; ita ut $f(x)$ sit functio rationalis et integra variabilis x in cujus terminis omnibus x contineatur. Tribuamus porro æquationi nullas radices reales; quæ si adsint, primo eliminari posse jam perspicuum est. Æquationem propositam, quamvis

(1) Résol. des équat. num. not. IX.

careat radicibus realibus in conditione quâ est, has tamen adepturam esse patet, dummodo valorem termini v immutemus. Si fingamus hunc in finem $v = -f(k)$, æquatio $f(x) - f(k) = 0$ radicem realem k habebit. Itaque consideremus unam ex radicibus imaginariis æquationis $f(x) + v = 0$, quæ radix realis evadit, si variamus valorem v, eamque tamdiu solùm imaginariam fingamus quamdiu valor v inter limites a et $b > a$ comprehensus manet, ita ut x valorem realem α habeat in æquatione $f(x) + a = 0$ et valorem realem β in æquatione $f(x) + b = 0$, demumque valorem imaginarium in æquatione $f(x) + a + i = 0$ ut et in æquatione $f(x) + b - i = 0$ (i designante quantitate infinite parva). Ponamus $x = \alpha + u$ pro valore imaginario x in æquatione $f(x) + a + i = 0$ et $x = \beta + u$ pro valore imaginario in æquatione $f(x) + b - i = 0$.

Quibus positis, Lagrangius quærit quid, adhibita cognitâ formulâ evolutionis functionum, unaquæque æquationum $f(x) + a + i = 0$ et $f(x) + b - i = 0$ futura sit, quando in priore pro x substituamus $\alpha + u$ et in altera $\beta + u$; hincque sic concludit :

Valor u, posita $x = \alpha + u$, in æquatione $f(x) + u = 0$ numquam imaginarius formæ $p + q\sqrt{-1}$ futurus est, nisi sit $f'\alpha = 0$ et $f''\alpha > 0$; quodsi $f''\alpha = 0$ necesse est habeamus $f'''\alpha = 0$ et $f^{\text{IV}}\alpha > 0$ et sic deinceps; simili modo valor u, si statuatur $x = \beta + u$ in æquatione $fx + b - i = 0$ ut imaginarius evadat, habeamus necesse est $f'\beta = 0$ et $f''\beta < 0$, quodsi $f''\beta = 0$, requiritur $f'''\beta = 0$ et $f^{\text{IV}} < 0$ et sic porro.

Quum jam demonstratum sit, quando valor v magis magisque accedit ad limites a et b, unam ex radicibus imaginariis æquationis $f(x) + v = 0$ necessario esse formæ $p + q\sqrt{-1}$, confirmat porro Lagrangius nullum valorem ipsius v intermedium esse intra limites a et b pro quo radix x non unius ejusdemque formæ sit.

Itaque apparet, binas saltem radices, in æquationibus quæ nonnisi imaginarias habeant, formæ esse $p \pm q\sqrt{-1}$, æquationemque divisibilem esse per $x^2 - 2px + p^2 + q^2 = 0$; et sic deinceps.

Cujus demonstrationis rigori hoc unum objici potest, quod usus evolu-

tionis in series ad demonstranda theoremata generalia non satis cautus sit. Demonstraverunt enim cl. Cauchy et Poisson (1), ejusdem functionis interdum plures esse evolutiones, et vice versa eandem seriem interdum ad plures functiones diversas pertinere. Indicavit quoque cl. Cauchy (2) nonnullos errores, in quos mathematici imprudenti serierum usu inciderunt.

§ 10. Legendre (3) quoque formula evolutionis functionum usus idem argumentum sequenti modo stabilire conatus est.

Sit $f(x) = 0$ æquatio resolvenda, faciamus $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, ($\alpha$ et β reales sunt) quas α et β necesse est capiamus tales, ut $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ sit minor quam limes radicum realium (4).

Quo valore ipsius x in $f(x)$ substituto, ponamus inde sequi $f(x) = p + q\sqrt{-1}$ (p et q reales sunt). Substituamus etiam, posito $\frac{df}{dx} = f'$, eundem valorem ipsius x in functionem f', et fingamus per hanc substi-

---

(1) Journal de l'école polytech., cah. 19, p. 501 etc.

(2) Cauchy, mémoire sur le développ. des fonctions en séries.

(3) Theor. des nom. 1re part., § XIV, pag. 151, edit. 2.

(4) Sit enim $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} = r(\cos.\phi + \sqrt{-1}\sin.\phi)$, erit $r = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$; substitutione peractâ in $f(x) = 0 = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + .. + M$ et separatis terminis realibus ab imaginariis erit:

$$r^m \cos. m\phi + Ar^{m-1} \cos. (m-1)\phi + Br^{m-2} \cos. (m-2)\phi \ldots + M = 0,$$

$$r^m \sin. m\phi + Ar^{m-1} \sin. (m-1)\phi + Br^{m-2} \sin. (m-2)\phi \ldots = 0;$$

multiplicatis hisce respective per $\cos. m\phi$ et $\sin. m\phi$, invenimus addendo:

$$r^m + Ar^{m-1} \cos. \phi + Br^{m-2} \cos. 2\phi + \ldots + M \cos. m\phi = 0;$$

quodsi hanc æquationem conferamus cum æquatione primitiva:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0,$$

evidens est limitem superiorem valorum x a fortiori esse limitem valorum r sive $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

tutionem evadere $f'(x) = m + n\sqrt{-1}$. Quodsi jam sumamus indeterminatam ω realem vel imaginariam, infinite vero parvam ratione habitâ ad $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, perspicuum est, si ponamus $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ et negligamus potentias superiores ipsius ω, nos habere

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega) = p + q\sqrt{-1} + \omega(m + n\sqrt{-1}).$$

Cum jam ω arbitraria sit, statuere licet

$$\omega(m + n\sqrt{-1}) = -\lambda(p + q\sqrt{-1});$$

est λ fractio positiva plus minusve parva, cujus quantitas postea determinari poterit. Itaque stabit

$$\omega = -\lambda\left(\frac{pm + qn}{m^2 + n^2}\right) - \lambda\sqrt{-1}\left(\frac{qm - pn}{m^2 + n^2}\right)$$

et valor $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ proxime præbet

$$f(x) = (1 - \lambda)(p + q\sqrt{-1}).$$

Quantitas hæcce minor est in proportione $1 - \lambda$ ad 1, illâ quam consecuti sumus per substitutionem $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$. Quod spectat λ, ad arbitrium sumi potest, eo tamen modo, ut ω semper perparva sit, ratione habitâ ad $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$.

Itaque si valorem emendatum ipsius x, quem iterum per $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ repræsentamus, in functiones f, f' substituimus, simili modo alter valor ipsius x emendatus inde deducitur, cujus auxilio nova quantitas $p + q\sqrt{-1}$ etiam diminuitur proportione $1 - \lambda$ ad 1; et sic porro usque eo pergimus quoad $f(x)$ ad quantitatem infinite parvam reducatur, quo casu fieri licet $\lambda = 1$ et approximatio magis magisque apparet.

Teneatur præterea imminutionem progredientem ipsius $f(x)$ nulli limiti obnoxiam fore quamvis esset $m = 0$ et $n = 0$, i. e $\frac{df}{dx} = 0$. Eo enim

casu, facta substitutione $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ in functionibus $\frac{d^2f}{2.dx^2}$, $\frac{d^3f}{2.3dx^3}$, etc., omnes illæ fieri non possunt $= 0$. Sit $\frac{d^kf}{2.3...k.dx^k}$ prima functio quæ non evanescit et stabit

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega) = p + q\sqrt{-1} + \omega^k(t + u\sqrt{-1})$$

ubi facere licet $\omega^k(t + u\sqrt{-1}) = -\lambda(p + q\sqrt{-1})$.

Ut inde valorem ipsius ω deducamus, sint ρ et μ ita determinatæ ut habeamus $\rho(\cos.\mu + \sqrt{-1}\sin.\mu) = -\lambda\left(\frac{p + q\sqrt{-1}}{t + u\sqrt{-1}}\right)$; perindè fit $\omega^k = \rho(\cos.\mu + \sqrt{-1}\sin.\mu)$ et $\omega = \rho^{\frac{1}{k}}\left(\cos.\frac{\mu}{k} + \sqrt{-1}\sin.\frac{\mu}{k}\right)$. Habemus igitur proximè posito $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$:

$$f(x) = (1 - \gamma)(p + q\sqrt{-1}).$$

Quodsi igitur functionem $f(x)$ operationibus similibus apte repetitis continuo decrescere cogamus, perspicuum est nos pervenire ad valores ipsius $f(x)$ indefinite decrescentes, aut quorum limes sit 0.

Legendre hanc methodum præcipue proposuit eo fine ut via pateret ad inveniendas radices imaginarias æquationum. Observat autem, eam simul existentiam harum radicum demonstrare. Quod evidens est, quam primum animadvertimus, factorem arbitrarium λ, et per consequens ω, adeo parvos sumi posse ut in æquatione

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega) = p + q\sqrt{-1} + \omega(m + n\sqrt{-1}) + \frac{\omega^2}{1.2} \text{ etc.}$$

terminus $\omega(m + n\sqrt{-1})$, vel generatim primus terminus, qui $p + q\sqrt{-1}$ sequitur, sit major, tam respectu habito ad partem realem quam ad imaginariam, summâ terminorum reliquorum, ejusque signum

non mutetur additis hisce terminis. Hoc autem signum oppositum est signo $p + q\sqrt{-1}$, propter æquationem $\omega(m + n\sqrt{-1}) = -\lambda(p + q\sqrt{-1})$. Quapropter valor $f(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega)$ necessario erit minor quam $p + q\sqrt{-1}$ sive $f(\alpha + \beta\sqrt{-1})$.

§ 11. Tres cl. Gauss de eodem argumento retulit demonstrationes, tertiæ vero (1) respectu simplicitatis aliis longissime præferendæ pagellas sequentes dicabo.

Proposita sit functio indeterminatæ x hæcce

$$f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m$$

in qua coefficientes A_1, A_2, A_3 etc. sunt quantitates reales determinatæ. Sint r, ϕ aliæ indeterminatæ et $x = r(\cos.\phi \pm \sin.\phi\sqrt{-1})$.

Quæ cum ita sint functio $f(x)$ per substitutionem $x = r(\cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1}$ transit in

$$t + u\sqrt{-1},$$

nec non per substitutionem $x = r(\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})$ in

$$t - u\sqrt{-1}$$

in quibus

$$t = r^m \cos. m\phi + A_1 r^{m-1} \cos.(m-1)\phi + A_2 r^{m-2} \cos.(m-2)\phi + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{m-1} r \cos.\phi + A_m$$

$$u = r^m \sin. m\phi + A_1 r^{m-1} \sin.(m-1)\phi + A_2 r^{m-2} \sin.(m-2)\phi + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_{m-1} r \sin.\phi.$$

Jam demonstremus necesse est, exstare valores tales indeterminatarum r, ϕ, pro quibus fiat $t = 0$ et $u = 0$. Ad hunc finem statuamus

$$t' = mr^m \cos. m\phi + (m-1) A_1 r^{m-1} \cos.(m-1)\phi + (m-2) A_2 r^{m-2}$$
$$\cos.(m-2)\phi + \ldots\ldots + A_{m-1} r \cos.\phi$$

(1) Comment. Acad. Goet. 1815.

$$t'' = m^2 r^m \cos. m\phi + (m-1)^2 A_1 r^{m-1} \cos. (m-1)\phi + (m-2)^2 A_2 r^{m-2} \cos. (m-2)\phi + \ldots\ldots + A_{m-1} r \cos. \phi$$

$$u' = m r^m \sin. \phi + (m-1) A_1 r^{m-1} \sin. (m-1)\phi + (m-2) A_2 r^{m-2} \sin. (m-2)\phi + \ldots\ldots + A_{m-1} r \sin. \phi$$

$$u'' = m^2 r^m \sin. m\phi + (m-1)^2 A_1 r^{m-1} \sin. (m-1)\phi + (m-2)^2 A_2 r^{m-2} \sin. (m-2)\phi + \ldots\ldots + A_{m-1} r \sin. \phi.$$

Denique sit R quantitas positiva determinata, arbitraria quidem, attamen major maxima quantitatum

$$mA_1\sqrt{2},\ \sqrt{(mA_2\sqrt{2})},\ \sqrt[3]{(mA_3\sqrt{2})},\ \sqrt[4]{(mA_4\sqrt{2})}\ \text{etc...}$$

abstrahendo a signis quantitatum A_1, A_2, A_3, etc. i. e. mutatis negativis, si quæ adsunt in positivas. His ita præparatis, dico $tt' + uu'$ certo nancisci valorem positivum, si statuatur $r = R$, quicunque valor realis ipsi ϕ tribuatur. Quem ad finem statuamus

$$T = R^m \cos. 45^\circ + A_1 R^{m-1} \cos. (45^\circ + \phi) + A_2 R^{m-2} \cos. (45^\circ + 2\phi) + \ldots\ldots + A_m \cos. (45^\circ + m\phi)$$

$$T' = mR^m \cos. 45^\circ + (m-1) A_1 R^{m-1} \cos. (45^\circ + \phi) + (m-2) A_2 R^{m-2} \cos. (45^\circ + 2\phi) + \ldots\ldots + A_{m-1} R \cos. (45^\circ + (m-1)\phi)$$

$$U = R^m \sin. 45^\circ + A_1 R^{m-1} \sin. (45^\circ + \phi) + A_2 R^{m-2} \sin. (45^\circ + 2\phi) + \ldots\ldots + A_m \sin. (45^\circ + m\phi)$$

$$U' = mR^m \sin. 45^\circ + (m-1) A_1 R^{m-1} \sin. (45^\circ + \phi) + (m-2) A_2 R^{m-2} \sin. (45^\circ + 2\phi) + \ldots\ldots + A_{m-1} R \sin. (45^\circ + (m-1)\phi)$$

patetque

primo : T compositam esse quantitatibus

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}\left(R + mA_1\sqrt{2}\cos.(45^\circ + \phi)\right)$$

$$+ \frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}\left(RR + mA_2\sqrt{2}\cos.(45^\circ + 2\phi)\right)$$

$$+ \frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}\left(R^3 + mA_3\sqrt{2}\cos.(45^\circ + 3\phi)\right)$$

$$+ \frac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}\left(R^4 + mA_4\sqrt{2}\cos.(45^\circ + 4\phi)\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

quas singulas, pro valore quolibet determinato reali ipsius ϕ, positivas evadere facile perspicitur : hinc T necessario valorem positivum obtinet. Simili modo probatur, etiam U, U′, T′ fieri positivas, unde etiam $TT' + UU'$ necessario fit quantitas positiva.

Secundo : pro $r = R$ functiones t, t', u, u' respective transeunt in

$$t = T\cos.(45^\circ + m\phi) + U\sin.(45^\circ + m\phi),$$

$$t' = T'\cos.(45^\circ + m\phi) + U'\sin.(45^\circ + m\phi),$$

$$u = T\sin.(45^\circ + m\phi) - U\cos.(45^\circ + m\phi),$$

$$u' = T'\sin.(45^\circ + m\phi) - U'\cos.(45^\circ + m\phi),$$

uti evolutione factâ facile probatur. Hinc vero valor functionis $tt' + uu'$, pro $r = R$, derivatur $= TT' + UU'$, adeoque est quantitas positiva. Quod erat demonstrandum.

Cæterum ex iisdem formulis colligimus valorem functionis $tt + uu$, pro $r = R$, esse $TT + UU$, adeoque positivum, unde concludimus, pro nullo valore ipsius r, singulis $mA_1\sqrt{2}$, $\sqrt{(mA_2\sqrt{2})}$, $\sqrt[5]{(mA_3\sqrt{2})}$ etc. majori, simul fieri posse $t = 0$, $u = 0$.

Vero enim inter limites $r = 0$ et $r = R$ atque $\phi = 0$ et $\phi = 360^\circ$ certo dantur valores tales indeterminatarum r, ϕ, pro quibus fiat $t = 0$ et $u = 0$.

Quodsi enim supponatur theorema non esse verum, consideremus functionem

$$y = \frac{(tt + uu)(tt'' + uu'') + (tu' - ut')^2 - (tt' + uu')^2}{r(tt + uu)^2}$$

e cujus denominatore factorem r manifesto tollere licet quum t', t'', u', u'' per illum sint divisibiles. Factor autem $tt + uu$ pro cunctis valoribus indeterminatarum intra limites assignatos fieri debet quantitas positiva, et proin valor ipsius y semper finitus. Consideremus integrale duplex

$$\iint y\, dr\, d\phi$$

ab $r = 0$ usque ad $r = R$, atque a $\phi = 0$ usque ad $\phi = 360^\circ$ extensum, quod igitur valorem finitum plene determinatum nanciscitur. Hic valor, quem per Ω denotabimus, idem prodire debebit, sive integratio primo instituatur secundum ϕ ac dein secundum r, sive ordine inverso. At habemus indefinite, considerando r tamquam constantem

$$\int y\, d\phi = \frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)}$$

uti per differentiationem secundum ϕ facile confirmatur. Constans non adjicienda, siquidem integrale a $\phi = 0$ incipiendum supponamus, quoniam pro $\phi = 0$ fit $\frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)} = 0$; quare quum manifesto $\frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)}$ etiam evanescat pro $\phi = 360^\circ$, integrale $\int y\, d\phi$ a $\phi = 0$ usque ad $\phi = 360^\circ$ fit $= 0$, manente r indefinita, hinc autem sequitur $\Omega = 0$.

Perinde habemus indefinite, considerando ϕ tamquam constantem,

$$\int y\, dr = \frac{tt' + uu'}{tt + uu}$$

uti æque facile per differentiationem secundum r confirmatur : hic quoque constans non adjicienda, integrali ab $r = 0$ usque ad $r = R$ incipiente. Qua propter integrale ab $r = 0$ usque ad $r = R$ extensum fit per ea, quæ supra demonstrata sunt,

$$= \frac{TT' + UU'}{TT + UU}$$

adeoque semper quantitas positiva pro quolibet valore reali ipsius ϕ. Hinc etiam Ω, i. e. valor integralis

$$\int \frac{TT' + UU'}{TT + UU} d\phi$$

a $\phi = 0$ usque ad $\phi = 360^\circ$, necessario fit quantitas positiva. Quod est absurdum, quoniam eandem quantitatem antea invenimus $= 0$: suppositio itaque consistere nequit, theorematisque veritas hinc evicta est.

Quodsi igitur pro valoribus determinatis ipsarum r, ϕ, puta pro $r = g$, $\phi = G$, simul provenit $t = 0$, $u = 0$ (quales valores exstare demonstratum est), $f(x)$ per utramque substitutionem

$$x = g\,(\cos. G + \sin. G\sqrt{-1})$$
$$x = g\,(\cos. G - \sin. G\sqrt{-1})$$

valorem 0 obtinet, et proin indefinite per $x - g\,(\cos. G + \sin. G\sqrt{-1})$, nec non per $x - g\,(\cos. G - \sin. G\sqrt{-1})$ divisibilis erit. Quoties non est $\sin. G = 0$, neque $g = 0$ hi divisores sunt inæquales, et proin $f(x)$ etiam per illorum productum $x^2 - 2gx \cos. G + g^2$ divisibilis erit; quoties autem vel. $\sin. G = 0$ adeoque $\cos. G = \pm 1$, vel $g = 0$, illi factores sunt identici scilicet $= x \pm g$. Certum itaque est, functionem $f(x)$ involvere divisorem realem secundi vel primi ordinis, et quum eadem conclusio rursus de quotiente valeat, $f(x)$ in tales factores complete resolubilis erit.

Quo magis elucescat hujus demonstrationis rigor, observat Gauss suppositionem, t et u pro nullis valoribus ipsarum r et ϕ intra limites assig-

natos simul evanescere, ad contradictionem evidentem detulisse, unde ipsius suppositionis falsitas patuit. Hæc igitur contradictio cessare debet, si revera adsunt valores ipsarum r, ϕ, pro quibus t et u simul fiunt $= 0$. Quod etiam locum habet. Pro talibus enim valoribus fit $tt + uu = 0$, adeoque ipsa y infinita, unde haud amplius licet, integrale duplex $\iint y\, dr\, d\phi$ tanquam quantitatem assignabilem tractare.

§ 12. Cl. Cauchy (1) iisdem ferme principiis, quibus doct. Gauss et Legendre, usus ad demonstrationem pervenit quæ tam recta tam simplex esse videtur quam expeti possit.

Sit functio integra et rationalis indeterminatæ x hæcce

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

in qua A_0, A_1, A_2 etc. sunt quantitates reales imaginariæve. Id satis nobis habemus, dum demonstremus æquationi $f(x) = 0$ semper satisfieri posse per substitutionem $x = u + v\sqrt{-1}$ (u et v aliæ sunt reales indeterminatæ).

Si $u + v\sqrt{-1}$ pro x ponamus in æquatione $f(x)$, obtinebimus

$$f(x) = \phi(u, v) + \sqrt{-1}\, \Psi(u, v) = 0$$

ubi sunt $\phi(u, v)$, $\Psi(u, v)$ functiones reales ipsarum u et v. Cum vero quantitas realis imaginariæ æquivalere nequeat, necesse est locum habeant binæ æquationes

$$\phi(u, v) = 0 \text{ et } \Psi(u, v) = 0$$

vel hæc altera

$$\Big(\phi(u, v)\Big)^2 + \Big(\Psi(u, v)\Big)^2 = 0.$$

Brevitatis causa statuamus

(1) Cours d'analyse, ch. X. — Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, p. 69. — Journal de l'école polytechnique, 15e cah., p. 411.

$$\left(\Phi(u, v)\right)^2 + \left(\Psi(u, v)\right)^2 = F(u,v) = 0;$$

perspicuum est functionem $F(u, v)$ nullo modo negativam fore, nobisque tantum demonstrandum erit æquationi $F(u, v) = 0$ semper satisfieri posse valoribus realibus ipsarum u et v. Ut jam modo facillimo functionem $F(u, v)$ representemus, statuamus

$$u + v\sqrt{-1} = z(\cos.\omega + \sqrt{-1}\sin.\omega), \text{ proin } z = \sqrt{u^2 + v^2},$$

sit porro

$$A_0 = R_0(\cos.\alpha_0 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_0)$$
$$A_1 = R_1(\cos.\alpha_1 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_1)$$
$$A_2 = R_2(\cos.\alpha_2 + \sqrt{-1}\sin.\alpha_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m = R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m)$$

cum hisce valoribus $f(x)$ transit in

$$\begin{aligned} f(x + v\sqrt{-1}) = {} & R_0 z^m\left(\cos.(\alpha_0 + m\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_0 + m\omega)\right) \\ & + R_1 z^{m-1}\left(\cos.(\alpha_1 + (m-1)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_1 + (m-1)\omega)\right) \\ & + R_2 z^{m-2}\left(\cos.(\alpha_2 + (m-2)\omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_2 + (m-2)\omega)\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + R_{m-1} z\left(\cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + \sqrt{-1}\sin.(\alpha_{m-1} + \omega)\right) \\ & + R_m(\cos.\alpha_m + \sqrt{-1}\sin.\alpha_m) \end{aligned}$$

unde

$$\phi(u, v) = R_0 z^m \cos.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1} \cos.\left(\alpha_1 + (m-1)\omega\right)$$

$$+ R_2 z^{m-2} \cos.\left(\alpha_2 + (m-2)\omega\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + R_{m-1} z \cos.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \cos.\alpha_m$$

$$\Psi(u, v) = R_0 z^m \sin.(\alpha_0 + m\omega) + R_1 z^{m-1} \sin.\left(\alpha_1 + (m-1)\omega\right)$$

$$+ R_2 z^{m-2} \sin.\left(\alpha_2 + (m-2)\omega\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + R_{m-1} z \sin.(\alpha_{m-1} + \omega) + R_m \sin.\alpha_m$$

et

$$F(u, v) = R_0^2 z^{2m} + 2 R_0 R_1 z^{2m-1} \cos.(\alpha_0 - \alpha_1 + \omega)$$

$$+ \left(R_1^2 + 2 R_0 R_2 \cos.(\alpha_0 - \alpha_2 + 2\omega)\right) z^{2m-2} + \text{etc.}$$

Ex hac æqualitate sequitur, functionem $F(u, v)$ finitam evadere, quum valores finiti tribuuntur ipsi z, i. e. u, v; functio autem hæc infinito modo crescit, dum z, i. e. u, v infinitæ evadunt. Præterea constat pro valoribus realibus ipsarum u et v numquam negativam fore. Ex omnibus itaque valoribus quorum $F(u, v)$ capax est, unus saltem v. g. $F(u_0, v_0)$ minimus erit qui pertineat ad substitutiones $u = u_0$, $v = v_0$.

Jam demonstraturi sumus, huncce valorem necessario esse $= 0$. Ad hoc probandum quæramus valorem functionis $F(u_0 + \lambda, v_0 + \mu)$, ($\lambda$, μ sunt reales, arbitrariæ quidem qualescunque); et progrediamur ab ipsa functione primitiva $f(x)$. Ponamus itaque $x = u_0 + v_0\sqrt{-1} + \zeta$ et obtinebimus

$$f(u_0 + v_0\sqrt{-1} + \zeta) = B_0 + B_1\zeta + B_2\zeta^2 + \ldots\ldots + B_{m-1}\zeta^{m-1} + B_m\zeta^m,$$

in qua quantitates B_0, B_1, B_2 etc. pendent ab ipsis A_0, A_1, A_2 etc., et u_0, v_0, atque ad formam sequentem reduci possunt

$$B_0 = S_0\,(\cos.\,\varepsilon_0 + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varepsilon_0),$$

$$B_1 = S_1\,(\cos.\,\varepsilon_1 + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varepsilon_1),$$

$$B_2 = S_2\,(\cos.\,\varepsilon_2 + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varepsilon_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_m = S_m\,(\cos.\,\varepsilon_m + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varepsilon_m).$$

Si ponamus $\zeta = \lambda + \mu\sqrt{-1} = \rho\,(\cos.\,\Theta + \sqrt{-1}\,\sin.\,\Theta)$

tum functio $f(u_0 + v_0\sqrt{-1} + \zeta)$ fit

$$f\left(u_0 + \lambda + (v_0 + \mu)\sqrt{-1}\right) =$$

$$S_0(\cos.\,\varepsilon_0 + \sqrt{-1}\,\sin.\,\varepsilon_0) + S_2\,\rho\left(\cos.(\varepsilon_1 + \Theta) + \sqrt{-1}\,\sin.(\varepsilon_1 + \Theta)\right)$$

$$+ S_2\rho^2\left(\cos.\,(\varepsilon_2 + 2\Theta) + \sqrt{-1}\,\sin.\,(\varepsilon_2 + 2\Theta)\right) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + S_m\rho^m\left(\cos.\,(\varepsilon_m + m\Theta) + \sqrt{-1}\,\sin.\,(\varepsilon_m + m\Theta)\right)$$

et

$$\phi\,(u_0 + \lambda,\, v_0 + \mu) = S_0\cos.\,\varepsilon_0 + S_1\rho\cos.(\varepsilon_1 + \Theta) + S_2\rho^2\cos.(\varepsilon_2 + 2\Theta) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + S_m\rho^m\cos.\,(\varepsilon_m + m\Theta)$$

$$\Psi\,(u_0 + \lambda,\, v_0 + \mu) = S_0\sin.\,\varepsilon_0 + S_1\rho\sin.(\varepsilon_1 + \Theta) + S_2\rho^2\sin.\,(\varepsilon_2 + 2\Theta) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + S_m\rho^m\sin.\,(\varepsilon_m + m\Theta)$$

$$F(u_0 + \lambda, v_0 + \mu) =$$

$$S_0^2 + 2 S_0 S_1 \rho \cos. (\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \Theta) + 2 S_0 S_2 \rho^2 \cos. (\varepsilon_0 - \varepsilon_2 - 2\Theta) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots + 2 S_0 S_m \rho^m \cos. (\varepsilon_0 - \varepsilon_m - m\Theta) +$$

$$\left(S_1 \rho \cos. (\varepsilon_1 + \Theta) + \ldots\ldots + S_m \rho^m \cos. (\varepsilon_m + m\Theta)\right)^2 +$$

$$\left(S_1 \rho \sin. (\varepsilon_1 + \Theta) + \ldots\ldots + S_m \rho^m \sin. (\varepsilon_m + m\Theta)\right)^2.$$

Quando $\lambda = 0$, $\mu = 0$, habemus et $\rho = 0$ quia $\rho = \sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)}$, et functio supra præbet

$$F(u_0, v_0) = S_0^2.$$

Quantitates B_1, B_2, B_3 etc. simul evanescere nequeunt; aliàs enim functio $f(u_0, v_0 \sqrt{-1} + \zeta)$ pro quolibet valore ipsius ζ ad valorem B_0 reduceretur, atque functio ipsa $f(x)$ pro quocunque valore ipsius x eundem semper valorem obtineret, quod absurdum sanè. Omnes igitur quantitates S_1, S_2, S_3 etc. neutiquam simul evanescunt. Quodsi per S_n designemus primam quantitatem, quæ non evanescat, habebimus

$$F(u_0 + \lambda, v_0 + \mu) = F(u_0, v_0) + 2 S_0 S_n \rho^n \cos. (\varepsilon_0 - \varepsilon_n - n\Theta) + \text{etc.}$$

$$+ \left(S_n \rho^n \cos. (\varepsilon_n + n\Theta) + \text{etc.}\right)^2$$

$$+ \left(S_n \rho^n \sin. (\varepsilon_n + n\Theta) + \text{etc.}\right)^2$$

Si jam ρ in infinitum decrescit, quò et λ et μ infinite parvæ evadunt, summa omnium terminorum, qui sequuntur primum in membro posteriore æquationis, obtinebit signum termini $2 S_0 S_n \rho^n \cos. (\varepsilon_0 - \varepsilon_n - n\Theta)$, quia in hoc termino potentia ipsius ρ minima est. Arcus vero indeterminatus Θ,

quamquam ρ infinite decrescat, semper sic sumi potest, ut $S_0 S_n \cos.(\varepsilon_0 - \varepsilon_n - n\Theta)$ negativa fiat, unde tandem, quoniam λ et μ infinite decrescunt, obtinebimus

$$F(u_0 + \lambda, v_0 + \mu) < F(u_0 + v_0)$$

quæ vero conclusio suppositioni nostræ, posuimus enim $F(u_0, v_0)$ minimum esse valorem, quem $F(u, v)$ admittere valet, adversatur quamdiu expressio $F(u_0 + \lambda, v_0 + \mu)$ terminos continet in quibus cosinius primæ dimensionis sunt. Itaque hi termini evanescant necesse est; quum vero S_1, S_2, S_3 etc. simul esse $= 0$ nequeant, habere debemus $S_0 = 0$; unde sequitur

$$F(u_0, v_0) = 0.$$

Exstant ergo pro u et v valores reales, nimirum $u = u_0$, $v = v_0$, pro quibus $F(u_0, v_0)$ igitur et $f(u + v\sqrt{-1}$, evanescit. Itaque æqualitati $f(x) = 0$ satisfieri posse per factorem $x = u_0 + v_0\sqrt{-1}$ rite stabilitum est.

FINIS.

POSITIONES.

1.

Qualitas cervisiæ, quæ diversa pro diversis provinciis, ~~temperaturæ~~ affectibus atmosphæra adscribenda est.

2.

Opinio Newtonis circa cometarum caudas non valet.

3.

Duo gallorum principa mechanicæ haud sufficiunt.

4.

In botanica methodus symetrica prœferenda est analyticæ.

5.

Sine chemia nulla mineralogia.

EXPERIMENTA CHEMICA

DE QUIBUSDAM

VENENIS METALLICIS.

SPECIMEN INAUGURALE

QUOD,

EX RECTORIS MAGNIFICI, CLARISSIMI DEODATI SAUVEUR,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE, PRÆVIO FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU PHILOSOPHIÆ NATURALIS DOCTORIS ET MATHESEOS MAGISTRI RITE AC LEGITIME CONSEQUENDO, PUBLICO SUBMITTIT EXAMINI

Die XV *Mensis Julii* MDCCCXXX, *hora* XI,

AUCTOR

Eduardus Jacquemyns,

EX VERREBROEK (IN FLANDRIA ORIENTALI),

Medicinæ, chirurgiæ, artis obstetricæ et pharmaceuticæ doctor; societatis scientiarum naturalium et societatis medicæ quæ sunt Leodii, societatis scientiarum, litterarum et artium Trajecti ad Mosam et Academiæ scientiarum Ambianæ sodalis.

LEODII,

APUD P.-J. COLLARDIN, ACADEMIÆ TYPOGRAPHUM.

1830.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opinions, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

(*Art.* 56 *du Règlement.*)

PROOEMIUM.

Inter varias chemiæ partes unam reperiri quæ cæteris lentius ad quemdam altitudinis scientificæ gradum evehitur, nemo peritus nescit: toxicologicam intelligo. Neque mirum; siquidem præterquam toxicologicæ disquisitiones summam difficultatem præbeant, insuper præprimis chemiæ operam navantes malunt partem quamdam chemiæ generalis vel technologiæ eligere: sic enim provinciam habebis latiorem, ditiorem, certioremque, uti et successus feliciores; deinde nonnisi medici et pharmacopolæ toxicologiæ cernunt utilitatem, neque victimas veneni ferunt nisi qui jam diu multumque tulere ægros: magna tamen sit oportet ex una parte hæc sympathia victimarum, magnaque ex altera justitiæ referendi desiderium, quod quem ad toxicologiæ alliceret studium, quippe quod difficillimis disquisitionibus nec gloriam nec commodum præbet, neque ullam spem relinquit, nisi in propria conscientia inveniendi suorum prœmium.

Quæ cum ita essent, existimavi me utiliorem operam navaturum, si pro mediocritate mea animum et conatus ad venena intenderem: sequentes ergo duas circa texicologiam habe dissertatiunculas, mearum disquisitionum tenues primitias.

Prior earum tractat de methodis quas utiles ad cuprum et zincum in pane inveniendum judicavi. Eorum, qui conatus meos, pæne scriptos, perlegere non sunt dedignati, testimonio, confido me non omnino

vane laborasse: etenim eo ire mihi licuit, ut facili satis methodo præsentiam zinci in pane, sex grana sulphatis continente, cupri vero in pane unum modo granum continente certo, argumento demonstrarem.

Posterior vero facta varia continet attentione haud indigna: in summa autem multa hic desiderari possent, si ingenua loquar. Nimirum, quod disquisitiones essem agressus quæ maximas difficultates haberent et temporis angustia me tantum premeret, ut tradere prælis scripta deberem, antequam mea ipsa opinione essent satis elaborata. Perscrutanti satis patebit varia adesse facta, ad phænomena pertinentia, quorum clavem et explicationem non dedi: sed videas quanta sit eorum omnium difficultas, et juventuti non denegabis veniam.

EXPERIMENTA CHEMICA

AD QUIBUSDAM

VENENIS METALLICIS.

DISSERTATIO I.

DE DETEGENDA CUPRI ET ZINCI PRÆSENTIA IN PANE.

Neminem fugit quantum Belgici pistores aliquot per menses, imo annos, sulphate cuprico et zincico usi sint in panis fabricatione. Fama fert minima admisti salis dosi panem magis album et spongiosum effici, neque in fornace tam diu opportuisse manere, ideoque minorem aquæ copiam per calorem amisisse: quos effectus duo tantum triave grana sulphatis cuprici per panis libram ferrent; nam, docente viro experientissimo B. Meijlink, ex Daventria (schei-, artsenijmeng-en natuurkundige bibliotheek van B. Meijlink; zevende deel, n°. V), majorem dosin minime tulisset finis, quum alimenti albedo omnis evanescere debuisset. Initio veneficis illis salibus non utebantur nisi qui dosim moderare valebant. Verum brevi utilitatem viderunt inexperti, qui, nullum modum tenentes et veneno copiosius utentes, statim

tam pravos tulerunt effectus ut vel solo panis colore nimis subfusco gustuque metallico ipso, ut asserunt nonnulli, appareret pani salem venenosum esse admistum.

Experimenta ad substantiam veneficam in pane inveniendam instituerunt multi, et ego institui; sed omnes rei summam agnovimus difficultatem, quam hucusque ad liquidum deducere nulli licuerat. Eam difficultatem satis intelligens, superque cernens nunc lege severiori cautum esse civibus contra malitiam pistorum, qui pani eliena miscerent, mecum reputavi experimentis meis esse valedicendum. Sed me mea fefellit in legis severitate fiducia; nam delicti iterum repetiti statim hic contigere exempla, quinimo in provinciis septentrionalibus Galliæ surgerent, uti ferebant, eadem. Nunc, si unquam, urgere necessitatem, nec difficultatibus me esse deterrendum, sed allicendum magis, retuli, novaque experimenta igitur alacri animo institui, imo varia, et, quo uno summa fiducia confido, in laboratorio clarissimi viri Henrici Rose, analyseos chemicæ et chemiæ pharmaceuticæ professoris in universitate Berolinensi, et quasi sub illius præsidio peracta. Sequentia ergo habe, quæ cæteris anteponere omnibus audeo, ad inveniendum in pane cuprum remedia.

I. Simplicissima methodo, fieri pasta mollis poterit ex panis uncia et sufficienti aquæ copia cum levi acidi sulphurici quantitate; in ea servetur cultri lamina per decem duodecimve horas, nec nisi eo tempore elapso retrahatur culter. Lente tunc dissolvitur ferrum, tum propter acidi sulphurici præsentiam, tum quia e consociatione expellit cuprum, quod brevi laminam cultri obtegit; quo evenit ut elapso tempore memorato inveniatur cultri lamina obducto cuprico metallico tecta.

Datur hic actio electrica haud dissimilis ab ea, quam sæpe observamus, laminam ferri in solutionem cupri salis immergentes. Actioni sane favet præsentia acidi sulphurici, tum quod cunctas reactiones Galvanicas adjuvat acidi præsentia, tum quod solvit salem cupricum,

nam docent permulta experimenta, difficile vel omnino non solvi aqua pura cuprum eo in statu, quo in fabricato reperitur pane: utique propria experimenta me docent, actionem ferri laminæ celeriorem esse si adsit acidum. Cæterum laminam haud extrahendam esse nisi post tempus dictum inde refero quod singulas hujus generis operationes omnino pervertit interruptio.

Felicissimo successu tentatur hæc operatio si panis libra habet quatuor sulphatis grana: si minus, felix adhuc esset, sed omnino deficeret si unicum granum sulphatis modo contineret panis libra.

Mihi non est propria hæc methodus, mea opinione saltem accurata et quam facillima; quippe ab Instituto Regio Belgico primum proposita; verum suspicor merito majoris aquæ quantitatis usum suasisse doctissimos Instituti sodales.

II. Altera methodus ad detegendam præsentiam minimæ dosis cupri aptissima, longior vero variisque cautelis egens, huc redit: unica panis uncia teratur cum aquæ quantitate sufficienti ad pastam usque mollem: requirimus autem panem manere cum aqua terique donec pasta uniformis fiat. Deinde admiscentur unciæ duæ carbonatis natrici in crystallos concreti et dein pulverati. Accurate peracta mistione, introducitur miscela in crucibulum Hassiacum, gradatim calefaciendum, donec per horæ quadrantem calori rubro albescenti expositum fuerit. Postea in aere refrigeretur obtectum crucibulum, extrahatur panis carbo et caute pulveretur in mortario achateo. Sed primum pulveretur pars carbonis cum nonnullis aquæ guttis, ac teratur donec tenuissimus obtineatur pulvis. Addatur nunc major aquæ copia, atque, agitato pistillo, caute decantetur. Carbonem secum trahit aqua et cuprum, utpote gravius, super mortarii fundo remanet. Iteretur hæc lavatio donec fere omnis abeat carbo. Deinde simili modo pulveretur superstes carbo, et lavatione denuo sejungatur carbonis pulvis a metallo. Si omnino abierit carbonis pulvis et detur cuprum in pane examini subjecto, remanebunt squammulæ, colo-

rem aspectumque metallicum cupri præ se ferentes et sæpissime ferri admistæ pulveri.

Religiose tamen observentur singulæ præfatorum circumstantiæ omnes, nam te ludit vel minima varietas. Decies enim sæpiusque ita quæsivi cuprum in pane qui quatuor, sex, imo et decem grana sulphatis, per libram, habebat; frustra tamen: nimirum propter neglectas cautelas et conditiones, quas eousque tam stricte non colebam. Quum autem omnes novissem et essem expertus quanto rigore requireretur omnium observantia, omnibus cautelis adhibitis, me numquam fefellit experimentum sed potius semper certos dedit successus, etiam quum panis libra unicum tantum sulphatis cuprici granum tenebat, nisi tamen quum ipse experimenta et cautelas in omnes partes traherem et variarem, ut omnis generis eventus haberem et sic diversarum conditionum necessitatem certa scientia statuere valerem. Ergo quoque singulas denuo notemus conditiones.

1° Uniformis sit pasta ex pane et aqua, ut enim accurate misceri valeat cum carbonate natrico.

2° Sit pondus carbonatis duplo majus pondere panis. Si minor esset salis copia, adhuc obtineretur cuprum metallicum, verum adeo divisum ut sensus fugerent moleculæ. Addita vero majori carbonatis natrici copia, fere liquet massa calida atque facile uniuntur in hac massa sparsæ cupri moleculæ, nunc massas perceptibiles sensu formantes.

Revera, pars carbonatis natrici fusi affluit in fundum crucibuli terreæque conjungitur massæ, nec tamen impedit experimenti successum. Deinde, facile vitamus ne carbonas natricus crucibuli fundum corrodat, nempe super hoc fundo frustulum panis, nullum carbonatem continens, ponendo atque post calcinationem cum cætera massa pulverando. Nec autem utile, nec leve censeo fundum crucibuli ipsum in pulverem redigere, atque terreæ massæ pulverem aqua sejungere a metallo: hæc enim operatio mihi tam longa videbatur ut eam vix

semel inceperim, nec continuaverim, metallo tamen semper in ipsa carbonis massa reperto.

3° Per horæ quadrantem exponatur crucibulum calori rubro-albescenti.

4° Caute fiat pulveratio. Multo facilior evadit hæc operatio si addantur guttæ aliquot aquæ, ut carbonatem solvant carbonis; sed impossibilis fieret apta pulveratio, si nimia foret additi liquidi copia. Non addatur major aquæ copia, nisi omnino peracta pulveratione, nam in tenuissimo etiam carbonis frustulo adhuc metallum suspicari licet: igitur hunc in modum fiat ut ne quidem levissimum carbonis frustulum aqua auferatur. Denique, sit omnis carbonis pulvis ablatus, antequam de præsentia, et præsertim de absentia cupri, judices.

5° Fiat pulveratio in mortario achateo: frustra usus sum mortariis terreis (mortariis Wedgwood) et porcellaneis diversæ formæ.

His dictis de modo, quo præsentia cupri est in pane quærenda videamus quomodo zincum est inveniendum.

Secatur panis in tenues offulas seorsim super igne in carbonem redigendas: in pulverem ridigitur deinde carbo ope mortarii porcellanei, vel serpentinei, atque ferveat pulvis cum aqua acido hydrochlorico, vel nitrico, vel etiam sulphurico, leniter acidulata. Omnis mistio super filtrum deinde projicitur, ut apte sejungatur liquor a carbone. Addenda denique est liquori ammonia liquida ad levem excessum usque; præceps ruit phosphas calcicus, phosphas magnesicus, alumina, atque oxydum zincicum: redundanti ammonia autem denuo solvitur oxydum zincicum. Filtratur liquor et additur hydrosulphas ammonicus. Nunc obtinetur præcipitatum sulphureti zinci nonnullo ferri sulphureto colorati: filtretur ergo liquor, post aliquot horas, per chartam exilissimam; tandem a siccata charta jam resecandæ sunt partes præcipitato haud tectæ, atque comburendæ cæteræ. Cineribus admiscetur nonnihil carbonatis natrici humidifacti, atque, ope tubi ferruminatorii, calori lampæ subjicitur miscela super carbone locata: statim

ac interior et lucida flammæ pars tetigerit massam, jam circumdatur hæc quasi nive alba carbonem tegente oxydoque zincico formata.

Perfacilis est hæc methodus, licet satis longa; sed tunc demum successus præbet si libra panis ad minimum sex continet sulphatis zincici grana.

Nec desunt aliæ methodi, quas tum in Gallia, tum in Belgio proposuere docti. Ut enim jam proposuit Accum, censuerunt solutionis cyanureti kalii et ferri guttam pani imponendam, quæ maculam fuscam præberet, si cuprum reconderet, sed contra experimenta a doctissimo Meijlink instituta extra dubitationis aleam posuerunt hujuscemodi reagens fide non esse dignissimum. Alii malunt panem tractare aqua acidulata atque sic præparare solutionem in qua variis reagentibus cuprum vel zincum agnoscere liceret. Verumvero, perardua est filtratio liquoris sic præparati, sæpius justo copiosioris quam ut levioris metalli copiæ præsentiam in ea indagare liceat. Alii deinde probant incinerationem panis; sed operatio longissima est et inutilitate laborare videbatur. Iterum alii proponunt laudantque carbonisationem. Sententiam laudo si ita zincum quærere, verum improbo si cuprum velis. Revera cupri præsentiam statuere mihi contigit in pane quatuor ad decem grana sulphatis per libram continente, panis carbonem tractando aqua acido nitrico acidulata, atque filtrato liquori addendo solutionem acidi hydrosulphurici: sed hoc casu sufficit et longe facilior est usus laminæ ferreæ: nec tamen methodo carbonisationis invenire potui cuprum in pane per libram granum vel grana duo sulphatis continente. Denique, etiam panem acidi sulphurici ope omnino solvi, ut in liquore cupri vel zinci præsentiam cognoscerem; sed vel nimis abundans erat solutio quam ut tenuissimam metalli copiam invenire contingeret, vel in carbonem redigebatur panis.

Ne alia addendo de præfatis methodis justo longior; ne immorer cæteris aliis, digna magis quæ præteream quam quæ referam. Sed

neque justo brevior et levior esse velim, imo potius omnia retulisse quæ artis nostræ præbent incrementum. Itaque obscuro silentio præterire sententiam clarissimorum Henry, Deyeux et Boutron-Charlard minus cupio quam longiori examini eam submittere.

Hunc in modum sua proponunt:

1. « Exsiccentur panis grammata 125, in pulverem redigantur, » atque cum circiter 100 grammatibus acidi nitrici 36 graduum » aerometri Beaumeani introducantur in crucibulum platinicum. Inter » carbones locatum crucibulum calefiatur, donec valde imminuta » sit massa, evaporati loco semper novo addito acido (Journal de » pharmacie et des sciences accessoires, Février 1830.). »

Bis institui hanc operationem. Priori experimento usus sum capsula platinea, miscelam frigidam apte continentem; at statim caloris actione adeo turgebat miscela, ut eam in longe majorem capsulam porcellaneam ponere opporteret. Nec intelligo cur hic commendetur crucibulum platineum, quum tam rara sint in officinis majora platinea vasa. Præterea, longa videtur hæc operatio et valde injucunda propter continuam acidi nitroso-nitrici vaporum præsentiam.

2. Superstiti et valde nigræ massæ dein addatur acidum nitricum dilutum, filtretur liquor, atque addatur ammonia liquida, si cupri, vel kali, si zinci præsentiam suspicari liceat, donec leviter redundet alkali. Auctore Henry, præceps ruit phosphas calcicus, phosphas magnesicus, et oxydum ferricum, atque jam filtratione tantum opus est, ut hæc sejungantur a liquore.

Attamen, notandum est, neque ammonia neque kali, hoc casu præcipitari oxydum ferricum, nempe propter materiæ organicæ præsentiam. Etenim quævis substantia organica, nisi sit volatilis, impedit præcipitationem oxydi ferrici, cum ammonia tum kali.

Quum subnigro huic fluido plures guttas solutionis sulphatis ferrici adderem et deinde ammoniam, nullum obtinui præcipitatum. Nonnihilo liquoris novam addidi copiam acidi nitrici et miscelam ebulli-

2.

tioni subjeci, ut pellucida fierit : et impossibile erat oxydum ferricum intente additum, ammonia præcipitare. Denique, liquori qui addito acido nitrico pellucidus abierat, addidi ammoniam ad excessum usque, uti et nonnullas sulphatis ferrici soluti guttas et quidem erat oxydi ferrici præcipitatum in superficie liquoris, haud sufficiente materie organica, ut præcipitationem impediret : sed agitatione statim evanescuit jam formatum præcipitatum. Singula experimenta denuo institui, kali loco ammoniæ utens, similesque erant effectus.

3°. Denuo liquori addatur acidum, atque evaporetur fluidum ad parvam quantitatem, quæ reagentibus examinetur.

Ut inveniatur cuprum, commendant auctores cyanuretum kalii et ferri atque ammoniam ; at neminem fugit, ammoniam haud esse reagens valde perceptibile ad inveniendum cuprum.

Ut statuatur de zinci præsentia, « liquori acidulo..... addatur » hydrosulphas kalicus neuter ut obtineatur præcipitatum album » hydrosulphatis zincici, atque ammonia et kali, quæ præcipitatum » album producunt oxydi zincici, redundantibus alkalibus sobubilis. »

Quoad usum sulphureti kalii, jam monstravi in liquore, præter zincum adhuc ferrum adesse : exstat ferrum in ipsa farina, in adhibita aqua, ad panis fabricationem, imo et sæpius datur in ipso sulphate zincico, quod est in commercio, quoque utuntur pistores. Atqui, si vel levissima sulphureti ferri copia addatur sulphureto zinci, non est miscelæ color albus, sed cinereus ; adeoque verum est, difficile obtineri præcipitatum album sulphureti zinci hisce experimentis, ut in methodo supralaudata, qua zincum inveniretur, nunquam præcipitatum album obtinuerim sed cinereum ; nam, licet caute in carbonem redigatur panis, imo, licet maxima illius pars in cineres, remanet nihilominus aliquid organicæ materiei, quod sufficit, ut e liquore, actione acidi nitrici diluti in carbonem panis præparato, oxydum ferricum ammonia vel kali præcipitare nequeas.

Facile tamen eveniret ut obtineretur præcipitatum album si seque-

remur methodum doctissimi Henry; sed sulphure formatur hoc præcipitatum. Etenim, quum sulphuretum kalii vel hydro-sulphas ammonicus aliquantum aeris oxygenii absorbuerit, jam oritur præcipitatum album sulphuris, statim ac ei additur acidum vel solutio salis cujusdam metallici; quin et ipsum acidum nitricum in solutione redundans, si adhuc calidus sit liquor, ab hydrosulphate sulphur sejungere valeret. Attamen, si quieta remaneat hydrosulphate tractata solutio, per aliquot horas, mox observare licebit præcipitatum cinereum sulphureti zinci, quod fundum vasis petit, dum sulphur adhuc liquore suspensum remanet.

Quod alkalium attinet usum, asserit Henry sese zincum invenire in pane nonnisi gramm. 0, 15 sulphatis zincici, per libram, continenti, ut ergo in 125 gramm. panis non nisi circa 0, 01 gramm. oxydi zincici adessent. Variis operationibus obtinetur hæc oxydi copia in aqua soluta; sed præterea continet solutio redundans acidum, necnon nitratem et oxalatem kalicum. Ex ea solutione præcipitandum est 0, 01 gr. oxydi zincici: id doct. Henry contigisse negare non velim, sed potius candide fateri idem mihi non licuisse, quod forte nec pharmacopolis in genere liceret. Et hic erroris causa datur, forsitan haud indigna quæ pharmacopolis esset nuntiata: nempe, quum calida solutio sit oxalate forsan et nitrate kalico satura, statim ac ei additur ammoniæ gutta, frigescit liquor, atque abundans obtinetur præcipitatum album, quod parva aquæ copia super filtro lavare mihi contigit: solvitur hoc præcipitatum cum ammonia tum kali solutione, sed quoque solvitur aqua pura.

Si hisce operationibus constet, zincum in pane haud dari, atque nova ad inveniendum cuprum velis instituere experimenta, asserunt auctores, tunc panem in carbonem redigendum esse, ut nunc in carbone metallum invenias. Nisi me mea fallant, verentur ne zincum per calcinationem vaporetur, sed nulla plausibili ratione: neque sulphas zincicus, neque oxydum, neque sulphuretum zinci volatilia sunt. Revera, igno-

ramus an oxydum zincicum forsan non inter panis fabricationem sit ab acido sulphurico sejunctum, quod et nonnulli volunt; sed neminem fugit oxydum zincicum haud facile carboni oxygenium suum cedere. Insuper, carbonem sic præparatum, in pulverem redigi ope mortarii achatei tantum posse asserunt: mihi tamen id æque contigit in mortario serpentineo vel porcellaneo.

Finem dissertationi dedecet imponere, antequam monstaverimus, quantum sentimus honores et laudes quæ doctissimis et peritissimis viris, quorum opiniones hic examini a nobis submittebantur, debemus, summas esse, ideoque nos non latere quanta prudentia hujuscemodi virorum sententiæ a tironibus sint impugnandæ. Verum dedecebat quoque silentio præterire inaccuratiam methodi a viris clarissimis Instituti Medici Parisiensis propositæ, dein in Gallia ministerio propositæ omnibus pharmacopolis, et quam omni fiducia sequebantur.

DISSERTATIO II.

EXPERIMENTA CIRCA HYDRARGYRI DEUTO-CHLORURETUM.

Toxicologiæ operam novanti vir aliquis clarissimus mecum communicavit quasdam notas non minoris momenti, inter quas sequentem: « Quum calori subjicitur solutio deuto-chlorureti hydrargyri, ob» tinetur destillatum quo quidquam veneni ferunt contineri. » Id quum curiosum videretur, rem experimento confirmandam desideravi.

Ebullitioni subjeci solutionem granorum sex dydrargyri deuto-chlorureti in aquæ uncia; hydrogenio sulphureto nigrescebat, et itaque haud dubie hydrargyri chloruretum tenebat destillatum.

Tunc anne similes obtinerem effectus cum acido arsenicoso quæsivi. Ex solutione quatuor hujus acidi granorum pro duabus aquæ unciis, continente, obtinui destillatum satis notabilem veneni copiam continens. Etenim, additis aliquot acidi hydrochlorici guttis et dein acido hydrosulphurico et liquore calori subjecto, de tribus liquidi drachmis obtinui flocculos flavos tam abundantes, ut omnia arsenici surgerent indicia. Quantitas vaporati acidi si non omnino nulla saltem insensibilis erat, calori subjecta solutione arsenicitis kalici.

Ita igitur ne quid deuto-chlorureti hydrargyri vel acidi arsenicosi secum trahant aquæ vapores, ebullitioni haud subjicienda est horum venenorum solutio.

Cæterum explicatione haud egent ea facta, quippe a priori etiam suspicantur; nam sub temperie ebullitionis gradu longe inferiori

adhuc vapores spargunt corpora volatilia. Experimenta clar. Faraday enim monstrant, hydrargyrum, temperie 350° ad 400° fervens, etiam temperie 20° vapores, lamina aurea sensibiles factos, spargere. In laudatis experimentis, vaporationi hydrargyri deuto-chlorureti et acidi arsenicosi favet calor 100° et præsentia aquæ vaporum, venenosos vapores continue secum trahentium, atque ita præparantium novum spatium quo continue vapores formari queant. Sed experiri oportebat an chemicis reagentibus in destillato licuerit vaporatam veneni copiam invenire.

Quid autem fieret ebullitioni subjecta solutione hydrargyri deuto-chlorureti cum variis alimentis? Caloris actioni exposui solutionem sex hydrargyri deuto-chlorureti granorum in tribus aquæ unciis, variis admistam alimentis, tum vegetabilibus tum animalibus. Nec quidquam veneni in destillato detegere contigebat, sed tamen observavi in excipulo flocculos quosdam nigros, liquorem supernatantes, quod brevi mihi suspicionem dedit, hydrargyri pinguedini admisti: revera, tritis inter digitos flocculis, obtinui permultos hydrargyri globulos, in unum facile cogendos.

Attentione haud digna videtur hydrargyri vaporatio: sed quomodo facta est resolutio hydrargyri chlorureti? Inter tot principia organicæ indolis, qua substantiarum ope resolutum venenum?

Ut quæstioni satisfacerem varia institui experimenta circa actionem compositorum organicorum primi ordinis in hydrargyri deuto-chloruretum, quorum sequentia.

Experimentum I. Ebullitioni subjeci solutionem sex hydrargyri deuto-chlorureti granorum in tribus aquæ unciis cum uncia sacchari communis. Mox fundum matratii petiit pulvis flavus, aquæ vaporibus secum trahentibus flocculos nigros hydrargyri metallici. Sequentes erant pulveri flavo proprietates:

1°. Nigrescebat kali, ammonia et ammoniæ hydrosulphate.

2°. Quum in tubo vitreo utrimque aperto calcinabatur, etiam

mox nigrescebat pulvis, dum tubus obtegebatur sublimato albo : porrecto autem calore inclinatoque tubo ut in eo succederet aeris motus, semsim sensimque minuebat massa nigra. donec vix quidquam fusci levissimi et porosi remaneret.

Inde sequebatur pulverem flavum constare ex hydrargyri proto-chlorureto, ex parva materiæ vegetabilis copia et ex substantia minerali haud volatili. Posteriorum naturam, veluti rariorum, accuratius determinare non licuit, sed per se patet, ultimam alienis saccharo admistis deberi.

Colorem flavum acceperat ipsa solutio: alterationem sacchari examinare me non sinebat tam parva, quæ fuit, hydrargyri deuto-chlorureti copia. Itaque experimenta cum majori veneni copia iterum institui, tamen absque fausto eventu. Verum non impedit quominus varias hic institutas memorem disquisitiones.

Per viginti horas ebullitioni solutionem trium unciarum sacchari communis subjeci cum sex hydrargyri deuto-chlorureti unciis circiter. Omni bihorio erat differenda operatio, sive ut novam aquæ copiam adderem, sive nimis abundans præcipitatum arcerem (1).

Tandem, hydrogenio sulphureto præcipitavi redundantis hydrargyri deuto-chlorureti metallum, atque super arenæ balneo lente evaporavi nunc subfuscum liquorem; sicque obtinui massam solidam, fuscam, nondum acido hydrochlorico penitus orbatam.

---

(1) Quum hunc liquorem filtrarem, ut eum a proto-chlorureto sejungerem, inveni crystallos præcipitato admistas. Erant hæ crystalli albæ, translucidæ, earum pulvis autem erat flavus, calore vaporabantur absque ullo residuo, neque tamen liquebantur; kali addito nigrescebant. Formabantur ergo hydrargyri proto-chlorureto sincero. Notatu dignum videtur hoc factum, nam præbet unicum exemplum hujusce proto-chlorureti, utpote aqua plane insolubilis, via humida in crystallos coacti. Verum satis irregulares et parvæ erant: maximæ enim vix enim erant $0^{metr.}$, 005 longitudinis et 0^{m},0005 latitudinis.

Satis facile sese prodebat suspicio existentiæ acidi vegetabilis, in specie oxalici vel malici: neutrum tamen adfuisse existimo.

Nullum aderat acidum oxalicum; nam haud observavi præcipitatum, quum liquorem, ammonia et chlorureto calcii tractatum, per plures horas in lagena, apte clausa, leni calori exposuissem.

Nonnullis difficultatibus intricata videbatur disquisitio circa præsentiam acidi malici; nam hucusque nondum accurate novimus proprietates acidi malici, ex saccharo præparati. Scheele nunciavit, hoc acidum idem esse ac acidum malorum; dein illud idem ac acidum sorbi aucupariæ dixere. Mihi haud licuit examinare acidum malorum; sed, acidum sorbi aucupariæ ab acido ex saccharo, acidi nitrici ope præparato, omnino diversum esse, certus pronuntio.

Ebullitioni subjeci partes æquales sacchari, acidi nitrici et aquæ. Quum liquor fuscum acceperat colorem, ei addidi ammoniam ad saturationem usque, et dein chloruretum calcii, ut præcipitaretur oxalas calcicus. Liquori filtrato addidi alcool ad bis sui voluminis gradum: præceps ruebat malas calcicus. Istius malatis colorem abstuli carbonis ope; dein addidi acetatem plumbicum neutrum et malatem plumbicum obtinui. Aqua frigida plane insolubilis, aqua calida vix solubilis est hic malas; contra, malas plumbicus sorbo aucuparia præparatus, licet aqua frigida haud solvatur, utque tamen aqua bullienti, unde refrigerio in crystallos concrescit. Etiam solita aeris temperie aqua, acido acetico acidulata, solvit malatem plumbicum, saccharo præparatum, sed neutiquam aliud genus (1). Acidum malicum ex saccharo præparatum accuratius examinare difficillimum duxi, quemadmodum malatem calcicum in crystallos cogi nequiret,

(1) Vix differt hæc methodus acidum malicum saccharo præparandi a Scheelii methodo. Insuper, malatem plumbicum saccharo præparatum a malate sorbo aucuparia præparato, differre jam monstravit Vogel (Gilberts Annalen, LXI, 234). Haud dubie ex ejus experimentis nunciavit clar. Berzelius hosce malates proprietatibus differre (Lehrbuch der Chemie, I, 574).

sed id quoque ab argumento alienum cernebam; namque laudata experimenta monstrant satis quomodo obtinebitur acidum malicum ex solutione, in qua illud acidum suspicatus fueris. Revera, jam patet, malatem calcicum, saccharo præparatum, alcoole etiam debili haud solvi: atqui quum liquori fusco, supra laudato, ammoniam et chloruretum calcii, dein et alcool adderem, nullumque obtinerem præcipitatum, inde judicavi acidum malicum esse formatum.

Quidquid sit, certum est saccharum notabilem subiisse alterationem: etenim obtinui materiem fuscam satis copiosam, aqua et alcoole solubilem, cujusque solutio adhuc obscurior evadebat ammoniæ additione. Sed quæ qualisque erit hujusce materiei natura? An nihil aliud vegetabile obtinebitur? Has quæstiones nondum licet resolvere.

Cæterum, per se patet chlorum hydrargyri deuto-chlorureti in saccharum egisse, sed notatu haud indignum videtur hanc actionem omnino differre ab actione chlori liberi vel chloritis calcici, de qua sequentia refert clar. J. Liebig: Chloro vel chloritibus quam difficillime decomponuntur saccharum, gummi et amylum. Octo horas continue transmisi chlorum per solutionem horum corporum; vix pars vigesima decomponebatur, et nullum productum præter acidum carbonicum observavi. Neque temperie 100° chloro tum sicco tum humido vitiatur saccharum siccum, vel amylum vel gummi æque sicca; saccharum tantum accipiebat odorem ætheris hydrochlorici, absque tamen formæ mutatione, in chloro humido (Zucker, Gummi, Stärke, werden durch Chlor oder durch chlorigsaure Salze sehr schwer zersetzt. Jch habe durch Auflösungen dieser Körper 8 Stunden lang unausgesetzt Chlorgas geleitet, aber kaum $\frac{1}{20}$ war davon zersetzt; ich habe kein anderes Product als Kohlensäure dabei wahrgenommen. Trockner Zucker, Stärke oder Gummi werden in feuchtem oder trocknem Chlorgase selbst bei einer Temperatur von 100° nicht verändert; der Zucker allein nahm, ohne seine Form zu verändern, in feuchtem Chlorgas einen starken Geruch nach

3.

Salzäther an. — Poggendorffs Annalen, XV, 570). Haud loquitur clar. Liebig de coloris mutatione. Mihi quoque per plures horas chlorum per solutionem sacchari transmittere contigit, nullam tamen observavi coloris mutationem.

Antequam mittamus argumentum, sequentia nobis sunt notanda, quæ mihi docuerunt diversi generis experimenta:

1° Hydrargyrum metallicum obtineri actione sacchari in deuto-chloruretum, antequam omne venenum in proto-chloruretum sit conversum. Si interrumpatur destillatio, jam obtento nonnihilo hydrargyri metallici, adhuc reperitur in sacchari dissolutione haud despicienda deuto-chlorureti copia.

2° Nullum hydrargyrum metallicum in præcipitato flavo vel fusco dari, eamque tantum obtineri hydrargyri metallici copiam quæ vaporari potest.

3° Nihil proto-chorureti in destillato reperiri.

Unam eandemque esse horum omnium causam, valde suspicor. Multo difficilius vaporatur proto-chloruretum quam hydrargyrum metallicum vel deuto-chloruretum. Etenim, calori subjecta miscela partium æqualium proto-chlorureti et deuto-chlorureti hydrargyri, primum vaporatur deuto-chloruretum, eoque fere omni vaporato, remanet massa solida, flavescens, ex hydrargyri proto-chlorureto constans. Facile perficitur hoc experimentum nempe ope tubi vitrei in formam V incurvati, cujusque parti duo, alteri octo vel decem pollices longitudinis sunt. Introducitur miscela per brevioris partis aperturam, quæ dein ope obturamenti suberei clauditur. Miscela cogitur in incurvaturam tubi, quæ exponitur calori lampæ, tubo fere ad horizontem locato: primum fundit, vaporatur, super tubi parietes dein solidescit deuto-chloruretum, et vix flavescit proto-chloruretum quum jam vaporatum est deuto-chloruretum. Si, refrigerato tubo, jam calori exponitur longior pars, fundit et dein vaporatur, absque flavo residuo, deuto-chloruretum, quo obtegebatur.

Simili modo probatur hydrargyrum metallicum facilius vaporari quam proto–chloruretum: caute tamen agendo; nam difficilius vaporari videtur illud metallum quam deuto–chloruretum.

Hisce monitis, facilis surgit phænomenorum explicatio. Per se enim patet, deuto–chloruretum actione sacchari primum modo in proto-chloruretum immutari. Sed saccharum attrahit chlorum proto-chlorureti dum elevata temperies hydrargyrum vaporare conatur: ut ergo duplex sit ratio quæ ad proto–chlorureti concurrit resolutionem. Idem non fit de deuto-chlorureti decompositione; quippe vaporari nequit proto–chloruretum ab ejus decompositione oriturum. Facillime ergo intelligitur quam ob causam resolvitur proto–chloruretum, ante omnis deuto–chlorureti resolutionem. Per se autem jam patet quare nihil metallici præter vaporatum hydrargyrum obtinetur, denique nihil proto–chlorureti in destillato reperitur.

4° Haud obtinetur hydrargyrum metallicum, si multum detur deuto–chlorureti et parum sacchari: facile enim intelligitur, non dari sacchari, quasi deuto–chlorureto circumdati, actionem in proto-chloruretum.

Experimentum II. Per triginta ad quadraginta horas ebullitioni subjeci solutionem semiunciæ sacchari lactis et unciæ hydrargyri deuto-chlorureti. Incolor manebat liquidum; oriebatur tamen præcipitatum album, proto-chloruretum continens. Nihil acidi carbonici producti observare licuit.

Experimentum III. Per duas horas ebullitioni subjeci solutionem gummi cum hydrargyri deuto–chorureto: oriebatur quoque præcipitatum proto-chloruretum continens.

Experimentum IV. Si solutioni hydrargyri deuto-chlorureti addatur albumen obtinetur præcipitatum album, ex quo calcinatione etiam obtinui hydrargyrum metallicum, quod idem obtinuit Dr. E. Witting (Uebersicht der wichtigsten Erfahrungen im Felde der Toxicologie. Hannover, 1827. I. 66.).

Experimentum V. Si calidæ solutioni gelatinæ addatur solutio hydrargyri deuto-chlorureti, obtinetur præcipitatum album kali nigrescens.

Quæ varia experimenta monstrant hydrargyri deuto-chloruretum, adjuvante calore, satis cito resolvi variis substantiis organicis. Si iis nunc addideris experimenta Taddei et aliorum, de substantiarum organicarum actione, solita aeris temperie, admittendum videtur: primum hydrargyri deuto-chloruretum singulis resolvi substantiis organicis neutris; deinde, lentam esse actionem solita aeris temperie, celeriorem verotem perie 100° et instantaneam temperie 300° ad 400°.

Quæstio adhuc sese hic offert gravissimi momenti toxicologici, nempe: an timenda sit vaporatio chlorureti vel metalli, quum temperie 40°, v. g., evaporatur solutio deuto-chlorureti hydrargyri, variis admista alimentis?

Ope caldarii clar. Darcet institui experimentum eo modo ut in capsa locatum matratium, sex grana deuto-chlorureti cum aqua et variis alimentis continens, communicaret cum alio matratio, extra capsam locato: interni caldarii temperies erat 40°, aeris externi temperies vero 12° ad 20°. Lente ergo vaporabatur solutio, cujus vapores in externo matratio liquescebant. Post quadraginta horas reperiebantur quædam destillatæ guttæ, nec pulverem nigrum præbentes, nec cum hydrogenio sulphureto præcipitatum nigrum præbentes; ut nihil metalli vel chorureti vaporatum judicarem.

Sed transeamus ad alia experimenta. Quædam jam retuli de præcipitato albo in solutione sublimati corrosivi, adjecta albumina, formato. In eo composito præsentiam hydrargyri ope hydrogenii sulphureti inveniri nequire ferunt plerique, experimento sequenti nitentes: si solita aeris temperie kali ope solvatur hoc præcipitatum et addatur acidum hydrosulphuricum, non obtinetur præcipitatum. Accuratiæ laudem tribuo huic experimento, sed neutiquam consequentiæ. Si haud detur præcipitatum nigrum, id minime albuminis, sed kali præsentiæ tribuendum est; nam kali solvitur quodlibet

hydrargyri sulphuretum præcipitatione hydrargyri salis per acidum hydrosulphuricum præparatum. Deinde, si ammonia solvatur compositum albuminæ et chlorureti hydrargyri, jam sulphureti hydrargyri præcipitatum obtinebitur, addito acido hydrosulphurico.

Si kali ope solvatur compositum albuminosum et calori exponatur solutio, obtinetur præcipitatum nigrum, quod protoxydum dicebant nonnulli, inde eruentes, compositum constare ex albumina et hydrargyri proto-chlorureto. At medicus doctissimus, qui jam huic rei operam navaverat, in dubium vertit naturam hujusce præcipitati nigri; acidi hydrochlorici ope enim illud in proto-chloruretum mutare nequivit. Neque mihi successit hunc pulverem acido hydrochlorico in album mutare. Deinde calcinavi pulverem in tubo vitreo, atque statim observavi hydrargyri metallici guttas, licet oxygenium liberum in tubo monstrare nequirem : inde ergo jam sum suspicatus, eum pulverem nihil aliud esse ac hydrargyrum metallicum, infinite divisum. Ideoque majorem copiam paravi, atque, quum lavatum pulverem exsiccaverim, jam observavi puncta splendentia hydrargyro metallico tribuenda, atque fere omnem pulverem in globulos cogere licuit. Remansit tamen circiter pars vigesima pulveris, quam in globulos cogere haud contigit, sed, conscius quam arduum sit in globulos cogere hydrargyrum adeo divisum, admista tantum imponderabili materiæ alienæ copia, pulverem hydrargyrum metallicum omni fiducia pronuntio.

Jam eo sumus delati, ut nobis sit finis imponenda disquisitionibus nostris, quæ utinam suffragia ferrent eorum omnium, quibus vere jus est suffragii! Sed, si in arte nostra et scribendo suffragiorum non digni videamur doctorum, solatium nobis supererit venia quam nulli denegant doctiores, numquam quippe immemores Ovidiani:

« Etsi desint vires tamen est laudanda voluntas. »

THESES.

I.

Arsenicum non est metallum.

II.

Acidum fluoris est hydracidum.

III.

Gelatina non reperitur in corporibus organicis.

IV.

Theoriæ atomisticæ est tanta certitudo quanta plerisque chemiæ factis.

V.

Epidermis continuatur ante membranam corneam.

VI.

Ratiocinandi facultas est conditio existentiæ in homine.

DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA,

DE

MAXIMORUM, MINIMORUM

THEORIA EXEMPLIS ILLUSTRATA,

QUAM

EX RECTORIS MAGNIFICI P. J. DESTRIVEAUX,

ET SENATUS ACADEMICI AUCTORITATE,

PRÆVIO FACULTATIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM DECRETO,

PRO GRADU DOCTORIS,

SUMMISQUE IN MATHESI ET PHILOSOPHIA NATURALI HONORIBUS, AC PRIVILEGIIS,

IN UNIVERSITATE LEODIENSI,

RITÈ AC LEGITIMÈ CONSEQUENDIS,

PUBLICO EXAMINI SUBMITTIT,

Die Novembris 1823, horâ,

AUCTOR

ANTONIUS MEYER, LUCILIBURGUS.

LUCILIBURGI, APUD J. LAMORT, TYPOGRAPHUM.

MDCCCXXIII.

Le *Specimen* sera soumis à la censure de la Faculté, afin de s'assurer qu'il ne s'y trouve rien de contraire à la tranquillité publique et aux bonnes mœurs; chacun étant, du reste, libre de présenter au public les résultats de ses opérations, sans que, pour cela, ils puissent être considérés comme ceux de la Faculté ou de l'Université.

Art. 56 *du Réglement.*

AMICIS MEIS,

A. Meyer.

Tout change — excepté la Géométrie.

DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA,

DE

MAXIMORUM, MINIMORUM THEORIA

EXEMPLIS ILLUSTRATA.

Si sunt z, $z + h$, $z + 2h$, $z + 3h$, $z + 2h$, $z + h$, z, ordinatæ proxime positæ curvæ cujus æquatio $z_1 = fx$; est $z + 3h$ ordinata maxima. Sunt enim z, $z + h$, etc., ordinatam $z + 3h$ antecedentia et subsequentia, ordinatâ $z + 3h$ respective minora.

Si essent iterum z, $z - h$, $z - 2h$, $z - 3h$, $z - 2h$, $z - h$, z, ejusmodi ordinatæ, esset etiam $z - 3h$, ordinata minimi valoris, quia haberes similiter z, $z - h$, etc., ipso valore $z - 3h$ majora.

Habeas autem z, $z \pm h$, $z \pm 2h$, etc., ordinatas lineæ ad infinitum usque crescentes vel decrescentes, erit functio ejusmodi lineam representans, neque maximi neque minimi valoris; elucet enim ordinatam quamlibet subsequentem esse ordinata quâlibet antecedente sive majorem sive minorem.

Quod jam de ordinatis speciatim adjeci, pro quâlibet etiam functione valet, cum ex quâlibet functione linea hâc functione representata elici possit.

Facta igitur comparatione, diversos ejusdem functionis valores spectante, elucet utrum ejusmodi functio valore maximo, minimo gaudeat nec-ne.

Sequitur inde theoriam de maximis et minimis docere imprimis sequentia:

1) *Conditiones, quarum ope videre est, utrum functio maximo vel minimo valore gaudeat nec-ne.*

2) *Conditiones quibus elucet functionem gaudere:*

   a) *Valore maximo,*

   b) *Valore minimo.*

3) *Methodum sive regulas, quarum ope ex functione data, valores maximum, minimum elici possunt.*

Sub hoc igitur triplici respectu, functiones juxta propositum determinatæ examinentur, ut sic habeamus theoriæ de qua agitur notitiam.

Ut autem ejusmodi conditiones atque regulæ reperiantur, oportet ut definitiones maximum, minimum spectantes, capite ponamus. Continet definitio ejusmodi valoris notas.

Ex iis quæ initio posuimus facile colligas:

Valorem MAXIMUM *functionis esse valorem majorem quam cæteri valores, valorem maximum* IMMEDIATE *antecedentes et* IMMEDIATE *subsequentes;*

Valorem autem MINIMUM *functionis esse valorem, minorem quam valores omnes ejusdem functionis valorem minimum* IMMEDIATE *antecedentes et* IMMEDIATE (1) *subsequentes.*

Ex functione quidem qualibet erui possunt conditiones vi quarum maximum, minimum reperiantur, num sit ejusmodi functio algebraïca sive transcendens, sive integralis indefinita, num sit pluribus vel unâ variabilibus prædita; in hoc autem specimine, de maximo et minimo valore tantum ejusmodi functionum tractabitur, quæ sunt algebraïcæ vel transcendentes, quæ denique unâ tantum variabili et duabus variabilibus præditæ sunt; quod ex rationibus quibusdam ad me unice spectantibus sic ordinavi.

De maximo, minimo functionis una variabili præditæ.

Sit $y = fx$ ejusmodi functio. Ut sit fx maximum vel minimum, habeas oportet respective $fx > f(x \pm h)$, $fx < f(x \pm h)$; (h est quantitas indeterminate parva) quæ conditiones immediate eruuntur ex definitionibus respective maximum, minimum spectantibus.

Involvendo autem $y = fx$ juxta theorema tayloreanum habebis:

$$f(x \pm h) = y \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{etc.}$$

Habeas igitur pro casu maximi:

$$(y = fx) > y \pm y'h + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots(m).$$

Pro casu minimi:

$$(y = fx) < y \pm y'h + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots(n).$$

---

(1) In utraque definitione vocem *immediate* adjeci, quæ vox etiam in definitione completâ requiritur. Si enim haberes functionem cujus valores crescant, denique minuantur, atque iterum crescant (quæ alternatio fiat, si vis, repetitis vicibus), essent in ejusmodi functione plura maximà et minima. Si jam definissemus maximum v. g., valorem cæteris ejusdem omnibus functionis valoribus majorem, omissâ voce *immediate*, tunc ex ejusmodi valoribus maximis unum maximum, et quidem maximorum maximum tantum definissemus; esset itaque incompleta ejusmodi definitio, in quâ videlicet vox *immediate* omitteretur.

Cum autem sit h indeterminate parvum, satis etiam parvum supponi potest, ut terminus $y'h$ absolute sumptus (i. e. facta abstractione a signo) major sit quam summa terminorum omnium in eâdem serie terminum $y'h$ sequentium; si enim dividas per h quemvis terminum seriei, erit y' factore h orbatum, et igitur majus quam summa terminorum sequentium ipso h affectorum, quod vero h concipi potest pro voluntate parvum. Cum sit y' majus quam summa terminorum ipsum terminum y' sequentium, erit etiam $y'h$ majus quam summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc.; erit igitur summa terminorum terminum primum y sequentium, aut positiva aut negativa, prout terminus $y'h$ est positivus aut negativus.

Est autem in relationibus (m), (n) terminus $y'h$ simul $\left\{\begin{matrix}\text{positivus}\\ \text{negativus}\end{matrix}\right\}$, est igitur summa terminorum terminum primum y in iisdem relationibus sequentium, simul $\left\{\begin{matrix}\text{positiva}\\ \text{negativa}\end{matrix}\right\}$, ergo neque $y > y \pm y'h +$ etc., neque $y < y \pm y'h +$ etc., ergo y neque maximum neque minimum.

Si autem esset terminus $y'h = 0$, sive saltem $y' = 0$, (cum sit h indeterminatum nec igitur pro zero habendum) habebis series:

$$y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{etc., et inde conditiones.}$$

$$\text{Pro casu maximi} \ldots\ldots (y = fx) > y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{etc.} \ldots\ldots (m'),$$

$$\text{Pro casu minimi} \ldots\ldots (y = fx) < y + y''\frac{h^2}{2} \pm \text{etc.} \ldots\ldots (n'),$$

quæ conditiones possibiles sunt, si est in casu (m') secundus terminus negativus, et si in casu (n') terminus $y''\frac{h^2}{2}$ positivus est.

Inde sequuntur conditiones:

Ut sit $(y = fx)$ *maximum vel minimum, habeas* $y' = 0$;

Ut vero sit $(y = fx)$ *speciatim maximum, habeas* y'' *negativum;*

Nam ut sit $(y = fx) > y + y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc., oportet ut sit summa terminorum terminum y sequentium negativa. Cum autem sumi potest h satis parvum ut sit terminus $y''\frac{h^2}{2}$ major quam summa terminorum subsequentium, erit etiam summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc., positiva aut negativa prout est ipse terminus $y''\frac{h^2}{2}$. Ut ergo sit summa terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc. negativa, fiat saltem terminus $y''\frac{h^2}{2}$ negativus, sive saltem y'' negativum (est enim $\frac{h^2}{2}$ necessario positivum).

Ut denique sit ($y = fx$) *minimum, habeas* y'' *positivum*;

Habito enim respectu ad relationem (n'), sequitur summam terminorum $y''\frac{h^2}{2} \pm$ etc. esse positivam, ut sit $y < y +$ etc. Cum autem ex naturâ quantitatis h ejusmodi summa positiva sit, si est positivus ipse terminus $y''\frac{h^2}{2}$, et cum ejusmodi terminus positivus sit, si est y'' positivum, sequitur ut sit ($y = fx$) minimum, habeas y'' positivum.

Ut jam valor maximus vel minimus ex functione datâ $y = fx$ eliceatur, ad sequentem respiciatur regulam, quam facile ex præcedentibus colligas:

Summatur coefficiens differentialis y', *functionis datæ* ($y = fx$), *qui zero æqualis habeatur; si zero æqualis reperitur, concludatur inde functionem* ($y = fx$) *gaudere valore maximo vel minimo. Ponatur in relatione* ($y = fx$) *pro* x, *ejus valor* (*si vis* a) *ex relatione* $y' = 0$ *desumptus, habebis sic* $y = fa$ *maximum vel minimum; maximum si est* $y'' < 0$, *minimum si est* $y'' > 0$, *substituto in ipso* y'', *loco* x, *ejus valore ex relatione* $y' = 0$ *desumpto.*

EXEMPLUM I.

Reperire $\left\{ \begin{matrix} \textit{maximum} \\ \textit{minimum} \end{matrix} \right\}$ *functionis* $y = \sqrt{2px}$.

Summatur coefficiens differentialis $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$; fiat $y' = 0$, vel $\frac{p}{\sqrt{2px}} = 0$. Est autem hæc relatio impossibilis; continet itaque $y = \sqrt{2px}$ neque maximum, neque minimum.

EXEMPLUM II.

Reperire maximum vel minimum functionis $y = \sin x$.

Fiat $y' (= \cos x) = 0$; ergo functio data est vel maximi vel minimi valoris, est enim $\cos x = 0$, si fit $x = 90^\circ$. Ponatur $x = 90^\circ$ in functione $y = \sin x$, erit $y = \sin 90^\circ$, ergo $\sin 90^\circ = r$ (radio) maximum vel minimum. Sed cum sit $y'' = -\sin x$, sive cum sit y'' negativum, eruitur inde valorem r, sive $y = \sin 90^\circ$ esse maximum.

EXEMPLUM III.

In quadratum datum inscribere quadrum quod sit minimum.

Vocetur a latus quadrati dati; sit x pars ejusdem lateris, quæ pars continetur, inter punctum intersectionis lateris inscripti cum latere dato, et punctum intersectionis duorum laterum quadrati dati; erit $a - x$ altera pars

ejusdem lateris a. Fiat y latus quadrati inscripti, habebis pro quadrato inscripto: $y^2 = x^2 + (a - x)^2 =$ minimum.

Est autem $y' = \frac{2x - a}{\sqrt{(2x^2 - 2ax + a^2)}} = 0$, si fit $2x = a$, sive $x = \frac{1}{2}a$, sive $y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

EXEMPLUM IV.

Corpus impellitur in alterum, quod sua vice impellitur in tertium; quæritur quænam sit ratio trium corporum, ut motus tertii corporis fiat maximum.

Vocentur tria corpora respective 1, x, b; representetur motus primi corporis per 1, habebis proportionem:

$$1 + x : x = 1 : \frac{x}{1 + x}.$$

Est enim summa duorum corporum, quorum unum ex quiete pellitur per alterius impulsum, ad alterum corpus, sicuti motus primi corporis ad motum alterius.

Ex eodem principio sequitur proportio:

$$x + b : b = \frac{x}{1 + x} : \frac{bx}{(x + b)(1 + x)} = y.$$

$$\text{Est autem } y' = \frac{b - x^2}{x^2\left(1 + b + x + \frac{b}{x}\right)^2} = 0.$$

Habebis igitur $x^2 = b$ pro maximo quæsito.

Exempla modo data relatum habent ad functiones in quibus y'' fit aut positivum aut negativum, nec ultra extendi queunt. Si enim esset $y'' = 0$, vel $y'' = \infty$, essent etiam conditiones supra datæ pro his-ce casibus non satis latæ. Extenduntur jam in sequentibus ejusmodi conditiones et quidem ita ut uterque ex casibus modo adjectis in iis contineatur.

Casus in quo supponitur $y'' = 0$.

Si involvitur $y = fx$ juxta theorema notum, sive si fit

$$(y = fx) = y \pm y'h + y''\frac{h^2}{2} \pm y'''\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.},$$

erit etiam eadem functio, $y \pm y'''\frac{h^3}{2.3} + \text{etc.}$,

suppositis $y' = 0$, $y'' = 0$.

Ut jam sit ($y = fx$) maximum habeas juxta definitionem :

$$y > y \pm y''' \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \ldots (1),$$

Ut sit minimum, fiat

$$y < y \pm y''' \frac{h^3}{2.3} + \text{etc.} \ldots (2).$$

Ut autem habeas (1), (2), habeas etiam $y''' = 0$. Cum enim in utraque conditione terminus $y''' \frac{h^3}{2.3}$, ex natura ipsius h, major sit quam summa terminorum in eâdem serie subsequentium, est etiam summa terminorum $y''' \frac{h^3}{2.3} +$ etc. Sive positiva, sive negativa prout signum termini $y''' \frac{h^3}{2.3}$ sit plus vel minus. Supposito igitur termino $y''' \frac{h^3}{2.3}$, sive saltem y''' realiter existente, erit y neque majus simul, neque minus simul quam series $y \pm$ etc.; erit igitur ($y = fx$) neque maximi neque minimi valoris.

Ut ergo sit functio ($y = fx$) *maximum, vel minimum, suppositis* $y' = 0$, $y'' = 0$, *fiat etiam* $y''' = 0$.

Habito autem $y''' = 0$, unde :

$$y > y + y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm \text{etc.} \ldots (3),$$

$$y < y + y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm \text{etc.} \ldots (4),$$

sequitur, ut sit y majus quam $y +$ etc. pro utroque valore ipsius h (i. e. pro valore $+$ et pro valore $-$), esse $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ negativum, sive saltem $y^{IV} < 0$ (cum sit $\frac{h^4}{2.3.4}$ necessario positivum). Est enim ejusmodi terminus major quam subsequentium summa; est inde summa terminorum $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm$ etc. negativa si est ipse terminus $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$, sive saltem y^{IV}, negativus. Si autem ejusmodi summa est negativa, erit etiam y majus quam $y +$ etc., erit igitur y maximi valoris.

Ex relatione (4) sequitur etiam $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ esse positivum, si est $y < y +$ etc. Ut ergo locum habeat (4), habeas etiam $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4}$ positivum, (sive saltem $y^{IV} > 0$), cum inde sit summa terminorum $y^{IV} \frac{h^4}{2.3.4} \pm$ etc. positiva.

Ut ergo sit functio ($y = fx$) *maximum*, (*suppositis* $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 0$) *fiat etiam* $y^{IV} < 0$, *et ut eadem functio sit minimum, habeas* $y^{IV} > 0$.

EXEMPLUM.

Reperire maximum, vel minimum functionis

$$y = \frac{1}{4} a^2x^4 - \frac{2}{3} a^3x^3 + \frac{1}{2} a^4x^2 + b.$$

Est $y' = a^2x^3 - 2a^3x^2 + a^4x = (ax - a^2)(ax^2 - a^2x) = 0$, pro $x = a$. Cum sit $y'' = (ax - a^2)(2ax - a^2) + a(ax^2 - a^2x) = 0$, etiam pro $x = a$, sumas oportet

$$y''' = (ax - a^2)\,2a + (2ax - a^2)\,a + a(2ax - a^2).$$

Cum autem y''' nihilo æquari nequeat substituto pro x valore a, sequitur functionem $y = \frac{1}{4} a^2x^4 -$ etc., esse neque maximi neque minimi valoris.

Ex præcedentibus denuo facile colliges, quod si esset etiam $y^{IV} = 0$, haberes etiam necessum esset $y^{V} = 0$; esset enim sine hac conditione functio ($y = fx$) neque maximi, neque minimi valoris (quod facile ut antea ex duplici signo termini $y^{V} \frac{h^5}{2.3.4.5}$ demonstratur).

Si reperitur $y^{V} = 0$ (suppositis etiam $y' = 0$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, $y^{IV} = 0$) habeas etiam pro casu maximi $y^{VI} < 0$, et pro casu minimi $y^{VI} > 0$; quæ conditiones ex supra demonstratis, (ad casum ubi supponitur $y'' = 0$ relatum habentibus) facillime probes.

Ex omnibus huc-usque dictis igitur sequentia in universum proferri valent.

Terminus (seu coefficiens differentialis) paris ordinis si fit nihilo æqualis, evanescat etiam terminus subsequens imparis ordinis, ut inde colligas ($y = fx$) esse maximi vel minimi valoris : *minimi* nimirum valoris si positivus est terminus paris ordinis subsequens terminum imparis ordinis evanescentem; *maximi* valoris, si negativus est terminus modo determinatus.

Sint jam $2n$, $2n - 1$ respectivè indices ordinis paris cujuslibet, et imparis, ad coefficientes differentiales functionis $y = fx$ pertinentes sic breviter eadem dicas :

$$y = fx \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum} = y^{2n} < 0 \\ \text{minimum} = y^{2n} > 0 \end{array} \right\} y^{2n-1} = 0.$$

Casus in quo supponitur $y'' = \infty$.

Functio $y = fx$ quandoque ejus est naturæ, ut in serie tayloreana in quam est involuta, terminus adsit qui fit infinito æqualis pro valore determinato (si vis a) loco x in ejusmodi terminum misso. Quod fit si series taylo-

reana vitiosa reperitur, si videlicet in ejusmodi serie terminus adsit cujus h potentiâ gaudeat nec integrâ nec positivâ, sive (quod in universum valet) si unus ex coefficientibus differentialibus denominatore gaudeat evanescente, pro valore determinato loco x in ejusmodi denominatorem misso. Quod elucet ex functione $y = \sqrt{x-b}\,(x-a)$.

Est enim $y' = \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}} + \sqrt{(x-b)} = \infty$, faciendo $x = b$.

Demonstratur etiam (Fonct. analy. pag. 38, Ed. in-4°, prairial an V) coefficientem differentialem quemlibet ejusdem functionis esse infinito æqualem si reperitur unus ex coefficientibus differentialibus ejusdem functionis, inferioris ordinis, infinito æqualis.

Si itaque supponitur $y'' = \infty$, supponas etiam $y' = 0$, vel $y' = \infty$, vel $y' =$ (valori integro vel fracto, positivo aut negativo). Si est $y' = 0$, vel $y = \infty$, erit etiam functio maximi vel minimi valoris; est enim $y' = 0$ ejusmodi conditionis signum, ut suprà demonstravimus. Facile nunc probes etiam $y' = \infty$ esse ejusmodi conditionis signum, quia est ($y' = \infty$) signum puncti flexus contrarii (point de rebroussement); supposito autem $y' =$ (valori integro etc.) erit ipsa functio neque maximi neque minimi valoris.

Si est $y' = 0$, vel $y' = \infty$, supposito etiam $y'' = \infty$, videas insuper utrum functio sit maximum, utrum sit minimum; quod facile sequenti modo ex ejusmodi valorum conditione imprimis detegas.

Sit a valor ipsius x, qui pro x in ipso y' substitutus, reddit hunc coefficientem aut ipsi zero aut infinito æqualem. Ponatur ejusmodi valor a loco x in ipsa functione ($y = fx$), habebis $y = fa$. Transmutetur in eâdem functione ($y = fx$), x in $a \pm h$, habebis pro fx, functionem $f(a \pm h)$; involvatur hæc ultima functio juxta regulas (Francœur, tom. II, pag. 698, id. 2e.), habebis sic seriem tayloreanum integram, i. e. termino infinito æquali carentem; videas deniquè utrum sit pro casu maximi $fa > f(a \pm h)$, et pro casu minimi $fa < f(a \pm h)$.

EXEMPLUM:

Reperire $\left\{ \begin{matrix} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{matrix} \right\}$ *functionis* $y = b + c\sqrt[3]{(x-a)^2}$.

Est $y' = \frac{2c}{3(x-a)^{\frac{1}{3}}} = \infty$, pro $x = a$. Est ergo ejusmodi functio vel maximi vel minimi valoris. Ponatur jam valor a loco x in functione $y = b +$ etc., habebis $y = b$; est igitur b vel maximum vel minimum. Ponas

nunc in eandem functionem pro x, valorem $a \pm h$, erit $y = f(a \pm h) = b + ch^{\frac{2}{3}}$. Est autem $b < b + ch^{\frac{2}{3}}$, est igitur b valor minimus functionis datæ.

De maximo et minimo functionis duabus variabilibus præditæ.

Cum sit $z = f(x, y)$ ejusmodi functio, erunt etiam $z_1 = f(x + h, y + k)$ et $'z = f'(x - h, y - k)$ functiones, functionem z immediatè antecedentes et immediate subsequentes; quo fit ut sint $z > {}_1^{z_1}_{z}$, $z < {}_1^{z_1}_{z}$ respective conditiones maximi et minimi valoris ipsius z.

Sint jam $k = ah$, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \mathrm{P}$, $\frac{d^2z}{dy^2} = \mathrm{Q}$, $\frac{d^2z}{dxdy} = \mathrm{R}$, habebis :

$$z_1 = z + (p + \alpha q)\, h + (\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q})\, \frac{h^2}{2} + \text{etc.},$$

$$'z = z - (p + \alpha q)\, h + (\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q})\, \frac{h^2}{2} - \text{etc.}$$

Inde sequitur :

$(p + \alpha q) = 0$, sive $p = 0$, $q = 0$, ut sit z maximi vel minimi valoris.

Ex theoria autem de maximo, minimo functionem unâ variabili præditam spectante, sequitur pro valore maximo ipsius $z = f(x, y)$ (supponitur y constans), P *esse negativum* et pro valore minimo, P *esse positivum.*

Invenies pariter Q *esse negativum*, ut sit $z = f(x, y)$ (x supponitur constans) valor maximus, Q *esse positivum*, ut sit eadem functio minimi valoris capax.

Inde liquet

ut sit $z = f(x, y)$ (neque x neque y supponuntur constantia) maximi valoris habeas;

P *et* Q *ambo negativa*,

et ut sit eadem functio minimi valoris habeas :

P *et* Q *ambo positiva.*

Ut autem sint P et Q uterque positivum, uterque negativum, i. e. unà semper eodem signo prædita, sit factor $\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q}$ ejusdem signi, sive + sive —, est enim $\mathrm{P} + \alpha^2\mathrm{Q} > 2\alpha\mathrm{R}$ pro quolibet valore ipsius α.

Si jam essent radices ipsius $\mathrm{P} + 2\alpha\mathrm{R} + \alpha^2\mathrm{Q}$ imaginariæ, haberes :

$P + 2\alpha R + \alpha^2 Q = Q\,[(\alpha + p)^2 + k^2]$. Est autem factor $(\alpha + p)^2 + k^2$ necessario positivus; est igitur $Q\,[(\alpha + p)^2 + k^2]$ ejusdem signi ac Q, est inde $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ positivum vel negativum prout est Q positivum vel negativum.

Ut ergo $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ semper gaudeat eodem signo, sint radices ipsius $P + 2\alpha R + \alpha^2 Q$ imaginariæ, sive habeas relationem :

$$PQ - R^2 > 0$$

$$\text{est enim } \alpha = \frac{-R \pm \sqrt{(R^2 - PQ)}}{Q}.$$

Nunc adhuc breviter conditiones modo separatim demonstratas unà sic sequendi schemate ob oculos ponam :

Ut sit

$$z = f(x, y) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum} = \left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. < 0 \\ p = 0,\ q = 0 \\ \text{minimum} = \left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right. > 0 \end{array} \right\} PQ - R^2 > 0.$$

THESES.

1.

RADICES imaginariæ simili modo ac quantitates negativæ interpretari queunt.

2.

Non datur methodus ad solvendum æquationes hujus formæ $ax^{nx} = b$, quæ est æquatio mere indeterminata.

3.

Demonstrationes ex *absurdo* ductæ, quæ sunt in mathesi, in geometria videlicet maxime copiosæ cum demonstrationibus *directis* commutari queunt.

4.

Lineæ haud congruentes, sed ejusdem directionis parallelæ vocentur.

5.

Conditiones maximum, minimum duarum variabilium spectantes, ab Eulero (calcul. diff. part. II, cap. XI) datæ, haud sufficiunt.

6.

Problemata de maximis et minimis, variationum methodo soluta, resolvi queunt quin notatione utamur ejusmodi methodum spectante.

7.

Medullæ finis in plantis is præcipue esse videtur, ut ejus ope plantarum elasticitas augeatur.

8.

Principium « *omne vivum ex ovo* » non universaliter verum est.

9.

Animalia petrefacta, in nostris regionibus reperta, licet analogiam habeant proximam cum iis quæ zonas calidiores inhabitant, hic tamen olim vixisse verisimillimum puto.

10.

Ex caracteribus externis chimica corporis natura dignosei posse assero.

11.

Libræ romanæ mecanismum, ex ejus centro gravitatis positione diversa explices.

FINIS.

THESES.

1.

Radices imaginariae, facili modo, ac tranquillae, regula ex interpretatione quaesita.

2.

Non datur methodus ex solutione aequationis finitae $x^n = 1$, quae est aequatio mere indeterminata.

3.

Demonstrationes ex adverso ductae, quae sunt in analysi in geometria utilissimae maxime coniunctae cum demonstrationibus directis communiant quaesunt.

4.

Lineae binae conjugatae, sed eiusdem directionis tangentes coniungunt.

5.

Conditiones maximum, minimum dignum variabilium spectantes, ab Euler (calcul. diff. part. II. cap. XI.) datae, haud sufficiunt.

6.

Problemata de maximis et minimis, variabilium methodo solutae, resolvi queunt quin notatione utamur quamvis methodum spectante.

7.

Medulla fuis in plantis in principio esse videtur, ut eius ope plantarum elasticitas augeatur.

8.

Principium „omne rationi ex ovo" non universaliter verum est.

9.

Animalia petrefacta, in nostris regionibus reperta, licet analogiam habeant proximam cum iis quae zonas calidiores inhabitant, hic tamen olim vivisse verisimillimum puto.

10.

Ex caracteribus externis climatis corporis natura dignosci posse assero.

11.

Libre tonitans mercurium, ex eius centro gravitatis positione diversa explicas.

FINIS.

Index

1820 23 Jan. M. Martens de Combustione.

1823 feb. M. Gheesens de identitate fluidi electrici & magnetici.

1829 18 feb. D. Leclercq de ligni distillatione.

1829 Juin Joseph Plateau Sur quelques propriétés des impressions produites par la lumière &c.

id. Juil. B. Valerius de Serieibus.

id. Dec. J. B. Brassens de functionum algebraicarum integrarum resolubilitate in factores reales primi vel secundi gradus.

1830 Juil. E. Jacquemyns experimenta Chemica de quibusdam venenis metallicis.

1823. A. Meyer. De maximorum, minimorum theoriâ, exemplis illustrata.