

MÉMOIRE SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS EN CARRÉS ;

PAR EUGÈNE CATALAN.

AVANT-PROPOS

Le savant Prince Boncompagni m'a fait l'honneur de présenter, à l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, le petit Mémoire suivant, qui va paraître dans les *Atti* de cette illustre Compagnie, et qui complète la Note *Sur quelques décompositions en carrés*, publiée, il y a deux ans, dans le même Recueil.

Parmi les questions traitées dans mon nouveau travail, je crois pouvoir signaler, à l'attention des Géomètres, celles dont voici la rapide énumération.

Trouver un nombre N, égal à la somme de n carrés, et dont le carré soit une somme de 2n carrés ;

Toute puissance entière, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés ;

Interprétation géométrique du théorème précédent ;

*Décomposition, en deux carrés, de $(x^2 + y^2) (x^4 + y^4) (x^8 + y^8) \dots$
a, b étant des nombres entiers, la quantité*

$$\frac{1}{2a} [(a + \sqrt{a^2 + b^2})^{2n-1} + (-a + \sqrt{a^2 + b^2})^{2n-1}]$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés ;

x, y étant deux nombres entiers, premiers entre eux,

$$x^{4n} - x^{4n-4} y^4 + x^{4n-8} y^8 - \dots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés ;

Soit, conformément au théorème de Gauss,

$$1 \frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} = Y_1^2 - pZ_1^2.$$

Le polynome Y_1^2 est la somme de quatre carrés et la somme de cinq carrés ;

A partir de n = 3, chaque valeur entière de x, satisfaisant à l'équation

$$(a^2 + 1) x^2 = y^2 + 1,$$

est la somme de trois carrés ;

a, b étant des nombres entiers, la quantité

$$\left[\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2a} \right]^{2n} + \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2a} \right]^{2n}$$

est la somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux ;

La somme des puissances $4n$, de deux nombres entiers, inégaux, est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux ;

Chaque valeur entière de x , satisfaisant à l'équation

$$(a^2 + b^2) x^2 = y^2 + 1,$$

est la somme de quatre carrés ($a > 1, b > 1$) ;

Chaque valeur entière de y , satisfaisant à l'équation

$$(a^2 + 1) x^2 = y^2 - 1$$

est la somme de trois carrés ($y > 1$) ;

p étant un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$, décomposer

$$x^{2p-2} + x^{2p-4} + \dots + x^2 + 1$$

en deux facteurs du degré $p - 1$, de deux manières différentes ;

Trouver toutes les solutions entières de $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2$;

Trouver un carré qui soit, simultanément, la somme de deux carrés, la somme de trois carrés, la somme de n carrés ;

Soit s le nombre des puissances de 2 ayant $a + b$ pour somme. La fraction

$$\frac{1.2.3 \dots 2a \times 1.2.3 \dots 2b}{2^s.1.2.3 \dots a \times 1.2.3 \dots b \times 1.2.3 \dots a+b}$$

est réductible à un nombre impair ;

Soit s le nombre des puissances de 2 ayant n pour somme: 4^{2s-1} est la somme de 4^s carrés impairs.

Liège, 15 février 1884.

I.

QUELQUES IDENTITÉS.

1. n étant un nombre entier, on a

$$\left. \begin{aligned} (x^{4n+2} + y^{4n+2})^2 &= (x^{4n+2} - 2x^{4n}y^2 + 2x^{4n-2}y^4 - \dots + 2x^2y^{4n} - y^{4n+2})^2 \\ &\quad + 4(x^{4n+1}y - x^{4n-1}y^3 + \dots - x^3y^{4n-1} + xy^{4n+1})^2. \end{aligned} \right\} (A)$$

Multiplions, de part et d'autre, par $(x^2 + y^2)^2$.

1° Dans le second membre, le produit du premier polynôme entre parenthèses, par $x^2 + y^2$, est

$$\begin{aligned} (x^{4n+2} - y^{4n+2})(x^2 + y^2) - 2(x^{4n+2}y^2 - x^2y^{4n+2}) \\ = x^{4n+4} - x^{4n+2}y^2 + x^2y^{4n+2} - y^{4n+4} = (x^{4n+2} + y^{4n+2})(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

2° Le produit du second polynôme entre parenthèses, par $x^2 + y^2$, est

$$x^{4n+3}y + xy^{4n+3} = xy(x^{4n+2} + y^{4n+2}).$$

3° L'égalité à vérifier se réduit donc à

$$(x^{4n+2} + y^{4n+2})^2 (x^2 + y^2)^2 = (x^{4n+2} + y^{4n+2})^2 (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 (x^{4n+2} + y^{4n+2})^2;$$

ou, plus simplement, à la relation évidente :

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2.$$

2. Remarque. D'après (A), le carré de $x^{4n+2} + y^{4n+2}$, égal à

$$(x^{4n+2} - y^{4n+2})^2 + (2x^{2n+1}y^{2n+1})^2,$$

est décomposable, d'une seconde manière, en une somme de deux carrés.

3. Exemple. Soient $n = 3$, $x = 3$, $y = 1$. La décomposition rappelée, qui a servi tout-à-l'heure, est

$$(3^{12} + 1)^2 = (3^{12} - 1)^2 + (2 \cdot 3^7)^2,$$

ou

$$4\ 782\ 976^2 = 4\ 782\ 968^2 + 4\ 374^2.$$

Par l'identité (A) :

$$\begin{aligned}
 4\ 782\ 970^2 &= (3^{14} - 2 \cdot 3^{12} + 2 \cdot 3^{10} - 2 \cdot 3^8 + 2 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^2 - 1)^2 \\
 &\quad + 4 (3^{13} - 3^{11} + 3^9 - 3^7 + 3^5 - 3^3 + 3)^2 \\
 &= \left(4\ 782\ 968 - 18 \frac{3^{12} - 1}{10} \right)^2 + 36 \cdot \left(\frac{3^{14} + 1}{10} \right)^2 \\
 &= (4\ 782\ 968 - 956\ 592)^2 + 36 \cdot 478\ 297^2;
 \end{aligned}$$

ou enfin

$$4\ 782\ 970^2 = 3\ 826\ 376^2 + 2\ 869\ 782^2 \quad (*)$$

4. *Suite.* Si l'on égale les deux expressions de $(x^{2n+1} + y^{2n+1})^2$, et que l'on fasse, pour abréger :

$$A = x^{2n+1} - 2x^{2n}y + 2x^{2n-1}y^2 - \dots + 2x^2y^{2n} - y^{2n+1},$$

$$B = x^{2n+1}y - x^{2n-1}y^3 + \dots - x^3y^{2n-1} + xy^{2n+1},$$

on trouve

$$(A + x^{2n+1} - y^{2n+1})(A - x^{2n+1} + y^{2n+1}) = 4(x^{2n+1}y^{2n+1} + B)(x^{2n+1}y^{2n+1} - B),$$

ou

$$\begin{aligned}
 &[x^{2n+2} - 2^{2n}y^2 + \dots + x^2y^{2n} - y^{2n+2}] [-x^{2n}y^2 + x^{2n-2}y^4 - \dots + x^2y^{2n}] \\
 &= [x^{2n+1}y^{2n+1} + x^{2n+1}y - x^{2n-1}y^3 + \dots - x^3y^{2n-1} + xy^{2n+1}] \\
 &\quad \times [x^{2n+1}y^{2n+1} - x^{2n+1}y + x^{2n-1}y^3 - \dots - xy^{2n+1}].
 \end{aligned}$$

Maintenant, il faut distinguer deux cas.

1° Si n est *pair*, le terme du milieu, dans B , est $x^{2n+1}y^{2n+1}$. Donc le second membre de la dernière égalité devient

$$\begin{aligned}
 &[x^{2n+1}y - x^{2n-1}y^3 + \dots - x^{2n+1}y^{2n-1} + 2x^{2n+1}y^{2n+1} - x^{2n-1}y^{2n+3} + \dots + xy^{2n+1}] \\
 &\quad \times [-x^{2n+1}y + x^{2n-1}y^3 + \dots + x^{2n+3}y^{2n-1} + x^{2n-1}y^{2n+3} - \dots - xy^{2n+1}].
 \end{aligned}$$

2° Lorsque n est *impair*, le terme du milieu est $-x^{2n+1}y^{2n+1}$; et le produit considéré se change en

$$\begin{aligned}
 &[x^{2n+1}y - x^{2n-1}y^3 + \dots + x^{2n+3}y^{2n-1} + x^{2n-1}y^{2n+3} - \dots + xy^{2n+1}] \\
 &\quad \times [-x^{2n+1}y + x^{2n-1}y^3 - \dots - x^{2n+3}y^{2n-1} + 2x^{2n+1}y^{2n+1} - x^{2n-1}y^{2n+3} + \dots - xy^{2n+1}].
 \end{aligned}$$

(*) Pour vérifier ce résultat, il suffit de l'écrire ainsi :

$$3\ 826\ 376^2 = 7\ 652\ 752 \cdot 4\ 913\ 188,$$

et de supprimer le facteur 82. On trouve

$$478\ 297^2 = 478\ 297 \cdot 478\ 297.$$

Par suite, en supprimant un facteur commun, et changeant les signes, on a ces deux identités :

$$\left. \begin{aligned} & [x^{1n+1} - x^{1n} y^3 + \dots + x^3 y^{1n} - y^{1n+1}] [x^{1n-1} - x^{1n-2} y^3 + \dots - y^{1n-1}] = \\ & [x^{1n} - x^{1n-1} y^3 - \dots - x^{3n+1} y^{1n-1} + 2x^{2n} y^{1n} - x^{1n-1} y^{1n+1} + \dots + y^{1n}] \\ & \times [x^{1n} - x^{1n-1} y^3 + \dots - x^{3n+1} y^{1n-1} - x^{1n-1} y^{1n+1} + \dots + y^{1n}], (n \text{ pair}) \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

$$\left. \begin{aligned} & [x^{1n+1} - x^{1n} y^2 + \dots + x^3 y^{1n} - y^{1n+1}] [x^{1n-1} - x^{1n-2} y^3 + \dots - y^{1n-1}] = \\ & [x^{1n} - x^{1n-1} y^3 + \dots + x^{3n+1} y^{1n-1} + x^{2n-2} y^{1n+2} - \dots + y^{1n}] \\ & \times [x^{1n} - x^{1n-1} y^2 + \dots + x^{2n+2} y^{2n-2} - 2x^{2n} y^{2n} + x^{1n-1} y^{1n+2} - \dots + y^{1n}]. (n \text{ impair}) \end{aligned} \right\} \quad (C).$$

5. *Exemple.* Soient $n = 3$, $y = 1$. L'identité (C) se réduit à

$$\begin{aligned} & (x^{11} - x^{12} + x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) (x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) = \\ & (x^{12} - x^{10} + x^8 + x^4 - x^2 + 1) (x^{12} - x^{10} + x^8 - 2x^6 + x^4 - x^2 + 1); \end{aligned}$$

ou à

$$\begin{aligned} & (x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) (x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1) = \\ & (x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1) (x^6 - x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1); \end{aligned}$$

par le changement de x^2 en x . (*)

6. *Autres identités.* Rappelons, en passant, l'identité connue :

$$x^{1n} - x^{1n-1} y^2 + \dots - x^2 y^{1n-2} + y^{1n} =$$

$$[x^{2n} - x^{2n-1} y^2 + \dots \pm x^3 y^{2n-2} \mp y^{2n}]^2 + [x^{1n-1} y - x^{2n-1} y^3 + \dots \mp x^3 y^{2n-3} \pm x y^{2n-1}]^2 \}. \quad (D)$$

Si l'on y change y^3 en $-y^2$, et que l'on transpose le carré *négligé*, on obtient celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} & [x^{2n} + x^{2n-2} y^2 + \dots + x^3 y^{2n-2} + y^{2n}]^2 = (x^{2n})^2 + (x^{2n-1} y)^2 + \dots + (x y^{2n-1})^2 + (y^{2n})^2 \\ & + [x y (x^{2n-2} + x^{2n-4} y^2 + \dots + x^2 y^{2n-4} + y^{2n-2})]^2; \end{aligned} \right\} \quad (E)$$

laquelle donne une infinité de solutions de ce problème d'Arithmétique :

*Trouver un nombre N, égal à la somme de n carrés (**), et dont le carré soit une somme de 2n carrés.*

(*) Les résultats précédents sont applicables à l'équation *binôme*; mais je n'insiste pas sur ce point, trop différent du sujet principal

(**) n remplace n + 1.

Si, par exemple, $n = 3$, on peut prendre $N = 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85$.
En effet,

$$85^2 = (2^6)^2 + (2^4)^2 + (2^2)^2 + (1)^2 + (2^2)^2 + (2)^2 + 1^2 + [2(2^6 + 2^2 + 1)]^2,$$

ou

$$\begin{aligned} 7\,225 &= 64^2 + 32^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 + 42^2 \\ &= 4\,096 + 1\,024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 + 1\,764. \end{aligned}$$

7. REMARQUE. L'identité (D) peut être ainsi énoncée:

Si l'on considère les progressions

$$1 - x^2 + x^4 - \dots \pm x^{2n}, \quad x - x^3 + x^5 - \dots \mp x^{2n-1},$$

$$1 - x^2 + x^4 - \dots + x^{4n},$$

la troisième est égale au carré de la première, augmenté du carré de la deuxième (*).

8. Autres identités :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= x^2 y^4 + y^2 z^4 + z^2 x^4 + x^2 (x^2 + y^2)^2 + x^2 (y^2 + z^2)^2 + y^2 (y^2 + z^2)^2 \\ &\quad + y^2 (z^2 + x^2)^2 + z^2 (z^2 + x^2)^2 + z^2 (x^2 + y^2)^2, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= x^2 y^4 + y^2 z^4 + z^2 x^4 + x^2 (x^2 + y^2)^2 + x^2 (y^2 + z^2)^2 + y^2 (y^2 + z^2)^2 \\ &\quad + y^2 (z^2 + x^2)^2 + z^2 (z^2 + x^2)^2 + z^2 (x^2 + y^2)^2, \end{aligned}} \right\} \text{(F)}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^3 &= x^2 z^4 + y^2 x^4 + z^2 y^4 + x^2 (y^2 + z^2)^2 + x^2 (z^2 + x^2)^2 + y^2 (z^2 + x^2)^2 \\ &\quad + y^2 (x^2 + y^2)^2 + z^2 (x^2 + y^2)^2 + z^2 (y^2 + z^2)^2. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^3 &= x^2 z^4 + y^2 x^4 + z^2 y^4 + x^2 (y^2 + z^2)^2 + x^2 (z^2 + x^2)^2 + y^2 (z^2 + x^2)^2 \\ &\quad + y^2 (x^2 + y^2)^2 + z^2 (x^2 + y^2)^2 + z^2 (y^2 + z^2)^2. \end{aligned}} \right\} \text{(G)}$$

1°. Le second membre de (F), ordonné suivant les puissances de z , est

$$\begin{aligned} &x^2 y^4 + x^2 (x^2 + y^2)^2 + x^2 y^4 + y^6 + x^4 y^2 \\ &+ [x^4 + 2x^2 y^2 + 2y^4 + 2x^2 y^2 + x^4 + (x^2 + y^2)^2] z^2 \\ &\quad + [y^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 2x^2] z^4 + z^6 \\ &= (x^2 + y^2)^3 + 3(x^2 + y^2)^2 z^2 + 3(x^2 + y^2) z^4 + z^6 = (x^2 + y^2 + z^2)^3. \end{aligned}$$

2°. L'égalité (G) se déduit de (F), par un changement de lettres qui n'altère pas $x^2 + y^2 + z^2$; donc elle est démontrée aussi.

9. Remarque. D'après ces identités: 1° *Le cube de la somme de trois carrés*

(*) Le mot *somme*, qui devrait être énoncé trois fois, est sous-entendu.

est une somme de neuf carrés ; 2° généralement , la décomposition peut être effectuée de deux manières (*).

Exemple :

$$(1^2 + 2^2 + 3^2)^2 = 9^2 + 2^2 + 12^2 + 10^2 + 15^2 + 39^2 + 13^2 + 10^2 + 20^2 \\ = 4^2 + 18^2 + 3^2 + 30^2 + 20^2 + 5^2 + 15^2 + 26^2 + 13^2,$$

ou

$$2\ 744 = 81 + 4 + 144 + 100 + 225 + 1\ 521 + 169 + 100 + 400 \\ = 16 + 324 + 9 + 900 + 400 + 25 + 225 + 676 + 169.$$

II.

DÉCOMPOSITIONS DE $(x^2 + y^2 + z^2)^n$.

10. LEMME. Si un nombre est une somme de trois carrés, son carré est également une somme de trois carrés.

Cette proposition résulte, on le sait, de l'identité

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (2xz)^2 + (2yz)^2 + (x^2 + y^2 - z^2)^2 \quad (**).$$

11. THÉORÈME. Le cube d'une somme de trois carrés est une somme de trois carrés. (***)

Dans l'identité connue:

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = \\ (ab' - ba')^2 + (bc' + cb')^2 + (ca' + ac')^2 + (aa' + bb' - cc')^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

supposons :

$$a = x, b = y, c = z, a' = 2xz, b' = 2yz, c' = z^2 - x^2 - y^2.$$

En vertu de la relation (1), et à cause de $ab' - ba' = 0$, nous aurons

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = [y(3z^2 - x^2 - y^2)]^2 + [x(3z^2 - x^2 - y^2)]^2 + [z(z^2 - 3x^2 - 3y^2)]^2; \quad (H)$$

(*) Il est clair que, si les nombres donnés ne sont pas tous inégaux, les deux décompositions se réduisent à une. En particulier,

$$(1 + 1 + 1)^2 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1.$$

(**) *Nouvelles Annales*, 1874, p. 111; *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1876, p. 196; etc. Afin que le dernier carré ne soit pas nul, on peut supposer $x \geq y \geq z$.

(***) Ce théorème, que nous croyons nouveau, généralise plusieurs propriétés connues. Voir la *Note Sur quelques décompositions en carrés*.

et, par une permutation tournante :

$$(x^3 + y^3 + z^3)^3 = [z(3x^2 - y^3 - z^3)]^2 + [\gamma(3x^3 - y^3 - z^3)]^2 + [x(x^2 - 3y^3 - 3z^3)]^2, (H')$$

$$(x^3 + y^3 + z^3)^3 = [x(3y^2 - z^3 - x^3)]^2 + [z(3y^3 - z^3 - x^3)]^2 + [\gamma(y^3 - 3z^3 - 3x^3)]^2. (H'')$$

12. REMARQUE. Dans aucune des décompositions (H), (H'), (H''), les trois carrés ne peuvent se réduire à deux.

Considérons, par exemple, la décomposition (H), et supposons, successivement, $x^2 + y^2 = 3z^2$, $z^2 = 3(x^2 + y^2)$.

1° $x^2 + y^2 = 3z^2$. Les nombres x, y, z doivent être supposés premiers entre eux. De là résulte, d'après la dernière égalité, que x et y sont premiers avec 3. Ainsi :

$$x = \mathcal{M}. 3 \pm 1, y = \mathcal{M}. 3 \pm 1;$$

puis

$$x^2 + y^2 = \mathcal{M}. 3 \pm 2.$$

Donc l'hypothèse est inadmissible.

2° $z^2 = 3(x^2 + y^2)$. Cette égalité se réduit à $3z^2 = x^2 + y^2$: on retombe sur le premier cas.

12. LEMME. Si $(x^3 + y^3 + z^3)^n$ a la forme $X^2 + Y^2 + Z^2$, $(x^3 + y^3 + z^3)^{n+1}$ a cette même forme (*).

Soit

$$(x^3 + y^3 + z^3)^n = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2; \quad (3)$$

et, par conséquent (2),

$$(x^3 + y^3 + z^3)^{n+1} = (X_n y - Y_n x)^2 + (X_n z + Z_n x)^2 + (Y_n z + Z_n y)^2 + (Z_n z - X_n x - Y_n y)^2. (**)$$

Supposons, ce qui a lieu pour $n=2$ et pour $n=3$:

$$X_n y - Y_n x = 0. \quad (4)$$

Alors,

$$(x^3 + y^3 + z^3)^{n+1} = X_{n+1}^2 + Y_{n+1}^2 + Z_{n+1}^2;$$

avec les valeurs :

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x, Y_{n+1} = Y_n z + Z_n y, Z_{n+1} = Z_n z - X_n x - Y_n y. \quad (5)$$

(*) Généralisation d'une propriété démontrée dans la Note citée.

(**) On verra, tout-à-l'heure, pourquoi ce trinôme a été changé de signe.

D'après ces formules,

$$X_{n+1}y - Y_{n+1}x = z (X_n y - Y_n x) = 0.$$

Si donc l'hypothèse (4) est vérifiée pour une certaine valeur de n , elle subsiste pour la valeur suivante. Nous venons de rappeler qu'elle a lieu pour $n = 3$; donc elle est générale, et le Lemme est démontré. En conséquence:

13. THÉORÈME. *Toute puissance, entière et positive, d'une somme de trois carrés, est une somme de trois carrés.*

14. Application. Si l'on prend, comme valeurs initiales:

$$\begin{aligned} X_1 &= x, & Y_1 &= y, & Z_1 &= z, \\ X_2 &= 2xz, & Y_2 &= 2yz, & Z_2 &= z^2 - x^2 - y^2, \end{aligned}$$

on trouve, au moyen des formules (5):

$$\begin{aligned} X_3 &= (3z^2 - x^2 - y^2)x, & Y_3 &= (3z^2 - x^2 - y^2)y, & Z_3 &= (z^3 - 3x^2 - 3y^2)z; \\ X_4 &= 4(z^2 - x^2 - y^2)xz, & Y_4 &= 4(z^2 - x^2 - y^2)yz, & Z_4 &= z^4 - 6(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2; \\ X_5 &= [5z^4 - 10(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2]x, & Y_5 &= [5z^4 - 10(x^2 + y^2)z^2 + (x^2 + y^2)^2]y, \\ & & Z_5 &= [z^5 - 10(x^2 + y^2)z^3 + 5(x^2 + y^2)^2]z; \quad (*) \end{aligned}$$

etc.

En particulier :

$$(2^3 + 3^3 + 4^3)^3 = 29^3 = 16^3 + 24^3 + 3^3, \quad 29^3 = 70^3 + 105^3 + 92^3,$$

$$29^3 = 144^3 + 96^3 + 623^3, \quad 29^5 = 1\ 262^3 + 1\ 893^3 + 3\ 916^3;$$

ou

$$841 = 256 + 576 + 9, \quad 24\ 389 = 4\ 900 + 11\ 025 + 8\ 464,$$

$$707\ 281 = 20\ 736 + 9\ 216 + 677\ 329,$$

$$20\ 511\ 149 = 1\ 592\ 644 + 3\ 583\ 449 + 25\ 335\ 056.$$

15. *Séries récurrentes.* Reprenons les formules :

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x, \quad Z_{n+1} = Z_n z - X_n x - Y_n y, \quad X_n y - Y_n x = 0.$$

Il résulte, de deux dernières,

$$Z_{n+1} = Z_n z - \left(x + \frac{y^2}{x}\right) X_n, \quad Z_{n+2} = Z_{n+1} z - \left(x + \frac{y^2}{x}\right) X_{n+1};$$

(*) Quand on adopte, dans les formules (5), d'autres combinaisons de signes, on trouve des valeurs moins simples ou moins intéressantes que celles-ci. Par exemple :

$$X_3 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 x, \quad Y_3 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 y, \quad Z_3 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 z.$$

puis, de celles-ci et de la première,

$$Z_{n+1} z - Z_{n+2} = (Z_n z - Z_{n+1}) z + (x^3 + y^3) Z_n,$$

ou

$$Z_{n+2} = 2z Z_{n+1} - (x^3 + y^3 + z^3) Z_n. \quad (K)$$

Ainsi, les polynômes Z_n forment une suite récurrente.

Les quantités X_n, Y_n jouissent de la même propriété. On trouve aisément, au moyen de la relation

$$X_{n+1} = X_n z + Z_n x :$$

$$X_{n+3} = 3z X_{n+2} - (x^3 + y^3 + 3z^3) X_{n+1} + (x^3 + y^3 + z^3) z X_n; \quad (K')$$

et, par un changement de lettres,

$$Y_{n+3} = 3z Y_{n+2} - (x^3 + y^3 + 3z^3) Y_{n+1} + (x^3 + y^3 + z^3) z Y_n. \quad (K'')$$

16. *Vérifications.* On a vu que :

$$Z_2 = z^3 - u^2, \quad Z_3 = (z^3 - 3u^3) z, \quad Z_4 = z^4 - 6u^2 z^2 + u^4, \quad Z_5 = (z^4 - 10u^3 z^2 + 5u^4) z,$$

$$X_2 = 2xz, \quad X_3 = (3z^2 - u^3) x, \quad X_4 = 4(z^2 - u^3) xz, \quad X_5 = (5z^2 - 10u^3 z^2 + u^4) x;$$

u^2 représentant $x^3 + y^3$.

Or, identiquement:

$$1^\circ \quad z^4 - 10 u^3 z^2 + 5 u^4 = 3 [z^4 - 6 u^3 z^2 + u^4] - (z^2 + u^2) (z^2 - 3 u^2);$$

$$2^\circ \quad 5 z^4 - 10 u^3 z^2 + u^4 = 12 (z^2 - u^2) z^2 + (u^2 + 12 z^2) (u^2 - 3 z^2) z^2 + 2 (z^2 + u^2) z^4.$$

17. *Valeur de Z_n .* L'égalité (K) donne l'équation caractéristique :

$$\theta^2 - 2 z \theta + z^2 + u^3 = 0;$$

d'où

$$\theta = z \pm u \sqrt{-1}.$$

On a donc

$$Z_n = (\alpha + \beta \sqrt{-1}) (z + u \sqrt{-1})^n + (\alpha - \beta \sqrt{-1}) (z - u \sqrt{-1})^n;$$

α, β étant des constantes, à déterminer par les conditions:

$$Z_1 = z = (\alpha + \beta \sqrt{-1}) (z + u \sqrt{-1}) + (\alpha - \beta \sqrt{-1}) (z - u \sqrt{-1}),$$

$$Z_2 = z^2 - u^2 = (\alpha + \beta \sqrt{-1}) (z + u \sqrt{-1})^2 + (\alpha - \beta \sqrt{-1}) (z - u \sqrt{-1})^2.$$

On trouve

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0;$$

en sorte que la formule ci dessus devient

$$Z_n = \frac{1}{2} [(z + u \sqrt{-1})^n + (z - u \sqrt{-1})^n]. \quad (6)$$

18. Valeurs de X_n , Y_n . La relation

$$X_n y - Y_n x = 0$$

donne

$$\frac{X_n}{x} = \frac{Y_n}{y} = \frac{\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}}{u}. \quad (4)$$

D'un autre côté, de l'égalité

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n = X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2, \quad (5)$$

ou tire, eu égard à la valeur (6) :

$$\begin{aligned} X_n^2 + Y_n^2 &= (u^2 + z^2)^n - \frac{1}{4} [(z + u \sqrt{-1})^n + (z - u \sqrt{-1})^n]^2 \\ &= -\frac{1}{4} [(z + u \sqrt{-1})^n - (z - u \sqrt{-1})^n]^2; \end{aligned}$$

ou bien

$$\pm \sqrt{X_n^2 + Y_n^2} = \frac{1}{2} [(z + u \sqrt{-1})^n - (z - u \sqrt{-1})^n] \sqrt{-1}. \quad (7)$$

Les formules cherchées sont donc, si l'on adopte le signe *inférieur*: (*)

$$X_n = -\frac{x}{2u} [(z + u \sqrt{-1})^n - (z - u \sqrt{-1})^n] \sqrt{-1}, \quad (8)$$

$$Y_n = -\frac{y}{2u} [(z + u \sqrt{-1})^n - (z - u \sqrt{-1})^n] \sqrt{-1}. \quad (9)$$

19. Suite. Soient encore:

$$z = \rho \cos \omega, \quad u = \rho \sin \omega;$$

de manière que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous aurons

$$(z + u \sqrt{-1})^n = \rho^n (\cos n\omega + \sqrt{-1} \sin n\omega),$$

$$(z - u \sqrt{-1})^n = \rho^n (\cos n\omega - \sqrt{-1} \sin n\omega);$$

et, finalement :

(*) L'autre signe donnerait $X_1 = -x$, $Y_1 = -y$.

$$X_n = \frac{x}{u} \rho^n \sin n\omega, \quad Y_n = \frac{y}{u} \rho^n \sin n\omega, \quad Z_n = \rho^n \cos n\omega. \quad (L) (*)$$

20. *Remarques I.* La relation (K') devient, si l'on remplace $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+1}$ par leurs valeurs:

$$\sin(n+3)\omega = 3 \cos\omega \sin(n+2)\omega - (3\cos^2\omega + \sin^2\omega) \sin(n+1)\omega + \cos\omega \sin n\omega.$$

Pour vérifier cette relation, il suffit d'employer les formules de Simpson:

$$\sin(n+2)\omega = 2\cos\omega \sin(n+1)\omega - \sin n\omega,$$

$$\sin(n+3)\omega = 2\cos\omega \sin(n+2)\omega - \sin(n+1)\omega.$$

II. Par conséquent, aux valeurs (K'), (K''), on peut substituer celles-ci:

$$X_{n+2} = 2zX_{n+1} - (x^2 + y^2 + z^2) X_n,$$

$$Y_{n+2} = 2zY_{n+1} - (x^2 + y^2 + z^2) Y_n,$$

de même forme que (K).

III. D'après les formules (L):

$$X_n X_{n-1} + Y_n Y_{n-1} + Z_n Z_{n-1} = \rho^{2n-1} [\sin n\omega \sin(n-1)\omega + \cos n\omega \cos(n-1)\omega],$$

ou

$$X_n X_{n-1} + Y_n Y_{n-1} + Z_n Z_{n-1} = \rho^{2n-1} \cos\omega. \quad (11)$$

21 *Interprétation géométrique.*

Pour rendre homogènes ces mêmes formules (L), je fais

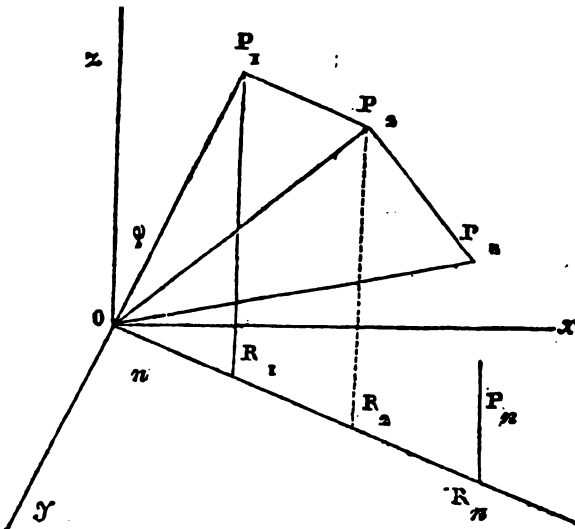
$$X_n = \rho^{n-1} x_n, \quad Y_n = \rho^{n-1} y_n, \quad Z_n = \rho^{n-1} z_n;$$

ou

$$x_n = \frac{x}{u} \rho \sin n\omega, \quad y_n = \frac{y}{u} \rho \sin n\omega, \quad z_n = \rho \cos n\omega. \quad (12)$$

x_n, y_n, z_n sont les coordonnées rectangulaires d'un point P_n ; $x=x_1, y=y_1, z=z_1$ sont celles du premier point, P_1 .

Considérons $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ comme les sommets d'un polygone.



(*) On pourrait supprimer les calculs précédents, et écrire, tout d'abord, ces remarquables formules. Il m'a semblé préférable de montrer la marche que mes idées ont suivie.

1. A cause de la relation

$$X_n y - Y_n x = 0,$$

ce polygone est contenu dans le plan $P_1 Oz$

2.° En vertu des formules (12), $OP_n = \rho$: tous les rayons $OP_1, OP_2, \dots, OP_n$ sont égaux.

3.° La relation (11), étant mise sous la forme

$$x_{n-1} x_n + y_{n-1} y_n + z_{n-1} z_n = \rho^2 \cos \omega,$$

fait voir que l'angle de deux rayons consécutifs est constant: il est égal à $P_1 Oz$.

En résumé, le polygone $P_1 P_2 \dots P_n \dots$ est une ligne brisée régulière, inscrite à une circonférence ayant l'origine pour centre.

22. Généralisation.

Supposons que le plan de la ligne brisée régulière fasse, avec le plan xy , un angle quelconque θ . Rapportons la ligne brisée aux axes rectangulaires OX, OY , situés dans son plan; OX étant, bien entendu, l'intersection de XOY avec xOy . Si le sommet — origine est situé sur OY , et que le rayon soit pris pour unité, les coordonnées d'un sommet quelconque M seront données par les deux systèmes de formules:

$$X_n = \sin n\omega, \quad Y_n = \cos n\omega; \quad (13)$$

$$x_n = X_n \cos \varphi + Y_n \sin \varphi \cos \theta, \quad y_n = X_n \sin \varphi - Y_n \cos \varphi \cos \theta, \quad z_n = Y_n \sin \theta. \quad (14)$$

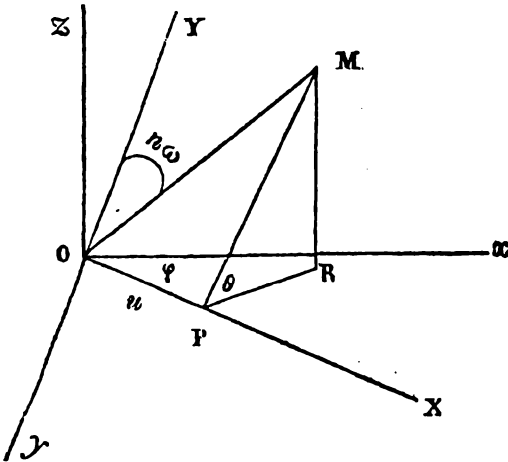
Il en résulte, en particulier:

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x = \sin \omega \cos \varphi + \cos \omega \sin \varphi \cos \theta, \quad y_1 = y = \sin \omega \sin \varphi - \cos \omega \cos \varphi \cos \theta, \\ z_1 = z = \cos \omega \sin \theta; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 = \sin 2\omega \cos \varphi + \cos 2\omega \sin \varphi \cos \theta, \quad y_2 = \sin 2\omega \sin \varphi - \cos 2\omega \cos \varphi \cos \theta, \\ z_2 = \cos 2\omega \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

On tire, des valeurs (15):

$$\sin \omega = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \cos \omega = \frac{z}{\sin \theta}.$$



Par conséquent:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= 2 \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left[x \cos \varphi + y \sin \varphi \right] z + \left[\frac{z^2}{\sin^2 \theta} - (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \right] \sin \varphi \cos \theta, \\ y_2 &= 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left[x \cos \varphi + y \sin \varphi \right] z - \left[\frac{z^2}{\sin^2 \theta} - (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \right] \cos \varphi \cos \theta, \\ z_2 &= \left[\frac{z^2}{\sin^2 \theta} - (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 \right] \sin \theta. \end{aligned} \right\} (17)$$

23. *Remarque.* Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, ces expressions deviennent, d'abord :

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \cos \varphi [x \cos \varphi + y \sin \varphi] z, & y_2 &= 2 \sin \varphi [x \cos \varphi + y \sin \varphi] z, \\ z_2 &= z^2 - (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2; \end{aligned}$$

puis, à cause de

$$\cos \varphi = \frac{x}{u}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{u} :$$

$$x_2 = 2zx, \quad y_2 = 2zy, \quad z_2 = z^2 - x^2 - y^2.$$

Ainsi, nous retrouvons les formules connues (14). (*)

24. *Suite.* Dans les relations (14), changeons n en $n-1$ et en $n+1$. Nous aurons, par exemple:

$$x_{n-1} = \sin (n-1) \omega \cos \varphi + \cos (n-1) \omega \sin \varphi \cos \theta,$$

$$x_n = \sin n \omega \cos \varphi + \cos n \omega \sin \varphi \cos \theta,$$

$$x_{n+1} = \sin (n+1) \omega \cos \varphi + \cos (n+1) \omega \sin \varphi \cos \theta;$$

puis, en vertu des formules de Simpson,

$$x_{n+1} = 2x_n \cos \omega - x_{n-1}. \quad (18)$$

(*) D'après ce résultat, joint aux formules (17), il ne paraît pas possible de former une décomposition de $(x^2 + y^2 + z^2)^2$, essentiellement différente de celle-ci :

$$(2xz)^2 + (2yz)^2 + (x^2 + y^2 - z^2)^2.$$

Donc les coordonnées des sommets du polygone forment trois séries récurrentes; etc. (*)

III.

DÉCOMPOSITION DE $(x^2 + y^2) (x^4 + y^4) (x^8 + y^8) \dots$

25. *Cas particulier.* Il est évident que

$$(x^2 + y^2) (x^4 + y^4) (x^8 + y^8) (x^{16} + y^{16}) = P^2 + Q^2, \quad (19)$$

P, Q étant des polynômes homogènes (**).

Cette égalité est une conséquence de celle-ci:

$$(x + y \sqrt{-1}) (x^2 + y^2 \sqrt{-1}) (x^4 + y^4 \sqrt{-1}) (x^8 + y^8 \sqrt{-1}) = P + Q \sqrt{-1}. \quad (20)$$

Soit $Ax^p y^q$ un terme quelconque de P. D'après une remarque faite par Euler (***), $A = \pm 1$. Soit ensuite

$$q = 2^{\beta} + 2^{\beta'} + 2^{\beta''} + \dots,$$

le nombre n , des termes du second membre, étant *pair*. On trouve que :

$$A = +1, \quad \text{si } n = 4\mu;$$

$$A = -1, \quad \text{si } n = 4\mu + 2. \quad (****)$$

Soit, semblablement, $Bx^{p'} y^{q'}$ un terme quelconque du polynôme Q. L'exposant q' doit être la somme d'un nombre *impair* de puissances de 2. n' étant ce nombre impair :

(*) L'inspection d'une figure prouve que

$$\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = x_n \cos \omega.$$

Ainsi, pour établir la relation (18), on peut même se passer des formules de Simpson. Peut-être reviendrai-je sur ce sujet.

(**) Pour fixer les idées, et simplifier l'écriture, nous prenons seulement *quatre* facteurs binômes ; mais la méthode est générale

(***) *Introduction à l'Analyse*, tome I. p. 234.

(****) En effet:

$$(\sqrt{-1})^{4\mu} = +1, \quad (\sqrt{-1})^{4\mu+2} = -1.$$

$$B = +1, \text{ si } n' = 4\mu + 1,$$

$$B = -1, \text{ si } n' = 4\mu + 3. (*)$$

Cela posé, formons le tableau suivant, dans lequel i remplace $\sqrt{-1}$.

Décomposition	Terme correspondant
$15 = 1 + 2 + 4 + 8$	$+1$
$14 = 2 + 4 + 8$	$-i$
$13 = 1 + 4 + 8$	$-i$
$12 = 4 + 8$	-1
$11 = 1 + 2 + 8$	$-i$
$10 = 2 + 8$	-1
$9 = 1 + 8$	-1
$8 = 8$	$+i$
$7 = 1 + 2 + 4$	$-i$
$6 = 2 + 4$	-1
$5 = 1 + 4$	-1
$4 = 4$	$+i$
$3 = 1 + 2$	-1
$2 = 2$	$+i$
$1 = 1^0$	$+i$

(I)

Il en résulte :

$$P = x^{15} - x^{12}y^3 - x^{10}y^5 - x^9y^6 - x^6y^9 - x^5y^{10} - x^3y^{12} + y^{15},$$

$$Q = x^{14}y + x^{13}y^2 + x^{11}y^4 - x^8y^7 + x^7y^8 - x^4y^{11} - x^3y^{13} - xy^{14};$$

(*) $(\sqrt{-1})^{4\mu+1} = +\sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^{4\mu+3} = -\sqrt{-1}.$

puis

$$\left. \begin{aligned} & x^{30} + x^{28} y^2 + x^{26} y^4 + \dots + y^{30} = \\ & [x^{15} - x^{13} y^3 - x^{10} y^5 - x^9 y^6 - x^6 y^9 - x^5 y^{10} - x^3 y^{12} + y^{15}]^2 \\ & + [x^{14} y + x^{13} y^3 + x^{11} y^4 - x^8 y^7 + x^7 y^8 - x^4 y^{11} - x^3 y^{12} - x y^{14}]^2. \end{aligned} \right\} (21)$$

26. *Remarques I.* Le premier membre égale $\frac{x^{32}-y^{32}}{x^2-y^2}$. Donc, en particulier,

$$\frac{x^{32}-1}{x^4-1} = P^2 + Q^2,$$

pourvu que

$$P = 1 - x^3 - x^5 - x^6 - x^9 - x^{10} - x^{12} + x^{15},$$

$$Q = x + x^2 + x^4 - x^7 + x^8 - x^{11} - x^{13} - x^{14}.$$

II. Si l'on remplace x par un nombre entier, supérieur à 1, *chacun des nombres entiers*

$$\frac{x^4-1}{x^3-1}, \quad \frac{x^8-1}{x^2-1}, \quad \frac{x^{16}-1}{x^2-1}, \quad \frac{x^{32}-1}{x^2-1}, \dots$$

est la somme de deux carrés.

Par exemple,

$$\frac{2^{32}-1}{2^2-1} = 1\,431\,655\,765 = 27\,033^2 + 26\,474^2 = 730\,783\,089 + 700\,872\,676.$$

27. *Suite.* Soit encore le produit

$$\Pi = (x^2 + y^2) (x^4 + y^4) (x^8 + y^8) \dots (x^k + y^k),$$

composé de n facteurs (*). Il est clair (et connu) que *le nombre des décompositions de Π , en une somme de deux carrés, est 2^{n-1}* . Pour les obtenir, ou pourrait généraliser ainsi l'égalité (20):

(*) $k = 2^k$.

$$(x \pm i\gamma) (x^2 \pm i\gamma^2) (x^4 \pm i\gamma^4) \dots (x^{\frac{1}{2}} \pm i\gamma^{\frac{1}{2}}) = P + iQ. \quad (22)^{(*)}$$

Mais, à cause des nombreuses combinaisons de signes, il convient de modifier un peu le calcul précédent.

Soient, pour plus de simplicité dans la notation :

$$A = (1 + iz) (1 + iz^2) (1 + iz^4) (1 + iz^8) = P + iQ,$$

et le tableau (I), déjà considéré.

Soit maintenant le produit

$$B = (1 - iz) (1 + iz^2) (1 - iz^4) (1 + iz^8),$$

qui diffère, de A, par le changement de z en $-z$, et de z^4 en $-z^4$. Pour former le tableau correspondant à B, il suffit d'appliquer la règle suivante :

Si, dans le tableau (I), un terme de la première colonne renferme l'exposant 1 ou l'exposant 4, changez le signe correspondant. Si ce terme contient les deux exposants, conservez le signe.

On trouve ainsi, au lieu de la seconde colonne du tableau (I) :

$$+ 1, + i, - i, + 1, + i, - 1, + 1, + i, - i, + 1, - 1, - i, + 1, + i, - i;$$

puis

$$B = z^{15} + iz^{14} - iz^{13} + z^{12} + iz^{11} - z^{10} + z^9 + iz^8 - iz^7 + z^6 - z^5 - iz^4 + z^3 + iz^2 - iz + 1.$$

En conséquence :

$$P = 1 + z^3 - z^5 + z^6 + z^9 - z^{10} + z^{12} + z^{13},$$

$$Q = -z + z^2 - z^4 - z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14}.$$

Si, par exemple, $z = 2$:

$$P = 1 + 8 - 32 + 64 + 512 - 1024 + 4096 + 32768 = 36393,$$

$$Q = -2 + 4 - 16 - 128 + 256 + 2048 - 8192 + 16384 = 10354;$$

(*) Le premier membre a 2^n valeurs, ou plutôt 2^{n-1} couples de valeurs, conjuguées deux à deux. Chacun de ces couples produit une seule valeur de Q^2 . La proposition que nous venons de rappeler est donc vérifiée.

puis (26, II)

$$36\ 393^2 + 10\ 354^2 = 1\ 431\ 655\ 765. (*)$$

28. *Généralisation.* En répétant le raisonnement dont nous venons de faire usage, on forme le tableau suivant (**), qui représente les seize produits :

$$(1 \pm iz) (1 \pm iz^2) (1 + iz^4) (1 \pm iz^8)$$

	1	2	4	8	1+2	1+4	1+8	2+4	2+8	4+8	1+2+4	1+2+8	1+4+8	2+4+8	1+2+4+8
15=1+2+4+8	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
14=2+4+8	-i	-i	+i	+i	+i	+i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	+i	+i
13=1+4+8	-i	+i	-i	+i	+i	-i	-i	+i	+i	-i	-i	-i	+i	-i	+i
12=1+8	-1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1
11=1+2+8	-i	+i	-i	-i	+i	-i	+i	-i	-i	-i	-i	+i	-i	-i	+i
10=2+8	-1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
9=1+8	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
8=8	+i	+i	+i	+i	-i	+i	-i	+i	-i	-i	+i	-i	-i	-i	-i
7=1+2+4	-i	+i	+i	-i	-i	-i	-i	-i	+i	+i	+i	-i	-i	-i	+i
6=2+4	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1
5=1+4	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1
4=4	+i	+i	-i	-i	+i	-i	-i	-i	-i	-i	-i	+i	-i	-i	-i
3=1+2	-1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1
2=2	+i	-i	-i	+i	+i	-i	+i	-i	-i	-i	-i	-i	+i	-i	-i
1=1	+i	-i	+i	+i	+i	-i	-i	-i	+i	-i	+i	-i	-i	+i	-i

(*) Pour vérifier cette décomposition, au moyen de la première, il suffit de voir si

$$36\ 393^2 - 27\ 033^2 = 26\ 474^2 - 10\ 354^2,$$

ou si

$$63\ 426.\ 9\ 360 = 36\ 828.\ 16\ 120.$$

Or, en supprimant quelques facteurs communs, on reconnaît que ces produits sont égaux.

(**) Voici la règle mnémonique: *permanence de signe ou changement de signe, selon que le nombre des puissances de 2 est pair ou impair.*

Il en résulte les *seize* systèmes :

$$P_1 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 - z^9 - z^{10} - z^{13} + z^{15},$$

$$Q_1 = z + z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} - z^{13} - z^{14};$$

$$P_2 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 + z^9 - z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_2 = -z + z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} + z^{13} - z^{14};$$

$$P_3 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 - z^9 + z^{10} - z^{12} - z^{15},$$

$$Q_3 = z - z^2 + z^4 + z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_4 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 - z^9 - z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_4 = z + z^2 - z^4 + z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_5 = 1 - z^3 - z^5 - z^6 + z^9 + z^{10} + z^{12} - z^{15},$$

$$Q_5 = z + z^2 + z^4 - z^7 - z^8 + z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_6 = 1 - z^3 + z^5 + z^6 + z^9 + z^{10} - z^{12} + z^{15},$$

$$Q_6 = -z - z^2 + z^4 - z^7 + z^8 - z^{11} + z^{13} + z^{14};$$

$$P_7 = 1 + z^3 - z^5 + z^6 + z^9 - z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_7 = -z + z^2 - z^4 - z^7 + z^8 + z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_8 = 1 + z^3 + z^5 - z^6 - z^9 + z^{10} + z^{12} + z^{15},$$

$$Q_8 = -z + z^2 + z^4 + z^7 - z^8 - z^{11} - z^{13} + z^{14};$$

$$P_9 = P_8, Q_9 = -Q_8; P_{10} = P_7, Q_{10} = -Q_7; P_{11} = P_6, Q_{11} = -Q_6;$$

$$P_{12} = P_5, Q_{12} = -Q_5; P_{13} = P_4, Q_{13} = -Q_4; P_{14} = P_3, Q_{14} = -Q_3;$$

$$P_{15} = P_2, Q_{15} = -Q_2; P_{16} = P_1, Q_{16} = -Q_1.$$

Si l'on prend $z = 2$, on trouve:

$P_1 = 27\ 033$, $Q_1 = 26\ 474$; $P_2 = -37\ 399$, $Q_2 = -5\ 742$; $P_3 = -36\ 311$, $Q_3 = 10\ 638$;

$P_4 = -30\ 119$, $Q_4 = 22\ 902$; $P_5 = -27\ 239$, $Q_5 = 26\ 262$; $P_6 = 30\ 297$, $Q_6 = 22\ 666$;

$P_7 = 36\ 393$, $Q_7 = 10\ 354$; $P_8 = 37\ 353$, $Q_8 = 6\ 034$.

Les décompositions de

$$\frac{2^{32} - 1}{2^2 - 1} = 1\ 431\ 655\ 745,$$

différentes entre elles, sont donc

$$27\ 033^2 + 26\ 474^2, \quad 37\ 399^2 + 5\ 742^2, \quad 36\ 311^2 + 10\ 638^2, \quad 30\ 119^2 + 22\ 902^2,$$

$$27\ 239^2 + 26\ 262^2, \quad 30\ 297^2 + 22\ 666^2, \quad 36\ 393^2 + 10\ 354^2, \quad 37\ 353^2 + 6\ 034^2.$$

IV.

Décompositions en deux et en trois carrés.

29. THÉORÈME. a , b étant des nombres entiers; soient

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La quantité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

dans laquelle n est un nombre entier, supérieur à 1, est la somme de deux carrés.

Cette proposition résulte de l'identité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2, \quad (24) (*)$$

dont la vérification est très facile.

20. Remarque. Si α , β sont des nombres entiers, pris arbitrairement, le premier membre peut n'être point la somme de deux carrés. Exemple:

(*) On doit prendre les signes supérieurs si n est impair.

$$\frac{3^3 + 1}{3 + 1} = 7.$$

31. THÉORÈME. *La quantité*

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta},$$

définie dans le théorème précédent, est la somme de trois carrés.

D'après l'identité (24) :

1° Si n est impair,

$$\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2.$$

Donc

$$\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right)^2 = (f^2 + g^2)^2 = (f^2 - g^2)^2 + (2fg)^2.$$

2° Si n est pair, et supérieur à 2,

$$\frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} = f^2 + g^2;$$

puis

$$\left[b \frac{\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2 = b^2 (f^2 - g^2)^2 + (2b fg)^2.$$

Dans les deux cas, le second membre de l'identité (24) est une *somme de trois carrés*.

32. *Application.* $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 2 + \sqrt{13}$, $\beta = -2 + \sqrt{13}$, $n = 3$. On trouve:

$$1^\circ \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} = 769 = \left[\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} \right]^2 = 35^2 + 12^2.$$

$$2^\circ \left[\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} \right]^2 = 7^2 + 24^2;$$

$$769 = 7^2 + 24^2 + 12^2.$$

33. *Remarques I.* Les deux théorèmes peuvent être résumés ainsi :
Soient α et $-\beta$ les racines de l'équation

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

dans laquelle a et b sont des nombre entiers. La quantité $\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta}$ est :

1.° la somme de deux carrés; 2.° la somme de trois carrés ($n > 1$).

II. La quantité $\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}$ est la différence entre les puissances $2n-1$ des racines de l'équation (25). En la désignant par Δ_{2n-1} , on sait que (*)

$$\Delta_{2n-1} = (4a^2 + 2b^2) \Delta_{2n-3} - b^4 \Delta_{2n-5}, \quad (26)$$

ou

$$\Delta_{2n-1} = (\alpha^2 + \beta^2) \Delta_{2n-3} - \alpha^2 \beta^2 \Delta_{2n-5}. \quad (27) \quad (**)$$

III. Si l'on fait

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} = Q_{2n-1},$$

on a (26) :

$$Q_{2n-1} = (4a^2 + 2b^2) Q_{2n-3} - b^4 Q_{2n-5}. \quad (27)$$

Or :

$$Q_1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta} = 1, \quad Q_3 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 4a^2 + b^2;$$

donc

$$Q_5 = (4a^2 + 2b^2)(4a^2 + b^2) - b^4 = 16a^4 + 12a^2b^2 + b^4 = (4a^2 + b^2)^2 + (2ab)^2 = (4a^2 - b^2)^2 + (4ab)^2 + (2ab)^2,$$

$$Q_7 = (4a^2 + 2b^2)(16a^4 + 12a^2b^2 + b^4) - b^4(4a^2 + b^2) = 64a^6 + 80a^4b^2 + 24a^2b^4 + b^6$$

$$= (8a^3 + 4ab^2)^2 + (4a^2b + b^3)^2 = (8a^3 + 4ab^2)^2 + (4a^2b - b^3)^2 + (4ab^2)^2,$$

etc.

IV. Si n est impair, l'égalité (24) peut être mise sous la forme :

$$\alpha^{2n-2} - \alpha^{2n-3} \beta + \alpha^{2n-4} \beta^2 - \dots + \beta^{2n-2} =$$

$$[\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \beta + \alpha^{n-3} \beta^2 - \dots + \beta^{n-1}]^2 + \alpha\beta [\alpha^{n-2} - \alpha^{n-3} \beta + \dots - \beta^{n-2}]^2. \quad (M)$$

(*) Par la théorie des fonctions symétriques.

(**) Pour vérifier cette relation, il suffit de l'écrire ainsi :

$$\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1} = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^{2n-3} + \beta^{2n-3}) - \alpha^2 \beta^2 (\alpha^{2n-5} + \beta^{2n-5}).$$

Et, si n est pair :

$$\alpha^{2n-2} - \alpha^{2n-3} \beta + \alpha^{2n-4} \beta^2 - \dots + \beta^{2n-2} =$$

$$[\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \beta + \alpha^{n-3} \beta^2 - \dots - \beta^{n-1}]^2 + \alpha \beta [\alpha^{n-2} - \alpha^{n-3} \beta + \dots + \beta^{n-2}]^2. (*) (M')$$

Par hypothèse, $\alpha\beta = b^2$. Conséquemment :

x, y étant deux nombres entiers, inégaux, dont le produit soit un carré; le nombre

$$x^{2n} - x^{2n-1} y + x^{2n-2} y^2 - \dots + y^{2n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés.

V. On peut supposer x, y premiers entre eux. Alors, chacun d'eux doit être un carré. Donc

x, y étant deux nombres entiers, premiers entre eux; le nombre

$$x^{4n} - x^{4n-1} y^2 + x^{4n-2} y^4 - \dots + y^{4n}$$

est la somme de deux carrés et la somme de trois carrés. ($n > 1$).

Exemple : $2^8 - 2^6 + 2^4 - 2^2 + 1 = 205 = 13^2 + 6^2 = 5^2 + 12^2 + 7^2.$

34. *Développements des carrés.* Dans l'identité

$$\frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^n \pm \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{n-1} \mp \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2, \quad (14)$$

posons $2n - 1 = 4\mu + 1$, ou

$$n = 2\mu + 1.$$

Puisque n est impair :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} &= \left[\frac{\alpha^{2\mu+1} + \beta^{2\mu+1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha + \beta} \right]^2, \\ \frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} &= \left[\frac{\alpha^{2\mu+1} \pm \beta^{2\mu+1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{2\mu} \mp \beta^{2\mu}}{\alpha + \beta} \right]^2. \quad (**) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Soient, comme précédemment :

(*) Les identités (M) (M') ne diffèrent pas de (D).

(**) Les signes supérieurs, si μ est pair.

$$\frac{\alpha^{\mu+1} \pm \beta^{\mu+1}}{\alpha + \beta} = f, \quad b \frac{\alpha^{\mu} \mp \beta^{\mu}}{\alpha + \beta} = g. \quad (39)$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$\left. \begin{aligned} f^2 &= \frac{\alpha^{2\mu+2} \pm 2\alpha^{\mu+1} \beta^{\mu+1} + \beta^{2\mu+2}}{(\alpha + \beta)^2} \\ &= \alpha^{2\mu} - 2\alpha^{2\mu-1} \beta + 3\alpha^{2\mu-2} \beta^2 - 4\alpha^{2\mu-3} \beta^3 + \dots \mp \mu\alpha^{\mu+1} \beta^{\mu-1} \\ &\pm (\mu + 1) \alpha^{\mu} \beta^{\mu} \mp \mu\alpha^{\mu-1} \beta^{\mu+1} \pm \dots + 3\alpha^3 \beta^{2\mu-2} - 2\alpha\beta^{2\mu-1} + \beta^{2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} g^2 &= \alpha\beta \frac{\alpha^{2\mu} \mp 2\alpha^{\mu}\beta^{\mu} + \beta^{2\mu}}{(\alpha + \beta)^2} \\ &= \alpha^{2\mu-1} \beta - 2\alpha^{2\mu-2} \beta^2 + 3\alpha^{2\mu-3} \beta^3 - 4\alpha^{2\mu-4} \beta^4 + \dots \pm (\mu-1) \alpha^{\mu+1} \beta^{\mu-1} \\ &\mp \mu\alpha^{\mu} \beta^{\mu} \pm (\mu-1) \alpha^{\mu-1} \beta^{\mu+1} \mp \dots + 3\alpha^3 \beta^{2\mu-3} - 3\alpha^3 \beta^{2\mu-2} + \alpha\beta^{2\mu-1}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} f^2 - g^2 &= \alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1} \beta + 5\alpha^{2\mu-2} \beta^2 - \dots \mp (2\mu-1) \alpha^{\mu+1} \beta^{\mu-1} \\ &\pm (2\mu+1) \alpha^{\mu} \beta^{\mu} \mp (2\mu-1) \alpha^{\mu-1} \beta^{\mu+1} \pm \dots + 5\alpha^3 \beta^{2\mu-3} - 3\alpha\beta^{2\mu-1} + \beta^{2\mu}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$2fg = 2b [\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2} \beta + 3\alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots - 3\alpha^2 \beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}], \quad (33)^{(*)}$$

$$\left[b \frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha + \beta} \right]^2 = \alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2} \beta + \alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2. \quad (34)$$

Rassemblant ces différents résultats, j'obtiens la double identité :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^{2\mu} - \alpha^{2\mu-1} \beta + \alpha^{2\mu-2} \beta^2 - \dots + \beta^{2\mu}]^2 \\ &+ \alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2} \beta + \alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots - \beta^{2\mu-1}]^2 \\ &= [\alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1} \beta + 5\alpha^{2\mu-2} \beta^2 - \dots \pm (2\mu+1) \alpha^{\mu} \beta^{\mu} \mp \dots + \beta^{2\mu}]^2 \\ &+ 4\alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2} \beta + 3\alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots - 3\alpha^2 \beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2 \\ &+ \alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2} \beta + \alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2. \quad (N) \end{aligned}$$

(*) Si μ est pair, les deux termes du milieu sont $-\mu\alpha^{\mu}\beta^{\mu-1}$, $+\mu\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu}$.
Si μ est impair, ces termes sont $+\mu\alpha^{\mu}\beta^{\mu-1}$, $-\mu\alpha^{\mu-1}\beta^{\mu}$.

35. *Applications I.* $\mu = 6$.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{25} + \beta^{25}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^{12} - \alpha^{11}\beta + \alpha^{10}\beta^2 - \alpha^9\beta^3 + \alpha^8\beta^4 - \dots + \alpha^2\beta^{10} - \alpha\beta^{11} + \beta^{12}]^2 \\ &\quad + 4\alpha\beta [\alpha^{11} - \alpha^{10}\beta + \alpha^9\beta^2 - \alpha^8\beta^3 - \dots - \alpha^2\beta^9 + \alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2 \\ &= [\alpha^{12} - 3\alpha^{11}\beta + 5\alpha^{10}\beta^2 - 7\alpha^9\beta^3 + 9\alpha^8\beta^4 - 11\alpha^7\beta^5 + 13\alpha^6\beta^6 - 11\alpha^5\beta^7 + \dots - 3\alpha\beta^{11} + \beta^{12}]^2 \\ &\quad + 4\alpha\beta [\alpha^{11} - 2\alpha^{10}\beta + 3\alpha^9\beta^2 - 4\alpha^8\beta^3 + 5\alpha^7\beta^4 - 6\alpha^6\beta^5 + 6\alpha^5\beta^6 - \dots + 2\alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2 \\ &\quad + \alpha\beta [\alpha^{11} - \alpha^{10}\beta + \alpha^9\beta^2 - \alpha^8\beta^3 + \alpha^7\beta^4 - \alpha^6\beta^5 + \alpha^5\beta^6 - \alpha^4\beta^7 + \alpha^3\beta^8 - \alpha^2\beta^9 + \alpha\beta^{10} - \beta^{11}]^2. \end{aligned}$$

II. $\mu = 5$.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{21} + \beta^{21}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^{10} - \alpha^9\beta + \alpha^8\beta^2 - \alpha^7\beta^3 + \alpha^6\beta^4 - \alpha^5\beta^5 + \alpha^4\beta^6 - \alpha^3\beta^7 + \alpha^2\beta^8 - \alpha\beta^9 + \beta^{10}]^2 \\ &\quad + \alpha\beta [\alpha^9 - \alpha^8\beta + \alpha^7\beta^2 - \alpha^6\beta^3 + \alpha^5\beta^4 - \alpha^4\beta^5 + \alpha^3\beta^6 - \alpha^2\beta^7 + \alpha\beta^8 - \beta^9]^2 \\ &= [\alpha^{10} - 3\alpha^9\beta + 5\alpha^8\beta^2 - 7\alpha^7\beta^3 + 9\alpha^6\beta^4 - 11\alpha^5\beta^5 + 9\alpha^4\beta^6 - 7\alpha^3\beta^7 + 5\alpha^2\beta^8 - 3\alpha\beta^9 + \beta^{10}]^2 \\ &\quad + 4\alpha\beta [\alpha^9 - 2\alpha^8\beta + 3\alpha^7\beta^2 - 4\alpha^6\beta^3 + 5\alpha^5\beta^4 - 5\alpha^4\beta^5 + 4\alpha^3\beta^6 - 3\alpha^2\beta^7 + 2\alpha\beta^8 - \beta^9]^2 \\ &\quad + \alpha\beta [\alpha^9 - \alpha^8\beta + \alpha^7\beta^2 - \alpha^6\beta^3 + \alpha^5\beta^4 - \alpha^4\beta^5 + \alpha^3\beta^6 - \alpha^2\beta^7 + \alpha\beta^8 - \beta^9]^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } \frac{2^{25} + 1}{2 + 1} &= [2^{12} - 2^{11} + 2^{10} - 2^9 + 2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1]^2 \\ &\quad + 2 [2^{11} - 2^{10} + 2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2 \\ &= [2^{12} - 3 \cdot 2^{11} + 5 \cdot 2^{10} - 7 \cdot 2^9 + 9 \cdot 2^8 - 11 \cdot 2^7 + 13 \cdot 2^6 - 11 \cdot 2^5 + 9 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1]^2 \\ &\quad + 8 [2^{11} - 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 - 4 \cdot 2^8 + 5 \cdot 2^7 - 6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1]^2 \\ &\quad + 2 [2^{11} - 2^{10} + 2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2; \end{aligned}$$

ou

$$11\ 184\ 811 = 2\ 731^2 + 2 \cdot 1365^2 = 967^2 + 8 \cdot 903^2 + 2 \cdot 1\ 365^2$$

$$= 7\ 458\ 361 + 3\ 726\ 450 = 935\ 089 + 6\ 523\ 272 + 3\ 726\ 450.$$

$$\begin{aligned}
 \text{IV. } \frac{2^{21} + 1}{2 + 1} &= [2^{10} - 2^9 + 2^8 - 2^7 + 2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1]^2 \\
 &+ 2 [2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 + 1]^2 \\
 &= [2^{10} - 3 \cdot 2^9 + 5 \cdot 2^8 - 7 \cdot 2^7 + 9 \cdot 2^6 - 11 \cdot 2^5 + 9 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1]^2 \\
 &+ 8 [2^9 - 2 \cdot 2^8 + 3 \cdot 2^7 - 4 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1]^2 \\
 &+ 2 [2^9 - 2^8 + 2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 + 1]^2,
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 699\,061 &= 683^2 + 2 \cdot 341^2 = 199^2 + 8 \cdot 231^2 + 2 \cdot 341^2 \\
 &= 466\,489 + 232\,562 = 39\,601 + 426\,888 + 232\,562.
 \end{aligned}$$

36. *Suite.* Soit maintenant $2n - 1 = 4\mu - 1$, ou $n = 2\mu$. Les formules sont

$$\frac{\alpha^{4\mu-1} + \beta^{4\mu-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^{2\mu} - \beta^{2\mu}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{2\mu-1} + \beta^{2\mu-1}}{\alpha + \beta} \right]^2, \quad (35)$$

$$\frac{\alpha^{2\mu-1} + \beta^{2\mu-1}}{\alpha + \beta} = \left[\frac{\alpha^\mu \mp \beta^\mu}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^{\mu-1} \pm \beta^{\mu-1}}{\alpha + \beta} \right]^2 (*). \quad (36)$$

Si nous posons

$$\frac{\alpha^\mu \mp \beta^\mu}{\alpha + \beta} = f, \quad b \frac{\alpha^{\mu-1} \pm \beta^{\mu-1}}{\alpha + \beta} = g, \quad (37)$$

ces valeurs ne diffèrent, des précédentes (29), que par le changement de μ en $\mu - 1$. En conséquence, et sans nouveaux calculs :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\alpha^{4\mu-1} + \beta^{4\mu-1}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2} \beta + \alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots - \beta^{2\mu-1}]^2 \\
 &+ \alpha \beta [\alpha^{2\mu-2} - \alpha^{2\mu-3} \beta + \alpha^{2\mu-4} \beta^2 - \dots + \beta^{2\mu-2}]^2 \\
 &= [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2} \beta + \alpha^{2\mu-3} \beta^2 - \dots + \alpha \beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2 \\
 &+ \alpha \beta [\alpha^{2\mu-2} - 3\alpha^{2\mu-3} \beta + 5\alpha^{2\mu-4} \beta^2 - \dots + 5\alpha^2 \beta^{2\mu-4} - 3\alpha \beta^{2\mu-3} + \beta^{2\mu-2}]^2 \\
 &+ 4\alpha^2 \beta^2 [\alpha^{2\mu-3} - 2\alpha^{2\mu-4} \beta + 3\alpha^{2\mu-5} \beta^2 - \dots - 3\alpha^3 \beta^{2\mu-5} + 2\alpha \beta^{2\mu-4} - \beta^{2\mu-3}]^2.
 \end{aligned} \right\} (N')$$

(*) Les signes supérieurs si μ est pair.

37. *Applications. I.* $\mu = 3$.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{11} + \beta^{11}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^5 - \alpha^4 \beta + \alpha^3 \beta^2 - \alpha^2 \beta^3 + \alpha \beta^4 - \beta^5]^2 \\ &\quad + \alpha \beta [\alpha^4 - \alpha^3 \beta + \alpha^2 \beta^2 - \alpha \beta^3 + \beta^4]^2 \\ &= [\alpha^5 - \alpha^4 \beta + \alpha^3 \beta^2 - \alpha^2 \beta^3 + \alpha \beta^4 - \beta^5]^2 \\ &\quad + \alpha \beta [\alpha^4 - 3\alpha^3 \beta + 5\alpha^2 \beta^2 - 3\alpha \beta^3 + \beta^4]^2 \\ &\quad + 4\alpha^2 \beta^3 [\alpha^3 - 2\alpha^2 \beta + 2\alpha \beta^2 - \beta^3]^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \frac{2^{11} + 1}{2 + 1} &= [2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2 + 2 [2^4 - 2^3 + 2^2 - 2 + 1]^2 \\ &= [2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2 - 1]^2 + 2 [2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1]^2 \\ &\quad + 16 [2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1]^2, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 683 &= 21^2 + 2 \cdot 11^2 = 21^2 + 2 \cdot 7^2 + 16 \cdot 3^2 \\ &= 441 + 242 = 441 + 98 + 144. \end{aligned}$$

38. *Autre décomposition.* En supposant toujours

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (23)$$

je dis que

$$\left(\frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta} \right)^2 = \left[\frac{(\alpha^n - \beta^n)b \pm 2ab^n}{2(a^2 + b^2)} \right]^2 + \left[\frac{(\alpha^n - \beta^n)a \mp 2b^{n+1}}{2(a^2 + b^2)} \right]^2. \quad (n \text{ impair}) \quad (*) \quad (38)$$

En effet, le second membre égale

$$\frac{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4b^{2n}}{4(a^2 + b^2)} = \frac{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4(\alpha\beta)^n}{4(a^2 + b^2)} = \frac{(\alpha^n + \beta^n)^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

Voyons quelles combinaisons de signes l'on doit adopter, si l'on veut que les deux parties du second membre se réduisent à des nombres entiers.

(*) Afin que le premier membre soit entier.

D'après les valeurs (23),

$$\alpha^n - \beta^n = 2 [a^n + C_{n,2} a^{n-2} (a^2 + b^2) + \dots] = 2a^n + 2 \mathcal{M}_2 (a^2 + b^2);$$

donc la première fraction devient

$$\frac{a^n b \pm ab^n + \mathcal{M}_2 (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = E + ab \frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2 + b^2},$$

E étant un nombre entier.

1.° Si $n = 4\mu + 1$,

$$\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2 + b^2} = \frac{a^{4\mu} \pm b^{4\mu}}{a^2 + b^2}.$$

La seconde valeur est entière; la première ne l'est pas. (*)

2.° Si $n = 4\mu - 1$,

$$\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2 + b^2} = \frac{a^{4\mu-2} \pm b^{4\mu-2}}{a^2 + b^2};$$

la première valeur est entière; la seconde ne l'est pas.

Les mêmes conclusions subsistent pour le dernier terme de l'égalité (38). Elle se décompose donc ainsi:

$$\left[\frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} \right]^2 = \left[\frac{(\alpha^{4\mu+1} - \beta^{4\mu+1})b - 2ab^n}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[\frac{(\alpha^{4\mu+1} - \beta^{4\mu+1})a + 2b^{n+1}}{a^2 + b^2} \right]^2, \quad (P)$$

$$\left[\frac{\alpha^{4\mu-1} + \beta^{4\mu-1}}{\alpha + \beta} \right]^2 = \left[\frac{(\alpha^{4\mu-1} - \beta^{4\mu-1})b + 2ab^n}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[\frac{(\alpha^{4\mu-1} - \beta^{4\mu-1})a - 2b^{n+1}}{a^2 + b^2} \right]^2. \quad (P')$$

39. Applications. I. $n = 5$. On trouve

$$\left(\frac{\alpha^5 + \beta^5}{\alpha + \beta} \right)^2 = (16a^2b + 4ab^3)^2 + (16a^4 + 4a^2b^2 + b^4)^2,$$

ou

$$(16a^4 + 12a^2b^2 + b^4)^2 = (16a^2b + 4ab^3)^2 + (16a^4 + 4a^2b^2 + b^4)^2.$$

(*) Pour éviter toute difficulté, nous supposons a et b premiers entre eux. Alors la fraction $\frac{ab}{a^2 + b^2}$ est irréductible, et la discussion porte sur $\frac{a^{n-1} \pm b^{n-1}}{a^2 + b^2}$.

II. $n = 3$. De même,

$$\left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta}\right)^2 = (4ab)^2 + (4a^2 - b^2)^2,$$

ou

$$(4a^2 + b^2) = (4ab)^2 + (4a^2 - b^2)^2.$$

40. *Remarque.* L'identité (38) donne des infinités de solutions de l'équation indéterminée

$$z^2 = x^2 + y^2;$$

savoir:

$$z = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha + \beta}, \quad x = \frac{(\alpha^n - \beta^n)b \pm 2ab^n}{2(\alpha^2 + b^2)}, \quad y = \frac{(\alpha^n - \beta^n)a \mp 2b^{n+1}}{2(\alpha^2 + b^2)}. \quad (39)$$

Si, par exemple, $n = 5$, on a ces formules particulières:

$$x = 16a^3b + 4ab^3, \quad y = 16a^4 + 4a^2b^2 + b^4, \quad z = 16a^5 + 12a^3b^2 + b^5, \quad (40)$$

dans lesquelles a et b sont encore *arbitraires*. On en conclut les systèmes suivants:

$$x = 20, \quad y = 21, \quad z = 29; \quad x = 136, \quad y = 273, \quad z = 305; \text{ etc.} \quad (40)$$

41. *THÉORÈME.* La quantité $\alpha^{2n} + \beta^{2n}$ est une somme quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.

En effet,

$$\begin{aligned} \alpha^{2n} + \beta^{2n} &= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{\alpha + \beta} + b^2 \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta} \\ &= \left[\frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + b^2 \left[\frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + b^2 \left[b \frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2, \end{aligned}$$

ou

$$\alpha^{2n} + \beta^{2n} = \left[\frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + 2 \left[b \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[b^2 \frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2. \quad (Q)$$

42. *Application.* Soient $a = b = 1$, $n = 6$:

$$(1 + \sqrt{2})^{12} + (-1 + \sqrt{2})^{12} = \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^7 + (-1 + \sqrt{2})^7}{2\sqrt{2}} \right]^2 + 2 \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^6 - (-1 + \sqrt{2})^6}{2\sqrt{2}} \right]^2 + \left[\frac{(1 + \sqrt{2})^5 + (-1 + \sqrt{2})^5}{2\sqrt{2}} \right]^2,$$

ou

$$2 \left[2^5 + 66 \cdot 2^5 + 495 \cdot 2^4 + 924 \cdot 2^3 + 495 \cdot 2^2 + 66 \cdot 2 + 1 \right]^2$$

$$= (2^5 + 21 \cdot 2^2 + 35 \cdot 2 + 7)^2 + 2 (6 \cdot 2^4 + 20 \cdot 2 + 6)^2 + (2^5 + 10 \cdot 2 + 5)^2,$$

ou

$$39\ 202 = 169^2 + 2 \cdot 70^2 + 29^2 = 28\ 561 + 9\ 800 + 841.$$

43. THÉORÈME. La somme des puissances $4n$, de deux nombres entiers, inégaux, (*) est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux.

Dans l'identité (Q), changeons α en x^2 , β en y^2 ; alors b égale xy . Elle devient

$$x^{4n} + y^{4n} = \left[\frac{x^{2n+2} \pm y^{2n+2}}{x^2 + y^2} \right]^2 + 2 \left[xy \frac{x^{2n} \mp y^{2n}}{x^2 + y^2} \right]^2 + \left[x^2 y^2 \frac{x^{2n-2} \pm y^{2n-2}}{x^2 + y^2} \right]^2; \quad (Q')$$

et le théorème est démontré.

44. Application. Soient $n=3$, $x=2$, $y=1$:

$$2^{12} + 1 = \left(\frac{2^{18} + 1}{2^2 + 1} \right)^2 + 2 \left(2 \frac{2^{16} - 1}{2^2 + 1} \right)^2 + \left(4 \frac{2^{14} + 1}{2^2 + 1} \right)^2$$

$$= \left(\frac{262\ 145}{5} \right)^2 + 2 \left(2 \frac{65\ 535}{5} \right)^2 + \left(4 \frac{16\ 385}{5} \right)^2$$

$$= 52\ 429^2 + 2 \cdot 26\ 214^2 + 13\ 103^2$$

$$= 2\ 748\ 900\ 041 + 2 \cdot 687\ 173\ 796 + 171\ 819\ 664,$$

ou

$$2^{12} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297;$$

résultat connu (**).

45. Remarques. I. Soit $N = x^{4n} + y^{4n}$, x étant pair, y impair. D'après l'égalité (Q),

$$N = f^2 + 2g^2 + h^2:$$

(*) Afin qu'aucun terme ne s'annule. Pour la même raison, n doit surpasser 1.

(**) LEGENDRE. *Théorie des Nombres*, tome I, p. 223.

f est impair, g et h sont pairs. En vertu d'un théorème connu (*), cette seconde forme appartient à tous les nombres impairs; mais, quand on adopte cet énoncé, on sous-entend que le trinôme peut se réduire à un binôme, et même à un monôme. Dans le cas actuel, f^2 , g^2 , h^2 sont positifs.

II. Si le nombre N est premier, il a donc les deux formes considérées.

Exemples : $237 = 2^5 + 1^8 = 13^2 + 2 \cdot 6^2 + 1^2$, $65\ 537 = 2^{16} + 1^{16} = 205^2 + 2 \cdot 102^2 + 52^2$,
 $72\ 097 = 4^5 + 3^8 = 193^2 + 2 \cdot 84^2 + 144^2$.

III. Très probablement, il existe une infinité de nombres premiers jouissant de cette double propriété. (**)

46. Nouvelles décompositions (***). Dans les égalités (N), changeons α en x^2 , β en y^2 , et posons :

$$\left. \begin{aligned} M &= x^{2\mu} - x^{2\mu-2} y^2 + x^{2\mu-4} y^4 - \dots + y^{2\mu}, \\ N &= xy [x^{2\mu-2} - x^{2\mu-4} y^2 + \dots - y^{2\mu-2}], \\ P &= x^{2\mu} - 3x^{2\mu-2} y^2 + 5x^{2\mu-4} y^4 - \dots \pm (2\mu + 1) x^{2\mu} y^{2\mu} = \dots + y^{2\mu}, \text{ (****)} \\ Q &= 2xy [x^{2\mu-2} - 2x^{2\mu-4} y^2 + 3x^{2\mu-6} y^4 - \dots - y^{2\mu-2}], \\ R &= xy [x^{2\mu-2} - x^{2\mu-4} y^2 + \dots - y^{2\mu-2}]. \end{aligned} \right\} (\alpha)$$

Ces égalités deviennent

$$\frac{x^{2\mu+2} + y^{2\mu+2}}{x^2 + y^2} = M^2 + N^2 = P^2 + Q^2 + R^2.$$

Donc, à cause de $R = N$:

$$M^2 = P^2 + Q^2,$$

ou

$$\left. \begin{aligned} &[x^{2\mu} - x^{2\mu-2} y^2 + x^{2\mu-4} y^4 - \dots + y^{2\mu}]^2 \\ &= [x^{2\mu} - 3x^{2\mu-2} y^2 + 5x^{2\mu-4} y^4 - \dots \pm (2\mu + 1) x^{2\mu} y^{2\mu} = \dots + y^{2\mu}]^2 \\ &+ 4x^2 y^2 [x^{2\mu-2} - 2x^{2\mu-4} y^2 + 3x^{2\mu-6} y^4 - \dots - y^{2\mu-2}]^2. \end{aligned} \right\} (\beta)$$

(*) *Théorie des Nombres*, tome I, p. 398.

(**) C'est là une simple induction: si le théorème est vrai, il est peut-être difficile à démontrer.

(***) Trouvées pendant l'impression du Mémoire.

(****) Les signes supérieurs, si μ est pair.

47. *Suite.* Evidemment, $M(x^2 + y^2) = x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2}$. D'un autre côté, soit par les formules (α), soit par le calcul direct, on trouve:

$$P(x^2 + y^2) = x^{4\mu+2} - 2x^{4\mu}y^2 + 2x^{4\mu-2}y^4 - \dots + 2x^4y^{4\mu-2} - 2x^2y^{4\mu} + y^{4\mu+2},$$

$$Q(x^2 + y^2) = 2xy[x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4}y^4 - \dots - x^4y^{4\mu-4} + x^2y^{4\mu-2} - y^{4\mu}]. \quad (***)$$

L'égalité précédente se transforme en

$$\left. \begin{aligned} & (x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2})^2 \\ &= [x^{4\mu+2} - 2x^{4\mu}y^2 + 2x^{4\mu-2}y^4 - \dots + 2x^4y^{4\mu-2} - 2x^2y^{4\mu} + y^{4\mu+2}]^2 \\ &+ 4x^2y^2[x^{4\mu} - x^{4\mu-2}y^2 + x^{4\mu-4}y^4 - \dots - x^4y^{4\mu-4} + x^2y^{4\mu-2} - y^{4\mu}]^2. \end{aligned} \right\} (\gamma)$$

Ainsi, le carré de $x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2}$, ou

$$[x^{2\mu+1} - y^{2\mu+1}]^2 + [2x^{2\mu+1}y^{2\mu+1}]^2,$$

est égal à la somme des carrés de deux polynômes, dont tous les coefficients sont entiers. Mais nous pouvons énoncer un résultat plus curieux.

48. *Décomposition remarquable.* En général,

$$\left. \begin{aligned} & x^{4\mu+2} + y^{4\mu+2} \\ &= [x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1}y^2 + 2x^{2\mu-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2\mu}]^2 \\ &+ [\gamma^{2\mu+1} - 2\gamma^{2\mu-1}x^2 + 2\gamma^{2\mu-3}x^4 - \dots \pm 2\gamma x^{2\mu}]^2. \end{aligned} \right\} (\gamma)$$

Pour vérifier cette relation, qui a la forme

$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2,$$

il suffit de l'écrire ainsi :

$$(A + A')(A - A') = (B' + B)(B' - B).$$

On a :

$$A + A' = 2x[x^{2\mu} - x^{2\mu-2}y^2 + x^{2\mu-4}y^4 - \dots \pm y^{2\mu}],$$

(***) Dans chacun de ces polynômes, il n'y a pas de terme du milieu. Pour le premier, la proposition est évidente.

$$A - A' = 2xy^2 [x^{2\mu-2} - x^{2\mu-4}y^2 + x^{2\mu-6}y^4 - \dots \pm y^{2\mu-2}],$$

$$B' + B = 2y [y^{2\mu} - y^{2\mu-2}x^2 + y^{2\mu-4}x^4 - \dots \pm x^{2\mu}],$$

$$B' - B = -2x^2y [y^{2\mu-2} - y^{2\mu-4}x^2 + y^{2\mu-6}x^4 - \dots \mp x^{2\mu-2}];$$

puis

$$\frac{A' + A}{2x} = \pm \frac{B' + B}{2y}, \quad \frac{A - A'}{2xy^2} = \pm \frac{B' - B}{2x^2y};$$

etc.

Remarques I. D'après les égalités (β) , (γ) , si l'on pose :

$$A = x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1}y^2 + 2x^{2\mu-3}y^4 - \dots \pm 2xy^{2\mu},$$

$$B = y^{2\mu+1} - 2y^{2\mu-1}x^2 + 2y^{2\mu-3}x^4 - \dots \pm 2yx^{2\mu},$$

$$C = x^{2\mu+2} - 2x^{2\mu}y^2 + 2x^{2\mu-2}y^4 - \dots + 2x^2y^{2\mu-2} - 2x^2y^{2\mu} + y^{2\mu+2},$$

$$D = 2xy [x^{2\mu} - x^{2\mu-2}y^2 + x^{2\mu-4}y^4 - \dots - x^2y^{2\mu-2} + x^2y^{2\mu-2} - y^{2\mu}],$$

on aura

$$(A^2 + B^2)^2 = C^2 + D^2.$$

II. *Le premier membre de l'équation binôme*

$$x^{2\mu+2} + 1 = 0,$$

est égal à la somme des carrés des polynômes

$$x^{2\mu+1} - 2x^{2\mu-1} + 2x^{2\mu-3} - \dots \pm 2x,$$

$$2x^{2\mu} - 2x^{2\mu-2} + 2x^{2\mu-4} - \dots \pm 1. (*)$$

50. *Applications.* I. Soient: $x = 2$, $y = 1$, $\mu = 3$. Il résulte, de ces données:

$$A = 2^7 - 2 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 = 76,$$

$$B = 2 \cdot 2^6 - 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 103,$$

$$C = 2^{14} - 2 \cdot 2^{12} + 2 \cdot 2^{10} - 2 \cdot 2^8 - 2 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 9\,625,$$

$$D = 4 [2^{12} - 2^{10} + 2^8 - 2^6 + 2^4 - 1] = 13\,260;$$

(*) On ne doit pas oublier que, dans chacun de ces polynômes, le terme du milieu manque.

puis

$$(76^2 + 103^2)^2 = 9\,625^2 + 13\,260,$$

ou

$$25\,335^2 = 9\,625^2 + 13\,260^2,$$

ou

$$2\,601 \cdot 676 = 1\,326^2,$$

$$289 \cdot 169 = 221^2,$$

etc.

II. Si l'on fait $\mu = 1, 2, 3, \dots$ on trouve :

$$x^6 + 1 = (x^3 - 2x)^2 + (2x^2 - 1)^2,$$

$$x^{10} + 1 = (x^5 - 2x^3 + 2x)^2 + (2x^4 - 2x^2 + 1)^2,$$

$$x^{14} + 1 = (x^7 - 2x^5 + 2x^3 - 2x)^2 + (2x^6 - 2x^4 + 2x^2 - 1)^2,$$

$$x^{18} + 1 = (x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3 + 2x)^2 + (2x^8 - 2x^6 + 2x^4 - 2x^2 + 1)^2,$$

.

51. *Relation avec un théorème de Gauss.* Reprenons l'identité

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{4\mu+1} + \beta^{4\mu+1}}{\alpha + \beta} &= [\alpha^{2\mu} - 3\alpha^{2\mu-1}\beta + 5\alpha^{2\mu-2}\beta^2 - \dots \pm (2\mu+1)\alpha^\mu\beta^\mu \mp \dots + \beta^{2\mu}]^2 \\ &+ 4\alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - 2\alpha^{2\mu-2}\beta + 3\alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \dots - 3\alpha^2\beta^{2\mu-3} + 2\alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2 \\ &+ \alpha\beta [\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu-2}\beta + \alpha^{2\mu-3}\beta^2 - \dots + \alpha\beta^{2\mu-2} - \beta^{2\mu-1}]^2. \end{aligned} \quad (N).$$

Posons $\alpha = z^2$, $\beta = 1$, $4\mu+1 = p$, p étant un nombre *premier*. Elle devient

$$\begin{aligned} \frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} &= [z^{p-1} - 3z^{p-3} + 5z^{p-5} - \dots - 3z^2 + 1]^2 + 4[z^{p-2} - 2z^{p-4} + 3z^{p-6} - \dots + 2z^3 - z]^2 \\ &+ [z^{p-2} - z^{p-4} + z^{p-6} - \dots - z^5 + z^3 - z]^2; \end{aligned}$$

ou, pour abrégé,

$$\frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} = A^2 + (2B)^2 + C^2. \quad (40)$$

Soit maintenant le beau théorème de Gauss, exprimé par la relation

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 - pZ^2. \quad (41)$$

Si nous remplaçons x par $-z^2$, nous avons

$$4 \frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} = Y_1^2 - pZ_1^2;$$

Y_1, Z_1 étant, bien entendu, ce que deviennent les polynômes Y, Z , par suite de cette substitution.

Le nombre premier p , ayant la forme $4\mu + 1$, est la somme de deux carrés: $p = a^2 + b^2$. Par suite, et à cause de la formule (40),

$$Y_1^2 = (2A)^2 + (4B)^2 + (2C)^2 + (aZ_1)^2 + (bZ_1)^2.$$

Autrement dit :

Si, dans le polynôme Y^2 , on remplace x par $-z^2$, et que Y_1^2 soit le résultat de la substitution; ce nouveau polynôme est : 1° la somme de quatre carrés; () 2° la somme de cinq carrés.*

52. Application. Soit $p = 13$. Alors:

$$A = z^{12} - 3z^{10} + 5z^8 - 7z^6 + 5z^4 - 3z^2 + 1,$$

$$B = z^{11} - 2z^9 + 3z^7 - 3z^5 + 2z^3 - z,$$

$$C = z^{11} - z^9 + z^7 - z^5 + z^3 - z,$$

$$Y_1 = 2z^{12} - z^{10} + 4z^8 + z^6 + 4z^4 - z^2 + 2,$$

$$Z = -z^{10} - z^6 - z^2, \quad (**)$$

$$a = 3, \quad b = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} (2z^{12} - z^{10} + 4z^8 + z^6 + 4z^4 - z^2 + 2)^2 &= (2z^{12} - 6z^{10} + 10z^8 - 14z^6 + 10z^4 - 6z^2 + 2)^2 \\ &+ (4z^{11} - 8z^9 + 12z^7 - 12z^5 + 8z^3 - 4z)^2 + (2z^{11} - 2z^9 + 2z^7 - 2z^5 + 2z^3 - 2z)^2 \\ &+ (3z^{10} + 3z^6 + 3z^2)^2 + (2z^{10} + 2z^6 + 2z^2)^2. \end{aligned}$$

(*) Parce que $\frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1}$ est la somme de deux carrés.

(**) On trouve, dans la *Théorie des Nombres*, de LEGENDRE :

$$Y = 2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2, \quad Z = x^5 + x^3 + x.$$

En particulier, si $z=2$:

$$8\ 318^2 = 3\ 850^2 + 5\ 304^2 + 3\ 276^2 + 3\ 276^2 + 2\ 184^2,$$

ou

$$69\ 189\ 124 = 14\ 822\ 500 + 28\ 192\ 416 + 10\ 732\ 176 + 10\ 732\ 176 + 4\ 769\ 856.$$

53. *Remarque.* Dans l'identité (40),

$$\begin{aligned} C &= z^{p-2} - z^{p-4} + z^{p-6} - \dots + z^3 - z = z(z^2 - 1) [z^{p-5} + z^{p-9} + \dots + z^4 + 1] \\ &= \frac{z(z^{p-1} - 1)}{z^2 + 1}. \end{aligned}$$

Si l'on transpose C^2 , on a donc

$$\begin{aligned} \frac{z^{2p} + 1}{z^2 + 1} - C^2 &= \frac{(z^{2p} + 1)(z^2 + 1) - z^2(z^{p-1} - 1)^2}{(z^2 + 1)^2} = \frac{z^{2p+2} + 2 \cdot z^{p+1} + 1}{(z^2 + 1)^2} = \left(\frac{z^{p+1} + 1}{z^2 + 1} \right)^2 \\ &= [z^{p-1} - z^{p-3} + z^{p-5} - \dots - z^2 + 1]^2. \quad (*) \end{aligned}$$

Remettant pour A et B leurs valeurs, on obtient cette *nouvelle identité*:

$$\left\{ \begin{aligned} &[z^{p-1} - z^{p-3} + z^{p-5} - \dots - z^2 + 1]^2 = \\ &[z^{p-1} - 3z^{p-3} + 5z^{p-5} - \dots - 3z^2 + 1]^2 + 4[z^{p-2} - 2z^{p-4} + 3z^{p-6} - \dots + 2z^3 - z]^2. \end{aligned} \right\} \quad (R)$$

Par le changement de z en $z\sqrt{-1}$, elle se transforme en

$$\left\{ \begin{aligned} &[z^{p-1} + z^{p-3} + z^{p-5} + \dots + z^2 + 1]^2 + 4[z^{p-1} + 2z^{p-4} + 3z^{p-6} + \dots + 2z^3 + z]^2 = \\ &[z^{p-1} + 3z^{p-3} + 5z^{p-5} + \dots + 3z^2 + 1]^2. \end{aligned} \right\} \quad (R')$$

54. *Applications.* I. Soient $p=9$, $z=1$: (**)

$$5^2 + 4 \cdot 6^2 = 13^2.$$

II. $p=9$, $z=2$. On trouve, par l'identité (R): $205^2 = 133^2 + 156^2$; et, par l'identité (R'): $541^2 = 341^2 + 420^2$.

55. *Remarque.* Les identités (R), (R') donnent, comme l'identité (38), des séries de solutions de l'équation $x^2 + y^2 = u^2$.

D'un autre côté, toutes les solutions de cette équation sont données par les formules:

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad u = \alpha^2 + \beta^2;$$

(*) On ne doit pas oublier que $p=4\mu+1$.

(**) Il n'est pas nécessaire, évidemment, que le nombre p soit premier.

α, β étant des entiers quelconques. Donc, z étant un nombre entier, pris arbitrairement, les équations

$$\alpha^2 - \beta^2 = z^{p-1} + z^{p-3} + \dots + z^3 + 1,$$

$$\alpha\beta = z^{p-2} + 2z^{p-4} + 3z^{p-6} + \dots + 2z^2 + z,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = z^{p-1} + 3z^{p-3} + 5z^{p-5} + \dots + 3z^3 + 1$$

doivent donner, pour α, β , des valeurs *entières*. En effet, on en déduit :

$$\alpha^2 = z^{p-1} + 2z^{p-3} + 3z^{p-5} + \dots + 3z^3 + 2z^2 + 1,$$

$$\beta^2 = z^{p-1} + 2z^{p-5} + 3z^{p-7} + \dots + 3z^6 + 2z^4 + z^2;$$

ou

$$\alpha^2 = \left[z^{\frac{p-1}{2}} + z^{\frac{p-5}{2}} + \dots + z^2 + 1 \right]^2, \quad \beta^2 = z^2 \left[z^{\frac{p-5}{2}} + z^{\frac{p-9}{2}} + \dots + z^2 + 1 \right]^2,$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= z \left[z^{\frac{p-1}{2}} + z^{\frac{p-5}{2}} + \dots + z^2 + 1 \right] \left[z^{\frac{p-5}{2}} + z^{\frac{p-9}{2}} + \dots + z^2 + 1 \right] \\ &= z \left[z^{p-3} + 2z^{p-5} + 3z^{p-7} + \dots + 3z^4 + 2z^2 + 1 \right]; \quad (*) \end{aligned}$$

identité connue. (**)

V.

SUR L'ÉQUATION $(a^2 + 1)x^2 = y^2 + 1$.

56. *Valeurs de x .* a étant un nombre entier, égal ou supérieur à 1 ; la solution la plus simple, en nombres entiers, est

$$x_1 = 1, \quad y_1 = a.$$

Donc, par une formule connue,

(*) En valeur absolue.

(**) Généralement,

$$(x^m + x^{m-1} + \dots + x + 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1) = x^{m^2-1} + 2x^{m^2-2} + 3x^{m^2-3} + \dots + 3x^2 + 2x + 1.$$

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}]; \quad (42)$$

ou, avec les notations employées ci-dessus (29),

$$x_n = \frac{\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1}}{\alpha + \beta}. \quad (43)$$

La loi de *réurrence*, applicable à partir de $n = 3$, est

$$x_n = 2(2a^2 + 1) x_{n-1} - x_{n-2}. \quad (44)$$

D'ailleurs

$$x_2 = 4a^2 + 1.$$

57. THÉORÈME. *A partir de $n = 3$, chaque valeur de x_n , égale à la somme de deux carrés (*), est égale, aussi, à la somme de trois carrés.*

La démonstration a été donnée dans le Chapitre IV (29).

58. *Suite.* Pour compléter ce sujet, indiquons les valeurs des carrés qui composent x_n . En premier lieu, si l'on fait

$$G_n = \frac{\alpha^n - (-\beta)^n}{\alpha + \beta}, \quad (45)$$

on a

$$G_n^2 + G_{n-1}^2 = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} - 2(-\alpha\beta)^n - 2(-\alpha\beta)^{n-1}}{(\alpha + \beta)^2}.$$

A cause de $\alpha\beta = 1$, le numérateur se réduit à

$$\begin{aligned} \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-2} + \beta^{2n-2} &= \alpha^{2n} + \beta^{2n} + \alpha^{2n-1} \beta + \alpha \beta^{2n-1} \\ &= (\alpha^{2n-1} + \beta^{2n-1})(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Donc

$$x_n = G_{n-1}^2 + G_n^2 \quad (**). \quad (46)$$

En outre, d'après ce que l'on a vu au n° 31 :

(*) Proposition évidente et connue.

(**) Ce petit calcul donne une nouvelle vérification de l'identité (24).

1° Si $n = 4\mu$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[2 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + 2a}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2 + \left[2 \frac{a(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) - 2}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2; \quad (47)$$

2° Si $n = 4\mu - 1$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[2 \frac{\alpha^n - \beta^n + 2a}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2 + \left[2 \frac{a(\alpha^n - \beta^n) - 2}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2; \quad (48)$$

3° Si $n = 4\mu - 2$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[2 \frac{a(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + 2}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2 + \left[2 \frac{-\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + 2a}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2; \quad (49)$$

4° Si $n = 4\mu - 3$:

$$x_n = \left[\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[2 \frac{a(\alpha^n - \beta^n) + 2}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2 + \left[2 \frac{-\alpha^n + \beta^n + 2a}{(\alpha + \beta)^2} \right]^2. \quad (50)$$

59. *Applications I.* Si l'on suppose $a = 1$, $\mu = 1$, on retrouve, au moyen de ces formules, les valeurs connues :

$$x_4 = 169 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 12^2 + 5^2,$$

$$x_3 = 29 = 2^2 + 4^2 + 3^2 = 2^2 + 5^2,$$

$$x_2 = 5 = 2^2 + 1^2,$$

$$x_1 = 1.$$

II. Soient $a = 3$, $\mu = 1$; d'où $\alpha = 3 + \sqrt{10}$, $\beta = -3 + \sqrt{10}$. On a, par les mêmes formules :

$$x_4 = G_1^2 + G_4^2 = \left[\frac{\alpha^3 + \beta^3}{2\sqrt{10}} \right]^2 + \left[\frac{\alpha^4 - \beta^4}{2\sqrt{10}} \right]^2 = [10 + 3 \cdot 3^2]^2 + [4 \cdot 10 \cdot 3 + 4 \cdot 3^3]^2$$

$$= 37^2 + 228^2 = 52\,353,$$

$$x_1 = G_1^2 + G_1^2 = [\alpha - \beta]^2 + 37^2 = 6^2 + 37^2 = 1405,$$

$$x_3 = G_1^2 + G_2^2 = 1 + 6^2 = 37, \quad x_1 = 1;$$

$$x_4 = 228^2 + \left[\frac{\alpha^3 - \beta^3 + 6}{20} \right]^2 + \left[\frac{3(\alpha^2 - \beta^2) - 2}{20} \right]^2 = 228^2 + 12^2 + 35^2 = 53\,353,$$

$$x_5 = \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[\frac{\alpha^3 - \beta^3 + 6}{20} \right]^2 + \left[\frac{3(\alpha^2 - \beta^2) - 2}{20} \right]^2 = 6^2 + 12^2 + 35^2 = 1\,405,$$

$$x_6 = \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta} \right]^2 + \left[\frac{3(\alpha - \beta) + 2}{20} \right]^2 + \left[\frac{-\alpha + \beta + 6}{20} \right]^2 = 6^2 + 1^2 = 37, \quad x_1 = 1.$$

60. *Remarques. I.* De la formule (46), on déduit,

$$x_n - x_{n-1} + x_{n-2} - \dots \pm x_2 \mp x_1 = G_n^2 \text{ (*)}. \quad (51)$$

Par exemple, dans la seconde application,

$$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 = 53\,353 - 1\,405 + 37 - 1 = 51\,984 = G_4^2.$$

II. La formule (45) donne

$$G_{2n-1} = x_n; \quad (52)$$

et, par conséquent,

$$x_{2n-1} = x_n^2 + G_{2n-2}^2 : \quad (n > 1) \quad (53)$$

Dans la suite récurrente

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

tout terme de rang impair se compose du carré du terme milieu correspondant, augmenté d'un autre carré.

III. Pour les nombres G_n , la loi de récurrence est

$$G_n = 2a G_{n-1} + G_{n-2}. \quad (54)$$

A cause de $G_1 = 1$, $G_2 = 2a$, on en conclut

$$G_3 = 4a^2 + 1 = x_2, \quad G_4 = 8a^3 + 4a, \quad G_5 = 16a^4 + 12a^2 + 1 = x_3, \dots;$$

(*) Les signes supérieurs si n est pair.

puis

$$G_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(a + \sqrt{a^2+1})^n - (a - \sqrt{a^2+1})^n]. \quad (35)$$

IV. On a trouvé (50)

$$x_2 = 4a^2 + 1.$$

En général, le second membre n'est pas décomposable en trois carrés. Néanmoins, *il existe une infinité de cas dans lesquels la décomposition est possible* (*).

Si, par exemple, $a = 3b \pm 1$,

$$4a^2 + 1 = (4b \pm 2)^2 + (4b \pm 1)^2 + (2b)^2 \quad (**). \quad (b > 0)$$

61. *Vérifications des formules.* Le procédé le plus simple à suivre, pour reconnaître l'exactitude des formules (47), (48), (49) et (50), consiste, croyons-nous, à poser $\sqrt{a^2+1} = \cos \varphi$; d'où $a = \sqrt{-1} \sin \varphi$, etc. (***). On trouve, au lieu de l'égalité (47), eu égard à la formule (48):

$$\frac{\cos(8\mu-1)\varphi}{\cos \varphi} = \left[\sqrt{-1} \frac{\sin 4\mu\varphi}{\cos \varphi} \right]^2 + \left[\sqrt{-1} \frac{\sin(4\mu-1)\varphi + \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right]^2 + \left[\frac{\sin(4\mu-1)\varphi \sin \varphi + 1}{\cos^2 \varphi} \right]^2,$$

ou

$$\cos(8\mu-1)\varphi \cos^3 \varphi = -\sin^2 4\mu\varphi \cos^2 \varphi - \sin^2(4\mu-1)\varphi - \sin^2 \varphi + \sin^2(4\mu-1)\varphi \sin^2 \varphi + 1,$$

ou

$$\cos(8\mu-1) \cos \varphi = -\sin^2 4\mu\varphi - \sin^2(4\mu-1)\varphi + 1,$$

ou enfin

$$\cos 8\mu\varphi + \cos(8\mu-2)\varphi = -[1 - \cos 8\mu\varphi] - [1 - \cos(8\mu-2)\varphi] + 2.$$

La même transformation est applicables aux autres formules citées. (****)

(*) Cette circonstance, que j'avoir oubliée, m'a été signalée par M. S. Realis.

(**) *Lettre au Prince B. Boncompagni*, 14 juin 1881.

(***) Evidemment, l'argument φ est imaginaire.

(****) Ce rapprochement, entre l'Analyse indéterminée et la théorie des fonction circulaires, est assez remarquable.

62. *Développements de x_n, y_n . La formule*

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}] \quad (42)$$

donne, immédiatement,

$$x_n = (a^2+1)^{n-1} + C_{2n-1,2} (a^2+1)^{n-2} a^2 + C_{2n-1,4} (a^2+1)^{n-3} a^4 + \dots + C_{2n-1,1} a^{2n-2}. \quad (56)$$

De plus,

$$y_n = \frac{1}{2} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}], \quad (57)$$

ou

$$y = C_{2n-1,1} (a^2+1)^{n-1} a + C_{2n-1,3} (a^2+1)^{n-2} a^3 + \dots + a^{2n-1}. \quad (58)$$

63. *Relations entre x_n, y_n .*

1°. La comparaison des formules (56), (58) donne, d'abord,

$$ax_n + y_n = C_{2n,1} (a^2+1)^{n-1} a + C_{2n,3} (a^2+1)^{n-2} a^3 + \dots + C_{2n,1} a^{2n-1}. \quad (59)$$

2°. Le second membre est le développement de

$$\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n}].$$

Donc

$$ax_n + y_n = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n}]. \quad (60)$$

3°. Pour simplifier cette égalité, multiplions par $2a$ le premier membre; et le second, par

$$(\sqrt{a^2+1}+a) - (\sqrt{a^2+1}-a).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} 2a(ax_n + y_n) &= \\ \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} [(\sqrt{a^2+1}+a)^{2n+1} + (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n+1} \\ &\quad - (\sqrt{a^2+1}+a)^{2n-1} - (\sqrt{a^2+1}-a)^{2n-1}], \end{aligned}$$

ou

$$2a(ax_n + y_n) = x_{n+1} - x_n,$$

ou plutôt

$$x_{n+1} = (2a^2+1)x_n + 2ay_n. \quad (61)$$

4°. D'après la formule (44),

$$x_{n+1} = 2(2a^2+1)x_n - x_{n-1}.$$

Donc, par l'élimination de x_n :

$$x_{n+1} - x_{n-1} = 4a\gamma_n. \quad (62)$$

5°. Si n est *pair*, on conclut, de cette égalité,

$$x_{n+1} - x_1 = 4a (\gamma_n + \gamma_{n-2} + \dots + \gamma_2); \quad (63)$$

et, si n est *impair*:

$$x_{n+1} - 1 = 4a (\gamma_n + \gamma_{n-2} + \dots + \gamma_1). \quad (64)$$

6°. On a, simultanément :

$$\gamma_n^2 = (a^2 + 1) x_n^2 - 1, \quad \gamma_n = \frac{x_{n+1} - (2a^2 + 1) x_n}{2a}.$$

Par conséquent,

$$4a^2 [(a^2 + 1) x_n^2 - 1] = x_{n+1} [x_{n+1} - 2(2a^2 + 1) x_n] + (2a^2 + 1)^2 x_n^2,$$

ou

$$-4a^2 = -x_{n+1} x_{n-1} + x_n^2,$$

ou

$$x_{n+1} x_{n-1} - x_n^2 = 4a^2. \quad (**)$$

7°. Soient, pour abréger :

$$\sqrt{a^2 + 1} + a = s, \quad \sqrt{a^2 + 1} - a = d.$$

Nous aurons, par la formule (87) :

$$\gamma_n = \frac{1}{2} [s^{2n-1} - d^{2n-1}], \quad \gamma_{n+1} = \frac{1}{2} [s^{2n+1} - d^{2n+1}], \quad \gamma_{n-1} = \frac{1}{2} [s^{2n-3} - d^{2n-3}];$$

puis

$$\gamma_n^2 - \gamma_{n+1} \gamma_{n-1} = \frac{1}{4} [-2 + s^4 + d^4]. \quad (***)$$

(*) A cause de

$$x_2 - 1 = 4a^2 = 4a \cdot y_1.$$

(**) Cette relation simple, entre trois termes consécutifs de la série récurrente

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots,$$

est une conséquence immédiate, soit des équations

$$x_n = 2(2a^2 + 1) x_{n-1} - x_{n-2}, \quad x_{n+1} = 2(2a^2 + 1) x_n - x_{n-1},$$

soit des formules qui donnent les réduites de la fraction continue $a(2a)$.

(***) Parceque $sd = 1$.

Or,

$$s^4 + d^4 = 16a^4 + 16a^2 + 2;$$

donc

$$y^2_n - y_{n+1} y_{n-1} = 4a^2 (a^2 + 1) (*). \quad (66)$$

VI.

SUR L'ÉQUATION $Ax^2 = y^2 + 1$.

64. *Transformée.* Le nombre entier A , divisant $y^2 + 1$, doit avoir la forme $a^2 + b^2$. Dans le Chapitre précédent, nous avons considéré le cas où $b = 1$. Prenons, maintenant, l'équation générale

$$(a^2 + b^2) x^2 = y^2 + 1, \quad (67)$$

a et b surpassant l'unité.

Si $x = p$, $y = q$ sont les valeurs les plus simples qui vérifient cette équation, on a

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} [(p\sqrt{A} + q)^{2n-1} + (p\sqrt{A} - q)^{2n-1}]. \quad (68)$$

Il est visible que le second membre est divisible par p . Soit donc $x = pz$. La proposée devient

$$(a^2 + b^2) p^2 z^2 = y^2 + 1.$$

Et comme

$$(a^2 + b^2) p^2 = y^2 + 1,$$

l'équation (67) est transformée en

$$(q^2 + 1) z^2 = y^2 + 1. \quad (69)$$

65. *THÉORÈME.* Chaque valeur entière de x , satisfaisant à l'équation (67), est: 1° la somme de deux carrés (**); 2° la somme de quatre carrés.

1° Si l'on pose

$$G_n = \frac{1}{2\sqrt{q^2 + 1}} [(q + \sqrt{q^2 + 1})^n - (q - \sqrt{q^2 + 1})^n], \quad (45)$$

(*) Voir la note précédente.

(**) x_n , divisant $y^2_n + 1$, est nécessairement une somme de deux carrés.

on a, par la formule (46),

$$z_n = G^2_{n-1} + G_n^2.$$

D'ailleurs,

$$p = f^2 + g^2.$$

Donc

$$x_n = (fG_{n-1} \pm gG_n)^2 + (fG_n \mp gG_{n-1})^2. \quad (70)$$

$$2^\circ \quad x_n = (fG_{n-1})^2 + (fG_n)^2 + (gG_{n-1})^2 + (gG_n)^2. \quad (71)$$

66. *Remarques.* I. A partir de $n = 2$, la première partie de la proposition est générale.

En effet, si les deux valeurs de x_n se réduisent, l'une et l'autre, à un carré, on a

$$fG_{n-1} = gG_n, \quad fG_n = gG_{n-1};$$

d'où, en supposant f et g différents de zéro,

$$G_n = G_{n-1};$$

conclusion inadmissible, parceque les nombres G_n vont en croissant (54). Et si $f = 0$, il reste

$$x_n = (gG_n)^2 + (gG_{n-1})^2.$$

II. Si p est un carré, la seconde partie peut être en défaut.

67. *Application.* Soit $A = 89 = 64 + 25$. La Table X, de LEGENDRE, donne $p = 53$, $q = 100$.

On trouve, par les formules ci-dessus :

$$z_3 = 16q^4 + 12q^2 + 1 = (4q^2 + 1)^2 + (2q)^2 = (2q)^4 + (4q)^2 + (4q^2 - 1)^2$$

$$= 1\ 600\ 000\ 000 + 120\ 000 + 1 = 1\ 600\ 120\ 001,$$

$$y_3 = 16q^5 + 20q^3 + 5q \text{ (*)} = 160\ 000\ 000\ 000 + 20\ 000\ 000 + 500$$

$$= 160\ 020\ 000\ 500.$$

On doit donc avoir

$$10\ 001. 1\ 600\ 120\ 001^2 = 160\ 020\ 000\ 500^2 + 1,$$

ou

$$25\ 606\ 400\ 560\ 020\ 000\ 250\ 000 = 160\ 020\ 000\ 500^2.$$

(*) $(q^2 + 1)(16q^4 + 12q^2 + 1)^2 = q^2(16q^4 + 20q^2 + 5)^2 + 1.$

Cette égalité devient, successivement :

$$102\ 425\ 602\ 240\ 080\ 001 = 320\ 040\ 001^2,$$

$$1\ 024\ 256\ 016 = 32\ 004^2,$$

$$113\ 806\ 224 = 10\ 668^2,$$

$$12\ 645\ 136 = 3\ 556^2;$$

et celle-ci est exacte. (*)

De plus, à cause de $f = 7$, $g = 2$:

$$\begin{aligned} x_3 &= (7.\ 40\ 001 \pm 2.\ 200)^2 + (7.\ 200 \mp 2.\ 40\ 001)^2 \\ &= (280\ 007 \pm 400)^2 + (1\ 400 \mp 80\ 002)^2 \\ &= 280\ 407^2 + 78\ 602^2 = 279\ 607^2 + 81\ 402^2 \\ &= 78\ 628\ 085\ 649 + 6\ 178\ 274\ 404 = 78\ 180\ 074\ 449 + 6\ 626\ 285\ 604 \\ &= 84\ 806\ 360\ 053 = 53\ 23. \end{aligned}$$

Enfin,

$$x_3 = 1\ 400^2 + 400^2 + 280\ 007^2 + 80\ 002^2.$$

68. *Remarque.* Il y a lieu de croire que x_n , somme de deux carrés et somme de quatre carrés, est aussi une somme de trois carrés. Jusqu'à présent, je n'ai pu démontrer cette proposition. (**)

VII.

SUR L'ÉQUATION $(a^2 + 1) x^2 = y^2 - 1$.

69. *THÉOREME.* Chaque valeur entière de y , satisfaisant à cette équation, est la somme de trois carrés. (***)

Les valeurs de y sont données par la formule

$$y_n = \frac{1}{2} [(a + \sqrt{a^2 + 1})^{2n} + (-a + \sqrt{a^2 + 1})^{2n}]. \quad (72)$$

(*) SÉGUIN. — *Table des quarrés et des cubes.*

(**) Elle est vraie lorsque p est un carré. En effet,

$$x_n = k^2 x_n = (Ak)^2 + (Bk)^2 + (Ck)^2.$$

(***) Il y a exception pour $y_0 = 1$.

Si l'on pose, comme précédemment,

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 + 1},$$

cette formule devient (41)

$$2\gamma_n = \alpha^{2n} + \beta^{2n} = f^2 + 2q^2 + h^2.$$

$2\gamma_n$ étant un nombre pair, f et h sont de même parité. Ainsi

$$\gamma_n = \left(\frac{f+h}{2}\right)^2 + \left(\frac{f-h}{2}\right)^2 + 5^2. \quad (72)$$

70. *Remarque.* A cause de $\alpha\beta = b^2 = 1$, on a (41) :

$$f = \frac{\alpha^{n+1} \pm \beta^{n+1}}{\alpha + \beta}, \quad g = \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta}, \quad h = \frac{\alpha^{n-1} \pm \beta^{n-1}}{\alpha + \beta};$$

puis

$$f - h = \frac{\alpha^{n-1}(\alpha^2 - 1) \pm \beta^{n-1}(\beta^2 - 1)}{\alpha + \beta}.$$

Mais

$$\alpha^2 - 1 = 2a\alpha, \quad \beta^2 - 1 = -2a\beta;$$

conséquemment,

$$\frac{f-h}{2} = \frac{\alpha^n \mp \beta^n}{\alpha + \beta}.$$

Cette quantité n'est pas nulle; donc *les trois carrés ne peuvent se réduire à deux.*

71. *Application.* Soit l'équation

$$5x^2 = y^2 - 1,$$

de manière que $a = 2$. La formule (72) donne

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{5})^2 + (-2 + \sqrt{5})^2] = 9 = 2^2 + 2^2 + 1^2;$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{5})^4 + (-2 + \sqrt{5})^4] = 161 = 12^2 + 4^2 + 1^2;$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} [(2 + \sqrt{5})^6 + (-2 + \sqrt{5})^6] = 2889 = 38^2 + 34^2 + 17^2;$$

etc.

72. *Remarque.* Si l'on écrit ainsi la proposée :

$$a^2x^2 + x^2 + 1 = y^2,$$

on voit que y^2 est la somme de trois carrés. Donc les nombres donnés par la formule (72) sont, chacun, la somme de trois carrés. (*)

73. PROBLÈME. Soit $x^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Dans quel cas aura-t-on $x = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$?

Si les nombres α, β, γ étaient donnés, on pourrait prendre (10) :

$$a = 2\alpha\gamma, \quad b = 2\beta\gamma, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2.$$

Comparant cette dernière valeur à celle de x , on trouve

$$\gamma^2 = \frac{x - c}{2};$$

puis

$$\alpha = \frac{a}{2\gamma}, \quad \beta = \frac{b}{2\gamma}.$$

Par conséquent, les conditions suffisantes (mais non nécessaires) sont:

1° que $x - c$ (**) soit le double d'un carré γ^2 ;

2° que a et b soient divisibles par 2γ .

Exemple:

$$50^2 = 40^2 + 24^2 + 18^2. (***)$$

$$\text{On a } \frac{50 - 18}{2} = 16. \quad \text{Donc } \gamma = 4; \quad \text{puis } \alpha = \frac{40}{8} = 5, \quad \beta = \frac{24}{8} = 3;$$

$$50 = 5^2 + 3^2 + 4^2.$$

(*) Lorsqu'un carré, A^2 , est la somme de trois carrés, A n'est pas toujours la somme de trois carrés. Par exemple,

$$7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2;$$

mais 7 n'est pas la somme de trois carrés. D'après la Remarque, il y a exception pour $A = y_n$.

(**) c est un, quelconque, des trois nombre donnés.

(***) Cette égalité ne diffère pas de celle-ci :

$$25^2 = 20^2 + 12^2 + 9^2;$$

mais 25 n'est pas une somme de trois carrés.

VIII.

SUR LE THÉORÈME DE GAUSS.

74. Soit encore l'égalité

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 - pZ^2, \quad (41)$$

dans laquelle p est un nombre premier, de la forme $4\mu + 1$.

Les polynômes Y, Z , entiers par rapport à x , peuvent être représentés ainsi:

$$Y = Mx + N, \quad Z = (Px + Q)x; \quad (*) \quad (74)$$

M, N, P, Q étant des fonctions paires. Nous avons donc, au lieu de l'égalité précédente :

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = (Mx + N)^2 - p(Px + Q)^2 x^2;$$

et, par le changement de x en $-x$:

$$4 \frac{x^p + 1}{x + 1} = (Mx - N)^2 - p(Px - Q)^2 x^2.$$

Soient, pour abréger:

$$Mx + N = A, \quad Px + Q = B, \quad Mx - N = A', \quad Px - Q = B'.$$

Alors,

$$16 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (A^2 - pB^2 x^2) (A'^2 - pB'^2 x^2),$$

ou

$$16 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (AA' \pm pBB'x^2)^2 - p(AB' \pm BA')^2 x^2.$$

On a :

$$AA' = M^2 x^2 - N^2, \quad BB' = P^2 x^2 - Q^2, \quad AB' + BA' = 2(MPx^2 - NQ),$$

$$AB' - BA' = -2(MQ - NP)x.$$

Donc, si l'on prend les signes *supérieurs*:

(*) Z est divisible par x . (SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, tome II, p. 550).

$$16 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} [M^2 x^2 - N^2 + p (P^2 x^2 - Q^2) x^2]^2 - 4p [MPx^2 - NQ]^2 x^2; \quad (S)$$

et, si l'on prend les signes *inférieurs* :

$$16 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = [M^2 x^2 - N^2 - p (P^2 x^2 - Q^2) x^2]^2 - 4p [MQ - NP]^2 x^2. \quad (T)$$

Remettant x au lieu de x^2 , et appelant M_1, N_1, P_1, Q_1 ce que deviennent M, N, P, Q par ce changement, on trouve

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{1}{4} [M_1^2 x - N_1^2 + p (P_1^2 x - Q_1^2) x]^2 - p [M_1 P_1 x - N_1 Q_1]^2 x, \quad (S')$$

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{1}{4} [M_1^2 x - N_1^2 - p (P_1^2 x - Q_1^2) x]^2 - p [M_1 Q_1 - N_1 P_1]^2 x^2. \quad (T')$$

75. *Application.* Soit $p = 13$. Alors (*)

$$Y = 2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2,$$

$$Z = (x^4 + x^2 + 1)x;$$

$$M = x^4 - x^2 + 1, \quad N = 2x^6 + 4x^4 + 4x^2 + 2, \quad P = 0, \quad Q = x^4 + x^2 + 1;$$

$$M_1 = x^2 - x + 1, \quad N_1 = 2(x + 1)(x^2 + x + 1), \quad P_1 = 0, \quad Q_1 = x^2 + x + 1;$$

$$M_1 Q_1 - N_1 P_1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + 1 = \frac{Z}{x};$$

$$M_1^2 x - N_1^2 + 13 Q_1^2 x = (x^2 - x + 1)^2 x - 4(x + 1)(x^2 + x + 1)^2 + 13(x^2 + x + 1)^2 x$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 x - [4x^2 - 5x + 4](x^2 + x + 1)^2$$

$$= (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)x - (4x^6 + 8x^5 + 6x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 4);$$

$$M_1^2 x - N_1^2 + 13 Q_1^2 x = -2(2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2) = -2Y;$$

ou

$$M_1^2 x - N_1^2 - 13 Q_1^2 x =$$

$$-2(2x^6 + x^5 + 4x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2) - 26(x^2 + x + 1)^2 x,$$

ou

(*) *Théorie des Nombres*, tome II, p. 195.

$$M_1^2 x - N_1^2 - 13 Q_1^2 x = -4 (x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 19x^3 + 15x^2 + 7x + 1);$$

$$M_1 P_1 x - N_1 Q_1 = -2 (x + 1) (x^2 + x + 1)^2.$$

La substitution dans (S'), (T') donne ensuite :

$$x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 =$$

$$(x^6 + 7x^5 + 15x^4 + 19x^3 + 15x^2 + 7x + 1)^2 - 13 (x + 1)^2 (x^2 + x + 1)^4 x; \quad (75)$$

$$4 (x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) = Y^2 - 13 Z^2. \quad (76)$$

Cette dernière égalité est celle de Gauss; l'autre, aussi bien que (S'), est probablement nouvelle.

76. *Suite* On reconnaît aisément que, dans tous les cas :

$$M_1^2 x - N_1^2 - p (P_1^2 x - Q_1^2) x = \pm 2Y, (M_1 Q_1 - N_1 P_1)x = \pm Z. \quad (77)$$

Par conséquent, comme le fait observer Legendre,

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = (Y + Z \sqrt{p}) (Y - Z \sqrt{p}).$$

L'égalité (S') ne donne pas une décomposition analogue à celle-ci : mais, si l'on remonte à la formule (S), ce qui revient à changer x en x^2 dans (S'), on a

$$4 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (U + Vx \sqrt{p}) (U - Vx \sqrt{p}); \quad (78)$$

eu posant

$$\left. \begin{aligned} M^2 x^2 - N^2 - p (P^2 x^2 - Q^2) x^2 &= \pm 2U, \\ MPx^2 - NQ &= \pm V. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Ainsi, l'équation

$$x^{2p-2} + x^{2p-4} + \dots + x^2 + 1 = 0$$

est décomposée, de deux manières différentes, en deux équations du degré $(p - 1)$.

77. *Application.* Dans l'exemple traité ci-dessus, l'équation proposée était

$$x^{24} + x^{22} + x^{20} + \dots + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Par le théorème de Gauss, elle est réduite à

$$2x^{12} + x^{10} + 4x^8 - x^6 + 4x^4 + x^2 + 2 + \sqrt{13} (x^{10} + x^6 + x^2) = 0,$$

$$2x^{12} + x^{10} + 4x^8 - x^6 + 4x^4 + x^2 + 2 - \sqrt{13} (x^{10} + x^6 + x^2) = 0;$$

et, au moyen de la relation (75), aux deux équations :

$$x^{12} + 7x^{10} + 15x^8 + 19x^6 + 15x^4 + 7x^2 + 1 + \sqrt{13} (x^2 + 1) (x^4 + x^2 + 1)^2 x = 0,$$

$$x^{12} + 7x^{10} + 15x^8 + 19x^6 + 15x^4 + 7x^2 + 1 - \sqrt{13} (x^2 + 1) (x^4 + x^2 + 1)^2 x = 0.$$

78. *Remarques.* I. Si l'on désigne par X_0 , Z_0 ce que deviennent les polynômes Y , Z , quand on y change x en x^2 , on a la double identité :

$$4 \frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1} = (Y_0 + Z_0 \sqrt{p}) (Y_0 - Z_0 \sqrt{p}) = (U + Vx \sqrt{p}) (U - Vx \sqrt{p}).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} & 4(x^{24} + x^{22} + x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1) = \\ & \{2x^{12} + (1 + \sqrt{13}) x^{10} + 4x^8 + (\sqrt{13} - 1) x^6 + 4x^4 + (1 + \sqrt{13}) x^2 + 2\} \\ & \{2x^{12} - (\sqrt{13} - 1) x^{10} + 4x^8 - (\sqrt{13} + 1) x^6 + 4x^4 - (\sqrt{13} - 1) x^2 + 2\} = \\ & 4\{x^{12} + \sqrt{13}x^{11} + 7x^{10} + 3\sqrt{13}x^9 + 15x^8 + 5\sqrt{13}x^7 + 19x^6 + 5\sqrt{13}x^5 + 15x^4 + 3\sqrt{13}x^3 + 7x^2 + \sqrt{13}x + 1\} \\ & \{x^{12} - \sqrt{13}x^{11} + 7x^{10} - 3\sqrt{13}x^9 + 15x^8 - 5\sqrt{13}x^7 + 19x^6 - 5\sqrt{13}x^5 + 15x^4 - 3\sqrt{13}x^3 + 7x^2 - \sqrt{13}x + 1\}. \end{aligned}$$

II. Les considérations précédentes sont applicables au cas où $p = 4\mu - 1$. L'équation (41) devient, comme l'on sait,

$$4 \frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 + p Z^2. \quad (80)$$

Il suffit, pour trouver les nouvelles formules, d'effectuer le changement de p en $-p$ dans les seconds membres des égalités (S), (T), (S'), (T').

III. Les égalités (77) établissent, entre Y et Z , des relations qui pourront, peut-être, simplifier le calcul de ces polynômes. Si l'on suppose

$$Y = 2x^{2\mu} + x^{2\mu-1} + ax^{2\mu-2} + bx^{2\mu-3} + \dots + x + 2, \quad (*)$$

$$Z = ax^{2\mu-1} + \beta x^{2\mu-2} + \gamma x^{2\mu-3} + \dots + \gamma x^3 + \beta x^2 + ax,$$

(*) On sait que Y commence par $2x^{2\mu} + x^{2\mu-1}$.

on trouve :

$$a = \mu + 1, \alpha = 1;$$

puis les deux systèmes :

$$\beta = 0, \gamma + b - 2\delta = 0;$$

$$\beta = 1, \gamma + b - 2\delta = \mu. (*)$$

IV. A propos du calcul des polynômes Y, Z, l'illustre Géomètre s'énonce ainsi : « on aura généralement

$$Y = 2x^m - 2mx^{m-1} + 2m \frac{m-1}{2} x^{m-2} - 2m \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} x^{m-3} + \text{etc.};$$

» et dans ce développement *il ne restera plus qu'à réduire les coefficients au dessous de $\frac{1}{2} n$* , en supprimant les multiples de n qu'ils peuvent contenir; .. »

Cette règle ne nous semble ni démontrée ni claire (**).

En attendant que nous puissions revenir sur ce sujet, voici quelques indications simples.

1° Dans l'égalité

$$4 (x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) = Y^2 - pZ^2, \quad (41)$$

qui suppose $p = 4\mu + 1$, faisons $x = 1$. Soient B, C les résultats de cette substitution, (***) dans les polynômes Y, Z: on a

$$p (4 + C^2) = B^2.$$

Donc, à cause de $p = a^2 + b^2$, B est une somme de deux carrés, divisible par p. (****)

(*) Ces égalités sont vérifiées par les valeurs que donne Legendre.

(**) Dans un petit Mémoire publié en 1857, M. Liouville a traité la même question. Mais les formules données par mon bien regretté maître sont peu praticables.

(***) B est la somme des coefficients de Y; C, la somme des coefficients de Z.

(****) Si l'on fait $B = pD$, on a

$$C^2 - pD^2 = -4.$$

Donc

$$z = C, u = D$$

forment une solution de l'équation

$$z^2 - pu^2 = -4.$$

Est ce parce que cette remarque est trop simple qu'elle ne se trouve, ni dans Legendre ni dans Serret ?

2° Soit maintenant l'égalité

$$1 (x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1) = Y^2 + pZ^2, \quad (80)$$

auquel cas $p = 4\mu - 1$. Le polynôme Y a ses coefficients égaux et de signes contraires deux à deux; donc il s'annule pour $x = 1$; et, en conséquence,

$$C = \pm 2. (*)$$

Liège, 9 Novembre 1883.

IX.

QUESTION D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

79. Soit l'équation

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2, \quad (81)$$

à laquelle il s'agit de satisfaire par des valeurs entières de x, y, u, v, w .

Si l'on pose

$$u = x + \alpha, \quad v = y - \beta, \quad (82)$$

la proposée devient

$$\beta y - \alpha x = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2). \quad (83)$$

Ainsi, α, β, w peuvent être pris arbitrairement, à cela près que leur somme soit *paire*. En outre, afin d'obtenir des solutions *essentiellement différentes*, nous supposons α et β *premiers entre eux*. (**)

Cela posé, *toutes les solutions* de l'équation (83) sont, comme l'on sait, données par les formules :

$$x = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) p + \beta \theta, \quad y = \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) q + \alpha \theta, \quad (84)$$

dans lesquelles les entiers p, q satisfont à la condition

$$\beta q - \alpha p = 1. \quad (85)$$

(*) Ceci suppose $p > 3$. Lorsque $p = 3$, $Y = 2x + 1$.

(**) Si l'équation est vérifiée par

$$x = a, \quad y = b, \quad u = c, \quad v = d, \quad w = e,$$

elle l'est par

$$x = \lambda a, \quad y = \lambda b, \quad u = \lambda c, \quad v = \lambda d, \quad w = \lambda e,$$

λ étant un entier quelconque. Mais ces diverses solutions n'en font, véritablement, qu'une seule; savoir, la première, si a, b, c, d, e n'ont aucun facteur commun. Cette solution pourrait être regardée comme *primitive*. Nous supposons qu'il en est ainsi.

80. *Remarques I.* Lorsqu'une solution de l'équation (81) n'est pas *primitive*, le plus grand commun diviseur des valeurs de x, y, u, v, w divise α et β (82). Si donc, comme nous l'avons admis, α et β sont premiers entre eux, toutes les solutions, données par les formules (84), (82), seront *primitives*.

II. α, β, w étant *constants*; si l'on remplace p par p' , q par q' , les nouvelles solutions ne diffèrent pas des premières.

1°. D'après l'équation (85),

$$q' = q + \alpha k, \quad p' = p + \beta k;$$

k étant un entier quelconque.

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad x' &= \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) (p + \beta k) + \beta \theta' \\ &= \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) p + \beta \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) k + \theta' \right] \end{aligned}$$

Cette valeur égale celle de x , si

$$\theta' = \theta - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + w^2) k.$$

III. Si l'on remplace α, β par α', β' , les nouvelles solutions diffèrent des premières.

En effet, l'hypothèse suivante :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v$$

donne

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta.$$

IV. Par conséquent, les formules (84), (82) donnent, sans omissions et sans répétitions, les solutions demandées.

81. *Exemples. I.* $\alpha = 2, \beta = 1, w = 1$. L'équation (85) est vérifiée par $p = 1, q = 1$. Donc

$$x = 7 + 3\theta, \quad y = 7 + 2\theta, \quad u = 9 + 3\theta, \quad v = 4 + 2\theta;$$

puis les progressions :

$$\dots - 2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots;$$

$$\dots + 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots;$$

$$\dots 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots;$$

$$\dots - 2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots;$$

et les égalités:

$$2^2 + 1^2 = 0^2 + 2^2 + 1^2, \quad 1^2 + 3^2 = 3^2 + 0^2 + 1^2,$$

$$4^2 + 5^2 = 6^2 + 2^2 + 1^2, \quad 7^2 + 7^2 = 9^2 + 5^2 + 1^2, \dots$$

II. $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $w = 3$. L'équation (85):

$$5q - 2p = 1$$

est vérifiée par $q = 1$, $p = 2$. Donc :

$$x = 38 + 5\theta, \quad y = 19 + 2\theta, \quad u = 40 + 5\theta, \quad v = 11 + 2\theta;$$

puis les progressions :

$$\dots\dots 3, \quad 8, \quad 13, \quad 18, \quad 23, \quad 28, \quad 33, \dots\dots;$$

$$\dots\dots 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad 13, \quad 15, \quad 17, \dots\dots;$$

$$\dots\dots 6, \quad 10, \quad 15, \quad 20, \quad 25, \quad 30, \quad 35, \dots\dots;$$

$$\dots\dots 0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12, \dots\dots;$$

et les égalités:

$$3^2 + 5^2 = 5^2 + 0^2 + 3^2, \quad 8^2 + 7^2 = 10^2 + 2^2 + 3^2,$$

$$13^2 + 9^2 = 15^2 + 4^2 + 3^2, \dots\dots$$

III.

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4, \quad w = 7.$$

L'équation auxiliaire est vérifiée par $p = 1$, $q = 1$. Conséquemment

$$x = 37 + 4\theta, \quad y = 37 + 3\theta, \quad u = 40 + 4\theta, \quad v = 33 + 3\theta;$$

puis

$$37^2 + 37^2 = 40^2 + 33^2 + 7^2,$$

$$41^2 + 40^2 = 44^2 + 36^2 + 7^2,$$

$$45^2 + 43^2 = 48^2 + 39^2 + 7^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

83. *Exemple.* Soient :

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 2, \alpha_2 = 3, \beta_2 = 4, \alpha_3 = 5, \beta_3 = 6, \alpha_4 = 7, \beta_4 = 8.$$

On trouve :

$$x_1 = 3\ 445, x_2 = -25\ 872, x_3 = 142\ 380, x_4 = -496\ 296,$$

$$x_5 = 689\ 300, u = 861\ 625.$$

Ainsi

$$861\ 625^2 = 3\ 445^2 + 25\ 872^2 + 142\ 380^2 + 496\ 296^2 + 689\ 300^2,$$

ou

$$742\ 397\ 640\ 625 = 12\ 006\ 225 + 669\ 360\ 384$$

$$+ 20\ 272\ 064\ 400 + 246\ 309\ 719\ 616 + 475\ 134\ 490\ 000;$$

ce qui est exact.

84. *Remarques.* I. La valeur de u est le produit de plusieurs facteurs égaux, chacun, à la somme de deux carrés. Conséquemment, u est une somme de deux carrés.

II. D'après les formules (87):

$$x_1^2 + x_2^2 = [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2)(\alpha_3^2 - \beta_3^2)]^2 (\alpha_4^2 + \beta_4^2)^2$$

$$= [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2)(\alpha_3^2 - \beta_3^2)(\alpha_4^2 + \beta_4^2)]^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2)(\alpha_4^2 + \beta_4^2)]^2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2)^2$$

$$= [(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2)(\alpha_3^2 + \beta_3^2)(\alpha_4^2 + \beta_4^2)]^2; \text{ etc.}$$

Ainsi u^2 , somme de cinq carrés, est une somme de quatre carrés, une somme de trois carrés, et enfin une somme de deux carrés.

85. *Suite.* Ces deux remarques démontrent le théorème suivant, qu'il suffit d'énoncer :

Soit N un nombre impair, (*) égal à la somme de deux carrés. Soit n le nombre des facteurs premiers, égaux ou inégaux, qui le composent.

Le carré de N est : la somme de deux carrés, la somme de trois carrés, la somme de quatre carrés....., la somme de $n + 1$ carrés.

(*) Sans cette restriction, un facteur premier de N serait $2 = 1^2 + 1^2$, et certains carrés deviendraient nuls.

86. *Application.* $N = 325 = 5^3$. 13. On trouve

$$325^3 = 45^3 + 108^3 + 156^3 + 260^3 = 117^3 + 156^3 + 260^3 = 195^3 + 260^3;$$

puis, en écrivant

$$325 = 5. 13. 5 :$$

$$325^3 = 45^3 + 60^3 + 180^3 + 260^3 = 75^3 + 180^3 + 260^3 = 195^3 + 260^3. (*)$$

XI.

EMPLOI D'UNE SÉRIE.

87. Si l'on suppose

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + A_2 x^3 + \dots + A_n x^{2n-1} + \dots, \quad (88)$$

on trouve, très facilement (**)

$$A_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)}; \quad (89)$$

puis

$$(\arcsin x)^2 = \sum_1^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{2n-4} \overline{2n-2}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \overline{2n-3} \overline{2n-1}} \frac{x^{2n}}{n};$$

ou, par le changement de x en $\sqrt{x}$:

$$(\arcsin \sqrt{x})^2 = \sum_1^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \overline{2n-2} x^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \overline{2n-1} n}.$$

Cette formule est due à Clausen, qui l'a obtenue par un procédé tout différent du nôtre.

(*) On voit que les décompositions indiquées dans l'énoncé du théorème sont, en général, possibles de plusieurs manières. Par exemple;

$$1\ 105^3 = 225^3 + 120^3 + 612^3 + 884^3 = 255^3 + 612^3 + 884^3 = 663^3 + 884^3$$

$$1\ 105^3 = 225^3 + 300^3 + 200^3 + 1\ 020^3 = 375^3 + 200^3 + 1\ 020^3 = 425^3 + 1\ 020^3,$$

$$1\ 105^3 = 225^3 + 540^3 + 780^3 + 520^3 = 585^3 + 780^3 + 520^3 = 975^3 + 520^3,$$

etc.

(**) Il suffit d'observer que la relation entre y et x donne

$$(1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1.$$

88. On a :

$$\arcsin x = \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots \overline{2p-1}}{2 \cdot 4 \dots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \quad (90)$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots \overline{2q-1}}{2 \cdot 4 \dots 2q} x^{2q}. \quad (91)$$

Par conséquent,

$$\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p} \frac{1}{2p+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2q-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1}, (p+q=n)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2q-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2p \cdot 2p+1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2q} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{2n+1} \\ = (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2. \end{aligned} \right\} (92)$$

La quantité sous le signe $\sum$ est la même chose que

$$\begin{aligned} & \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2n-2p-1}]^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p+1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n-2p} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{2n+1} \\ & = C_{2n+1, 2p+1} [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2n-2p-1}]^2. \end{aligned}$$

L'identité (91) devient donc

$$\left. \begin{aligned} \sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2p+1} [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2n-2p-1}]^2 \\ = (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2 \quad (*) \end{aligned} \right\} (V)$$

Celle-ci démontre le théorème suivant :

*Le nombre $(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2$ est la somme de 4^n carrés impairs. (**)*

89. *Suite.* Le second membre de V égale $4^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2$. Nous avons donc, au lieu de cette identité,

(*) D'après le calcul précédent, le premier produit entre parenthèses doit être supposé égal à 1, si $p=0$. De même pour le second produit, si $p=n$.

(**) En effet,

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2p+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n+1} = 4^n \cdot 2^{2n-1}$$

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2p+1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2p-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \overline{2n-2p-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right]^2 = 4^n.$$

Si l'on multiplie, par $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2p \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \overline{2n-2p}$, les deux termes de la fraction, elle se transforme en

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{2n-2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{n-p}}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2p+1} \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{2n-2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{n-p} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \right]^2 = 16^n. \quad \left\{ (W) \right.$$

90. *Suite.* Dans ma *Seconde Note sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*, j'ai démontré ce théorème :

a, b étant des nombres entiers, la fraction

$$\frac{1 \cdot 2 \dots 2a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2b}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \overline{a+b}} = \varphi(a, b)$$

est réductible à un nombre entier (*).

L'identité (W) prouve donc que :

4^{2n} est la somme de 4^n carrés.

Mais nous pouvons aller plus loin.

91. LEMME I. Le nombre $\varphi(a, b)$ est pair.

Le facteur 2 est contenu, dans le numérateur de la fraction φ , un nombre de fois marqué par

$$a + \left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{2}\right) + \dots + b + \left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{4}\right) + \dots (**).$$

Il est contenu, dans le dénominateur, un nombre de fois marqué par

(*) Une généralisation a été proposée dans les *Nouvelles Annales* (1875, p. 89); mais elle est insignifiante: le numérateur de la nouvelle fraction est trop grand, relativement au dénominateur. En outre, l'Auteur de la Note citée s'est trompé sur la signification du symbole Γ .

(**) Je rappelle que $\left(\frac{a}{2}\right)$ représente le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{a}{2}$. De même pour $\left(\frac{a}{4}\right), \dots$

$$\left(\frac{a}{2}\right) + \left(\frac{a}{4}\right) + \dots + \left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{4}\right) + \dots + \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \dots$$

Supprimant les termes communs, on doit prouver l'inégalité

$$a + b > \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \dots \quad (93)$$

Or, le premier membre surpasse

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{4} + \frac{a+b}{8} + \dots;$$

donc, à plus forte raison, il surpasse le second membre.

92. LEMME II. $\varphi(a, b)$ est divisible par 2^s , s représentant le nombre des puissances de 2 ayant pour somme $a + b$.

Soit

$$a + b = 2^\alpha + 2^\beta + \dots + 2^\lambda; \quad (94)$$

et, par conséquent :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2^{\alpha-1} + 2^{\beta-1} + \dots + 2^{\lambda-1}, \quad (*)$$

$$\left(\frac{a+b}{4}\right) = 2^{\alpha-2} + 2^{\beta-2} + \dots + 2^{\lambda-2},$$

$$\dots \dots \dots ;$$

puis

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \dots = (2^\alpha - 1) + (2^\beta - 1) + \dots + (2^\lambda - 1),$$

ou

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a+b}{4}\right) + \left(\frac{a+b}{8}\right) + \dots = a + b - s,$$

ou enfin :

$$(a+b) + \left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a+b}{4}\right) - \left(\frac{a+b}{8}\right) - \dots = s. \quad (95)$$

Cela posé, d'après le premier Lemme, $\varphi(a, b)$ est divisible par une puissance de 2 ayant pour exposant

(*) Il est bien entendu qu'aucun exposant ne doit être négatif: quand il est nul, on arrête la division par 2.

$$(a + b) - \left(\frac{a + b}{2}\right) - \left(\frac{a + b}{4}\right) - \left(\frac{a + b}{8}\right) - \dots;$$

c'est-à-dire, divisible par 2^s .

93. LEMME III. *Le quotient de $\varphi(a, b)$, par 2^s , est impair.*

En effet, la plus haute puissance de 2, qui divise $\varphi(a, b)$, est 2^s .

94. THÉORÈME. *Soit s le nombre des puissances de 2 ayant n pour somme: 4^{2n-s} est la somme de 4^n carrés impairs.*

Ecrivons ainsi l'identité (W):

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_{2n+1, 2p+1} \left[\frac{\varphi(p, n-p)}{2^s} \right]^2 = 4^{2n-s} \quad (X)$$

D'après le dernier Lemme, la quantité $\frac{\varphi(p, n-p)}{2^s}$ est un nombre impair; donc, etc.

95. Application. Soit $n = 7 = 4 + 2 + 1$; d'où $s = 3$.

On a:

$$\frac{\varphi(0, 7)}{8} = \frac{1}{8} \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 429,$$

$$\frac{\varphi(1, 6)}{8} = \frac{1}{8} \frac{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 33,$$

$$\frac{\varphi(2, 5)}{8} = \frac{1}{8} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9,$$

$$\frac{\varphi(3, 4)}{8} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

D'après l'identité (X), on doit avoir:

$$\begin{aligned} & \frac{15}{1} 429^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} 33^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} 9^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} 5^2 \\ & + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 5^2 + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 9^2 + \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} 33^2 + 429^2 = 4^{11}, \end{aligned}$$

ou

$$16. 184\ 041 + 5\ 60. 1\ 089 + 4\ 368. 81 + 11\ 440. 34 = 4^{11},$$

ou

$$184\ 041 + 35. 1\ 089 + 273. 81 + 715. 25 = 4^9.$$

Le premier membre égale

$$184\ 041 + 38\ 115 + 28\ 113 + 17\ 875 = 262\ 144 ;$$

et le dernier nombre ne diffère pas de 4^9 .

96. *Remarque.* Lorsque $p = 0$,

$$\varphi(p, n - p) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2} = C_{2n, n}$$

Par conséquent :

s représentant le nombre des puissances de 2 ayant n pour somme :

1°. Le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, n à n , est divisible par 2^s ;

2°. le quotient est impair.

97. *Calcul de s .* Reprenons l'égalité

$$n = 2^a + 2^b + \dots + 2^l, \quad (94)$$

dans laquelle $a + b$ a été remplacé par n .

Le nombre n étant la somme de s puissances de 2, il s'ensuit que, dans le système binaire, n serait représenté par le chiffre 1, écrit s fois, et accompagné de zéros, s'il est nécessaire. Or, pour traduire n dans le système binaire, on divise n par 2, puis $\left(\frac{n}{2}\right)$ par 2, puis $\left(\frac{n}{4}\right)$ par 2, . . . : les restes successifs sont les chiffres cherchés. Conséquemment : Si l'on prend, parmi les dividendes

$$\left(\frac{n}{1}\right), \left(\frac{n}{2}\right), \left(\frac{n}{4}\right), \left(\frac{n}{8}\right),$$

ceux qui sont impairs, leur nombre égale s (*).

98. *Généralisation.* Soit

$$N = ap^{k-1} + bp^{k-2} + \dots + fp + g,$$

(*) M. Ernest Cesàro, bien connu par de belles recherches d'Arithmétique supérieure, est arrivé, de son côté, à un théorème analogue à celui-ci. (Voir *Mathesis*, décembre 1883). Du reste, la proposition énoncée par ce jeune et profond Géomètre résulte, immédiatement, de ce Lemme préliminaire :

» Selon que $\left(\frac{2n}{a}\right)$ est PAIR ou IMPAIR,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right)$$

égale zéro ou un » (*Problèmes et théorèmes d'Arithmétique*, p. 6).

les nombres entiers $a, b, c, \dots, f, g$ étant moindres que p . S'il y en a qui soient différents de zéro, il est clair que N est un nombre de k chiffres, dans le système dont la base est p . Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, évident par ce qui précède.

Le nombre s , des chiffres significatifs de N , dans le système dont la base est p , égale le nombre de ceux, des dividendes :

$$\left(\frac{N}{1}\right), \left(\frac{N}{p}\right), \left(\frac{N}{p^2}\right), \left(\frac{N}{p^3}\right),$$

qui ne sont pas multiples de p .

P. S. — PROBLÈME. Trouver une somme de quatre carrés égale à une somme de quatre bi-carrés.

Une infinité de solutions résultent de l'identité

$$[2(x^2 + y^2 + z^2)]^2 + (4xy)^2 + (4yz)^2 + (4zx)^2 = \\ (-x + y + z)^4 + (x - y + z)^4 + (x + y - z)^4 + (x + y + z)^4,$$

que je trouve dans mes notes de 1878.

Elle donne, par exemple :

$$6^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 1^4 + 1^4 + 1^4 + 3^4, \\ 42^4 + 8^4 + 32^4 + 16^4 = 5^4 + 3^4 + 1^4 + 7^4,$$

etc.

Spa, 28 juillet 1884.
