SUR UN THÉORÈME DE M. MANNHEIM;

PAR

E. CATALAN.

1. « *On donne un triangle* abc. *On trace une circonférence qui passe par* a, *elle coupe* ab *en* c' *et* ac *en* b'. *On trace une circonférence qui passe par* b *et* c'; *elle coupe* bc *en* a' *et la première circonférence en* i; *les points* i, a', c, b' *sont sur une même circonférence. On prend un point arbitraire* o *sur le plan* abc. *La droite* oa *coupe en* α *la circonférence qui passe par* a. *La droite* ab *coupe en* β *la circonférence qui passe par* b. *Enfin sur la troisième circonférence on a le point* γ *à sa rencontre avec* oc. *Démontrer que les points* o, α, β, γ, i *sont sur une même circonférence de cercle* * ».

La première partie de l'énoncé peut être transformée ainsi:

« *Soient pris, sur les côtés* (Tav. VIII fig. 1) BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *trois points* A', B', C'. *Les circonférences* B'C'A, C'A'B, A'B'C *se coupent en un même point* R ** ».

La seconde partie, à son tour, peut prendre la forme suivante:

« M *étant un point quelconque situé dans le plan* ABC, *on trace les cordes* AM, BM, CM, *dont les secondes extrémités sont, respectivement*, E, F, G. *Cela posé, les cinq points* R, M, E, F, G *appartiennent à une même circonférence* ».

Pour démontrer ce joli théorème, il suffit de vérifier que les angles REM, RFM sont supplémentaires. Si REMF est un quadrilatère inscrit, il en sera de même pour REMG et RFGM.

1°. AB'RE est un quadrilatère inscrit; donc

$$REM = AB'R = 2^d - CB'R .$$

2°. BA'FR est un quadrilatère inscrit; donc

$$RFM = BA'R = 2^d - C'AR .$$

* *Educational Times*, Question 10 145.

** Théorème connu, facile à démontrer.

Ajoutant, on a:

$$\mathrm{REM} + \mathrm{RFM} = 4^d - (\mathrm{CB'R} + \mathrm{CA'R}) .$$

3°. CB'RA' étant un quadrilatère inscrit,

$$\mathrm{REM} + \mathrm{RFM} = 2^d .$$

2. *Cas particulier remarquable.* Si le point M s'éloigne indéfiniment, dans une direction donnée, les cordes AM, BM, CM sont parallèles à cette direction. La circonférence REFGM, ayant un point à l'infini, dégénère en ligne droite. Par conséquent:

Les cordes AE, BF, CG (fig. 2), *parallèles entre elles, ont leurs extrémités* E, F, G *sur une même droite, passant au point* R.

Inversement, on peut énoncer ce théorème:

Par le point R, *on mène une transversale quelconque. Soient* E, F, G, *les points où elle coupe les circonférences données: les cordes* AE, BF, CG *sont parallèles entre elles.*

3. *Remarques.* — I. Considérons (fig. 2) les circonférences BA'RC', CA'RB', supposées fixes, dont les centres sont M, N. Considérons, aussi, la circonférence BRC, dont le centre est S. La droite BA'C est une *double corde* commune. Quand elle pivote autour du point A' (supposé fixe), le centre S, de la circonférence BRC, décrit la circonférence MRN *. Conséquemment, *sur la circonférence* MRN, *il existe un point* S, *également distant des points* B, R, C.

II. *Les triangles isoscèles* ALR, BMR, CNR *sont semblables.*

En effet:

$$\textit{angle}\ \mathrm{ALR} = 2\ \textit{angle}\ \mathrm{AB'R} ,$$
$$\textit{angle}\ \mathrm{BMR} = 2\ \textit{angle}\ \mathrm{BC'R} ;$$

etc.

III. *Du point* R, *les droites* BC, MN *sont vues sous des angles égaux* **.

4. *Autres circonférences.* — On a:

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CN}} = \textit{const} .$$

* *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire,* 6me édition, p. 31.

** Propriété évidente, par ce qui précède. Elle est mentionnée dans l'ouvrage cité.

Le point R appartient donc à une circonférence dont le centre est situé sur le côté BC, et qui divise *harmoniquement* ce côté *. Pour la même raison, R est l'intersection de deux autres circonférences, ayant leurs centres sur AC et BC, respectivement. D'ailleurs, ce point est déterminé par les distances AR, BR, CR; donc *il appartient à neuf circonférences remarquables.*

5. *Détermination des rayons* AL, BM, CN (fig. 3). — Nous supposerons, désormais:

$BC = a$, $CA = b$, $AC = c$; $AB' = \alpha$, $BC' = \beta$, $CA' = \gamma$, $AC' = \alpha'$, $BA' = \beta'$, $CB' = \gamma'$; $B'C' = a'$, $C'A' = b'$, $A'B' = c'$; $AL = l$, $BM = m$, $CN = n$; $AR = u$, $BR = v$, $CR = w$.

Des relations, évidentes et connues:

$$a' = 2l sin A \qquad a = 2R cos A, \quad (1)$$

$$a'^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' A cos, \qquad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc cos A, \qquad (3)$$

$$sin A = \frac{2T}{bc} \;{**}, \qquad (4)$$

on déduit:

$$al = Ra', \qquad (5)$$

$$a'^2 = \frac{1}{bc}\left[(\alpha^2 + \alpha'^2)\,bc - (b^2 + c^2 - a^2)\,\alpha\alpha'\right],$$

ou

$$a'^2 = \frac{1}{bc}\left[a^2\alpha\alpha' - (b\alpha - c\alpha')(b\alpha' - c\alpha)\right] {***};$$

$$xy\,(u^2 + v^2) - uv\,(x^2 + y^2) = (ux - vy)\,(uy - v^2),$$

* *Eléments de Géométrie*, p. 116.
** T représente l'aire du triangle ABC.
*** En général.

puis

$$\left.\begin{aligned} l^2 &= \frac{bc}{16T^2}\left[a^2\alpha\alpha' - (b\alpha - c\alpha')(b\alpha' - c\alpha)\right], \\ m^2 &= \frac{ca}{16T^2}\left[b^2\beta\beta' - (c\beta - a\beta')(c\beta' - a\beta)\right], \\ n^2 &= \frac{ab}{16T^2}\left[c^2\gamma\gamma' - (a\gamma - b\gamma')(a\gamma' - b\gamma)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

6. *Remarques.* — Si $\alpha = b$, a' devient la diagonale CC' du quadrilatère BCB'C'. Ainsi:

$$\overline{CC'}^2 = \frac{1}{c}\left[a^2\alpha' - (b^2 - c\alpha')(\alpha' - c)\right],$$

ou

$$\overline{CC'}^2 = \frac{1}{c}\left[a^2\alpha' + b^2\beta - c\beta\alpha'\right].$$

De même,

$$\left.\begin{aligned} \overline{AA'}^2 &= \frac{1}{a}\left[b^2\beta' + c^2\gamma - a\gamma\beta'\right], \\ \overline{BB'}^2 &= \frac{1}{b}\left[c^2\gamma' + a^2\alpha - b\alpha\gamma'\right]. \end{aligned}\right\} \quad (7)\ *$$

7. *Détermination des angles* BRC, CRA, ARB. — Soient φ, η, ζ ces trois angles. On a:

$$\begin{aligned} \varphi &= BRA' + CRA' = BC'A' + CB'A' \\ &= (2^d - B - BA'C') + (2^d - C - CB'A') \\ &= A + 2^d - (BA'C' + CA'B'), \end{aligned}$$

ou

$$\varphi = A + B'A'C'. \quad (8)$$

Ainsi, *l'angle* BRC *est égal à la somme des angles* A, A', *dans les triangles* ABC, A'B'C'.

Or,

$$\cos B'A'C' = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}, \quad \sin B'A'C' = \frac{2T'}{b'c'},$$

* Les égalités (7), constituent le *théorème de Stewart* (Th. et Prol. p. 141).

T' étant l'aire du triangle A'B'C'. Donc

$$cos\varphi = \frac{1}{2b'c'}\left[(b'^2 + c'^2 - a'^2)\ cos\,A - 4T'\,sin\,A\right], \qquad (9)$$

$$sin\,\varphi = \frac{1}{2b'c'}\left[(b'^2 + c'^2 - a'^2)\ sin\,A + 4T'\,cos\,A\right].\ * \qquad (10)$$

8. *Suite.* — On peut trouver une expression de $cos\,\varphi$, plus simple que celle qui précède.

A cause des formules, presque évidentes:

$$cos\,BC'A' = \frac{\beta - \beta'\,cos\,B}{b}\ **, \qquad cos\,CB'A' = \frac{\gamma' - \gamma\,cos\,C}{c'},$$

$$sin\,BC'A' = \frac{\beta'}{b'}\,sin\,B, \qquad sin\,CB'A' = \frac{\gamma}{c'}\,sin\,C;$$

nous avons:

$$cos\varphi = \frac{1}{b'c'}\left[(\beta - \beta'\,cos\,B)\ (\gamma' - \gamma\,cos\,C) - \gamma\beta'\,sin\,B\,cos\,C\right];$$

ou, parceque $B + C = 2^d - A$:

$$cos\varphi = \frac{1}{b'c'}\left[\beta\gamma' - \beta'\gamma'\,cos\,B - \beta\gamma\,cos\,C - \beta'\gamma\,cos\,A\right]. \qquad (11)$$

Une permutation donne ensuite:

$$cos\eta = \frac{1}{c'a'}\left[\gamma\alpha' - \gamma'\alpha'\,cos\,C - \gamma\alpha\,cos\,A - \gamma'\alpha\,cos\,B\right], \qquad (12)$$

$$cos\,\zeta = \frac{1}{a'b'}\left[\alpha\beta' - \alpha'\beta'\,cos\,A - \alpha\beta\,cos\,B - \alpha'\beta\,cos\,C\right]. \qquad (13)$$

* De ces deux formules, on conclut:

$$16T'^2 = 4b'^2c'^2 - (b'^2 + c'^2 - a'^2)^2;$$

valeur connue.

** Dans le triangle BC'A', BC' est la somme des projections des autres côtés; etc.

9. Suite. — On trouve, par un calcul plus simple que le précédent:

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{1}{b'c'}\Big[\beta'\gamma' \sin B + \beta\gamma \sin C - \gamma\beta' \sin A\Big], \\ \sin\eta &= \frac{1}{c'a'}\Big[\gamma'\alpha' \sin C + \gamma\alpha \sin A - \alpha\gamma' \sin B\Big], \\ \sin\zeta &= \frac{1}{a'b'}\Big[\alpha'\beta' \sin A + \alpha\beta \sin B - \beta\alpha' \sin C\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

10. Vérification. — On doit avoir, identiquement:

$$b'^2c^2 = \Big[\beta\gamma' - \beta'\gamma' \cos B - \beta\gamma \cos C - \beta'\gamma' \cos A\Big]^2 + \Big[\beta'\gamma' \sin B + \beta\gamma \sin C - \gamma'\beta \sin A\Big]^2.$$

Or, le second membre, développé, devient:

$$\begin{aligned} \beta^2\gamma'^2 + \beta'^2\gamma'^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta'^2\gamma^2 - 2\beta\gamma' \;&[\beta'\gamma' \cos B + \beta\gamma \cos C + \beta'\gamma \cos A] \\ &+ 2\beta\gamma^2\beta' \cos A \cos C + 2\beta\gamma^2\beta' \sin A \sin C \\ &+ 2\beta\gamma\beta'\gamma' \cos B \cos C + 2\beta\gamma\beta'\gamma' \sin B \sin C \\ &+ 2\gamma\beta'^2\gamma' \cos A \cos B - 2\gamma\beta'^2\gamma' \sin A \sin C', \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2) - 2\beta\beta'(\gamma^2 + \gamma'^2) \cos B - 2\gamma\gamma'(\beta^2 + \beta'^2) \cos C \\ + 4\beta\beta'\gamma\gamma' \cos B \cos C, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(\beta^2 + \beta'^2 - 2\beta\beta' \cos B)(\gamma^2 + \gamma'^2 - 2\gamma\gamma' \cos C;$$

quantité qui ne diffère pas du premier membre.

11. Construction du point R. — Quand les triangles ABC, A'B'C' sont *donnés*, le point R est *déterminé*, soit par les intersections des circonférences AB'C', BC'A', CA'B', soit par les intersections de transversales telles que EFG. Comme ce point R est *unique*, on peut choisir la direction des cordes parallèles AE, BF, CG, de manière à simplifier les constructions. Le système des cordes AE semble être le plus convenable, quand la direction dont il s'agit est celle de la tangente, en A, à la circonférence AB'C'. Alors, en effet, la corde AE se réduit au sommet A, et les cordes BF, CG sont perpendiculaires au rayon AL. Il suffit donc de tracer l'une ou l'autre de celles-ci, par exemple BF.

Quand on essaie de traduire, en formules, ces considérations géométriques, on est arrêté par la longueur et la complication des calculs, peu en rapport, semble-t-il, avec la faible importance du sujet. C'est ce que l'on reconnaîtra tout-à-l'heure.

12. Evaluation des distances AR, BR, CR. — D'après la Remarque II (3):

$$\frac{l}{x} = \frac{m}{y} = \frac{n}{z} = \theta \ ; \tag{15}$$

θ représentant

$$\frac{1}{2 \sin \mathrm{AB'R}} .$$

On a

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos \varphi \ , \tag{16}$$

ou

$$a^2\theta^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \varphi \ . \tag{17}$$

Si, dans le second membre, on remplaçait m, n et $\cos \varphi$ par leurs valeurs (6) et (11), θ serait connu, mais sous une forme extrêmement compliquée. Au lieu de suivre cette marche, qui semble naturelle, nous allons tirer, de l'équation (17), la valeur de $\cos \varphi$; nous en déduirons $\cos \eta$ et $\cos \zeta$; après quoi nous substituerons ces trois quantités dans la relation, *connue*,

$$1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \eta - \cos^2 \zeta + 2 \cos \varphi \cos \eta \cos \zeta = 0 \ . \tag{18}$$

13. Développement du calcul.

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{m^2 + n^2 - a^2\theta^2}{2mn} \ , \\ \cos \eta &= \frac{n^2 + l^2 - b^2\theta^2}{2nl} \ , \\ \cos \zeta &= \frac{l^2 + m^2 - c^2\theta^2}{2lm} \ . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Donc, par l'égalité (18):

$$-4l^2m^2n^2+l^2(a^2\theta^2-m^2-n^2)^2+m^2(b^2\theta^2-n^2-l^2)^2+n^2(c^2\theta^2-l^2-m^2)^2$$
$$+(a^2\theta^2-m^2-n^2)(b^2\theta^2-n^2-l^2)(c^2\theta^2-l^2-m^2)=0\ ; \tag{20}$$

ou, pour abréger,

$$A\theta^6+B\theta^4+C\theta^2+D=0\ . \tag{21}$$

On a:

$$A=a^2b^2c^2\ ,\ B=a^4l^2+b^4m^2+c^4n^2$$
$$-b^2c^2(l^2+m^2)-c^2a^2(m^2+n^2)-a^2b^2(n^2+l^2)\ ,$$

$$C=-2a^2l^2(m^2+n^2)-2b^2m^2(n^2+l^2)-2c^2n^2(l^2+n^2)$$
$$+a^2(l^2+m^2)(l^2+n^2)+b^2(m^2+n^2)(m^2+l^2)+c^2(n^2+l^2)(n^2+l^2)\ ,$$

$$D=-4l^2m^2n^2+l^2(m^2+n^2)^2+m^2(n^2+l^2)^2+n^2(l^2+m^2)^2$$
$$-4(m^2+n^2)(n^2+l^2)(l^2+m^2)\ .$$

En simplifiant, on trouve:

$$B=-\Sigma(b^2+c^2-a^2)a^2b^2\ , \tag{22}$$
$$C=\Sigma(l^2-m^2)(l^2-n^2)a^2\ , \tag{23}$$
$$D=0\ . \tag{24}$$

L'équation (21) est donc réductible à

$$A\theta^4+B\theta^2+C=0\ . \tag{25}$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned}B^2-4AC&=\Sigma(b^2+c^2-a^2)^2a^4l^4\\&+2\Sigma(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)a^2b^2l^2m^2\\&-4a^2b^2c^2\Sigma(l^2-m^2)(l^2-n^2)a^2\ .\end{aligned} \tag{26}$$

1°. Dans le second membre, le coefficient de C^4 est:

$$a^4(b^2+c^2-a^2)^2-4a^4b^2c^2=a^4[(b^2+a^2)^2-4b^2c^2]=-16a^4T^2\ .$$

2°. Le coefficient de l^2m^2 est

$$2(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)a^2b^2+4a^4b^2c^2+4b^4c^2a^2-4c^4a^2b^2$$
$$=2a^2b^2[(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)+2a^2c^2+2b^2c^2-2c^4]$$
$$=2a^2b^2[-c^4-(a^2-b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2]$$
$$=2a^2b^2[-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2]=32\,a^2b^2\,T^2\,.$$

Ainsi

$$B^2-4AC=1bT^2[-a^4l^4-b^4m^4-c^4n^4+2b^2c^2m^2n^2+2c^2a^2n^2l^2+2a^2b^2l^2m^2]\,. \tag{27}$$

Mais

$$al=Ra'\;; \tag{5}$$

donc

$$B^2-4AC-16T^2R^4[-a'^4-b'^4-c'^4+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2+2a'^2b'^2]\,,$$

ou

$$B^24-AC=16^2R^4T^2T'^2\,. \tag{28}$$

3°. L'équation (25) donne, au moyen de ces expressions:

$$\theta^2=\frac{\Sigma(b^2+c^2-a^2)a'^2\pm16TT'}{2a^2b^2c^2}R^2\,. \tag{26}$$

14. Suite. — Le dénominateur égale 32 R^2T^2. De plus, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{T'}{T}=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha'\beta'\gamma'}{abc}\,,\ * \tag{27}$$

* En effet:

$$\frac{\overline{\overline{AB'C'}}}{T}=\frac{\alpha\alpha'}{bc}\,,\quad\frac{\overline{\overline{BC'A'}}}{T}=\frac{\beta\beta'}{ca}\,,\quad\frac{\overline{\overline{CA'B}}}{T'}=\frac{\gamma\gamma'}{ab}\,;$$

donc

$$\frac{T-T'}{T}=\frac{\alpha\alpha'}{bc}+\frac{\beta\beta'}{ca}+\frac{\gamma\gamma'}{ab}\,,$$

ou

$$\frac{T'}{T}=1-\frac{\alpha\alpha'}{bc}-\frac{\beta\beta'}{ca}-\frac{\gamma\gamma'}{ab}$$

$$=\frac{(\beta'+\gamma)(\gamma'+\alpha)(\alpha'+\beta)-(\beta'+\gamma)\alpha\alpha'-(\gamma+\alpha)\beta\beta'-(\alpha'+\beta)\gamma\gamma'}{abc}\,;$$

etc.

Par conséquent,

$$\theta^2 = \frac{\Sigma (b^2 + c^2 - a^2) a'^2}{32T^2} \pm \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}{2abc}. \qquad (28)$$

15. Remarque. Le second terme doit être pris avec le signe —. Effectivement, supposons

$$\theta^2 = \frac{\Sigma (b^2 + c^2 - a^2) a'^2}{32T^2} + \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}{2abc},$$

puis

$$a = b = c, \quad a' = b' = c' = \frac{a}{2}; \quad \alpha = \beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{a}{2}.$$

Le triangle ABC étant équilatéral, $16T^2 = 3a^4$; donc

$$\theta^2 = \frac{3a^4}{24a^4} + \frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{4}, \quad \text{ou } \theta = \frac{1}{2} = \frac{l}{a}.$$

Ainsi, dans le triangle isoscèle ALR, on aurait AR = 2AL; ce qui est impossible. En conséquence, nous écrirons:

$$\theta^2 = \frac{\Sigma (b^2 + c^2 - a^2) a'^2}{32T^2} - \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma'}{2abc}, \qquad (29)$$

$$\theta^2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \qquad (30)$$

16. Valeurs de u^2, v^2, w^2. Par les formules (15):

$$x^2 = \frac{l^2}{\theta^2}.$$

Mais

$$\frac{1}{\theta^2} =$$

$$\frac{2A}{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}} = \frac{2A(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})}{B^2 - (B^2 - 4AC)},$$

ou

$$\frac{1}{\theta^2} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}. \qquad (16)$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}\,l^2\,, \\ v^2 &= \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}\,m^2\,, \\ w^2 &= \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2C}\,n^2\,. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

17. Remarque. Nous avons trouvé, ci-dessus,

$$a' = 2l \sin A\,. \qquad (1)$$

De même, dans la figure 3:

$$v = 2m \sin BA'R\,, \qquad w = 2n \sin CA'R\,.$$

Par suite, à cause de l'égalité des *sinus*,

$$\frac{v}{w} = \frac{m}{n} = \frac{b' \sin C}{c' \sin B}\,,$$

ou

$$\frac{v}{w} = \frac{cb'}{bc'}\,, \qquad (18)$$

relation beaucoup plus simple que les formules (17), même si l'on remplace b' et c' par leurs valeurs, résultant de l'égalité (2).

Liége, 13 mai 1890.

E. CATALAN.