BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

E. CATALAN

Théorème de Staudt et Clausen

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 77-82.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_77_1>

MÉLANGES.

THÉORÈME DE STAUDT ET CLAUSEN;

PAR M. E. CATALAN.

I. — LEMMES PRÉLIMINAIRES.

I. *Si n est un nombre non premier, supérieur à 4, on a*

$$1.2.3\ldots(n-2) = \mathfrak{M}n.$$

Soit $n = abc\ldots$, les facteurs a, b, c, ... étant *premiers entre eux, deux à deux*. Chacun de ces facteurs ne surpasse pas $\frac{n}{2}$; donc il se rencontre dans la suite $2, 3, \ldots, (n-2)$. Par conséquent, le produit $1.2.3\ldots(n-2)$ est divisible par $abc\ldots$,

II. *Si n est un nombre premier,*

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)}{1.2\ldots(k-1)} = \mathfrak{M}\,n \mp k,$$

selon que k est pair ou impair.

Si k est *pair*,

$$(n-2)(n-3)\ldots(n-k) + 1.2.3\ldots(k-1)\,k = \mathfrak{M}\,n.$$

Chacune des parties du premier membre est divisible par $2.3\ldots(k-1)$. De plus, *ce produit est premier avec n.* Donc

$$\frac{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)}{1.2\ldots(k-1)} + k = \mathfrak{M}\,n.$$

Même démonstration si k est *impair.*

III. *n étant un nombre premier, impair, et p étant un nombre entier moindre que $n-1$, on a*

$$S_{p,n-1} = 1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p = \mathfrak{M}\,n \quad (^1).$$

IV. *Si n est un nombre premier, impair, on a*

$$S_{n-1,\,n-1} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} = \mathfrak{M}\,n - 1.$$

D'après le théorème de Fermat, chacune des puissances $n-1$ est un multiple de n, augmenté de l'unité; donc

$$S_{n-1,\,n-1} = \mathfrak{M}\,n + (n-1) = \mathfrak{M}\,n - 1.$$

V. (Corollaire des lemmes III et IV.) *n étant un nombre premier, impair, la somme $S_{p,n-1}$ est un multiple de n, diminué de l'unité, ou un multiple de n, selon que $n-1$ divise ou ne divise pas l'exposant p.*

VI. *Les nombres de Bernoulli sont donnés par chacune des*

---

(1) Ce curieux théorème, presque évident, a été démontré par M. Lionnet (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. I, 1843). J'ignore à qui on le doit.

deux formules :

$$\text{(A)}\quad B_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Delta(1^q) + \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) - \ldots \pm \frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) \mp \ldots - \frac{1}{q+2}\Delta^q(1^q),$$

$$\text{(B)}\quad \left\{ \begin{aligned} B_q &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\varphi(1,q) + \frac{1.2}{4}\varphi(2,q) - \ldots \\ &\pm \frac{1.2.3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2,q) \mp \ldots \\ &- \frac{1.2\ldots q}{q+2}\varphi(q,q), \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles q est impair (¹).

II. — Théorème de Staudt et Clausen.

Soient n, n', n'', ... les nombres premiers, impairs, tels que $n-1$, $n'-1$, $n''-1$, .. divisent $q+1$. Le $q^{\text{ième}}$ Nombre de Bernoulli, B_q, *est donné par la formule*

$$\text{(C)}\qquad -B_q = E_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \ldots,$$

dans laquelle E_q *est un entier, positif ou négatif.*

Démonstration. — Il s'agit d'examiner quelles sont, dans la formule (A), les *fractions réductibles à des nombres entiers.*

$$1^\circ \qquad \frac{1}{4}\Delta^2(1^q) = \frac{1}{4}(3^q - 2.2^q + 1^q).$$

q étant *impair*, $3^q = \mathfrak{M}4 - 1$. Donc la quantité entre parenthèses est un multiple de 4; et, en conséquence,

$$\frac{1}{4}\Delta^2(1^q) = \textit{entier}.$$

(¹) *Sur les différences de* 1^p, *et sur le calcul des Nombres de Bernoulli* (*Mélanges mathématiques; Annali di Matematica,* 1859). Dans cette Note, les *nombres entiers* $\varphi(1, q)$, $\varphi(2, q)$, ... sont designés par B_q, C_q, ...

2° *Si n est un nombre composé, supérieur à 4,*

$$\frac{1.2.3\ldots(n-2)}{n}\varphi(n-2, q) = \textit{entier};$$

d'après le lemme I.

3° *Soit n premier, impair.*

On a

$$(\mathrm{D})\quad \begin{cases} \Delta^{n-2}(1^q) = (n-1)^q - \dfrac{n-2}{1}(n-2)^q \\ \qquad + \dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2}(n-3)^q - \ldots + \dfrac{n-2}{1}2^q - 1. \end{cases}$$

Par le lemme II, le second membre égale

$$\mathfrak{M}n + (n-1)^q + 2(n-2)^q + 3(n-3)^q + \ldots - 2.2^q - 1,$$

ou

$$\mathfrak{M}n - [(n-1)^{q+1} + (n-2)^{q+1} + \ldots + 2^{q+1} + 1^{q+1}].$$

Ainsi

$$(\mathrm{E})\qquad \Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}n - \mathrm{S}_{q+1,\,n-1}.$$

Il y a, maintenant, deux cas à distinguer :

Si $n-1$ ne divise pas $q+1$, le second membre est un multiple de n, puis

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \textit{entier}.$$

Si, au contraire, $n-1$ *divise* $q+1$, l'égalité (E) devient

$$\Delta^{n-2}(1^q) = \mathfrak{M}n - (\mathfrak{M}n - 1)$$

ou

$$\frac{1}{n}\Delta^{n-2}(1^q) = \text{entier} + \frac{1}{n}.$$

En résumé,

$$\mathrm{B}_q = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} - \frac{1}{n'''} - \ldots \pm \textit{entier},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(\mathrm{F})\qquad -\mathrm{B}_q = \mathrm{E}_q + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots$$

III. — Remarques.

1. Soit

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}+\frac{1}{n'''}+\ldots=\frac{N}{2.3.n'n''n'''}.$$

Cette fraction est *irréductible*. Donc la forme la *plus simple* des nombres de Bernoulli est

$$\text{(G)} \qquad B_q=\pm\frac{N_q}{2.3.n'n''n'''\ldots}.$$

2. *Tous les dénominateurs sont divisibles par* 6.

3. *Si* $n'=5$, $q=\mathfrak{M}4-1$: B_3, B_7, B_{11},... *contiennent, en dénominateur, le facteur* 5.

De même, B_5, B_{11}, B_{17},... *contiennent, en dénominateur, le facteur* 7; etc.

4. *Si* 4 *divise* $q+1$, *et que les nombres* $2n'-1$, $2n''-1$,... *soient composés*, B_q *et* B_{2q+1} *ont même partie fractionnaire*.

Par exemple,

$$-B_{15}=+6+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17},$$

$$-B_{31}=15116315766+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17};$$

donc

$$B_{15}-B_{31}=15116315760.$$

5. On sait que

$$\text{(H)} \qquad B_q=\pm\frac{P_q}{2(2^{q+1}-1)},$$

P_q étant un nombre *impair* (¹).

(¹) *Mélanges mathématiques*, p. 131.

La comparaison des égalités (G), (H) donne

$$N_q = P_q : \frac{2^{q+1}-1}{3.n'n''\ldots}.$$

Ainsi, *au moyen des nombres* P_q [dont le calcul n'exige que des additions et des multiplications ([1])], on peut déterminer le numérateur N_q. D'ailleurs, N_q est un diviseur de P_q.

6. Généralisation du lemme II :

$$C_{p+q,q} \pm C_{n-p-1,q} = \mathfrak{M}\, n \quad (- \text{ si } q \text{ est } \textit{pair}).$$

Par exemple,

$$\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4} - \frac{21.20.19.18}{1.2.3.4} = \mathfrak{M}\, 29.$$

([1]) A l'endroit cité, on trouve une formule qui revient à

$$\begin{aligned} P_q = \frac{q+1}{4}\Bigg[& P_{q-2} + \frac{(q-1)(q-2)}{3.4} P_3 P_{q-4} \\ & + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{3.4.5.6} P_5 P_{q-6} + \ldots \\ & + \frac{(q-1)(q-2)}{3.4} P_{q-4} P_3 + P_{q-2} \Bigg]. \end{aligned}$$

A cause de $P_1 = 1$, $P_3 = 1$, elle donne, successivement :

$$P_5 = 3,\quad P_7 = 17,\quad P_9 = 155,\quad P_{11} = 2073,$$

$$P_{13} = 38227,\quad P_{15} = 929569,\quad P_{17} = 28820619,\quad \ldots.$$

Par suite :

$$N_1 = 1,\quad N_3 = 1,\quad N_5 = 1,\quad N_7 = 1,\quad N_9 = 5,$$

$$N_{11} = 691,\quad N_{13} = 7,\quad N_{15} = 3617,\quad N_{17} = 43867,\quad \ldots,$$

puis

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_3 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{1}{42},\quad B_7 = -\frac{1}{30},$$

$$B_9 = \frac{5}{66},\quad B_{11} = -\frac{691}{2730},\quad B_{13} = \frac{7}{6},\quad B_{15} = -\frac{3617}{510},\quad B_{17} = \frac{43867}{798},\quad \ldots.$$

Si je ne me trompe, ce calcul est plus simple que celui qui consiste à déterminer, préalablement, les *parties entières* E_q.