Quadrature n° ?? (2016) 1-4

Une construction des nombres hyperréels

par Samuel NICOLAY*

Résumé.

Nous proposons ici une brève construction classique des nombres hyperréels à partir des nombres réels. Dans un soucis de pédagogie, nous omettons les détails les plus techniques. La présentation est divisée en deux parties. La première fait presqu'exclusivement appel à l'intuition, tandis que la seconde reprend les mêmes linéaments mais se veut plus rigoureuse.

I Introduction

Récemment, le concept de nombre hyperréel a été abordé dans ce journal [4]. L'auteur y soulignait les apports, notamment pédagogiques, que peuvent présenter de telles idées. Nous nous proposons ici d'introduire une manière accessible de construire de tels nombres.

Il est important de remarquer que les théories qui permettent l'introduction des nombres hyperréels ne sont pas triviales. Il aura fallu attendre trois cents ans pour que Abraham Robinson [8] propose un modèle justifiant l'existence de nombres non nuls plus petits que n'importe quelle quantité réelle strictement positive. À l'époque déjà, le recours à de tels procédés, systématique chez Leibniz, Bernoulli et Euler, suscita de violents débats. Ceux-ci furent clos par l'introduction, grâce à Bolzano, Cauchy et Weierstraß notamment, des techniques « $\varepsilon - \delta$ » et ainsi des notions de limite et de continuité [2].

Nous nous proposons ici d'introduire sommairement les nombres hyperréels via les nombres réels afin de permettre au plus grand nombre d'appréhender ces intéressantes notions. Nous avons délibérément choisi un chemin différent de celui pris par Robinson. L'approche de ce dernier repose sur la théorie des modèles (voir par exemple [6]), branche de la logique que tout un chacun n'a pas forcément envie d'acquérir en préambule.

On pourrait cependant me reprocher d'utiliser des notions typiques de la convergence, alors que c'est précisément ces principes que l'analyse non-standard tente d'éviter. Mon but n'est pas ici de permettre à des apprenants d'appréhender une nouvelle matière, mais plutôt de montrer comment celle-ci peut être rigoureusement justifiée. Ce texte s'adresse donc aux enseignants soucieux de connaître les fondements de la théorie. Pour une présentation moins technique, il conviendrait d'introduire les hyperréels de manière axiomatique, comme un prolongement du corps des nombres réels. Cette démarche est aisément compréhensible. Pédagogiquement, je ne connais personne qui tente d'introduire rigoureusement les nombres réels comme préambule de son cours d'analyse. On accepte en général l'existence d'une (unique) extension du corps des nombres rationnels jouissant des propriétés des nombres réels (e.g. la propriété de la borne supérieure). En première approche, il suffit de franchir une étape supplémentaire pour les nombres hyperréels.

Je m'excuse par avance des raccourcis que j'ai décidé d'emprunter au nom de la pédagogie. Mon objectif ici est de faire passer des idées de base ; le lecteur avide de détails pourra notamment consulter [7] et les références s'y trouvant.

II Un peu d'intuition...

Exposons d'abord les idées qui sous-tendent la théorie. Les principes donnés ici devraient déjà éclairer bon nombre de lecteurs.

II.1 Principes de base

En analyse non-standard, un nombre (hyperréel) α est assimilé à une suite de nombre réels $(x_j)_j$. Dans une

* S.Nicolay@ulg.ac.be

première approche, nous supposerons qu'un nombre hyperréel est une suite réelle : $\alpha = (x_j)_j$; la prochaine sous-section viendra modérer cette affirmation.

Cette idée permet d'étendre le corps des nombres réels. Sans déjà entrer dans des considérations algébriques, les nombres réels sont les nombres hyperréels représentés par des suites constantes : le nombre réel r est la suite $(x_j)_j$, avec $x_j = r$ pour tout indice j naturel. En pratique, on identifie le nombre réel et la suite constante, de sorte qu'un tel nombre hyperréel est toujours noté r. Ainsi, on peut directement envisager l'ensemble des nombres hyperréels comme une extension de la droite euclidienne.

Il existe bien entendu des nombres hyperréels qui ne sont pas des nombres réels. En particulier, un nombre infinitésimal positif est une suite strictement positive qui décroît vers zéro (sans que cela soit une restriction, nous ne considérons pas ici zéro comme un nombre infinitésimal) et un nombre infini positif est une suite positive qui converge vers l'infini. On définit bien entendu les nombres infinitésimaux et infinis négatifs à partir de suites négatives. Conceptuellement, un nombre infinitésimal est une quantité non nulle infiniment proche de zéro. Les nombres infinitésimaux et infinis ne sont pas uniques, mais nous aurons besoin de quelques précisions préliminaires pour le montrer.

L'addition se définit en sommant les éléments correspondants des suites : si α et β sont deux nombres hyperréels définis par les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ respectivement, on associe le nombre $\alpha+\beta$ à la suite $(x_j+y_j)_j$.

À partir de des nombres réels et des nombres hyperréels infinitésimaux, on peut construire d'autres nombres hyperréels. Par exemple, en additionnant une suite constante, définissant un nombre réel r, et une suite non nulle qui converge vers zéro, définissant un nombre infinitésimal, on obtient un nombre hyperréel β différent de r. On peut voir le nombre β comme étant infiniment proche de r sans être égal à ce dernier ; en particulier, β n'est pas un nombre réel.

II.2 Ordre total

Si le principe introduit est bien celui des nombres hyperréels, que nous avons muni de l'opération addition, cette approche est trop naïve que pour être viable. En effet, cette construction ne peut être munie d'un ordre total. Soit par exemple les deux nombres α et β définis par les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ respectivement, avec $x_j = (-1)^j$ et $y_j = (-1)^{j+1}$. Il n'est pas d'ordre trivial qui permette d'affirmer si l'une des relations $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ou $\alpha > \beta$ est vérifiée. Il convient de complexifier les choses afin d'obtenir un corps commutatif totalement ordonné.

Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser la notion de filtre (voir la sous-section III.1 pour une définition). Cette dernière a été introduite par Henri Cartan en 1937 et popularisée par Nicolas Bourbaki. Sans entrer dans les détails, disons qu'un filtre permet de généraliser la notion de limite, en rendant plus naturels les concepts de limites à gauche et à droite. À une époque, cette notion fut tellement populaire qu'on songea à l'introduire au niveau secondaire [3]. L'axiome du choix permet d'affirmer l'existence d'ultrafiltres, qui sont des filtres maximaux, i.e. contenus dans aucun autre filtre strictement plus grand.

En analyse non-standard, on utilise un ultrafiltre (sur l'ensemble des naturels) afin de choisir certains indices des suites. On voit ainsi apparaître une notion de type *presque partout*. Par exemple, pour comparer les nombres α et β définis plus hauts, on compare les suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ pour un certain nombre (infini) d'indices j seulement. Si on a $x_j < y_j$ presque partout, alors on pose $\alpha < \beta$. Il est possible de vérifier que l'on obtient ainsi un ordre total si l'on ne fait plus la distinction entre deux suites égales presque partout (en pratique, on quotiente l'ensemble des suites par la relation d'équivalence induite).

Comme attendu, la multiplication de deux nombres est obtenue en multipliant entre eux les éléments correspondants des deux suites définissant ces nombres. On montre aisément que l'on obtient de la sorte un corps commutatif totalement ordonné.

On peut alors construire de nouveaux nombres infinitésimaux à partir d'un nombre infinitésimal ε donné, puisqu'on a par exemple, si ε est positif,

$$\varepsilon < 2\varepsilon = \varepsilon + \varepsilon.$$

II.3 Représentation des nombres hyperréels finis

On peut montrer que tout nombre hyperréel fini (i.e. qui n'est pas associé à une suite qui converge vers l'infini) est la somme d'un nombre réel (représenté par une suite constante), et d'un nombre infinitésimal ou zéro.

Dès lors, si on omet les nombres hyperréels infinis, un moyen commode de représenter un nombres hyperréel α consiste en le recours aux couples (r,ε), où r représente le nombre réel infiniment proche de α et ε est le nombre infinitésimal $\varepsilon = \alpha - r$. Ainsi, $\alpha = (r,\varepsilon)$ signifie que l'on a $\alpha = r + \varepsilon$.

Pour un nombre réel r fixé, l'ensemble des nombres hyperréels du type (r,ε) est appelé la halo de r.

II.4 Utilité de l'analyse non-standard

L'utilisation des nombres hyperréels permet d'éviter le recours explicite aux suites. Ainsi, une fonction f

est continue en le réel x (appartenant à l'intérieur du domaine de définition de f) si $f(x+\varepsilon) = f(x)$ pour tout nombre infinitésimal ε. Rigoureusement, il faudrait parler de l'équivalent de f défini sur les nombres hyperréels ; cela ne pose cependant aucun problème. Du point de vue des nombres réels, si l'on considère les nombres hyperréels $x+\varepsilon$ comme étant des suites réelles qui convergent vers x, la continuité de f en x revient simplement à imposer que les suites $f(x+\varepsilon)$ convergent vers $f(x)$, ce qui n'est autre que le critère dit « par les suites ».

De la même manière, f est dérivable en x (appartenant à l'intérieur du domaine de définition de f) si pour tout nombre infinitésimal ε,

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$$

est un nombre qui ne dépend pas de ε. Cette quantité est appelée la dérivée de f en x. Ici aussi, l'interprétation en termes de suites conduit à la définition usuelle. Géométriquement, il est naturel de poser $dx = \varepsilon$ et $dy = f(x+dx) - f(x)$, de sorte que la dérivée s'écrive dy/dx. On trouve ainsi une justification rigoureuse à une notation qui prête presque systématiquement à confusion chez l'apprenant : il ne faut pas confondre les nombres $\Delta y/\Delta x$ (rapport de deux nombres réels) et dy/dx (rapport de deux nombres infinitésimaux) [5].

L'analyse non-standard permet aussi de raccourcir de manière conséquente certaines démonstrations, en topologie notamment. Par exemple, le théorème de Robinson donne une caractérisation reposant sur l'analyse non-standard des ensembles compacts de l'espace euclidien.

II.5 Les nombres hyperréels, pas si intuitifs après tout

Si l'utilisation de quantités non nulles plus petites que n'importe quel nombre réel strictement positif a toujours fait débat, c'est que les nombres ainsi obtenus perdent des propriétés que les grecs anciens tenaient comme évidentes. Au niveau didactique, il s'agit d'un obstacle épistémologique des plus conséquents [9].

La plus remarquable de ces propriétés qui ne subsistent pas lors de la transition des nombres réels aux nombres hyperréels est la propriété suivante, valide sur la droite euclidienne. Si r et s sont deux nombres réels strictement positifs, il existe toujours un nombre naturel n (et donc une infinité) tel que $r < ns$. Si l'on considère le corps des hyperréels, cette propriété n'est plus vérifiée. Si ε est un nombre infinitésimal, $n\varepsilon$, qui est la somme de n nombres infinitésimaux tous égaux à ε, est encore un nombre infinitésimal (en fait, les nombres infinitésimaux avec zéro forment un idéal). Ainsi, si r est un nombre réel strictement positif, on aura toujours $r > n\varepsilon$.

Illustrons l'importance de ce concept en soulignant qu'il est souvent appliqué implicitement. Si un nombre réel positif ou nul s est plus petit que n'importe quel nombre, alors s est égal à zéro. De fait, il est en particulier plus petit que $1/j$ pour n'importe quel nombre naturel non nul j. Ceci implique $js < 1$ pour tout j, ce qui est impossible si s n'est pas nul. Dans le cadre des nombres hyperréels, si s est un nombre infinitésimal, l'égalité $js < 1$ est satisfaite pour tout j.

Enfin, il faut aussi reconnaître que l'apport de l'analyse non-standard sur le plan théorique reste à ce jour fort limité (le théorème de transfert établit, d'une certaine manière, que tout théorème obtenu grâce aux nombres hyperréels peut être obtenu sans avoir recours à l'analyse non-standard) . Il faut donc voir les nombres hyperréels comme un raccourci pédagogique ou théorique que chacun est libre d'emprunter ou non.

III Plus rigoureusement...

Nous donnons ici une approche rigoureuse des idées qui ont été exposées ci-dessus.

III.1 Filtres et ultrafiltres

Étant donné un ensemble non vide E, un filtre sur E est une partie $\mathscr{U}$ de l'ensemble des parties de E telle que

- $\mathscr{U}$ n'est pas vide,
- l'ensemble vide n'appartient pas à $\mathscr{U}$,
- si deux ensembles appartiennent à $\mathscr{U}$, alors leur intersection également,
- si un ensemble A appartient à $\mathscr{U}$, tout ensemble de E contenant A appartient également à $\mathscr{U}$.

On peut remarquer facilement qu'un filtre sur E ne peut contenir un ensemble et son complémentaire dans E. De plus, étant donné deux parties disjointes A et B de E, si A appartient à $\mathscr{U}$, on a nécessairement que B n'appartient pas à $\mathscr{U}$.

Si l'ensemble E n'est pas fini, l'ensemble des parties de E dont le complémentaire est fini,

$$\{A \subset E : E \setminus A \text{ est fini}\},$$

est appelé le filtre de Fréchet de E.

Un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur E est filtre sur E qui est maximal : si $\mathscr{U}'$ est un filtre sur E contenant $\mathscr{U}$, alors $\mathscr{U}' = \mathscr{U}$. On peut montrer, en utilisant l'axiome du choix, que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre.

III.2 L'ensemble des nombres hyperréels

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant le filtre de Fréchet sur l'ensemble des nombres naturels privé de zéro. Nous considérerons que deux suites réelles $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ sont équivalentes si l'ensemble des indices j pour lesquels on a $x_j = y_j$ appartient à $\mathcal{U}$. Dans ce cas, on peut considérer que les suites sont égales pour presque tous les indices j (vis-à-vis d'une certaine mesure finiment additive). Il est trivial de vérifier que nous avons introduit une relation d'équivalence. L'ensemble des nombres hyperréels est l'ensemble des suites réelles quotienté par cette relation d'équivalence. Autrement dit, c'est l'ensemble des suites réelles où l'on ne fait plus la distinction entre deux suites égales presque partout.

En définissant naturellement la somme et le produit de deux suites $(x_j)_j$ et $(y_j)_j$ par $(x_j + y_j)_j$ et $(x_j y_j)_j$ respectivement, on vérifie sans difficulté que l'ensemble des nombres hyperréels muni de ces opérations est un corps commutatif. Enfin, on peut aussi introduire un ordre total compatible avec ces opérations : on pose $(x_j)_j \leq (y_j)_j$ si l'ensemble des indices j tels que $x_j \leq y_j$ est un élément de l'ultrafiltre.

Le cardinal de l'ensemble des nombres hyperréels est celui de l'ensemble des nombres réels. Les nombres réels peuvent être considérés comme des nombres hyperréels par le biais des suites constantes : si r est un nombre réel, la suite $(x_j)_j$ telle que $x_j = r$ pour (presque) tout indice j représente le nombre r.

III.3 Nombres infinitésimaux et partie standard

Un nombre hyperréel strictement positif α est un nombre infinitésimal s'il est non nul et si on a $\alpha < 1/j$ pour tout nombre naturel non nul j. Un nombre hyperréel négatif est un nombre infinitésimal si son opposé est un nombre infinitésimal. On retrouve la notion de quantité infinitésimale. Un nombre hyperréel est fini s'il est minoré et majoré par des nombres réels.

Un nombre hyperréel α est dit standard s'il existe un nombre réel r tel que $\alpha = r$ (plus précisément α doit être équivalent à la suite constante $(x_j)_j$ avec $x_j = r$ pour tout indice j). On peut montrer que si α est un nombre hyperréel fini non-standard, il existe un unique nombre réel r et un unique nombre infinitésimal ε tels que $\alpha = r + \varepsilon$. Le nombre r est appelé la partie standard de α. Ainsi, la connaissance des nombres hyperréels finis se résume-t-elle grossièrement à la connaissance des nombres réels et des nombres infinitésimaux.

III.4 Le principe de transfert

Le principe de transfert résulte du théorème fondamental des ultraproduits (ou théorème de Łoś) [1]. Ce principe stipule simplement qu'une formule (du premier ordre) est vraie pour les nombres hyperréels si et seulement si elle est vérifiée presque partout pour les nombres réels. Vaguement parlant, à une affirmation concernant les nombres hyperréels correspond une affirmation équivalente pour les nombres réels et inversement.

Ainsi, un résultat obtenu à l'aide de l'analyse non-standard aura nécessairement son pendant pour les nombres réels. Inversement, ce principe stipule également que l'analyse non-standard ne fournira pas de résultats fondamental qui ne pourrait être obtenu directement avec les nombres réels.

Références

[1] J.L. Bell et A.B. Slomson. *Models and Ultraproducts : An Introduction*. Dover Publications, 2006.

[2] C.B. Boyer. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. Dover, 1949.

[3] H. Cartan. Notes sur l'introduction éventuelle des filtres dans l'enseignement du second degré. *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, 302 :23–24., 1976.

[4] M.-P. Falissard. Une approche intuitive des nombres hyperréels *Quadrature*, 101 :4pp., 2016.

[5] P. Job. *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactique*. Thèse de l'Université de Liège, 2011.

[6] D. Marker. *Model Theory : An Introduction*. Springer, 2002.

[7] S. Nicolay. *Les nombres : Construction basée sur la théorie des ensembles en vue d'ériger les fondements de l'analyse*. Hermann, 2015.

[8] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. Princeton University Press, 1996.

[9] F. Spagnolo. La modélisation dans la recherche en didactiques des mathématiques : les obstacles épistémologiques. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 26 :337-380, 2006.