

CHAPITRE 5

RENTES VIAGERES (= ASSURANCES EN CAS DE VIE)

Sommaire

1. Définition
2. Rentes viagères ordinaires
3. Rentes viagères temporaires
4. Fractionnement de la rente

5. Rentes viagères

1. Définition
2. Rentes viagères ordinaires
3. Rentes viagères temporaires
4. Fractionnement de la rente

Définition

Rente viagère : suite d'annuités payées à une personne, tant que celle-ci est en vie.

Ces annuités peuvent être

- a. variables ou constantes (de montant 1)
- b. annuelles, mensuelles, ...
- c. ordinaires ou temporaires (maximum n annuités)
- d. immédiates ou différées
- e. anticipatives ou à terme échu

La prime donnant droit à ces rentes viagères est une prime unique

5. Rentes viagères

1. Définition

2. Rentes viagères ordinaires

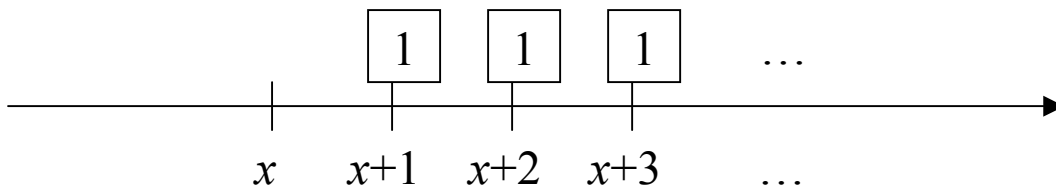
- RVO immédiate et à terme échu
- RVO immédiate et anticipative
- RVO différée et à terme échu
- RVO différée et anticipative

3. Rentes viagères temporaires

4. Fractionnement de la rente

RVO immédiate et à terme échu

Prime : a_x = valeur actuelle des versements de la rente



Première approche

Pour la population fictive, égalité des valeurs actuelles de

i. prime : $l_x \cdot a_x$

ii. rente : $l_{x+1} \cdot v + l_{x+2} \cdot v^2 + l_{x+3} \cdot v^3 + \dots$

$$(\times v^x) \quad l_x \cdot v^x \cdot a_x = l_{x+1} \cdot v^{x+1} + l_{x+2} \cdot v^{x+2} + l_{x+3} \cdot v^{x+3} + \dots$$

$$D_x \cdot a_x = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots$$

Symbole de commutation : $N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$

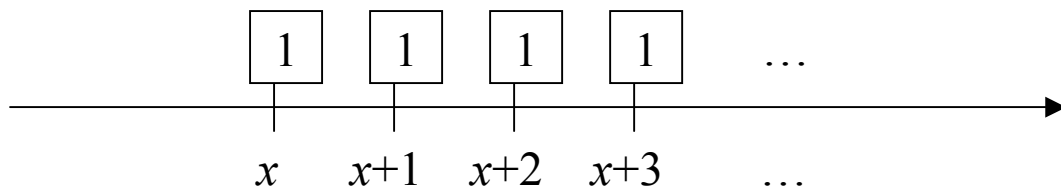
$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Deuxième approche

a_x = somme de capitaux différés :

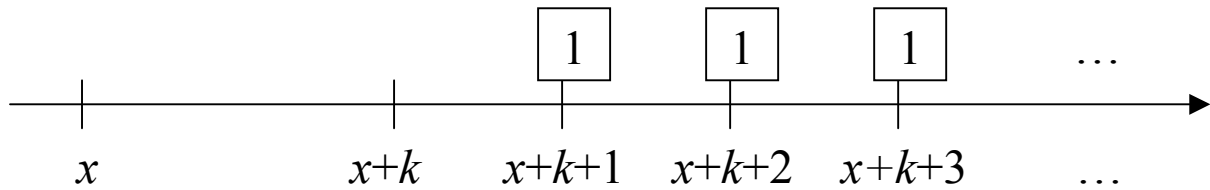
$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \dots = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

RVO immédiate et anticipative



$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= 1 + a_x \\ &= 1 + \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+2} + \dots}{D_x} \\ &= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+2} + \dots}{D_x} \\ &= \frac{N_x}{D_x}\end{aligned}$$

RVO différée et à terme échu



Première approche : actualisation en 2 temps

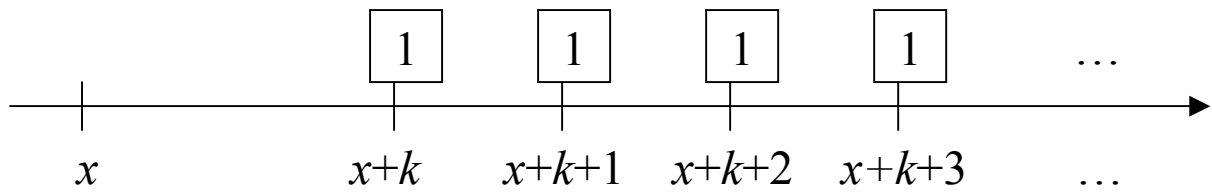
- en $(x + k)$: a_{x+k}
- en x : capital différé

$$\begin{aligned}
 {}_k|a_x &= a_{x+k} \cdot {}_kE_x \\
 &= \frac{N_{x+k+1}}{D_{x+k}} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \\
 &= \frac{N_{x+k+1}}{D_x}
 \end{aligned}$$

Deuxième approche

$$\begin{aligned}
 {}_k|a_x &= {}_{k+1}E_x + {}_{k+2}E_x + {}_{k+3}E_x + \dots \\
 &= \frac{D_{x+k+1}}{D_x} + \frac{D_{x+k+2}}{D_x} + \frac{D_{x+k+3}}{D_x} + \dots \\
 &= \frac{N_{x+k+1}}{D_x}
 \end{aligned}$$

RVO différée et anticipative



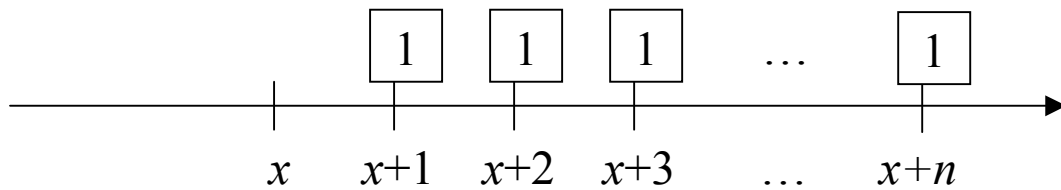
$${}_k|\ddot{a}_x = {}_{k-1}|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

5. Rentes viagères

1. Définition
2. Rentes viagères ordinaires
3. Rentes viagères temporaires
 - RVT immédiate et à terme échu
 - RVT immédiate et anticipative
 - RVT différée et à terme échu
 - RVT différée et anticipative
4. Fractionnement de la rente

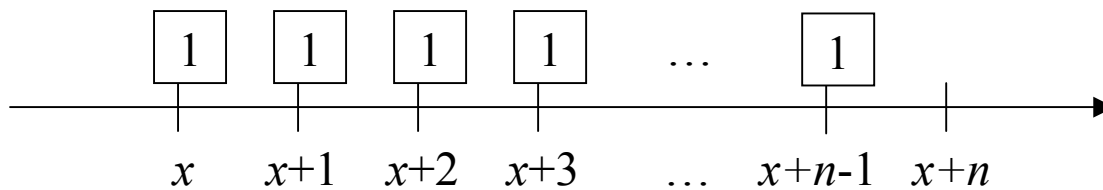
RVT immédiate et à terme échu

RVT : rente versée pendant un délai donné ou jusqu'au décès s'il survient avant (notation pour la prime : $a_{x,\overline{n}|}$)



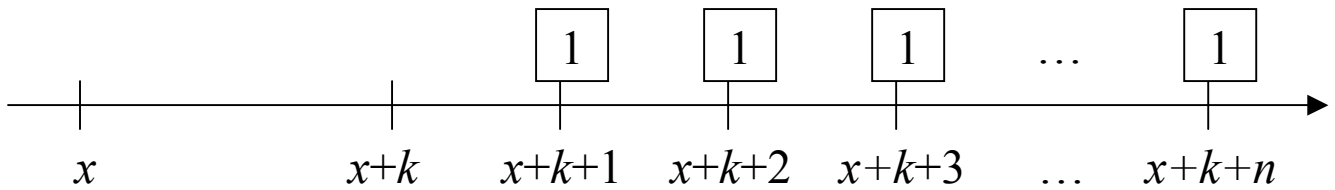
$$\begin{aligned} a_{x,\overline{n}|} &= a_x - n|a_x \\ &= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

RVT immédiate et anticipative



$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + a_{x:\overline{n-1}|} \\ &= 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x} \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}\end{aligned}$$

RVT différée et à terme échu



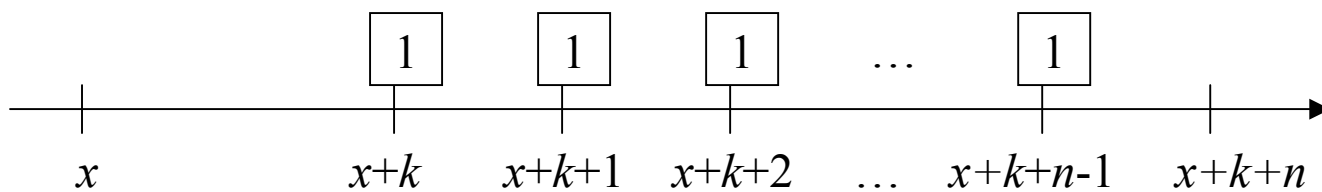
Première approche

$$\begin{aligned} {}_k|a_{x,\overline{n}|} &= {}_k|a_x - {}_{k+n}|a_x \\ &= \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

Deuxième approche : actualisation en 2 temps

$$\begin{aligned} {}_k|a_{x,\overline{n}|} &= a_{x+k,\overline{n}|} \cdot {}_kE_x \\ &= \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_{x+k}} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \\ &= \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \end{aligned}$$

RVT différée et anticipative



$$\begin{aligned}
 {}_k|\ddot{a}_{x,\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x+k,\overline{n}|} \cdot {}_kE_x \\
 &= \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_{x+k}} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \\
 &= \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}
 \end{aligned}$$

5. Rentes viagères

1. Définition
2. Rentes viagères ordinaires
3. Rentes viagères temporaires
4. Fractionnement de la rente
 - Introduction
 - RVO immédiate et à terme échu
 - RVO immédiate et anticipative
 - RVO différée
 - RVT immédiate
 - RVT différée

Introduction

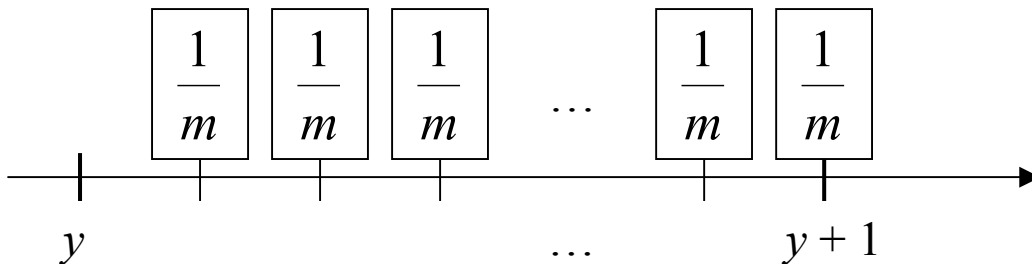
En pratique, les rentes sont généralement versées mensuellement (achat d'un bien en rente viagère, pension de retraite, ...)

→ nécessité de fractionner le montant 1 UM en m parties égales à $1/m$ versées m fois sur l'année

Méthode : hypothèse de linéarité locale

= les versements intermédiaires sont répartis par moitiés sur les échéances entières les plus proches

RVO immédiate et à terme échu



Chacun des $(m - 1)$ versements intermédiaires est réparti ($1/2m$ et $1/2m$) sur les échéances y et $(y + 1)$

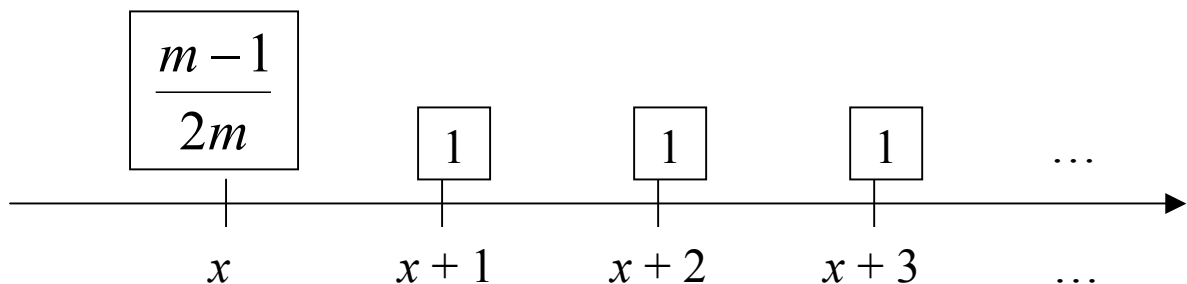
L'échéance x « reçoit » $\frac{m-1}{2m}$

Les échéances suivantes « reçoivent » $2 \times \frac{m-1}{2m}$

Or, elles « avaient » déjà $\frac{1}{m}$

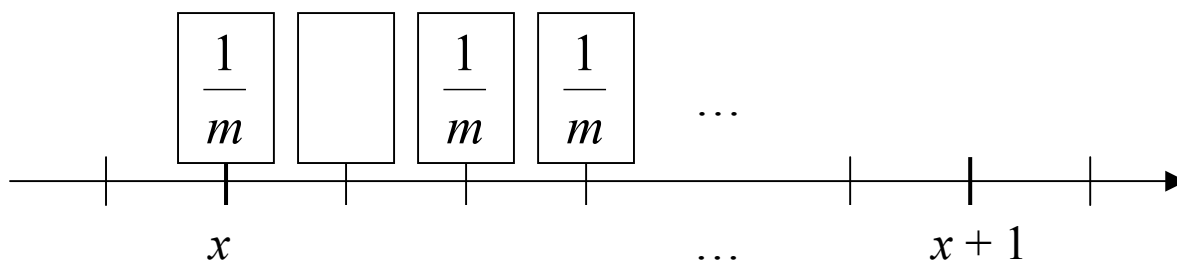
Elles « ont » donc au total :

$$2 \cdot \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} = 1$$



$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

RVO immédiate et anticipative



$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m} + a_x^{(m)} \\ &= \left(a_x + \frac{m-1}{2m} \right) + \frac{1}{m} \\ &= (\ddot{a}_x - 1) + \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{m} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{2m - (m-1) - 2}{2m} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\end{aligned}$$

RVO différée

Pour une personne d'âge x ,

$$V_{act}(\text{RVO diff}_k) = V_{act}(\text{RVO imm}) \cdot {}_kE_x$$

A terme échu

$$\begin{aligned} {}_k|a_x^{(m)} &= a_x^{(m)} \cdot {}_kE_x \\ &= a_x \cdot {}_kE_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_kE_x \\ &= {}_k|a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \end{aligned}$$

Anticipative

De la même manière,

$${}_k|\ddot{a}_x^{(m)} = {}_k|\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

RVT immédiate

= différence de deux RVO, dont une différée

A terme échu

$$\begin{aligned} a_{x,\overline{n}|}^{(m)} &= a_x^{(m)} - {}_n|a_x^{(m)} \\ &= \left(a_x + \frac{m-1}{2m} \right) - \left({}_n|a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\ &= (a_x - {}_n|a_x) + \frac{m-1}{2m} \cdot \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \\ &= a_{x,\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \end{aligned}$$

Anticipative

De la même manière,

$$\ddot{a}_{x,\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{x,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)$$

RVT différée

= différence de deux RVO, toutes deux différées

A terme échu

$$\begin{aligned} {}_k|a_{x,\overline{n}|}^{(m)} &= {}_k|a_x^{(m)} - {}_{k+n}|a_x^{(m)} \\ &= \left({}_k|a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+k}}{D_x} \right) - \left({}_{k+n}|a_x + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{D_{x+k+n}}{D_x} \right) \\ &= \left({}_k|a_x - {}_{k+n}|a_x \right) + \frac{m-1}{2m} \cdot \left(\frac{D_{x+k}}{D_x} - \frac{D_{x+k+n}}{D_x} \right) \\ &= {}_k|a_{x,\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m} \cdot \left(\frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right) \end{aligned}$$

Anticipative

De la même manière,

$${}_k|\ddot{a}_{x,\overline{n}|}^{(m)} = {}_k|\ddot{a}_{x,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m} \cdot \left(\frac{D_{x+k} - D_{x+k+n}}{D_x} \right)$$